

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

1

ROČNÍK 50, 1971-1972, ZÁŘÍ



**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:
doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:
Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:
Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 g, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Helleroová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

**ROČNÍK 50
ZÁŘÍ 1971**

1

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

Doc. Ota Setzer: Do jubilejního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních . . .	1
Dr. E. Moravusová, dr. O. Říha: O jednom užití matic při řízení provozu počítačem	3
F. Kuřina: Množiny přímek	8
E. Scholtz: Bohrov model atomu .	18
Z. Brykner: Luminiscence .	23
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Sedm základních jednotek SI	28
Dr. M. Široká, dr. J. Široký: Povrchové teploty hvězd	30
Naše soutěž	35
Matematická olympiáda	37
Dr. J. Horský: Profesor V. A. Fok	42
J. Bílek: Zapomenutý astronom František Doutlik	44
Ze zahraničních časopisů .	45
Matematické zábavy	46
Recenze	48
Dr. J. Paylíček: Slovníček česko-fran- couzský	3. a 4. str. obálky



Do jubilejního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních

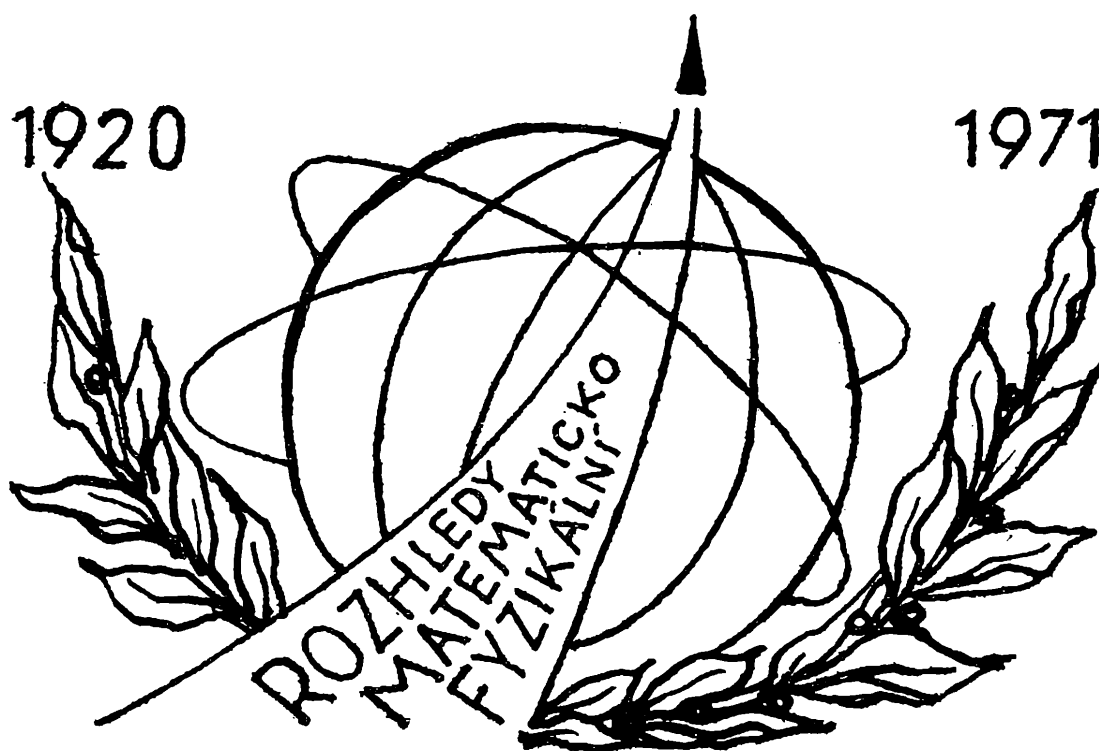
Doc. OTA SETZER, ČVUT Praha

Ještě nedozněly celostátní a při každé příležitosti všude vzpomínané květnové oslavy významného padesátiletí, když přichází náš časopis se svými padesátinami; vstupujeme totiž do jeho 50. ročníku. Při této příležitosti si připomeňme některé důležité události z jeho historie.

Jednota českých a později československých matematiků a fyziků vydávala již od sedmdesátých let minulého století pro své členy i jiné zájemce „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky“, který měl zvláštní přílohu určenou studujícím tehdejších středních škol. Roku 1920 se z této přílohy vytvořil samostatný časopis, zvaný „Rozhledy matematicko-přírodovědecké“, který si vytkl za svůj cíl, otiskovat obsahem i formou přístupné články z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Při reorganizaci Jednoty byly Rozhledy od roku 1952 vydávány jako „Populárně vědecký časopis pro matematiku, astronomii, fyziku a chemii“, který však přes řadu halasných hesel a příslibů nových redaktorů, nominovaných Českoslo-

venskou akademií věd, přestal v roce 1955 vycházet pro poměrně malý zájem čtenářů, jimž byl věnován.

Po roční přestávce byl časopis opět uveden v život v roce 1956 na podnět tehdejšího ministra školství a kultury, předsedy JČMF, dr. Fr. Kahudy. Od té doby nese název „Rozhledy matematicko-fyzikální“. Z těžkých začátků se podařilo redakci, vedené doc. dr. Miroslavem Menšíkem (†1968), postupně získávat nové a nové čtenáře, hlavně mezi středoškolskou mládeží. Hodně k tomu přispěly i bohaté zkušenosti členů redakční rady, z nichž někteří v ní setrvali dodnes. Pěkného ocenění se dostalo Rozhledům v roce 1962, kdy jim v rámci stoletých oslav JČMF udělil prezident republiky státní vyznamenání „Za zásluhy o výstavbu“.



V duchu této pokrokové tradice pokračují Rozhledy i nadále ve všech svých rubrikách.

V matematice budeme vedle klasických partií otiskovat převážně články s moderní tematikou, v deskriptivní geometrii přihlédneme k jejímu upotřebení v technických oborech, fyzika poskytne náměty z četných nově se tvořících odvětví, astronomové nám přislíbili příspěvky z tajů vesmíru a jeho dobývání.

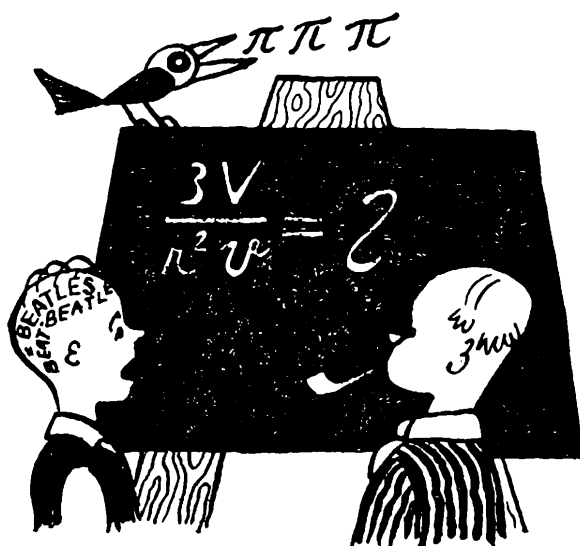
Na rozdíl od učebnic chceme podle možnosti volit pro své články formu přiměřenou věku a vědomostem většiny čtenářů, neboť příliš strohé vyjadřování dovede studenta často odradit od dalšího čtení, popř. i od studia celé disciplíny. Lásku k matematice musíme pěstovat již od dětství, proto i nejmladší čtenáři zde naleznou svůj koutek, v němž se zábavnou formou seznámí se základními

problémy našich předmětů. Závodivost středoškoláků podporujeme tradiční soutěží o ceny v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky.

Nevtíravý musí být i výběr a rozsah článků, neboť naši kritičtí čtenáři z řad středoškoláků dovedou vystihnout to, co se do našeho odborného žakovského časopisu – v tom směru nejstaršího ve střední Evropě – hodí a co tam nepatří.

Je samozřejmé, že nezapomeneme seznámit své čtenáře s vědeckými úspěchy svých přátel ze socialistického tábora a občas též otiskneme některé ukázky (hlavně úlohy) ze zahraničních časopisů.

Doufám, že se nám podaří dobře uskutečnit navrhovaný program a tím splnit politicko-výchovné poslání časopisu.



MATEMATIKA

0 jednom užití matic při řízení provozu počítačem

RNDr. E. MORAVUSOVÁ, RNDr. O. ŘÍHA, PED. F UJEP BRNO

V předchozím ročníku Rozhledů jste se v člancích Kódování, Násobení matic a ještě dalších člancích seznámili s maticemi a jejich násobením. V tomto ročníku bude seriál o maticích pokračovat. V několika člancích se znovu setkáte s maticemi a jejich užitím. Poznatky z článků, uvedených v minulém ročníku, budeme považovat za známé. Zejména budeme předpokládat, že znáte pojem matice, že matice umíte násobit a že víte, že násobení matic je asociativní, ale není komutativní.

Při provozu mlýna je obilí, případně semletá mouka, uskladněno v několika násypných koších. Tři z těchto košů označme **A**, **B**, **C**. Množství v těchto koších (může být menší než jejich objem) označme pořadě a , b , c . Během provozu se jednotlivé násypné koše vyprazdňují nebo může být obsah jednoho přemístěn do druhého apod. Například může být obsah koše **B** přemístěn do koše **C** — tuto operaci označme P , nebo může být obsah jednotlivých košů vzájemně zaměněn tak, že obsah **A** přejde do **B**, **B** do **C** a **C** do **A** — tuto operaci označme Z . Vyprázdnění koše **A** označíme V .¹⁾ Další operace nebudeme prozatím uvažovat.

Údaje o okamžitém stavu, tj. o množství obilí (mouky) v jednotlivých násypných koších, můžeme přehledně zapsat takto:

násypný koš	množství obilí
A	$\left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right)$
B	
C	

Tím je ke každému stavu násypných košů jednoznačně přiřazena *matice* typu $(3; 1)$. Po provedení některé operace se může stav násypných košů změnit. Například po provedení operace V se přejde od stavu

$$\mathbf{S}_1 = \left(\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right),$$

ke stavu

$$\mathbf{S}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ b \\ c \end{array} \right),$$

neboť operace V znamená vyprázdnění koše **A**. Po provedení operace P se přejde od stavu $\mathbf{S}_1$ ke stavu

$$\mathbf{S}_3 = \left(\begin{array}{c} a \\ 0 \\ b+c \end{array} \right)$$

neboť operace P znamená přemístění obsahu koše **B** do koše **C** a po provedení operace Z se přejde od $\mathbf{S}_1$ k

¹⁾ Označení operací jsme pro snadnější zapamatování zvolili podle začátečních písmen: P - přemístěn, Z - zaměněn, V - vyprázdněn.

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

Po provedení dvou operací za sebou, nejprve V a potom P (což zapíšeme VP), přejdeme od stavu $\mathbf{S}_1$ ke stavu

$$\mathbf{S}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b + c \end{pmatrix},$$

neboť operace V mění $\mathbf{S}_1$ na $\mathbf{S}_2$ a operace P mění $\mathbf{S}_2$ na $\mathbf{S}_5$.

Obdobně určíme, že po provedení operací ZPV (v tomto pořadí) přejdeme od $\mathbf{S}_1$ k

$$\mathbf{S}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + b \end{pmatrix}$$

Úvahu, kterou jsme k tomuto závěru dospěli můžeme přehledně zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{Z} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ a + b \end{pmatrix} \xrightarrow{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + b \end{pmatrix}$$

Operace PZV změní výchozí stav $\mathbf{S}_1$ na

$$\mathbf{S}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b + c \end{pmatrix} \xrightarrow{Z} \begin{pmatrix} b + c \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{V} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\mathbf{S}_6 \neq \mathbf{S}_7$, záleží při provádění operací na jejich pořadí.

Máme-li určit stav násypných košů po provedení operací $ZZVZP$ vycházíme-li od stavu $\mathbf{S}_1$, zjistíme konečný stav úsudkem, který můžeme přehledně zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{Z} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{Z} \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{V} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{Z} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že provoz mlýna je řízen počítačem, který sice může provádět početní výkony jako sčítání, násobení atd. obrovskou rychlostí, který ale neumí provádět úsudky. Aby počítač mohl určit, jaké množství obilí je v násypných koších po provedení libovolného počtu operací, přiřadíme ke každé operaci matici M typu $(3; 3)$ tak, aby platilo

$$M \cdot S_i = S_j,$$

kde S_i je matice typu $(3; 1)$ přiřazená výchozímu stavu a S_j matice přiřazená ke stavu, který dostaneme z S_i po provedení uvažované operace.

Operaci V je přiřazena matice

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

operaci P je přiřazena matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b + c \end{pmatrix}$$

a operaci Z je přiřazena matice

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

protože

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Tím, že jsme jednotlivým operacím přiřadili matice popsaným způso-

bem, jsme dosáhli toho, že můžeme např. říci, že po provedení operace P přejdeme od stavu S_1 ke stavu S_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = S_3.$$

Nyní vidíte, proč bylo výhodné ke každému stavu násypných košů vzájemně jednoznačně přiřadit matici typu $(3; 1)$.

Je-li počáteční stav S_1 , může počítač určit výsledný stav X po provedení operací VP *násobením matic*, neboť po provedení operace V přejdeme od S_1 ke stavu Y

$$Y = VS_1$$

a po provedení operace P od stavu Y ke stavu X

$$X = PY,$$

$$X = P[VS_1].$$

Protože násobení matic je *asociativní*, můžeme pravou stranu této rovnosti upravit a dostaneme:

$$X = [PV]S_1$$

Povšimněte si, že matice při výpočtu musíme násobit v *opačném pořadí* než je pořadí prováděných operací, tj. matice

$$PV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je přiřazena operaci, která vznikne složením operací VP ;

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b + c \end{pmatrix}$$

Obdobným způsobem počítač určí, že po provedení operací $ZZVZP$ dostaneme z výchozího stavu S_1 stav

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Tímto způsobem počítač dojde ke stejnému výsledku, ke kterému jsme došli úsudkem. Protože počítač provádí početní výkony obrovskou rychlostí, dostane výsledek mnohem rychleji, i když neumí provádět úsudky.

Úloha 1.

Kromě operací V , P , Z uvažujte ještě operaci T : do koše B je přisypáno přesně tolik, kolik je právě v koši A . Určete matici, přiřazenou této operaci a popište, jak počítač určí stav po provedení operací $ZTVPT$; za výchozí považujte stav S_1 .

Úloha 2.

Kromě násypných košů A , B , C a operací V , Z , P , T uvažujte ještě koš D a operaci O : z koše B je přemístěna polovina jeho obsahu do koše D . Určete matice přiřazené jednotlivým operacím a popište, jak může počítač určit stav po provedení operací $ZVTOP$. Za výchozí stav považujte

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Výsledky:

Úloha 1.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + b + c \end{pmatrix}$$

Úloha 2.

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a/2 + b \\ a/2 + d \end{pmatrix}$$

Množiny přímek

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

Tento článek volně navazuje na článek Množiny v geometrii [1] a jeho četba předpokládá znalost poznatků o množinách aspoň v rozsahu článků [2] a [3].

Každý, kdo se seznamuje s pojmem množina, si vytváří představu množiny jako souhrnu jistých objektů, které nazýváme prvky množiny. Podle toho, které objekty chápeme jako prvky, dostáváme různé množiny.

Příklad 1. Škola S má 10 tříd $T_1, T_2, \dots, T_{10}$, do kterých chodí 300 žáků $a_1, a_2, \dots, a_{300}$. Vyučuje se ve dvou budovách B_1, B_2 , škola vlastní školní pozemek P . Na škole je zaměstnáno 20 zaměstnanců $Z_1, Z_2, \dots, Z_{20}$.

Pro školního lékaře znamená škola S množinu

$$\mathbf{M}_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{300}\}$$

všech žáků, kteří ji navštěvují, neboť udělat lékařskou prohlídku školy znamená prohlédnout zmíněných 300 žáků.

Rozvrhář školy uvažuje o škole jako o souhrnu všech jejích tříd:

$$\mathbf{M}_2 = \{T_1, T_2, \dots, T_{10}\}$$

Pro inventarizační komisi národního výboru znamená škola S množinu tří objektů, z nichž se skládá majetek školy:

$$\mathbf{M}_3 = \{B_1, B_2, P\}$$

Pro odborové orgány představuje škola S množinu dvaceti odborářů:

$$\mathbf{M}_4 = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{20}\}.$$

Ředitel školy chápe školu všestranněji:

$$\mathbf{M}_5 = \{a_1, a_2, \dots, a_{300}, T_1, T_2, \dots, T_{10}, B_1, B_2, P, Z_1, Z_2, \dots, Z_{20}\}$$

Uvažte, v jakém vztahu jsou množiny $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$.

Měli byste dojít k závěru, že tyto množiny jsou disjunktní. Zdá-li se vám tento výsledek podivný, zamyslete se znovu nad významem slov množina, prvek množiny, průnik dvou množin.

V úvahách o „množinovém pohledu“ na jistou reálnou situaci bychom mohli pokračovat. Uvedené příklady však snad stačí k tomu, abychom si uvědomili, že chápání objektu jako jisté množiny znamená zpřesnění pohledu na objekt a samozřejmě také jistý stupeň abstrakce. Připomeňme již jen, že např. pro školního inspektora znamená uvažovaná škola jen jeden prvek z množiny škol, které má ve své péči.

Skutečnost, že jistý objekt můžeme chápat jako množinu různým způsobem, nebo dokonce jako prvek jiné množiny, je důležitá a vyskytuje se v matematice zcela běžně. V článku [1] jsme uvažovali o geometrických útvech jako o podmnožinách množiny ϱ všech bodů dané roviny. Důležitými podmnožinami množiny ϱ byly přímky. Právě tak jako je účelné pro rozvrháře chápat třídu jako celek, nikoliv jako množinu jejích 32 žáků, ukazuje se mnohdy účelné chápat jako celek i přímky. Proto budeme v dalším vycházet ze základní množiny π , která je množinou všech přímek uvažované roviny. Prvky množiny π jsou přímky a budeme je značit malými písmeny $a, b, c, p, q, \dots$. Označíme-li ϱ množinu všech bodů uvažované roviny, platí

$$\pi \cap \varrho = \emptyset$$

neboť neexistuje přímka (prvek množiny π), která by byla bodem (prvkem množiny ϱ).

Chápeme-li přímku P jako množinu bodů roviny δ , lze incidenci bodu A a přímky P snadno vysvětlit: jde o to, že bod A je jedním z prvků množiny P a tuto skutečnost zapisujeme, jak známo, takto

$$A \in P$$

Chápeme-li přímku p jako prvek $p \in \pi$, pak incidence bodu a přímky má zcela jiný charakter. Pro ty čtenáře, kteří mají základní znalosti o relacích, připomínám, že nyní je incidence binární relací mezi disjunktními množinami δ a π . Ten čtenář, který nezná pojem binární relace, vystačí pro četbu článku s touto představou. Incidence přímky p a bodu A je abstrakcí skutečnosti, kterou vidíme kolem sebe od dětských let na příkladech typu: vlaštovka sedí na drátě, město leží na řece, korálek je navlečen na niti atp. Zde nás samozřejmě vůbec nenapadne uvažovat o tom, že „vlaštovka je prvkem drátu“ či něco podobného. Pro incidenci bodu A a přímky p bychom ovšem neměli při tomto pojetí užívat symbol $\in$.

Důležité je, abychom si uvědomili, že pak jsou zcela bez smyslu výrazy

$$p \cap q, \quad p \cup q$$

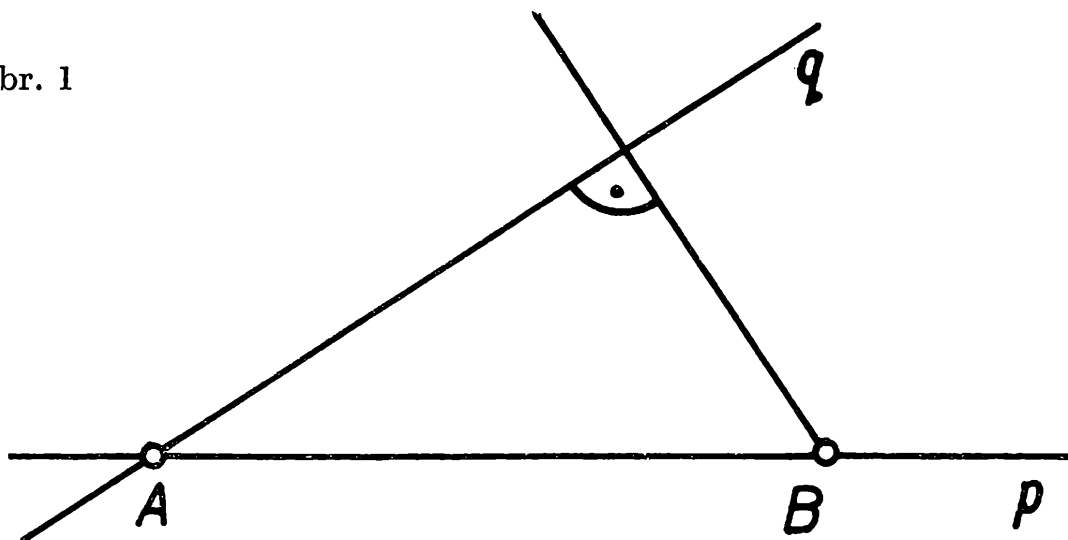
neboť p, q nejsou symboly množin, ale prvků. Má ovšem smysl uvažovat např. o tom, zda dvě přímky jsou různé, rovnoběžné či různoběžné.

Zavedme nyní dvě důležité podmnožiny množiny π .

Příklad 2. V rovině jsou dány dva různé body A, B . Vyšetřete množinu X všech přímek množiny π , které jsou stejně vzdáleny od bodu A jako od bodu B .

Předpokládejme, že množina X je neprázdná. Pak existuje přímka $q \in \pi$, která je stejně vzdálena od bodů A, B . Přímka q nemůže procházet jedním z bodů A, B , a druhým ne (obr. 1).

Obr. 1



Má přímka $p = AB$ stejnou vzdálenost od bodu z obou A, B ?

Rozšíříme-li známou definici vzdálenosti bodu od přímky i na případ nulové vzdálenosti bodu od přímky, která jím prochází, pak platí

$$p \in X.$$

Existuje-li tedy přímka $q \in \mathbf{X}$, která je různá od přímky p , nemůže procházet žádným z bodů A, B . Mohou nastat dva případy:

- a) body A, B leží v téže polorovině s hranicí q ,
- b) body A, B jsou oddělovány přímkou q .

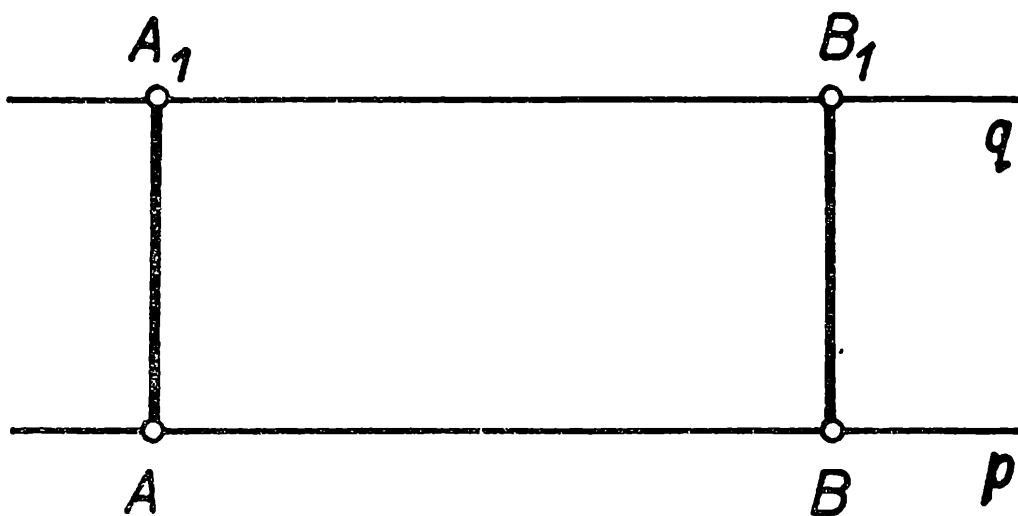
Označíme-li A_1, B_1 paty kolmic sestrojených pořadě z bodů A, B na přímku q , pak z předpokladu

$$q \in \mathbf{X}$$

plyne, že pro velikost úseček platí

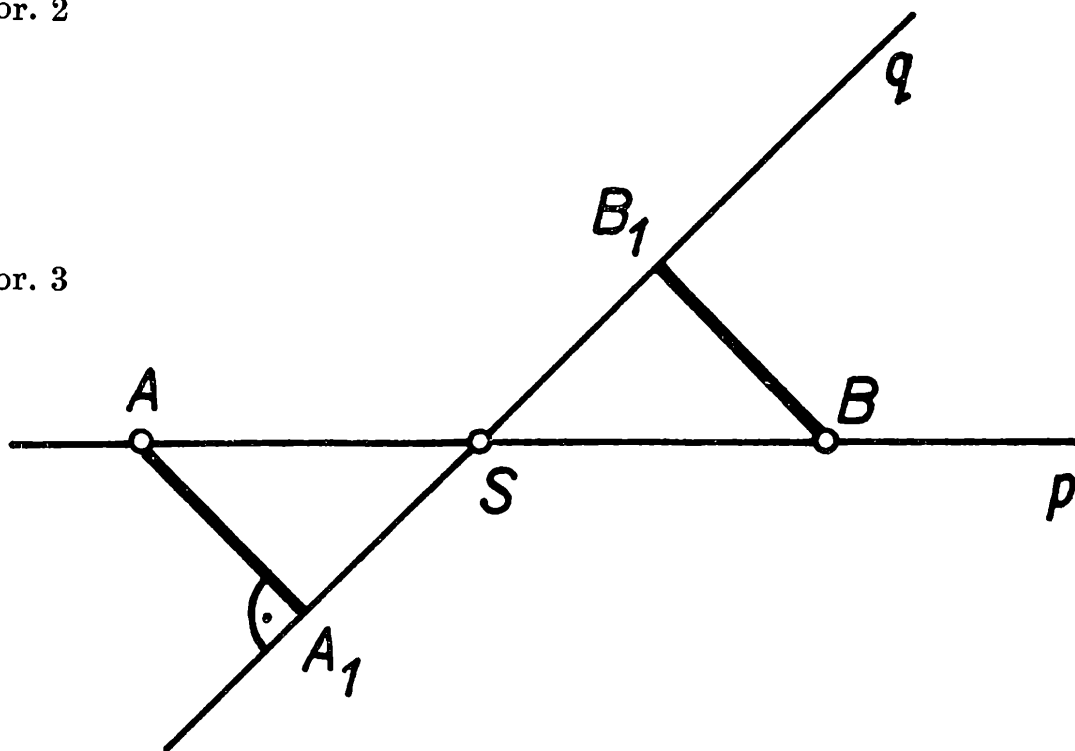
$$AA_1 = BB_1 ..$$

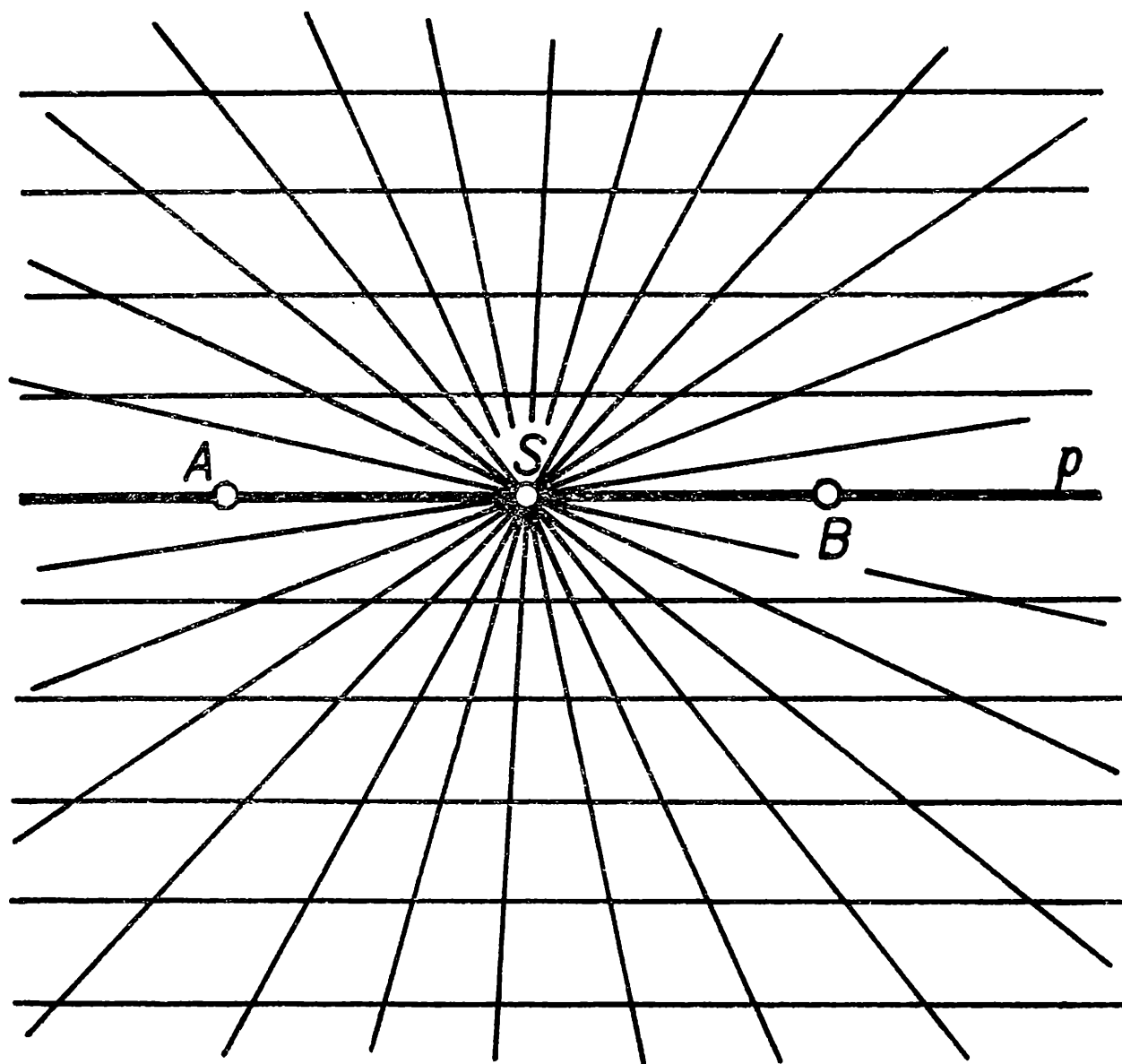
To ovšem znamená, že v prvním případě je $p \parallel q$ (obr. 2), v druhém případě pak musí přímka q procházet středem S úsečky AB ($\triangle AA_1S \cong \triangle BB_1S$ podle věty (*usu*), obr. 3).



Obr. 2

Obr. 3





Obr. 4

Dokázali jsme tedy:

Má-li přímka q stejnou vzdálenost od bodů A, B , pak je rovnoběžná s přímkou $p = AB$ nebo prochází středem S úsečky AB .

Je otázka, zda každá přímka rovnoběžná s p nebo procházející středem S má stejnou vzdálenost od bodu A jako od bodu B .

Zdůvodnění kladné odpovědi přenechávám čtenáři.

Množina X se skládá ze všech přímek množiny π , které jsou rovnoběžné s přímkou $p = AB$ nebo které procházejí středem S úsečky AB (obr. 4).

Množina všech prvků množiny π , které jsou rovnoběžné s danou přímkou p , se nazývá osnova (p).

Množina všech prvků množiny π , které procházejí daným bodem S , se nazývá svazek (S).

Výsledek řešení příkladu 2 lze tedy psát ve tvaru

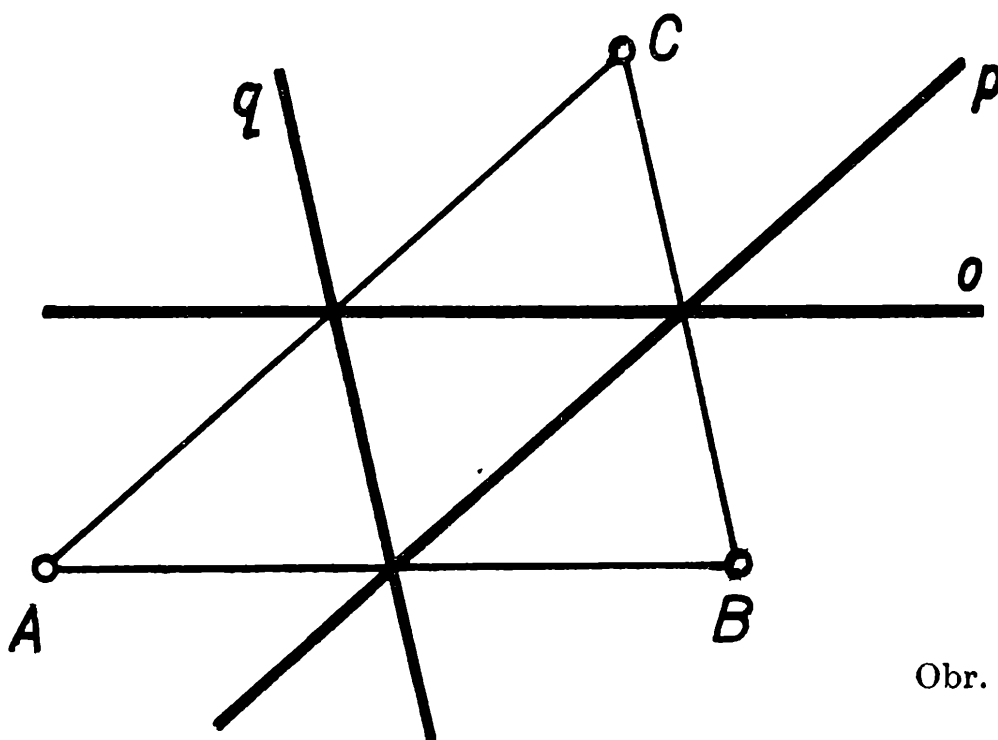
$$\mathbf{X} = (p) \cup (S).$$

Uvedme dále několik úloh, jejichž řešení přenecháváme čtenářům. Pro kontrolu formuluji jen výsledky.

Příklad 3. Vyšetřete množinu všech přímek, které mají stejnou vzdálenost od tří různých bodů A, B, C .

Leží-li body A, B, C v téže přímce p , je hledanou množinou osnova (p) . Jsou-li body A, B, C nekolineární, má hledaná množina jen tři prvky o, p, q (obr. 5). Jsou to přímky, které spojují středy stran trojúhelníka $\triangle ABC$.

Příklad 3 lze přirozeně rozšířit na větší počet daných bodů. Pokuste se o to.



Obr. 5

Příklad 4. Jsou dány dva různé body A, B . Vyšetřete množinu $(A) \cap (B)$. Výsledek znázorněte množinovým diagramem (podle zásad vyložených v článku [1]).

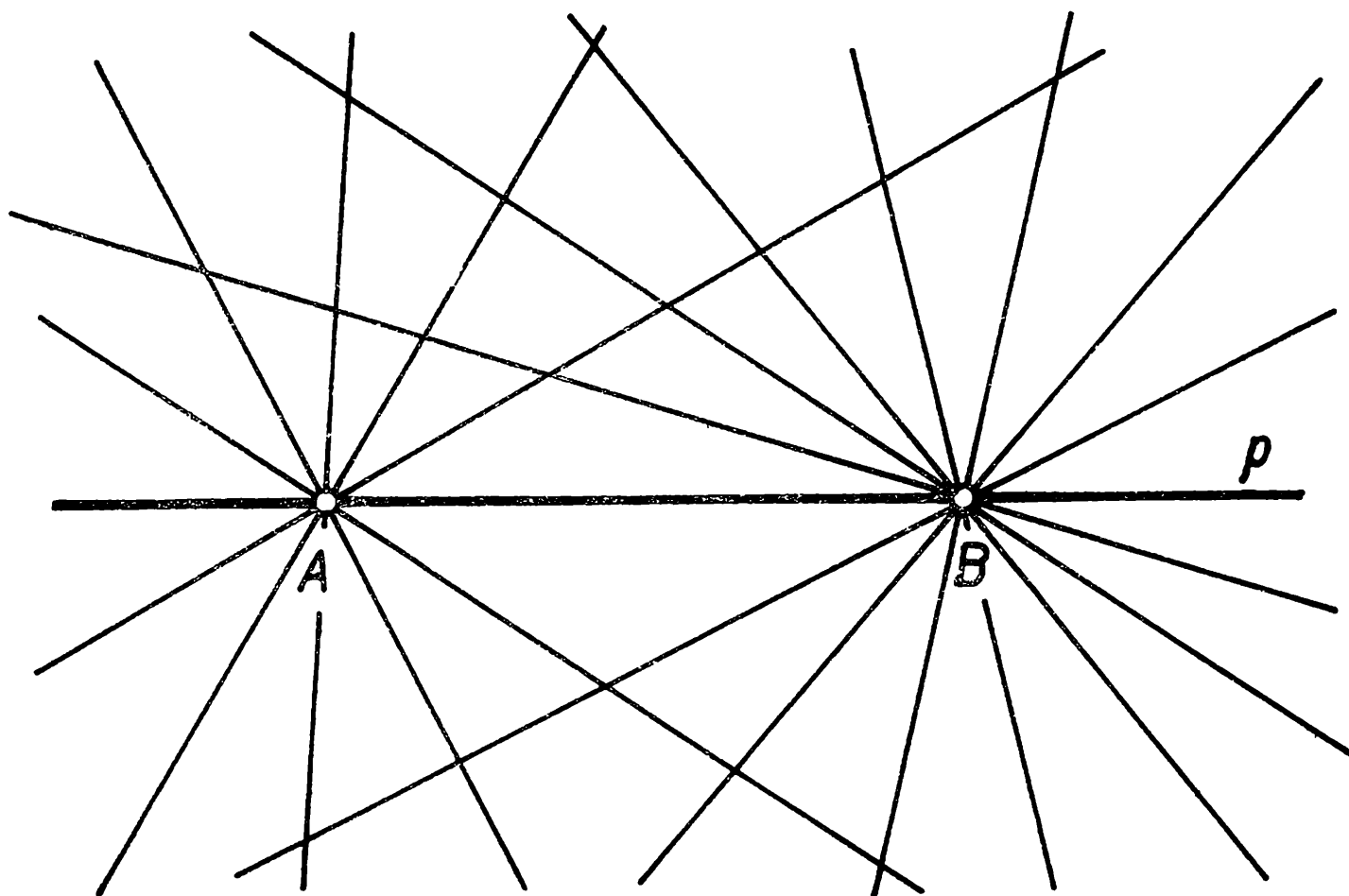
Řešením je množina $\{AB\} = (A) \cap (B)$ (obr. 6a, b). Výsledek příkladu (4) bývá obvykle v geometrii formulován jako axiom:

Libovolnými dvěma různými body prochází jediná přímka.

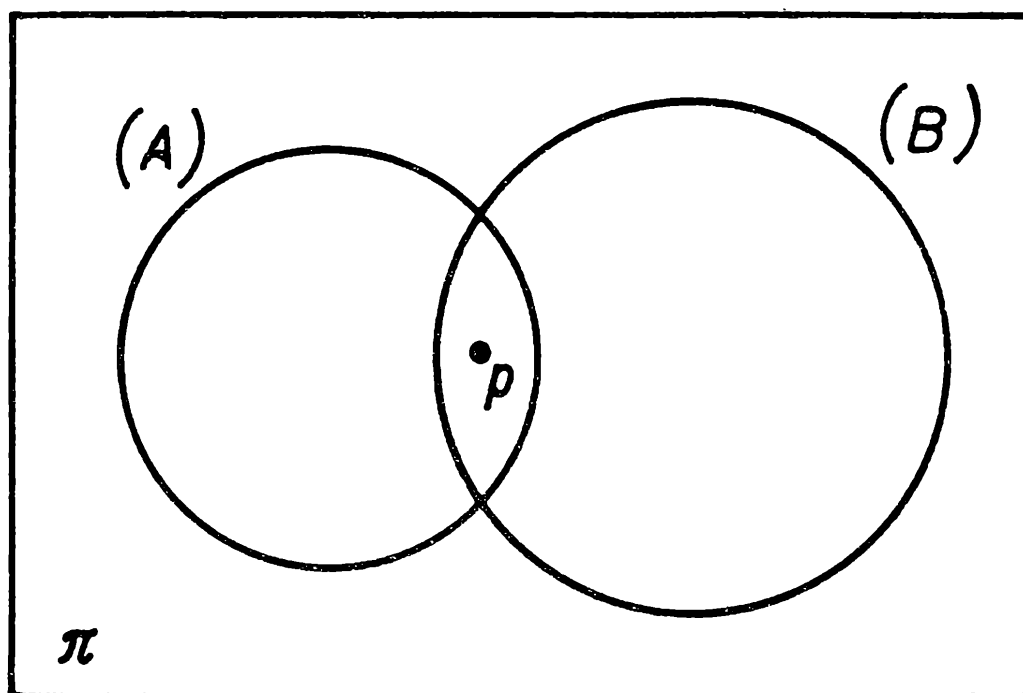
Příklad 5. Je dána přímka a a bod A . Vyšetřete množinu $(A) \cap (a)$ a ilustруйте množinovým diagramem.

Podle obr. 7 a dostáváme $(A) \cap (a) = b$. Tento výsledek je tzv. V Eukleidův postulát:

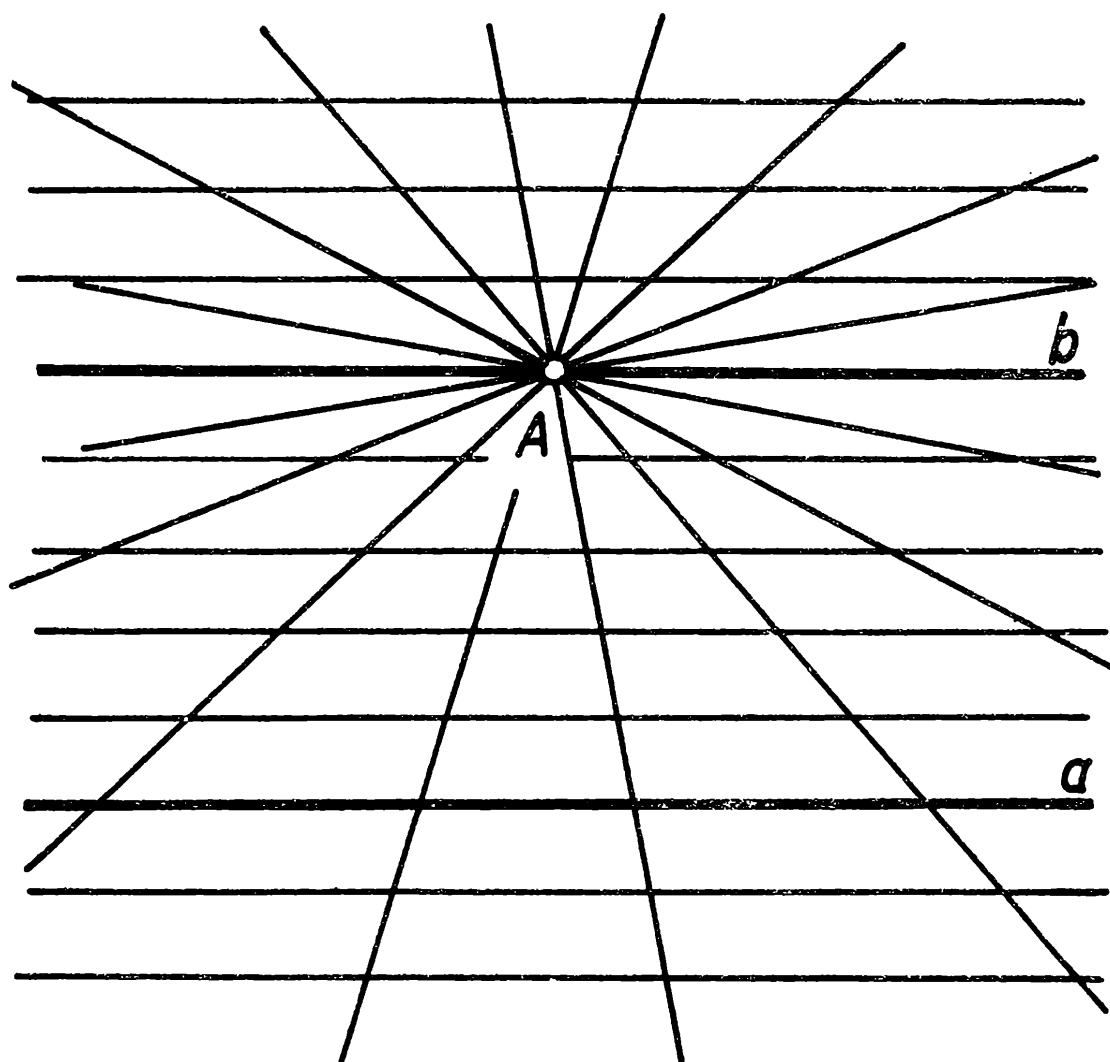
Libovolným bodem A lze vést k dané přímce a jedinou přímku rovnoběžnou.



Obr. 6a

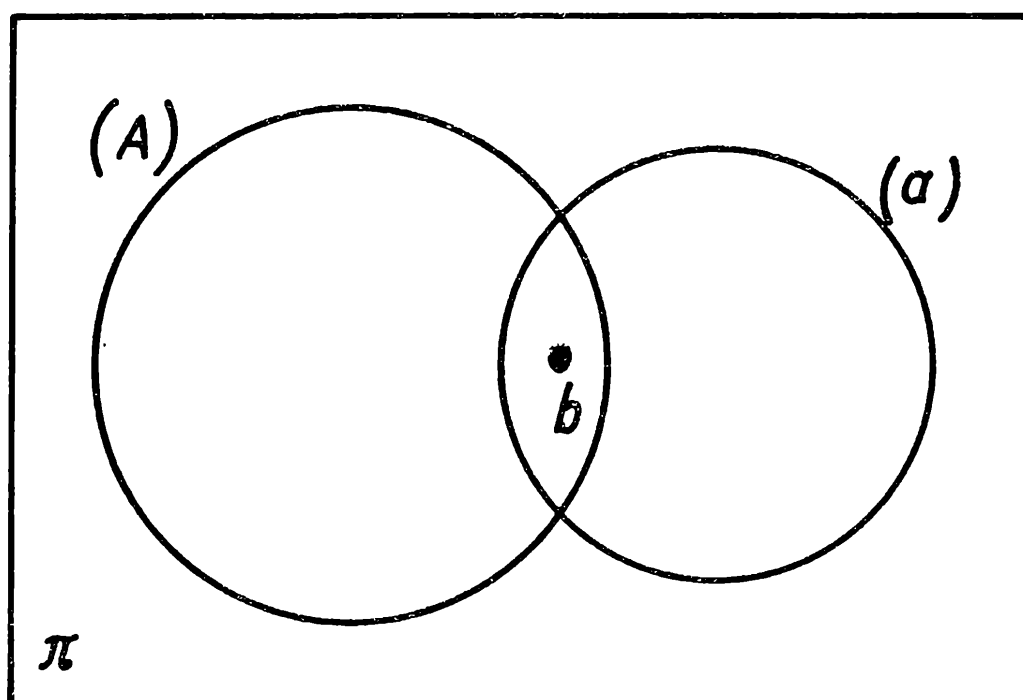


Obr. 6b



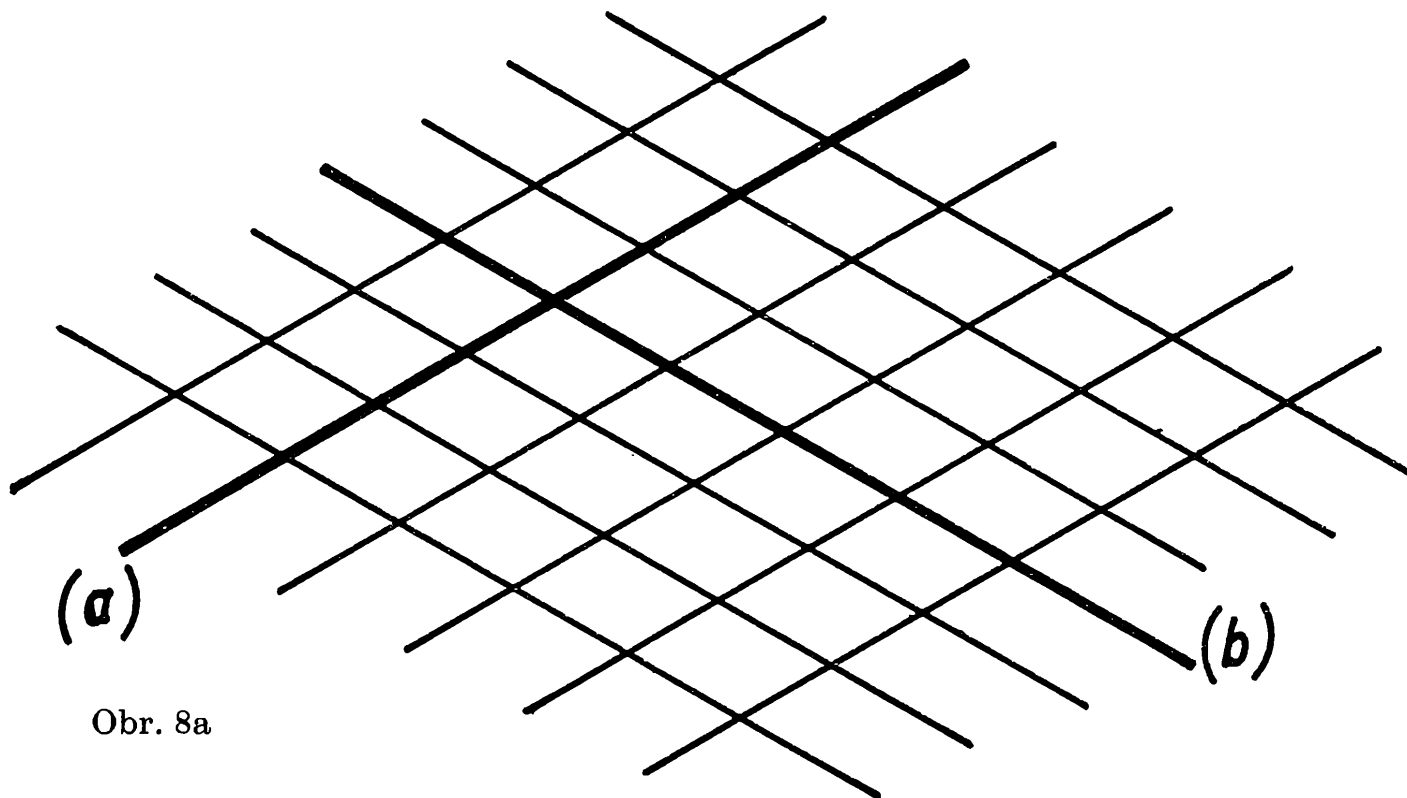
Obr. 7a

Obr. 7b

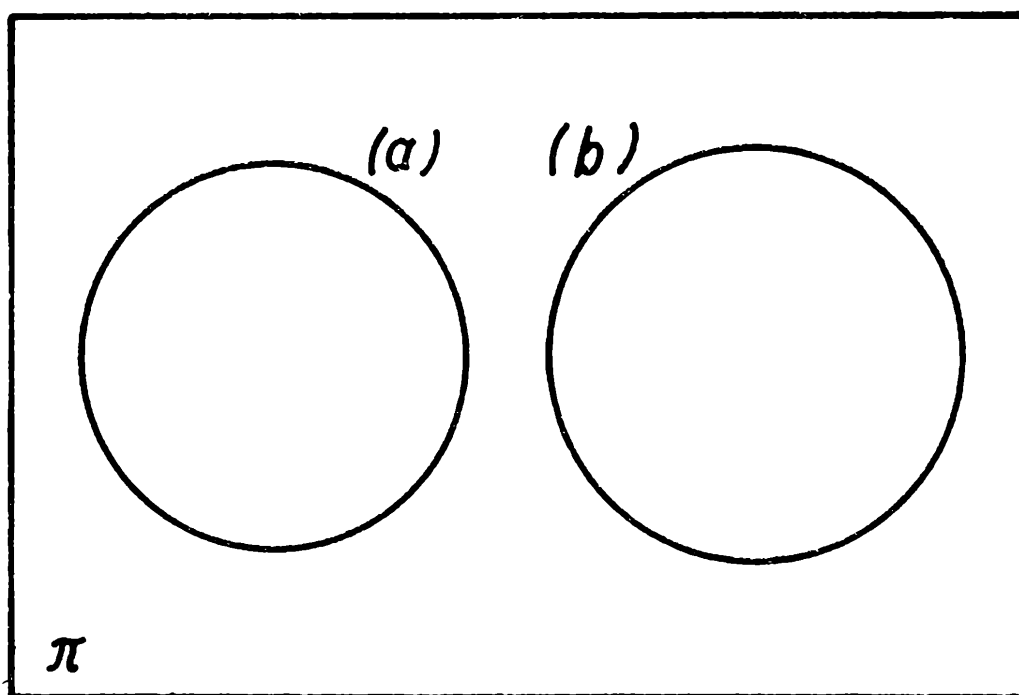


Příklad 6. Jsou dány dvě různoběžné přímky a , b . Vyšetřete množinu $(a) \cap (b)$. Výsledek znázorněte množinovým diagramem.

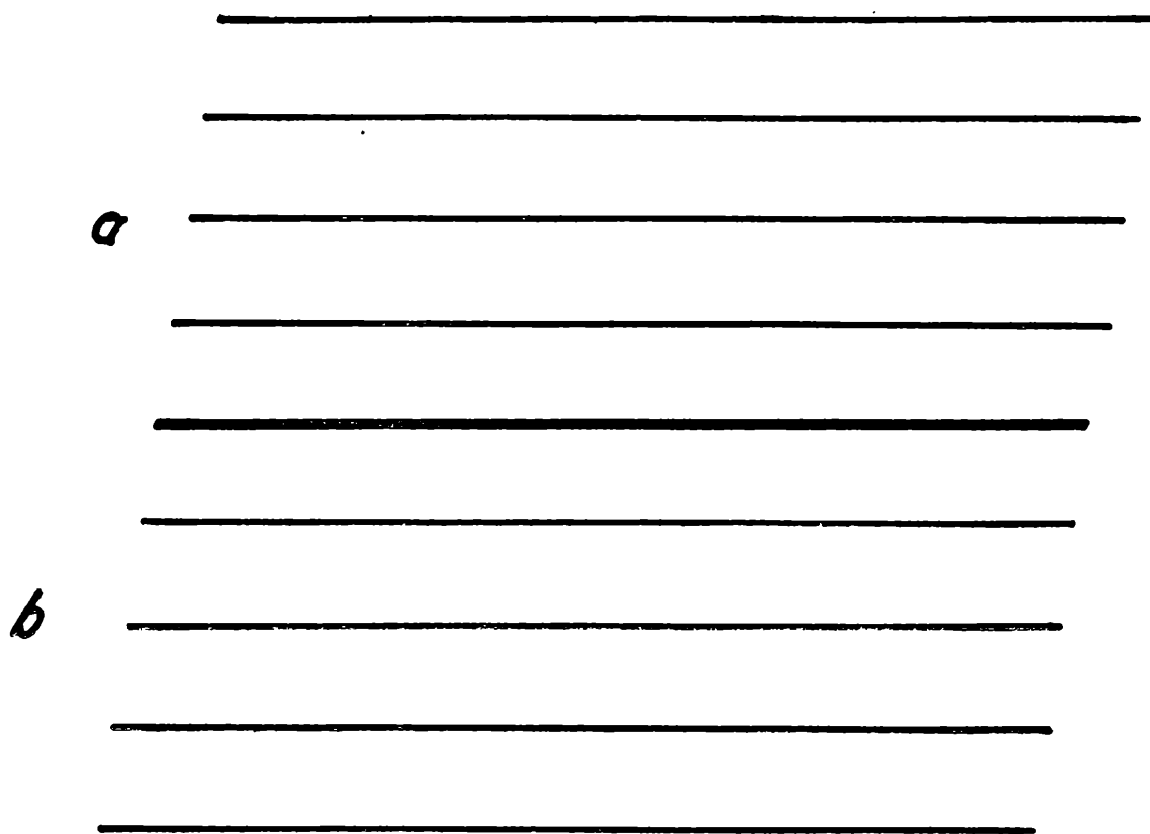
Průnik množin (a) a (b) je prázdný: $(a) \cap (b) = \emptyset$ (obr. 8a, b). Ti z vás, kterým se zdá, že tento výsledek není správný, nechtě se vrátí na začátek článku.



Obr. 8a

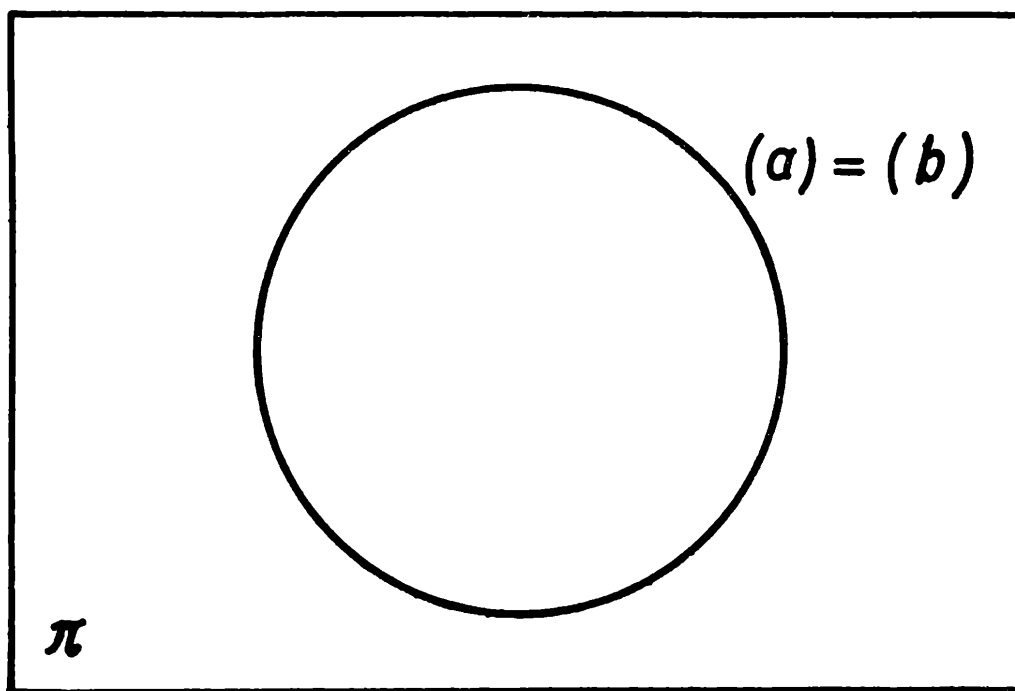


Obr. 8b

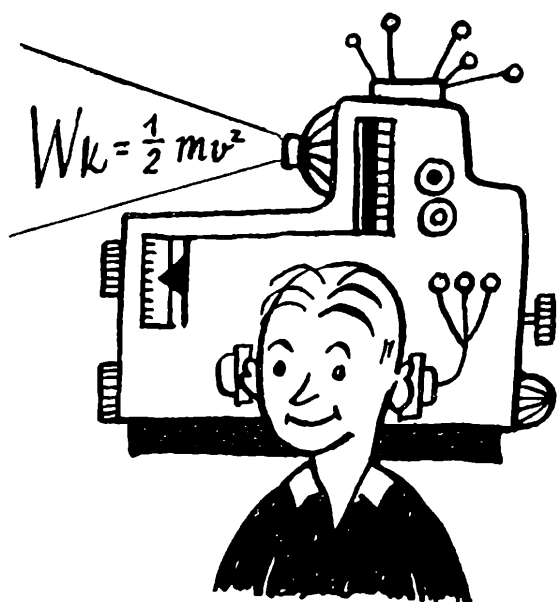


Obr. 9a

Obr. 9b



Příklad 7. Dvě osnovy přímek mají neprázdný průnik $X = (a) \cap (b)$.
 Vyšetřete množinu X a ilustруйте množinovým diagramem.
 Výsledky jsou znázorněny na obr. 9a, b. Platí $(a) \cap (b) = (a) = (b)$.



FYZIKA

Bohrov model atómu

ELEMÍR SCHOLTZ, Gymnázium Košice

1. Úvod

Vo svete atómov — v mikrosvete, neplatia zákony klasickej fyziky. Celý rad experimentálnych objavov veľmi rýchle, krok za krokom rozboril idylu klasického obdobia vo fyzike. Táto skutočnosť si vynútila postupný vznik novej teórie, dokonalejšie a presnejšie vystihujúcej zákonitosti tohoto sveta, ktorý je za hranicami ľudského vnímania — vznik kvantovej mechaniky. Avšak prijatím tejto novej teórie bolo nevyhnutné opustiť niektoré názorné predstavy a modely, ktoré si fyzici vytvorili v snahe pochopiť stavbu hmoty. Ak hovoríme o modeli, máme na mysli zariadenie, pracujúce na základe zákonov klasickej fyziky a pomerne verne reprodukuje chovanie daného objektu. Keď však chceme pozorovať mikrosvet okuliarmi klasickej mechaniky, nepochopíme ho nikdy.

Je nepopierateľné, že vytvorenie názorných modelov atómu malo pre rozvoj nášho poznania obrovský význam. Planetárny model atómu pochádzajúci od Rutherforda, model vytvorený Nielsom Bohrom, ktorého myšlienky rozvinul a zobecnil Sommerfeld, boli neobyčajne plodné. Neskôršie sa ukázalo, že k jedine správne vysvetleniu otázky stavby atómu vedie vlnová mechanika a na nej založená moderná kvantová teória.

Atóm vydáva žiarivú energiu po kvantách, vysiela fotóny a jeho energia sa nemôže meniť spojte. Mení sa skokom. Preto môže atóm

emitovať (vysielať) a absorbovať (pohlcovať) len fotóny elektromagnetického žiarenia s určitou frekvenciou. Spektrum získané rozložením žiarenia svietiacich atómov sa preto skladá z osamotených čiar, ktoré sú od seba rôzne vzdialené. Táto skutočnosť bola objavená spektroskopicky dávno pred vznikom predstáv o stavbe atómov a ich elektrónových obalov. Úlohou a kritériom správnosti teórie atómov bolo vysvetliť vznik a existenciu čiarových spektier a zákonitosti objavené ich štúdiom, napr. polohu jednotlivých čiar v spektre, násobnosť spektrálnych čiar, tzv. jemnú štruktúru, štiepenie spektrálnych čiar v elektrickom a magnetickom poli a i. Tieto požiadavky priviedli teóriu postupne až k dnešnej, kvantovej teórii.

Pôvodná, názorná a jednoduchá teória, zavedená Nielsom Bohrom v r. 1913, neskôr rozvinutá Sommerfeldom nám však poskytuje zaujímavý a užitočný obraz o stavbe a štruktúre elektronového obalu atómov.

2. *Predpoklad o stacionárnych stavoch, kľúč k pochopeniu stavby atómu.*

Niels Bohr v snahe odstrániť medzi výsledkami klasickej elektrodynamiky a skutočnosťou, že elektrón, ako záporne nabitá častica pri svojom pohybe okolo kladne nabitého atómového jadra nevyžaruje elektromagnetické vlny, zaviedol predpoklad o tzv. stacionárnych stavoch. Jeho myšlienka sa zakladá na tom, že elektróny obiehajú okolo jadra len po kruhových dráhach s takým polomerom, pre hodnotu ktorého je splnená určitá podmienka. Pri pohybe po takejto dráhe elektrón nevyžaruje, nachádza sa v stacionárnom stave.

K pochopeniu spomenutej podmienky je treba poznať fyzikálnu veličinu, ktorá je v mechanike zavedená k vyjadreniu tzv. točivosti telesa o hmotnosti m , pri pohybe po kruhovej dráhe s polomerom r okolo predchádzajúcej stredom uvažovanej kruhovej dráhy. Táto veličina sa nazýva moment hybnosti b , resp. impulzmoment, kinetický moment a je pre kruhový pohyb definovaná vzťahom

$$b = m v r, \quad (1)$$

kde v je obvodová rýchlosť telesa na kruhovej dráhe.

Podľa Bohrovho predpokladu elektróny v elektrónovom obale atómov vykonávajú zo všetkých, mechanicky možných kruhových dráh len kruhové dráhy s takým polomerom r , pre ktorý je moment hybnosti b daného elektrónu o hmotnosti m_e úmerný číslu h kde h je univerzálna

$$b = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Planckova konštanta (vystupuje napr. ako konštanta úmernosti medzi energiou W a frekvenciou f kvanta elektromagnetického žiarenia —

— fotónu) a n je tzv. kvantové číslo, ktoré môže nadobúdať len hodnoty prirodzených čísel.

Rovnicu (2) je výhodné zapísať v tvare

$$b = \frac{hn}{2\pi} \quad (3)$$

Ak sa elektrón nachádza na dráhe, ktorej polomer splňuje podmienku danú rovnicou (3), je v stacionárnom stave a nevyžaruje. Každé hodnoty kvantového čísla n prislúcha elektrónová kvantová dráha s určitým polomerom, ktorého hodnota sa nemôže meniť spojite, ale v súhlase s rovnicou (3) len skokom.

Hodnoty „dovolených“ polomerov kvantových dráh splňujúcich podmienku (3) môžeme pomerne ľahko nájsť, ak použijeme Coulombov zákon pre elektrostatické vzájomné pôsobenie medzi daným elektrónom, nositeľom elementárneho záporného elektrického náboja nachádzajúceho sa na kvantovej dráhe s polomerom r a jadrom atómu s kladným nábojom $+Ze$. Atómové číslo Z udáva počet protónov v jadre, pričom berieme do úvahy, že náboj jedného protónu je čo do absolútnej hodnoty rovnaký ako náboj elektrónu.

Príťažlivá sila F vypočítaná z Coulombovho zákona pre vzájomné pôsobenie medzi jadrom a daným elektrónom, predstavuje dostredivú silu pôsobiacu na elektrón pri jeho kruhovom pohybe

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \quad (4)$$

Z tejto rovnice a z rovnice (3) môžeme pre polomer kvantovej dráhy r vypočítať vzťah

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 h}{m_e Z e^2 \pi}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (5)$$

Keďže kvantové číslo n môže nadobúdať len hodnoty prirodzených čísel, hodnoty možných polomerov kvantových dráh sa nemôžu meniť spojite, ale iba skokom.

Pre pomer polomerov r_1 a r_2 dvoch kvantových dráh prislúchajúcim kvantovým číslam n_1 a n_2 platí

$$r_1 : r_2 = n_1^2 : n_2^2 \quad (6)$$

Ak vypočítame z rovnice (4) rýchlosť v elektrónu a za polomer r dosadíme z rovnice (5), môžeme vyjadriť aj kinetickú energiu W_k elektrónu, ktorá závisí na hodnote kvantového čísla n takto

$$W_k = \frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad (7)$$

Elektrón na uvažovanej dráhe má však aj potenciálnu energiu W_p , lebo sa nachádza v silovom poli jadra. Táto energia sa číselne rovná práci, ktorú by bolo treba vykonať proti silám elektrického poľa na prenesenia náboja $-e$ z miesta s nulovým potenciálom (z nekonečna), do vzdialenosti r od jadra atómu. Pre elektrón je tato práca záporná a platí

$$W_p = - \frac{Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 r} = - \frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{4 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \quad (8)$$

Celková mechanická energia elektrónu na danej kvantovej dráhe s polomerom r je daná súčtom energie kinetickej a potenciálnej. Teda

$$W = W_k + W_p = - \frac{Z e^2}{8 \pi \varepsilon_0 r} = - \frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \quad (9)$$

Táto energia je záporná, čo je v súhlase s tým, že sily medzi elektrónom a jadrom sú príťažlivé a potenciálna energia elektrónu je nulová v nekonečne veľkej vzdialenosti od jadra.

Z rovnice (9) vyplýva, že celková energia elektrónu obiehajúceho okolo jadra atómu sa nemôže meniť spojite, ale v súlade s možnými hodnotami kvantového čísla n iba skokom. Pre pomer hodnôt energií W_1 a W_2 , ktoré má elektrón na kvantových drahách určených kvantovými číslami n_1 a n_2 platí

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \quad (10)$$

Pri prechode elektrónu s kruhovej dráhy s polomerom r_2 , určenej hodnotou kvantového čísla n_2 , na kvantovú dráhu s polomerom r_1 a kvantovým číslom n_1 , teda na dráhu, kde má elektrón menšiu energiu, sa prebytok energie vyžiarí vo forme kvanta elektromagnetického žiarenia (fotónu) s frekvenciou f

$$W = h f = W_2 - W_1 = \frac{m_e Z^2 e^4}{8 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (11)$$

Opačný prechod elektrónu, t. j. prechod z dráhy energeticky nižšej na dráhu energeticky bohatšiu je možný len vtedy, ak atóm získa potrebný rozdiel energie nárazom nejakej inej častice, alebo pohltitím žiarivej energie ve forme fotónov, ktorých frekvencia vyhovuje podmienke danej rovnicou (11).

Dokladom potvrdzujúcim správnosť predpokladov a predstáv o štruktúre elektrónového obalu atómov, je súhlas Bohrovej teórie s experimentálnymi výsledkami, týkajúcimi sa zákonitostí objavených v čiarových

spektrách. Rydberg zistil, že kmitočet f danej spektrálnej čiary je možné vyjadriť rozdielom dvoch funkcií $T_1(n_1)$ a $T_2(n_2)$

$$f = T_1(n_1) - T_2(n_2) \quad (12)$$

kde n_1 a n_2 sú prirodzené čísla, pričom hodnota n_1 a tým aj $T_1(n_1)$ má pre danú sériu spektrálnych čiar hodnotu konštantnú, n_2 a teda aj $T_2(n_2)$ hodnotu premennú. Funkcie $T_1(n_1)$ a $T_2(n_2)$ sa nazývajú spektrálne termy.

Napr. snaha vyjadriť frekvenciu jednotlivých čiar danej spektrálnej série pre žiarenie vysielané excitovanými (vzbudenými) atómami vodíka, viedla k zostaveniu rovníc, v ktorých frekvencia f vystupuje v závislosti od prirodzených čísel, ktoré môžeme označiť n_1 a n_2 takto:

Lymanova série, pre ultrafialovú oblasť

$$f = K \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad \begin{matrix} n_2 = 2, 3, 4, \\ n_1 = 1 \end{matrix}$$

Balmerova série, pre viditeľnú oblasť

$$f = K \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad \begin{matrix} n_2 = 3, 4, 5, \\ n_1 = 2 \end{matrix} \quad (13)$$

kde K je konštanta. Analogické rovnice možno napísať pre spektrálne čiary v infračervenej oblasti, kde sa vyskytujú tri spektrálne série čiar:

Paschenova, pre ktorú je $n_1 = 3$ a $n_2 = 4, 5, 6$,

Bracketova, pre ktorú je $n_1 = 4$ a $n_2 = 5, 6, 7$,

Pfundova, pre ktorú je $n_1 = 5$ a $n_2 = 6, 7, 8$,

Od samého začiatku bolo jasné, že spektrálne termy musia mať celkom určitý fyzikálny zmysel. Z Bohrovej teórie, ktorá vznikla viac ako triasť rokov po Rydbergových objavoch, skutočný význam a pôvod spektrálnych čiar veľmi názorne vyplýva. Ak to iž porovnáme rovnice (13) s rovnicami (11) a (12) vidíme, že spektrálne termy sú úmerné energiám elektrónov na kvantových drahách

$$f = \frac{W_2}{h} - \frac{W_1}{h} = T_1(n_1) - T_2(n_2) \quad (14)$$

a zároveň z rovníc vyplýva aj zmysel konštanty K , vystupujúcej v rovniciach (13).

Existencia čiarových spektier teda úzko súvisí so štruktúrou elektrónových obalov a s prechodom elektrónov z jednej kvantovej dráhy na druhú. Mení sa tým energie atómu, ktorý absorbuje, alebo emituje určité kvantá žiarivej energie.

Ak sú všetky elektróny v elektrónovom obale atómu v stacionárnom stave, je v tomto stave aj atóm ako celok a navyžaruje žiadnu energiu.

Tento stav atómu nazývame aj stavom základným, na rozdiel od stavu excitovaného, do ktorého sa atóm dostáva po prijatí určitej energie a prechode elektrónov na energeticky bohatšie kvantové dráhy.

3. Záver

Výsledky Bohrovej teórie plne súhlasia s experimentálnymi poznatkami pre vodíkový atóm a ióny, majúce na valenčnej sfére jeden elektrón. Vo vše — obecnom prípade Bohrova podmienka daná rovnicou (3) nie je postačujúca pre jednoznačné určenie toho, ktoré zo všetkých, mechanicky možných dráh zodpovedajú stacionárnym stavom. Obecnejšie podmienky zaviedol Sommerfeld, predpokladom o existenci eliptických drahách elektrónov a zavedením ďalších kvantových čísel.

Luminiscence

ZDENĚK BRYKNAR

1. Úvod

Absorbuje-li látka v nějaké formě energii, může část této energie emitovat ve formě elektromagnetického záření ve viditelné oblasti spektra (tedy ve formě viditelného světla) nebo blízko ní. Tento jev se nazývá luminiscence, přičemž pod tento pojem nespadá emise záření černým tělesem, pro níž platí Kirchhoffův a Wienův zákon. Luminiscenční látky se nazývají luminofory.

Luminiscence je děj, který má nejméně dvě stadia, a to: vybuzení elektronů látky do stavu s vyšší energií a následující emisi fotonů. Při vybuzení, tj. při dodání energie elektronům, získají elektrony, které se nalézají na hladinách s minimální energií, vyšší energii. Tím se dostanou do stavu, který není stabilní, a proto nabytou energií při přechodu do stabilního stavu s nižší energií vyzařují.

2. Druhy luminiscence

Podle způsobu buzení luminiscence můžeme luminiscenci rozdělit na:

- a) fotoluminiscenci, která vzniká po bombardování luminoforu fotony;
- b) katodoluminiscenci, vznikající bombardováním luminoforu elektrony;
- c) radioluminiscenci, vznikající bombardováním luminoforu částicemi α a β , protony nebo ozařováním rentgenovými paprsky, paprsky γ , atd.;

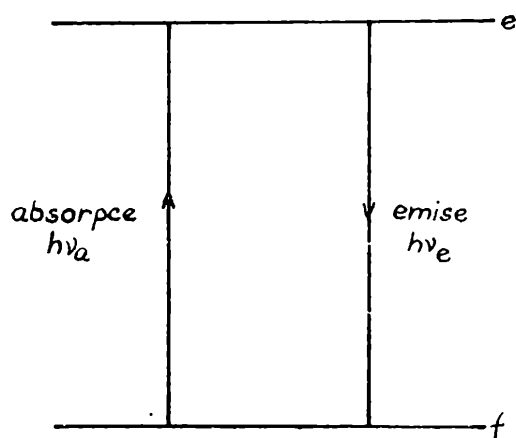
- d) elektroluminiscenci, vznikající působením elektrického pole na luminofor;
- e) triboluminiscence, při které vzniká světlo při mechanickém působení na luminofor;
- f) chemiluminiscenci a bioluminiscenci, při kterých emise světla doprovází chemickou reakci nebo biochemickou reakci.

3. Fluorescenci a fosforescence

Když mluvíme o fluorescenci, máme zpravidla na mysli emisi světla během buzení luminiscence. Emise světla, k níž dochází, když buzení již přestalo, se nazývá fosforescence.

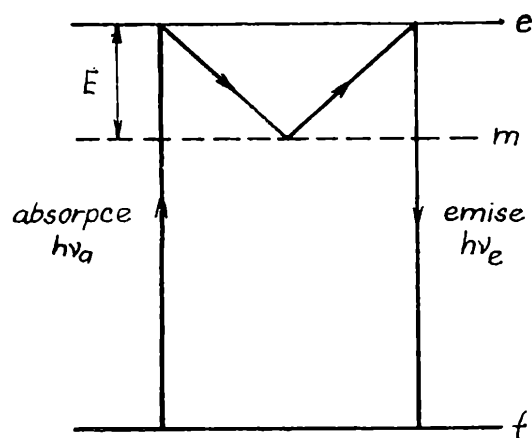
Na obrázku č. 1 je schéma energetických hladin, mezi kterými dochází při luminiscenci k přechodu elektronů. V luminoforu dochází při buzení k přechodu elektronů ze základního stavu f do vybuzeného stavu e . Návrat elektronů do základního stavu je doprovázen vyzářením světla. Emise nastává po uplynutí doby t od vybuzení. Velikost t se nazývá doba života vybuzeného stavu a má velikost řádově 10^{-8} s. Přitom návrat do základního stavu probíhá spontánně (nahodile).

V energetickém schématu na obr. 2 je zakreslena další energetická hladina m , která je metastabilní a nazývá se elektronová past. Toto



Obr. 1

Energetická schéma fluorescence



Obr. 2

Energetické schéma fosforescence

schéma popisuje průběh fosforescence, jejíž mechanismus je tento: Nejdříve dojde k vybuzení elektronů na hladinu e . Z této hladiny přejde část elektronů na hladinu m . Protože je tato hladina metastabilní, není možný přechod elektronů $m \rightarrow f$, ale elektrony mohou opustit hladinu jenom tehdy, jestliže je dodáno jim aktivační energie E , která umožní elektronům přejít na hladinu e . Z této hladiny je možný přechod elektronů na základní hladinu f , při čemž dochází k emisi. Ovšem část elektronů může opět přejít na hladinu m , na které se pak zachytí. Emise při fosfo-

rescenci je, obecně řečeno, stejná jako při fluorescenci (až na to, že intenzita různých spektrálních pásů může být rozdílná), ale zpožďuje se za buzením o čas τ , který je dán dobou, po kterou elektrony přebývají na hladině m . Jestliže energii E dodáváme luminoforu ve formě tepla, jde o tepelnou aktivaci a v obecném případě platí

$$\frac{1}{\tau} = \text{konst} \cdot e^{-\frac{E}{kT}}$$

kde k je Boltzmannova konstanta a T je absolutní teplota.

Lze tedy shrnout: *Jev se nazývá fluorescencí*, jestliže je emise výsledkem spontánních přechodů.

Jestliže k emisi dochází po předešlém přebývání elektronů na metastabilní hladině, z které se elektrony mohou uvolnit jedině po absorpci aktivací energie, potom mluvíme o fosforescenci.

Emise světla, která probíhá za dobu řádově 10^{-8} s po vybuzení, je vždy fluorescencí. Dojde-li k emisi světla za dobu delší, jde většinou o fosforescenci.

Často se fluorescence definuje jako emise světla, pro níž je doba života vybuzeného stavu nezávislá na teplotě a fosforescence jako složka luminescence závislá na teplotě.

4. Franckův Condonův princip

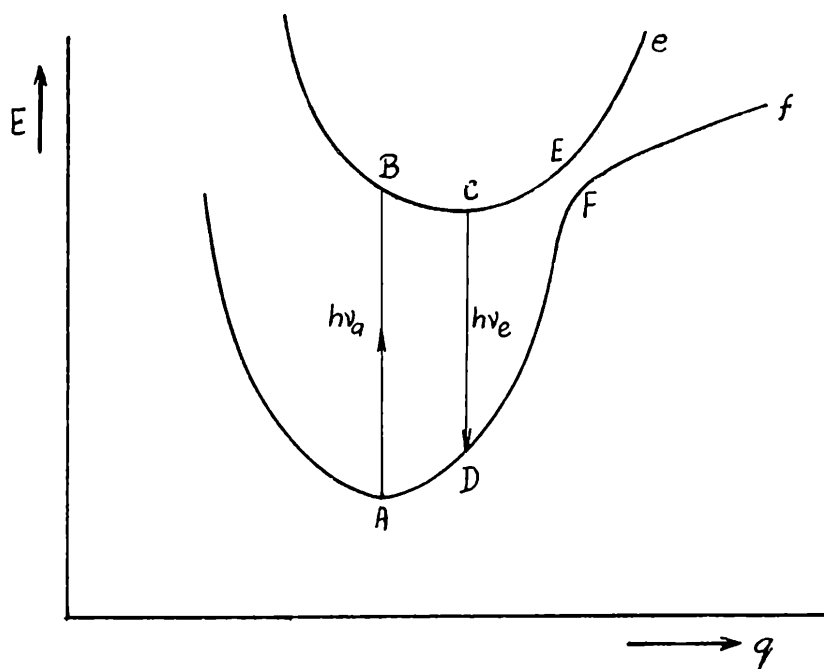
Z jednoduchých diagramů na obr. 1 a 2 by mohl vzniknout dojem, že návrat elektronu z vybuzeného stavu e do základního stavu f by měl být doprovázen emisí fotonu o frekvenci rovné absorpční frekvenci. Ve skutečnosti tomu tak není, protože je třeba vzít v úvahu princip Franckův-Condonův, podle kterého se vzdálenost mezi jádry atomů v luminoforu během přechodu nemění.

Jestliže elektron luminiscenčního centra (tj. místa, kde dochází k přechodu elektronu) je vybuzen na vyšší energetickou hladinu, dojde ke změně vzdálenosti mezi luminiscenčním centrem a jádry atomů látky, které ho obklopují. Rozmístění jader v blízkosti tohoto místa v krystalu se popisuje pomocí tzv. koordinační souřadnice q . Na obrázku 3 je zakreslena závislost energie základního stavu f a vybuzeného stavu e v závislosti na koordinační souřadnici q . V základním stavu se elektron nalézá v místě s minimální energií, tj. v bodě A . Při absorpci energie $h\nu_a$ se během přechodu rozmístění jader nezmění, a proto elektron přejde do bodu B , který leží na křivce e . Bod B však představuje vysoce vzbuzený stav, při kterém jádra nezaují polohu, která by byla rovnovážnou polohou vzbuzeného stavu a proto dochází k výměně energie elektronu s okolím a elektron postupně přechází do minima C křivky e . Jinými slovy, část pohlcené energie přijde nazmar tím, že po přechodu se určitá část energie přemění v teplo. Takový průběh celého děje je

možný, protože doba života vzbuzeného stavu je $\sim 10^{-8}$ s, což je hodnota řádově větší než perioda mřížkových kmitů $\sim 10^{-13}$ s. Emise sama o sobě, stejně jako absorpce sama o sobě, probíhají při grafickém znázornění (obr. 3) vertikálně, takže $\nu_e < \nu_a$.

5. Teplotní závislost luminiscence

Návrat elektronu z vzbuzeného stavu e do základního stavu f nemusí být vždy doprovázen emisí fotonu s energií $h\nu_e$, ale může se uskutečnit též přechodem mezi body E a F (viz obr. 3). K tomu je nutno, aby elektron ve vzbuzeném stavu získal aktivační energii ε , která je dána energetickým rozdílem hladin C a E . To je možné např. tepelnou aktivací. Z bodu F potom elektron přechází po křivce f do minima A , přičemž



Obr. 3. Energie základního stavu f a vzbuzeného stavu e v závislosti na konfigurační souřadnici q

svoji energii předává kmitům krystalové mříže. Tímto způsobem se absorbovaná energie $h\nu_a$ přemění v podstatě v teplo. Přechod elektronu ze vzbuzeného stavu do základního tedy může být zářivý i nezářivý. Proto je vhodné definovat luminiscenční účinnost η . Označíme-li p_e pravděpodobnost, že se elektron vrátí během jedné sekundy do základního stavu za současné emise fotonu, a p_t pravděpodobnost, že nastane rozptyl energie ve formě tepla, můžeme definovat luminiscenční účinnost vztahem

$$\eta = \frac{p_e}{p_e + p_t}.$$

Protože se dá předpokládat, že p_e je téměř nezávislé na teplotě (viz definice fluorescence), musí být závislost účinnosti na teplotě způsobena v podstatě veličinou p_t . Ukazuje se, že tato závislost je dána vztahem

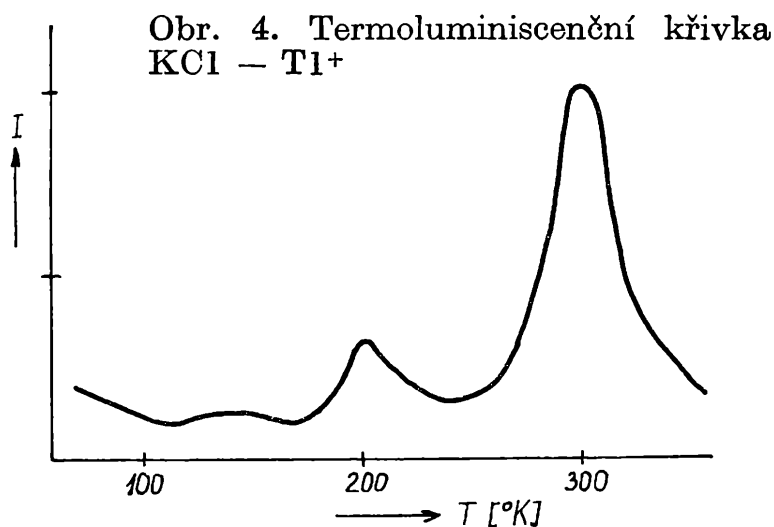
$$p_t = \nu e^{-\frac{E}{kT}},$$

kde ν je frekvence. U popsaného modelu tedy luminiscenční účinnost klesá s rostoucí teplotou T .

6. Termoluminiscence

Uvažujme o luminiscenčních centrech, která mají metastabilní stavy m (viz obr. 2). Pro jednoduchost budeme předpokládat jedinou hladinu m , jejíž aktivační energie vzhledem k hladině e je E . Předpokládejme, že buzení center, tj. přechod elektronů na hladinu m , proběhlo při nízké teplotě T_0 , takže rychlost dosvitu je při ní velmi malá. Zahříváme nyní krystal stejnoměrně tak, že časová změna teploty $\frac{dT}{dt}$ je konstantní.

Potom lze očekávat následující časovou závislost luminiscenční intenzity: Za nízkých teplot ($kT \ll E$) bude intenzita malá, při $kT \approx E$ by se měla



zvýšit a pak by měl nastat pokles následkem vyčerpání hladin m . Ukazuje se, že křivka $I(t)$ má v oblasti teploty, pro níž platí $kT \approx E$, tvar zvonovky. Máme-li několik diskrétních hladin m o různých hodnotách E , dostaneme zřejmě superpozici takových křivek. Emisi světla způsobené ohřátím po předchozím buzení se říká termoluminiscence. Křivky $I = I(t)$ se pro případ stejnosměrného vzestupu teploty nazývají termoluminiscenční křivky. Při studiu luminiscence se často používají, protože poskytují údaje o energii metastabilních hladin a jejich obsazení elektrony v okamžiku $t = 0$. Na obr. 4 je jako příklad uvedena termoluminiscenční křivka KCl s 0,05 at. % Tl^+ se dvěma metastabilními hladinami o aktivačních energiích 0,35 eV a 0,72 eV.

Sedm základních jednotek SI

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ CSc, PRAHA

Mezinárodní soustava jednotek (zvaná také mezinárodní měrová soustava) — SI rozlišuje tři „třídy“ jednotek. Především *jednotky základní*, dále *jednotky odvozené* (přesněji hlavní jednotky odvozených veličin) a konečně *jednotky doplňkové* (*doplňující*). Z vědeckého hlediska není toto rozdělení jednotek SI do tří tříd nijak podstatné, protože nás do tohoto dělení fyzika žádným jednoznačným způsobem nenutí. Je to ovšem z praktického hlediska důležité, jako ostatně celá SI, protože to přispívá k jednotnosti měření a umožňuje to jednotné vyjadřování výsledků měření apod.

Všechny z uvedených jednotek (každá fyzikální veličina má z tohoto souboru pouze jedinou jednotku) nazýváme krátce *jednotkami SI*. Všechny tyto jednotky tvoří *koherentní soubor*. Podle toho hovoříme též jednoduše o *koherentních jednotkách*. Jsou to takové jednotky, které vyjádřeny pomocí jednotek základních mají v příslušné jednotkové rovnici součinitel rovný jedné. Je-li tento faktor rozličený od jedné, jde o jednotku nekoherentní. *Jednotky základní* jsou ovšem *koherentní*.

Příkladem koherentních jednotek je $[v] = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $[l] = 1 \text{ m}$, $[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, apod. Nekoherentní jednotkou je $[F] = 1 \text{ kp} = 9,806\,65 \text{ N} = 9,806\,65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, dále kilokalorie, elektronvolt aj. K nekoherentním jednotkám patří ovšem také *násobné a dílčí jednotky* tvořené z jednotek SI. Takovýto dílčí soubor se nazývá také *násobky a díly jednotek SI* a patří k SI. Násobky a díly jsou dekadické a tvoří se předepsaným způsobem.

Základních jednotek SI je sedm. Šest z nich bylo přijato 10. Generální konferencí vah a měr v roce 1954. Sedmá byla přijata v roce 1971 na 14. Generální konferenci vah a měr. Prvních šest přísluší těmto veličinám: metr délce, kilogram hmotnosti, sekunda času, ampér elektrickému proudu, kelvin termodynamické teplotě a kandela svítivosti. Sedmou základní jednotkou, nejnovější, je mol (se značkou mol), který přísluší látkovému množství.

Definice sedmi základních jednotek jsou tyto:

Metr je délka rovnající se 1650 763,73 vlnových délek, ve vakuu, záření odpovídajícího přechodu mezi hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86 (11. Generální konference vah a měr, 1960, 6. usnesení).

Kilogram je jednotkou hmotnosti (a nikoliv váhy nebo síly); je roven hmotnosti mezinárodního prototypu kilogramu (3. Generální konference vah a měr, 1901; původně již 1. Generální konference vah a měr, 1889).

Sekunda je doba trvání 9192 631 770 period záření, které přísluší pře-

chodu mezi dvěma velmi jemnými (pod)hladinami základního stavu atomu cesia 133 (13. Generální konference vah a měr, 1967, 1. usnesení).

Ampér je stálý elektrický proud, který procházel-li by dvěma rovnoběžnými vodiči, přímými, nekonečně dlouhými, zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu, ve vzájemné vzdálenosti 1 metru, způsoboval by mezi těmito vodiči sílu rovnou $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na metr (délky) (9. Generální konference vah a měr, 1948).

Kelvin, jednotka termodynamické teploty, je $1/273,16$ -tá část termodynamické teploty trojného bodu vody (13. Generální konference vah a měr, 1967).

Kandela je svítivost, v kolmém směru, povrchu černého tělesa velikosti $1/600\,000\text{ m}^2$ při teplotě tuhnutí platiny, při tlaku $101\,325\text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ (13. Generální konference vah a měr, 1967, 5. usnesení).

Mol je látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců, kolik je atomů v $0,012\text{ kg}$ uhlíku ^{12}C . *Poznámka* : Používali-li se molu, mají být příslušní elementární jedinci blíže specifikováni; mohou jimi být atomy, molekuly, ionty, elektrony, jiné částice nebo blíže určená seskupení těchto částic (14. Generální konference vah a měr, 1971).

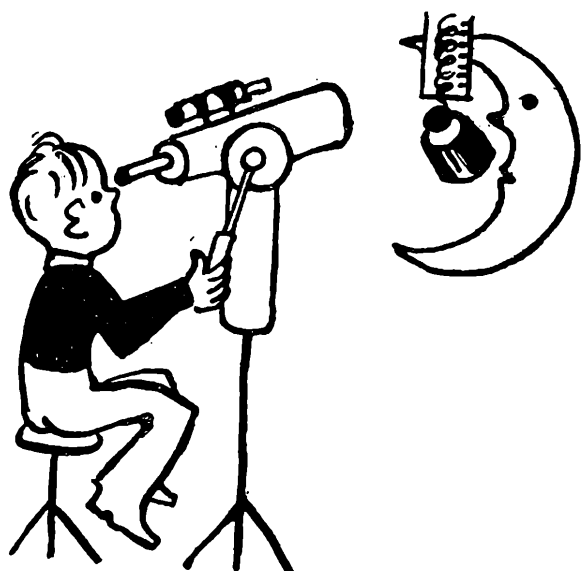
Poznámka : V několika následujících krátkých informačních člancích si probereme další třídy jednotek SI i jednotky vedlejší. Protože se snažím v maximální možné míře přidržet formulací a rozdělení podle těchto oficiálních pramenů z Mezinárodního úřadu vah a měr, nepřipomínám přitom k této problematice v ČSSR vydané předpisy, zejména ČSN, jež, pokud platí, musí být náležitě respektovány. Z tohoto hlediska je nutno hledět na tyto informace jako na rámcové, jež v některých detailech u nás třeba již byly nebo náležitými předpisy teprve budou v budoucnu respektovány.

Tak např. základní jednotky SI v počtu sedm dosud ČSN 01 1300 neuvádí, ani rozdělení jednotek SI na tři třídy. Naproti tomu nejsou již mezi vedlejšími zákonnými jednotkami ty jednotky CGS, které mají samostatný název. Jejich používání je tedy u nás oficiálně vyloučeno, zmíněné materiály Mezinárodního úřadu vah a měr tyto jednotky zatím jen „nedoporučují“. Je jistě samozřejmé, že postup při zavádění SI je a bude v rozličných zemích různý. Je však nutné, aby struktura finálně používané soustavy a dalších případných jednotek byla jednotná a co možno nejdokonalejší.

ÚLOHY 1. KOLA FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

a témata k prostudování budou uveřejněny letos jen v letáku fyzikální olympiády.

ÚVFO



ASTRONOMIE

Povrchové teploty hvězd

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Povrchové teploty hvězd, tj. teploty hvězdných fotosfér, patří mezi nejdůležitější fyzikální charakteristiky hvězd. K jejich stanovení používá astrofyzika zákonů záření, neboť záření je jediným zdrojem informací o hvězdách. Hvězdy vyzařují spojité spektrum, v němž se vyskytují absorpční nebo i emisní čáry. K určení povrchových teplot se nejčastěji používá spojitého spektra hvězdy. Podle toho, kterého zákona pro spojité spektrum použijeme, rozlišujeme efektivní teploty, barevné teploty a teploty barevného indexu. Na studiu spektrálních čar jsou založeny méně často používané druhy povrchových teplot, z nichž jmenujme alespoň teploty ionizační, excitační, kinetické a elektronové. Podrobněji si vysvětlíme metody určování povrchových teplot, založené na spojitém spektru.

Efektivní teploty (T_{ef})

Při určení efektivní teploty hvězdy vycházíme ze Stefanova zákona pro energii vyzařovanou absolutně černým tělesem. Podle tohoto zákona je intenzita vyzařování (tj. celková energie, vyzařovaná za jednu sekundu jedním čtverečním metrem povrchu) absolutně černého tělesa přímo úměrná čtvrté mocnině absolutní teploty

$$E = \sigma T^4 .$$

Konstanta úměrnosti $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ deg}^{-4}$ se nazývá Stefanova konstanta. Připomeňme, že absolutně černým tělesem rozumíme takové

těleso, které zcela pohlcuje záření všech vlnových délek, které na ně dopadá. Efektivní teplota hvězdy je definována jako teplota absolutně černého tělesa, jehož intenzita vyzařování je stejná jako u dané hvězdy. K určení efektivní teploty potřebujeme znát energii záření, které dopadá z hvězdy na Zemi, poloměr hvězdy a její vzdálenost.

Efektivní teploty můžeme určit jen u poměrně malého počtu hvězd, u nichž známe poloměry. Kromě Slunce a několika málo blízkých a jasných hvězd jsou to zákrytové proměnné hvězdy. Pomocí zákrytových dvojhvězd odvodil v roce 1938 *G. Kuiper* závislost efektivní teploty na spektrální třídě.

Postup při určování efektivních teplot hvězd pomocí Stefanova zákona si ukážeme na konkrétním příkladu. Vypočteme efektivní teplotu našeho Slunce. Poloměr Slunce je znám dostatečně přesně; pro naše výpočty použijeme zaokrouhlenou hodnotu $R = 6,96 \cdot 10^8$ m. Celkovou energii, vyzařovanou Sluncem, určíme pomocí solární konstanty a střední vzdálenosti Země od Slunce. Solární konstanta udává množství zářivé energie všech vlnových délek, které dopadá za 1 sekundu na 1 m^2 plochy postavené kolmo k dopadajícímu slunečnímu záření ve střední vzdálenosti Země od Slunce a mimo zemskou atmosféru. Pro solární konstantu K byla určena hodnota $K = 1,4 \cdot 10^3 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Pro střední vzdálenost Země od Slunce budeme brát zaokrouhlenou hodnotu $r = 1,50 \cdot 10^{11}$ m. Na každý m^2 povrchu koule o poloměru zemské dráhy dopadne za 1 s energie rovná solární konstantě. Na celý povrch koule pak dopadá za 1 s energie

$$W = 4 \pi r^2 K .$$

Zanedbáme-li absorpci záření v meziplanetárním prostoru, je tato energie rovna energii vyzařované za 1 s celým povrchem Slunce. Vyzařuje-li 1 m^2 povrchu Slunce za 1 s energii E , pak celý povrch vyzáří

$$W = 4 \pi R^2 E = 4 \pi R^2 \sigma T^4 .$$

Porovnáním obou výrazů pro celkovou energii vyzařovanou za 1 s dostaneme

$$r^2 K = R^2 \sigma T^4$$

a odtud absolutní teplota Slunce

$$T = \sqrt[4]{\frac{r^2 K}{R^2 \sigma}} .$$

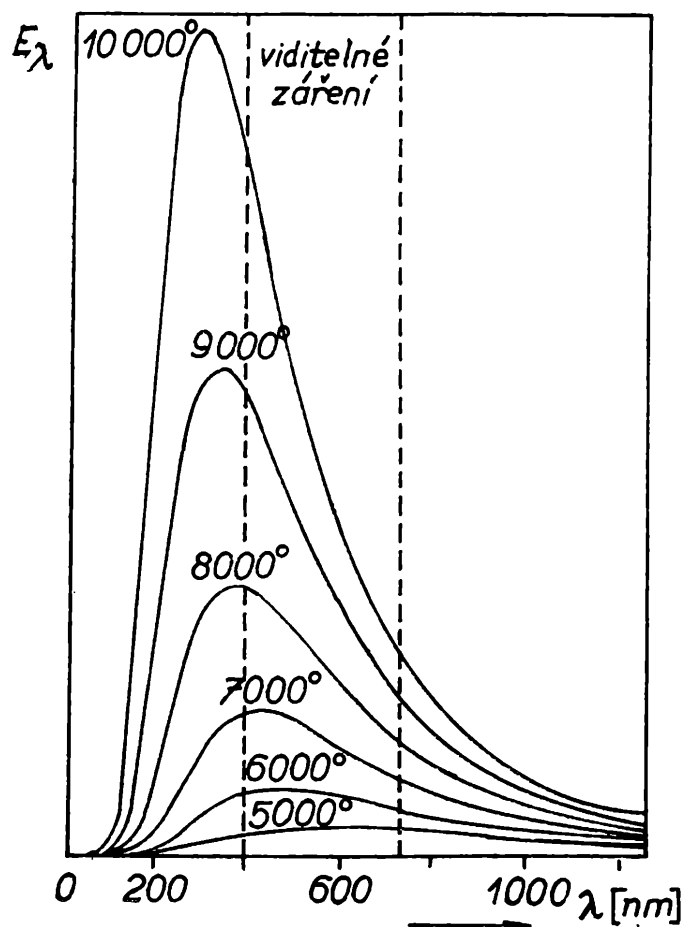
Po dosazení číselných hodnot, získáme pro efektivní teplotu Slunce hodnotu $T_{ef} = 5\,820 \text{ K}$.

Stejně můžeme určovat efektivní povrchové teploty hvězd. Ve skutečnosti ovšem Slunce ani hvězdy nezáří zcela stejně jako absolutně černé těleso. Další potíží u této metody je kromě stanovení poloměru hvězdy také měření celkové energie, kterou hvězda vyzařuje, neboť značnou část této energie absorbuje zemská atmosféra.

Barevné teploty hvězd (T_c)

Určování barevných teplot je rovněž založeno na záření absolutně černého tělesa; nepoužívá se však celkového záření, ale vychází se

z rozložení energie ve spektru hvězdy. Energie ve spojitém spektru absolutně černého tělesa není rozložena rovnoměrně na všechny vlnové délky. Intenzita vyzařování, která připadá na vlny o určité vlnové délce λ se nazývá monochromatické vyzařování E_λ . Max Planck odvodil na začátku 20. století na základě kvantové teorie zákon, který popisuje závislost monochromatického vyzařování na absolutní teplotě černého tělesa a na vlnové délce. Závislost E_λ na vlnové délce je pro několik teplot znázorněna na obr. 1. Na obrázku je vyznačen obor vlnových délek spadajících do viditelného záření. Z Planckova zákona lze odvodit Ste-



Obr. 1. Závislost monochromatického vyzařování E_λ absolutně černého tělesa v závislosti na vlnové délce λ pro několik teplot.

fanův zákon (celková intenzita vyzařování je dána plochou omezenou příslušnou křivkou a vodorovnou osou) a dále z něj plyne, že s rostoucí teplotou se maximum monochromatického vyzařování posouvá směrem ke kratším vlnovým délkám. Označíme-li $\lambda_{\max}$ vlnovou délku, na níž připadá maximum monochromatického vyzařování, pak pro závislost této vlnové délky na absolutní teplotě platí Wienův zákon posuvu

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

Hodnota konstanty v tomto zákonu je $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m deg}$. Teoreticky je možné určit teplotu hvězdy z Wienova zákona posuvu. Pro Slunce, kde maximum záření připadá na vlnovou délku $\lambda_{\text{max}} = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, vychází z Wienova zákona teplota $T = 6\,040 \text{ K}$, což je teplota dobře se shodující s efektivní teplotou. Pro měření teplot hvězd se však Wienova zákona nepoužívá. Jedním z důvodů je to, že u vyšších teplot — asi od 8000 K výše — leží maximum v oboru ultrafialového záření, které je absorbováno zemskou atmosférou. Barevné teploty hvězd se stanoví srovnáním energie ve spektru hvězdy, připadající na určitý obor vlnových délek (určitou barvu světla), s energií absolutně černého tělesa připadající na tentýž obor vlnových délek. Protože hvězdy nezáří jako absolutně černá tělesa, dostáváme pro různé obory vlnových délek odlišné výsledky. Proto byl pro určování barevných teplot zvolen standardní obor vlnových délek 450 nm až 650 nm . Pro Slunce vychází v tomto oboru teplota $T_c = 6\,000 \text{ K}$. Tuto metodu lze aplikovat jen na dostatečně jasné hvězdy.

Teploty z barevného indexu (T_{CI})

Protože určování efektivních i barevných teplot je omezeno jen na jasnější hvězdy, hledala astrofyzika jinou metodu k určení teploty hvězdy — a to takovou, při níž by nebylo nutné znát ani poloměr, ani spektrum hvězdy. Takovou metodou je určování teplot z barevného indexu. Podstata metody spočívá v tom, že lidské oko a fotografická deska mají maximum citlivosti v různých oblastech spektra. Důsledkem toho je, že zdánlivé hvězdné velikosti, určené vizuálně, se liší od zdánlivých hvězdných velikostí určených fotograficky. Rozdíl mezi fotografickou a vizuální hvězdnou velikostí závisí na celkovém rozložení energie ve spektru hvězdy, a tedy na její teplotě. Protože teplotou hvězdy je dána také její barva, nazývá se tento rozdíl barevný index a označuje se CI (colour index). Označíme-li vizuální hvězdnou velikost m_v a fotografickou m_f , je barevný index

$$CI = m_f - m_v$$

Úmluvou bylo určeno, aby u hvězd s barevnou teplotou $13\,500 \text{ K}$ (tj. bílé hvězdy spektrální třídy A_0) byla vizuální hvězdná velikost rovna fotografické hvězdné velikosti. Pro tyto hvězdy je tedy $m_f = m_v$ a barevný index $CI = 0$. U hvězd s vyšší teplotou je barevný index záporný (fotografická deska je citlivá na kratší vlnové délky než lidské oko, teplejší hvězdy vyzařují více v oboru kratších vlnových délek, proto se na fotografické desce jeví tyto hvězdy jasnější — mají tedy menší fotografickou hvězdnou velikost), u hvězd s nižší teplotou je kladný. V teoretické astrofyzice byl odvozen vzorec, podle něhož lze z barevného indexu vypočítat povrchovou teplotu

$$T = \frac{7\,200}{CI + 0,55}$$

Takto určené teploty nejsou příliš přesné, můžeme je považovat spíše za odhad a mají především význam statistický. Nepřesnost této metody je ještě zvýšena tím, že hodnoty barevného indexu jsou závislé nejen na teplotě hvězdy, ale také na její vzdálenosti; mračna mezihvězdné látky absorbují více záření ve fialové než v červené části spektra, takže barevný index roste se vzdáleností hvězdy.

Metody určování povrchových teplot z čárového spektra

Uvedme alespoň ve stručném přehledu další čtyři v úvodu zmíněné druhy povrchových teplot hvězd, založené na studiu čárového spektra. Ionizační teploty se určují na základě znalosti stupně ionizace hvězdných atmosfér. Metoda vychází z toho, že s rostoucí teplotou roste počet ionizovaných atomů v atmosféře hvězdy. Excitační teploty se určují z intenzity jednotlivých spektrálních čar. Metoda je založena na Boltzmannově rovnici, vyjadřující rozložení kvantových stavů atomu v závislosti na teplotě. Kinetická teplota se určuje z rozšíření spektrálních čar ve spektru hvězdy. Základem metody je Maxwellovo rozložení rychlostí atomů v atmosféře hvězdy a Dopplerův jev, podle něhož pozorovaná vlnová délka světla závisí také na rychlosti částice, která světlo vysílá. Elektronová teplota se určuje rovněž z rozboru spektrálních čar; předpokládá se zde, že atomy jsou rozloženy na ionty a volné elektrony.

Závěr

Povrchové teploty hvězd určené jednotlivými metodami se mohou od sebe velmi lišit. Rozdíly jsou zvláště výrazné zejména u žhavých hvězd, které vyzařují převážně v oboru ultrafialového záření. Jako příklad uvedme hvězdy spektrální třídy A_0 , pro něž je efektivní teplota $T_{ef} = 10\,700\text{ K}$ a barevná teplota $T_c = 15\,400\text{ K}$. U hvězd spektrální třídy O_5 je tento rozdíl ještě větší ($T_{ef} = 35\,000\text{ K}$, $T_c = 70\,000\text{ K}$). U chladnějších hvězd se dosahuje různými metodami již lepší shoda, tak např. u hvězdy spektrální třídy M_0 , je $T_{ef} = 3\,600\text{ K}$, $T_c = 3\,800\text{ K}$.

Pomocí knih se mnozí stávají učenými i mimo školu,

bez knih pak nikdo nebývá učený ani ve škole.

J. A. KOMENSKÝ

NAŠE SOUTĚŽ

Úlohy k řešení

Matematika

1. Body A_i ($i = 1, 2, 3$), neležící v přímce, jsou středy kružnic k_i , procházejících společným bodem P . Dále budtež B_i další průsečíky kružnic k_j, k_l (i, j, l je libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3). Pak kružnice k_i , opsané trojúhelníkům o vrcholech $A_i B_j B_l$, se protnou rovněž ve společném bodě Q . Dokažte.

Josef Brejcha

2. Dokažte tuto obdobu Thaletovy věty v prostoru:

Geometrické místo vrcholů pravoúhlých trojhranů, dotýkajících se pevné kružnice $k \equiv (S; r)$, která leží v rovině ρ , je kulová plocha $\kappa = (S; r \sqrt{2})$ s vyňatou kružnicí v rovině.

Miroslav Fiedler

3. V rovnici $x^5 - 9x^4 + kx^3 - 3x^2 - \frac{92x}{3} + 20 = 0$,

jejíž dva kořeny jsou stejné až na znaménko, určete oba tyto kořeny, koeficient k , případně najděte zbývající tři racionální kořeny.

Jan Fráňa

4. Jestliže prvočíslo p_1 zvětšíme o jeho ciferný součet, dostaneme prvočíslo p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je dvakrát větší než ciferný součet prvočísla p_1 . Najděte všechny dvojice prvočísel p_1, p_2 těchto vlastností.

Stanislav Horák

5. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a uvnitř čtyřstěnu $BGEF$ je dán bod X , jehož poměr vzdáleností od stěn BFG, EFG, BEF a BEG je $m : n : p : q$. Vypočtete vzdálenost bodu X od vrcholu H .

Stanislav Horák

6. Nechť je každému reálnému číslu x přiřazeno nezáporné $f(x)$ (tj. f je nezáporná funkce definovaná na množině všech reálných čísel) a nechť je splněna tato podmínka: Existuje kladné číslo C tak, že pro každou konečnou množinu

$$\mathbf{M} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

reálných čísel platí

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq C$$

Dokažte, že existuje reálné číslo α , pro něž $f(\alpha) = 0$.

Jaroslav Morávek

Fyzika

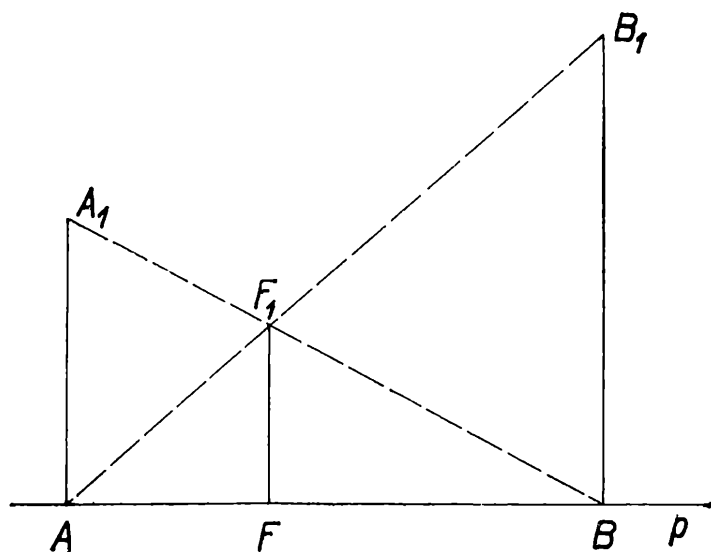
1. Vypočítejte množství tepla v joulech, které se uvolní za jednu sekundu z jednoho gramu alfa radioaktivního isotopu $^{222}_{86}\text{Rn}$. Energie vyletujících částic alfa je 5,5 MeV a poločas rozpadu radonu je 3,8 dne. (Při výpočtu neuvažujte produkty dalšího rozpadu.)

Zdeněk Janout

2. Máme nabít kondenzátor o kapacitě $C_0 = 750 \text{ pF}$ na napětí alespoň 1000 V. K dispozici máme však pouze anodovou baterii o napětí $U_0 = 200 \text{ V}$. Jediné součástky, které máme při ruce, jsou vodiče, vypínače a jeden kondenzátor s měnitelnou kapacitou od $C_1 = 500 \text{ pF}$ do 50 pF. (Otočný kondenzátor.)

Navrhněte zapojení a postup, jak je možné tento problém vyřešit.

Stanislav Kunc



3 Skleněná U trubice, jejíž marena mají nestejně vnitřní poloměry $r_1 = 1 \text{ mm}$, $r_2 = 20 \text{ mm}$, je zčásti naplněna a) rtutí. Povrchové napětí rtuti je $\sigma = 0,491 \text{ N m}^{-1}$, krajní úhel rtuť-sklo je $\delta = 128^\circ$, hustota $\rho = 13.551 \text{ kgm}^{-3}$.

b) vodou. Povrchové napětí vody je $\sigma = 7,297 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$, krajní úhel voda-sklo $\delta = 8^\circ$, hustota $\rho = 998,6 \text{ kgm}^{-3}$.

Stanovte výškový rozdíl hladin v obou ramenech trubice.

Jiří Machalický

4. Jsou-li dány dvě z veličin a , b , f čočkové (nebo zrcadlové) rovnice, lze hodnotu třetí veličiny najít následující konstrukcí.

a) Dáno a , b , hledá se f . Na přímce p (obr. 1) v bodech A , B (libovolně

od sebe vzdálených) vztyčíme kolmice a na nich v téže polorovině vyřáté přímkou p určíme body A_1, B_1 tak, aby $AA_1 = a, BB_1 = b$. Najdeme průsečík F_1 přímek AB_1, BA_1 . Patu kolmice z F_1 na p označme F . Potom $FF_1 = f$.

b) Dáno a, f , hledá se b . K přímkě p v bodech A, F , které jsou od sebe libovolně vzdálené, vztyčíme kolmice a na nich v téže polorovině vyřáté přímkou p určíme body A_1, F_1 tak, aby $AA_1 = a, FF_1 = f$. Přímka p se s přímkou A_1F_1 protnou v bodě B . V tomto bodě vztyčíme kolmici k přímkě p a ta protne přímkou AF_1 v bodě B_1 . Potom $BB_1 = b$.

Dokažte obě konstrukce.

Evžen Říman

5. Traktor táhne vůz silou F stálou rychlostí v . Tíhová síla vozu je G . Vypočtete, jak velká je výslednice sil, které působí na traktor, je-li $F = 1000 \text{ N}$, $G = 20\,000 \text{ N}$ a $v = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

František Vencálek

6. Na horizontální rovině stojí dutá krychle naplněná do poloviny V litry vody. Jak se mění celkový tlak vody na stěny, jestliže krychli otáčíme kolem jedné podstavné hrany?

Václav Vilímek



MO

XXI. ročník Matematické olympiády

Také XXI. ročník proběhne obdobně jako předcházející ročníky MO. Jedinou změnou je, že se v tomto ročníku opět obnovuje kategorie C. Toto rozhodnutí učinil ÚVMO v prosinci 1970 na základě zpráv z krajů, kde účast žáků 1. ročníku v MO škol II. cyklu velmi poklesla. Kategorie mají opět toto rozdělení:

Kategorie A	III. a IV. ročník gymnasia nebo střední odborné školy
Kategorie B	II. ročník gymnasia nebo střední odborné školy
Kategorie C	I. ročník gymnasia nebo střední odborné školy
Kategorie Z	9. ročník základní devítileté školy

V 10. čísle minulého ročníku jsme otiskli přípravné úlohy I. kola, jejichž řešení mají účastníci odevzdat do 30. 11. 1971 svým učitelům matematiky, popř. referentům pro MO. Tito pracovníci žakovská řešení opraví a uspořádají besedu, na níž vysvětlí účastníkům chyby v řešeních. Tato řešení se neklasifikují, neboť nejsou podmínkou pro postup do soutěžní části I. kola. Je však v zájmu všech účastníků řešit přípravné úlohy, neboť se v nich mnohemu naučí, co budou i v dalších fázích soutěže potřebovat.

Nyní uveřejňujeme soutěžní úlohy I. kola. Účastníci kategorie A a Z je odevzdají do 15. ledna 1972 a účastníci kategorie B a C do 29. února 1972.

Soutěžní úlohy I. kola

Kategorie A

1. Utvořme všechny možné konečné posloupnosti

$$1. \varepsilon_1, 2. \varepsilon_2, \dots, n \varepsilon_n,$$

kde každé z čísel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ je buď 1 nebo -1 . Součet všech členů takovéto posloupnosti označme $s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Dokažte větu: Ke každému přirozenému číslu k se dá nalézt takové přirozené číslo p , že pro každé $n < p$ je mezi součty $s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ aspoň $k + 1$ čísel, která jsou si rovna.

2. Komplexné číslo z nie je nezáporné práve, ak existuje prirodzené číslo n a kladné čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ tak, že platí

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

Dokažte.

3. Jsou-li čísla a, b, c délky stran trojúhelníka T_1 , pak existuje trojúhelník T_2 , jehož strany mají délky

$$\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1} \quad (1)$$

Dokažte.

Může být trojúhelník T_1 podobný trojúhelníku T_2 ?

4. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, $s = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$. Dokažte tyto věty:

a) Není-li trojúhelník rovnoramenný, nemůže být příslušné číslo s maximální.

b) Mezi rovnoramennými trojúhelníky má největší součet s trojúhelník rovnostranný.

5. M je množina všech mřížových bodů roviny, tj. těch bodů, kterých (kartézské) souřadnice jsou celé čísla. Dokažte tyto tvrzení:

a) Ak obsahuje přímka p dva body množiny M , potom ich obsahuje nekonečně mnoho.

b) Ak obsahuje přímka p dva body množiny M , potom všechny body množiny M leží na soustavě rovnoběžek, přičemž každé dvě sousední rovnoběžky mají rovnakou vzdálenost.

6. Trojboký hranol $ABCA'B'C'$ s podstavou ABC , jehož hrany mají délky $AB = 1$, $AC = x$, je rozdělen rovinami $A'BC$ a $A'B'C$ ve tři shodné čtyřstěny.

a) Vyjádřete délky všech jeho hran pomocí x .

b) Ukažte, že existuje trojboký hranol této vlastnosti.

Poznámka: Dva čtyřstěny jsou shodné, právě když existuje shodné zobrazení v prostoru, které převádí jeden v druhý.

Kategorie B

1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro něž se ciferný součet čísla 2^n rovná číslu 5.

2. Určete všechny společné kořeny rovnic

$$2x^5 - 13x^4 + 24x^3 - x^2 - 28x + 12 = 0, \quad (1)$$

$$2x^4 - 9x^3 + x^2 + 36x - 36 = 0. \quad (2)$$

3. Určete délky stran pravoúhelníka $ABCD$ tak, aby byla přirozená čísla a aby se obsah pravoúhelníka rovnal p -násobku obvodu trojúhelníka ABC , přitom p je vhodné prvočíslo. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k číslu p .

4. Zostrojte lichobežník $ABCD$ (kde $AB \parallel CD$); dané sú dĺžky jeho uhlopriečok $AC = e$, $BD = f$ a veľkosti uhlov $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$. Urobte diskusiu.

= 5. Dĺžky strán kvádra $ABCD A'B'C'D'$ označme

$$a = AB = A'B' = CD = C'D'$$

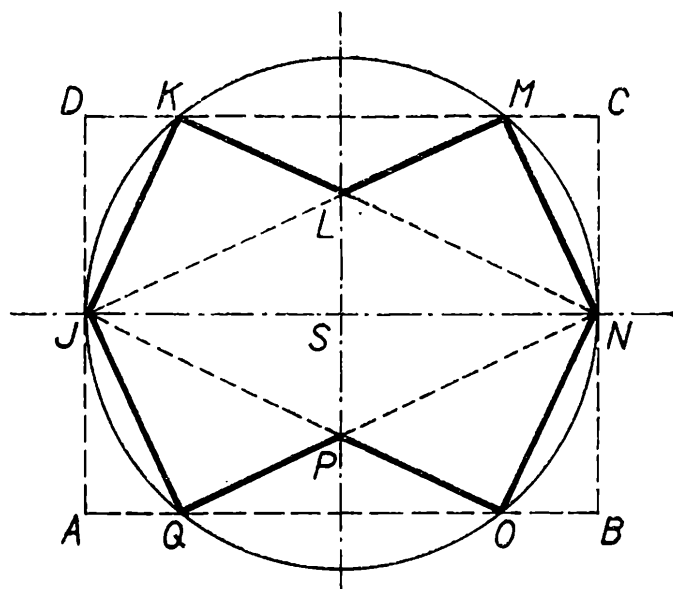
$$b = BC = B'C' = DA = D'A'$$

$$c = AA' = BB' = CC' = DD'$$

Vypočítajte odchýlku priamky $B'D$ od roviny ACD' pomocou jej ($\sphericalangle$) sínusu.

6. I. a) Jestliže všechny čtyři výšky čtyřstěnu procházejí týmž bodem, pak aspoň jeden z jeho vrcholů má tu vlastnost, že pata výšky z něho spuštěné leží uvnitř protější stěny. Dokažte.

II. b) Sestrojte síť takového čtyřstěnu, jehož každá výška má patu ležící vně příslušné stěny.



Přiložený obrázek 1 se týká 3. přípravné úlohy kat. B.

Kategorie C

1. Je dán čtverec, jehož strana má velikost a . Přímky, spojující středy stran s vrcholy protějších stran, dělí čtverec na 25 obrazců, mezi nimiž je celkem 5 navzájem neshodných druhů. Vypočítejte obsah každého z těchto pěti navzájem neshodných obrazců.

2. Dokážete, že každé prirodzené číslo $n > 10$ se dá rozložit aspoň dvomi způsoby na součet dvou přírodních čísel tak, že první sčítanec je prvočíslo a druhý sčítanec je číslo složené.

3. Stejně velké utěrky čtvercového tvaru pokrývají obdélník $ABCD$ aniž se navzájem překrývají. Pověsí-li se jedna těsně vedle druhé na šňůru, je délka šňůry rovna obvodu trojúhelníka ABC . Kolik je utěrek?

4. Je dáný kruh K se středem S a poloměrem r ; mimo kruhu K je dáný rovnostranný trojúhelník ABC , kterého strany mají délku a . Označme $A'B'C'$ trojúhelník, který vznikl posunutím trojúhelníka ABC a který leží vně kruhu K . Určete a narysujte množinu M všech takto zostrojených bodů A' .

5. V rovině jsou dány body A, M, N , které neleží v přímce. Sestrojte

pravoúhelník $ABCD$ tak, aby přímky BC , CD procházely po řadě body M , N a aby platilo $AB : BC = 2 : 5$.

6. Je dána čtvercová šachovnice o 25 polích. Určete počet všech čtverců, z nichž každý má všechny své vrcholy ve vrcholech čtverců šachovnice.

Kategorie Z

1. Ve sklepě JZD jsou dva sudy vína; v jednom je 800 litrů vína po 10,— Kčs, v druhém 120 litrů vína po 8,— Kčs.

a) Jaké stejné množství vína je třeba vzít z každého sudu a nalít do druhého sudu tak, aby v obou sudech vzniklo víno téže ceny za jeden litr a jaká bude cena za jeden litr směsi při zachování celkové ceny vína.

b) Řešte tuto úlohu obecně: V sudě A je a litrů vína po m Kčs, v druhém sudě B je b litrů vína po n Kčs.

2. Dokažte, že pro každá dvě čísla a , b nabývá výraz

$$V = a^4 + b^4 - 2ab(b^2 - ab - a^2)$$

nezáporné hodnoty.

V kterém případě je tento výraz roven nule?

3. Jsou dána čísla p , q ($p > q > 0$). Vypočtete objem tělesa $ABCA'B'C'$ ohraničeného trojúhelníkem ABC se stranami $BC = p^2 + q^2$, $CA = p^2 - q^2$, $AB = 2pq$, dále trojúhelníkem $A'B'C'$ a lichoběžníkovými stěnami $ABB'A'$, $BBC'B'$, $CAA'C'$, které jsou kolmé na rovinu ABC a mají základny o délkách $AA' = p - q$, $BB' = p$, $CC' = p + q$.

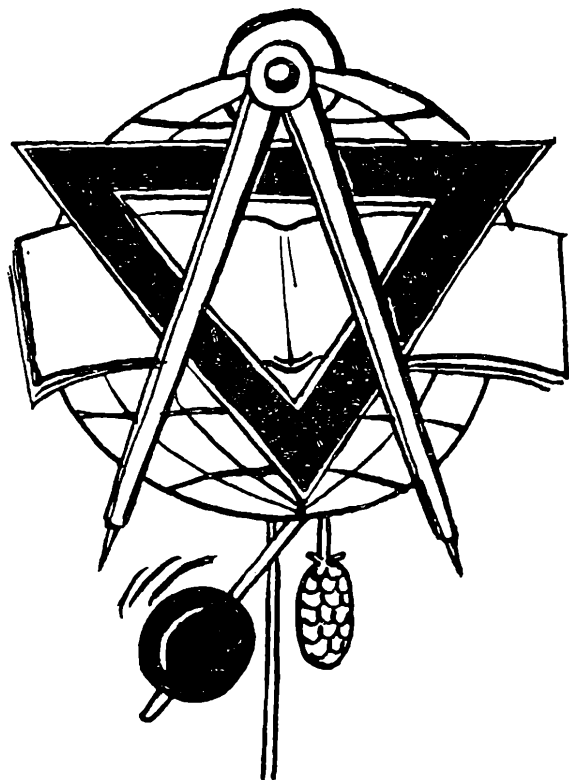
4. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r = 6 \text{ cm})$ a bod M , pro který platí $MS = 2 \text{ cm}$.

Sestrojte trojúhelník ABC s vrcholy na kružnici k tak, aby bod M byl středem strany AB a přímka BS byla těžnicí trojúhelníka ABC . Kolik má úloha řešení?

Seznam vítězů a úspěšných řešitelů III. kola kat. A ve XX. roč. MO

Vítězové

1. Jan Brychta, 3a, gymnasium Pražáčka, Praha 3
2. Štefan Sakaloš, 3d, SVŠ Prievidza
3. Pavel Dušek, 3g, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2
až Ján Franců, 3b, SVŠ J. Hronca, Bratislava
5. Miroslav Kmošek, 2a, gymnasium, ul. kpt. Jaroše, Brno
6. Anton Černý, 3b, SVŠ J. Hronca, Bratislava
až
7. Andrej Kugler, 3g, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2
8. Miroslav Šůra, 3b, gymn. ul. Arabská, Praha 6



• R Ů Z N Ě
• R Ů Z N Ě
• R Ů Z N Ě

Profesor V. A. Fok

Dr. JAN HORSKÝ, Brno

V tomto, v pořadí již třetím¹⁾ zamyšlení se vracím k další z velkých postav světové fyziky, tentokrát k V. A. Fokovi, profesoru teoretické fyziky Leningradské university a dlouholetému řádnému členu sovětské akademie věd.

Profesor Fok se letos dožívá sedmdesáti tří let. Právem se čtenář může ptát, proč právě tohle výročí vede autora k sepsání článku. Vždyť se tak mohlo učinit před třemi roky. To je jistě pravda, ale ona ani ta třiasedmdesátka není bez půvabu. Vždyť ten sedmý křížek tu zůstává a ta trojka připomíná, že V. A. Fok pronikavě zasáhl do obou základních současných fyzikálních teorií — do kvantové fyziky i do teorie relativity. Protože navíc profesor Fok patří k předním žijícím teoretickým fyzikům, zdá se mi, že již není důvodu takovýto článek nesepsat.

V. A. Fok se narodil koncem roku 1898 v Petrohradě jako syn velmi vzdělaného lesního inženýra. Studium fyziky ukončil v r. 1922 na Lenin-

¹⁾ Albert Einstein, *Rozhledy matem. fyzikální*, č. 8, 1964—65, str. 381. Akademik L. D. Landau zemřel, *Rozhledy matem. fyzikální*, č. 1, 1968—69, str. 50.

gradské universitě a již tehdy měl pro tisk připraveny dvě samostatné vědecké práce (vyšly tiskem v r. 1924). Matematická fyzika se v této době stává centrem jeho vědeckého zájmu — nejprve řešil problémy spojené s matematickými problémy aplikované fyziky, později problémy spojené s rovinnou teorií pružnosti, s difusí světla.

Nástup kvantové mechaniky zachytil mladý Fok ihned, neboť v roce 1926 publikuje práci reagující na Schrödingerovu teorii. Od této doby se práce V. A. Foka převážně soustřeďuje na kvantovou teorii, kde dosáhl patrně i největších úspěchů.

K nim bezpochyby přispěly i Fokovy cesty do zahraničí, do Paříže a především do tehdy světového centra fyziky, městečka Göttingen. Zde si také získal pověst i vynikajícího matematika. A být dobrým matematikem je přece cennou devizou pro teoretického fyzika. A tak se po několika dalších výsledcích z oblasti kvantové teorie V. A. Fok zařazuje mezi přední světové teoretické fyziky. Jsou to především práce týkající se mnohaelektronových systémů, aproximačních metod a konečně práce z kvantové teorie pole.

Patrně není možné vyjádřit výsledky Fokovy práce v kvantové teorii prostými slovy. Nebudu se tedy pokoušet o nemožné, místo toho uvedu, že například ve velmi známé učebnici prof. Schwebera „An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory“ je Fokovo jméno mnohokrát citováno a že vedle úplné citace šesti jeho prací z tohoto oboru je celá jedna kapitola přímo spojena s jeho jménem a nese název „Relativistické metody ve Fokově prostoru“.

Už nás tedy ani mnoho nemůže překvapit konstatování, že V. A. Fok úspěšně zasáhl i do rozvoje teorie relativity. Počátkem jeho výzkumů v této oblasti je jeho znamenitá práce o pohybu konečných těles v obecné teorii relativity. Vycházejí ze svých vlastních dalších výsledků v této oblasti, přichází na pořad i řešení otázek obecnějšího a principiálnějšího charakteru. Jde především o jeho rozbor obecného principu relativity v souvislosti s požadavkem kovariance rovnic a o další obecné problémy v této teorii. Pro zajímavost opět uvedu, že na příklad ve znamenité monografii J. L. Andersona „Principles of Relativity Physics“ je Fok citován čtyřikrát (známý relativista prof. Infeld dvakrát) a že Fokovým názorům je zde věnováno dosti místa. Fokovy názory a výsledky jeho práce v relativitě jsou shrnuty v jeho dobře známé knize „Teorija prostranstva, vremeni a tjažotěnija“, která byla přeložena do němčiny i do angličtiny a která naší střední generaci teoretických fyziků sloužila i jako solidní učebnice.

Svojí povahou má teoretická fyzika blízko k filosofii. Této skutečnosti věnoval V. A. Fok nezvykle mnoho pozornosti. Aktivně se účastní diskusí o principiálních otázkách kvantové mechaniky i teorie relativity. Je přitom dobře známo, že vést takovéto diskuse není snadnou záležitostí. Je nutno uvést, že V. A. Fok vždy zdůrazňuje důležitost vlivu

myšlenek teoretické fyziky na filosofii a že vede boj proti vulgárnímu materialismu ve prospěch materialismu důsledně vědeckého.

Každý, kdo alespoň cítí, kolik práce teoretického fyzika je skryto třebaš pod tak často užívanou větou typu „...fyzik X ukázal, že platí tvrzení A ...“ také pochopí, že ve více než 200 vědeckých pracech a pěti knihách V. A. Foka je skryto velmi mnoho cenných výsledků lidského ducha.

Přidáme-li k tomu všemu i fakt, že se stěží najde učebnice kvantové mechaniky, kvantové teorie pole či teorie relativity, kde by v té či oné formě nebyly Fokovy myšlenky a výsledky rozvíjeny, máme před sebou dosti výstižný obraz jednoho z předních žijících teoretických fyziků-profesora teoretické fyziky V. A. Foka.

Zapomenutý astronom František Doutlík

90. výročí narození Františka Doutlíka (nar. 27. 12. 1880 v Kutné Hoře) přešlo úplně bez povšimnutí a lze se domnívat, že i jeho letošní 20. výročí smrti (23. 12. 1951) bude jen příležitostí k místní vzpomínce. A přece k jménu Františka Doutlíka se váže upozornění na jeho práci, kterou věnoval studiu astronomie a její popularisaci ve škole i na veřejnosti. Vystudoval totiž učitelský ústav a působil jako učitel v Žirovnici. V r. 1909 vydal v Topičově edici „Osení“ příručku Malé hvězdářství, populární výklad určený především mladému čtenáři. Doutlíka zaujala „říše hvězd“ také proto, že v astronomických poznatcích nalézal velmi mnoho argumentů pro ateistickou propagandu, v níž působil. Svůj výklad založil přirozeně na znalosti astronomické literatury. Vedl své žáky i k přímému pozorování hvězdné oblohy. Ze Žirovnice přešel do Kamenice nad Lipou, kde po odchodu Václava Škorpíka (1873–1949), také regionálního spisovatele a vlastivědného pracovníka, se stal ředitelem školy. Jeho zájmy se rozšířily o další oblasti: psal léta městskou kroniku, vystupoval jako výkonný hudebník, zpěvák, osvětový činitel. Zájem o astronomii však u něho neochabl nikdy. Těmito několika řádky bych chtěl vzpomenout jeho osobnosti i díla, stojícího jistě na okraji popularisace astronomie, přece však cenného a překvapivého z hlediska regionálního.

Literatura

V. I. Smirnov, Akademik V. A. Fok, Leningrad 1965.

Josef Bílek

Ze zahraniční literatury

V Zagrebu vychází časopis „*Matematičko fizički list*“, který je určen studentům středních škol. Zde je několik příkladů vyňatých z posledního čísla tohoto časopisu.

1. Jestliže o reálných číslech x, y, z platí $xyz = 1$, potom též platí

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

Dokažte.

2. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a její libovolný průměr AB . Mimo tuto kružnici je dán bod L . Použitím jediného pravítka narýsujte kolmici z bodu L na přímkou AB .

3. Jestliže a, b, c jsou kladná reálná čísla, o nichž platí

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0,$$

pak též platí

$$(a+b+c)^3 = 27abc.$$

Dokažte.

4. Dokažte, že neurčitá rovnice

$$2x^2 - 5y^2 = 7$$

nemá řešení vyjádřené přirozenými čísly.

5. Jestliže a, b, c jsou po řadě délky odvěsen a přepony, pak platí

$$\log_{(b+c)} a + \log_{(c-b)} a = 2 \log_{(b+c)} a \cdot \log_{(c-b)} a.$$

6. Ze všech čtyřúhelníků, jejichž strany mají délky a, b, c, d , má největší obsah čtyřúhelník tětíkový. Dokažte.

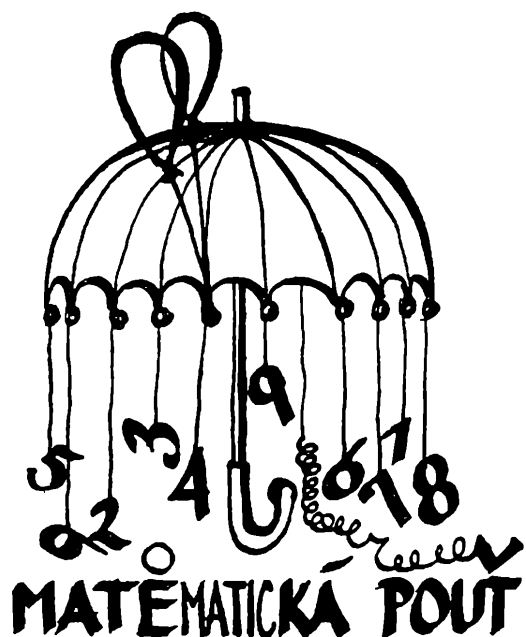
S. H.

Má-li zlořádům lidským nějak bráněno býti, to skrze

rozumné a prozřetelné mládeže vedení díti se musí.

J. A. KOMENSKÝ

MATEMATICKÉ ZÁBAVY



Co je moc, to je moc

Těmito slovy vyjádřil Zmatlík svůj údiv nad další zamotanou historií s věkem, kterou si přečetl v jedné knížce. Posuďte sami:

Věkový rozdíl mezi Hankou a Mankou je čtyři roky. Mance je právě tolik, kolik bude Hance, až Mance bude třikrát tolik jako bylo Hance, když Mance bylo dvakrát tolik, kolik bylo Hance, když Manka dosáhla polovičního věku, jaký má Hanka právě teď. Určete věk Manky a Hanky.

Nu, také jste si nějak ulevili? Ale nevzdávejte, i Zmatlík tvrdě bojoval, klopytal, ale nakonec zvítězil a dozvěděl se tajemství.

Jaroslav Šedivý

Turnaj v kopané

Čtyři fotbalová mužstva — označme je A, B, C, D — sehrála spolu turnaj, při kterém padlo celkem 18 branek. Každé mužstvo hrálo vždy s každým. Vyhraný zápas znamenal pro vítěze zisk 2 bodů, remíza 1 bod pro každého a poražený celek nezískal žádný bod. Z turnaje vyšlo mužstvo B jako vítěz; získalo 5 bodů a celkový poměr branek byl 6 : 2. Při rozboru výsledků se zjistila řada zajímavostí. Mužstvo C hrálo dvakrát nerozhodně, ale všechny ostatní zápasy skončily vždy rozdílem jedné branky, ale s různým poměrem. Jediná výjimka byl zápas B s D, který skončil poměrem 4 : 1 pro B. Při zápasu A s C nepadla ani jedna branka a nejvíc jich padlo při zápase C s D.

Vaší úlohou je zjistit pořadí jednotlivých klubů a výsledky jednotlivých zápasů.

S. H.

Řešení Zmatlíkovy záhady Co je moc, to je moc

Sestavíme tabulku, ve které bude na stejném řádku zapsáno, jaký věk měla Manka a Hanka v témž kalendářním roce; věk Manky označíme

	Věk Manky	Věk Hanky
v současnosti	m	h
	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} - 4$
	$2\left(\frac{h}{2} - 4\right)$ tj. $h - 8$	$2\left(\frac{h}{2} - 4\right) - 4$ tj. $h - 12$
	$3(h - 12)$ tj. $3h - 36$	$3(h - 12) - 4$ tj. $3h - 40$
v současnosti	$3h - 40$	$3h - 44$

písmenem m , věk Hanky písmenem h . Předpokládejme, že Manka je starší.

Z tabulky dostáváme pohodlně rovnici

$$h = 3h - 44 \text{ a její řešení } h = 22, \text{ dále } m = 26.$$

Předpoklad, že Hanka je starší, vede obdobně k rovnici

$$h = 3h + 44, \text{ jejíž řešení } h = -22 \text{ nevyhovuje.}$$

Turnaj v kopané

	A	B	C	D	body	score
A	—	0 : 1	0 : 0	2 : 1	3	2 : 2
B	1 : 0	—	1 : 1	4 : 1	5	6 : 2
C	0 : 0	1 : 1	—	4 : 3	4	5 : 4
D	1 : 2	1 : 4	3 : 4	—	0	5 : 10

J. Klepešta - A. Rükl:
Souhvězdí

Artia, Praha 1971. 273 stran.
Cena vázaného výtisku Kčs 32,—.

„V době, kdy se tak často mluví o cestách do meziplanetárního prostoru, stoupá zájem o hvězdy jako o majáky při navádění automatických sond na oběžnou dráhu. Při takových příležitostech se dočítáme v denním i odborném tisku o podivuhodných názvech hvězd a souhvězdí.“ Těmito slovy uvádějí autoři zajímavou publikaci, která již vyšla v několika světových jazycích a jejíhož českého vydání jsme se letos dočkali. Na 64 stranách úvodního textu autoři čtenáře seznámují s nejdůležitějšími pojmy ze stelární astronomie a z astrofyziky a uvádějí do problematiky orientace na hvězdné obloze. Text je psán zajímavou a srozumitelnou formou a je doprovázen četnými názornými obrázky. Zájemci o astronomii, kteří nemají k dispozici hvězdářský dalekohled, uvítají kapitolu věnovanou výkladu o objektech, které můžeme pozorovat na obloze triedrem. Jiná kapitola pojednává o viditelnosti souhvězdí v různých zeměpisných šířkách a v různých ročních dobách, je zde uveden také přehled o viditelnosti planet Venuše, Marsu, Jupitera a Saturna v letech 1967 až 1980.

Jádrem knihy je 88 mapek souhvězdí severní a jižní oblohy. Souhvězdí jsou sestavena abecedně podle latinských (mezinárodních) názvů souhvězdí, tj. od souhvězdí Andromedy až po souhvězdí Vulpecula. Pro snadnou orientaci na mapkách je jako první zařazena mapa neexistujícího souhvězdí, pro které si autoři vymysleli název Constel. Na něm vysvětlují všechny

symbols, používané na mapkách skutečných souhvězdí. Mapky jsou rýsovány v rovníkových souřadnicích; na bledě modrém podkladě je sytou modrou barvou znázorněna plocha souhvězdí. Hlavní hvězdy v souhvězdích jsou spojeny bílými čarami (tzv. alignment), které slouží k zapamatování tvaru souhvězdí. Zdánlivé hvězdné velikosti hvězd jsou znázorněny pomocí různě velkých kotoučků a barva kotoučku rozděluje hvězdy do tří kategorií podle jejich vzdálenosti: bílé jsou vyznačeny hvězdy do vzdálenosti 100 světelných roků, oranžově od 100 do 1000 světelných roků a červeně nad 1000 světelných let. Na mapkách jsou dále odlišeny dvojhvězdy a proměnné hvězdy; u otevřených hvězdokup, galatických mlhovin, planetárních mlhovin, kulových hvězdokup a galaxií jsou bílou značkou označeny objekty viditelné prostým okem nebo kukátkem, černou značkou pak objekty viditelné ve větším dalekohledu. Zkratky názvů souhvězdí jsou vyznačeny v pravém horním rohu na barevném podkladě, který udává, zda jde o souhvězdí severní oblohy (červený podklad), jižní oblohy (oranžový) nebo o rovníkové souhvězdí (černý podklad). U každé mapky je na protější straně stručný popis nejjasnějších hvězd a zajímavých objektů v daném souhvězdí. Závěr knihy tvoří stručný slovníček astronomických pojmů a abecední seznam názvů hvězd uvedených v textu a na mapách.

Závěrem můžeme konstatovat, že recenzovaná kniha patří mezi velmi zdařilá díla a to jak po stránce obsahové, tak i po stránce estetické a reprodukční. Všem zájemcům o astronomii je vřele doporučujeme.

Dr. J. Široký

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ

A

abeceda
abecední
 abecední pořadí
absolutně
absolutní
 absolutní hodnota
abstraktní
absurdum, spor
aditivní
afinní
 afinní zobrazení
afinita
alespoň
algebra
algebraický
 algebraický výraz
algoritmus
alternující
amplituda
analogie
analogický
analýza
analytický
anharmonický
antisymetrický
anulovat
aplikace

alphabet *m*
alphabétique
 ordre *m* alphabétique
absolument
absolu, e
 valeur *ž* absolue
abstrait, e
absurde *m*
additif, ive
affine
 application *ž* affine
affinité *ž*
au moins
algèbre *ž*
algébrique
 expression *ž* algébrique
algorithme *m*
alterné, e
amplitude *ž*
analogie *ž*
analogique
analyse *ž*
analytique
anharmonique "
antisymétrique, symétrique gauche
annuler
application *ž*

aplikovaná matematika
 aproximace
 arabská číslice
 argument
 aritmetický
 aritmetická řada

 aritmetický průměr
 aritmetika
 asociativní
 asymptota
 axiom
 axiomatický
 axiomatický systém
 axonometrie
 azimut

mathématiques *z* appliquées
 approximation *z*
 chiffre *m* arabe
 argument *m*
 arithmétique
 progression *z* arithmétique
 série *z* arithmétique
 moyenne *z* arithmétique
 arithmétique *z*
 associatif, ive
 asymptote *z*
 axiome *m*, proposition *z* première
 axiomatique
 axiomatique *z*
 axonométrie *z*
 azimut *m*

B

báze
 bezesporný
 bezprostřední důsledek věty
 bilineární
 binomický
 binomická věta
 blížit
 blížit se k číslu

 bludný kruh
 boční stěna
 bod
 bod v nekonečnu
 dotykový bod
 koncový bod
 počáteční bod
 samodružný bod
 vnitřní bod množiny
 úběžný bod
 bodový
 bokorys
 bráti co v úvahu
 buď... anebo.

base *z*
 non contradictoire
 corollaire *m*
 bilinéaire
 binomial, e
 binôme *m* de Newton
 rapprocher, converger
 se rapprocher d'un nombre *m*
 converger vers un nombre *m*
 cercle *m* vicieux
 face *z* latérale
 point *m*
 point á l'infini *m*
 point de contact *m*
 extrémité *z*, point d'arrivée *z*
 point initial
 point double
 point intérieur á un ensemble *m*
 point de fuite *z*
 ponctuel, elle
 élévation *z* latérale
 tenir compte de
 ou. ou..

C

celistvý, celý
 celé číslo

 celkový
 celkový součet
 cifra
 což se mělo dokázat
 cvičení
 cykl

entier, ère
 nombre *m* entier
 entier *m*
 total, e, aux
 total *m*
 chiffre *m*
 ce qu'il fallait démontrer
 exercice *m*
 cycle *m*

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

2

ROČNÍK 50, 1971-1972, ŘÍJEN



ROČNÍK 50
ŘÍJEN 1971

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT Praha
s redakční radou

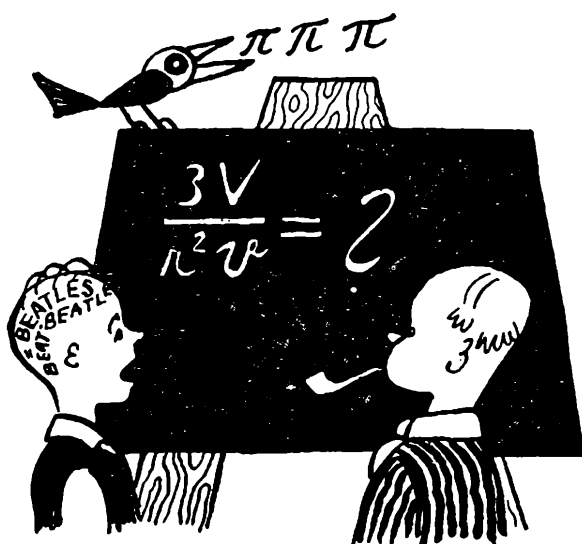
REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 g, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Helleroová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

J. Liška: O řešení jednoho typu soustavy rovnic	49
Dr. J. Morávek, CSc.: O jedné rekurentní metodě pro řešení extrémálních úloh	53
Dr. F. Harant, CSc.: Jarolímkovy konstrukce	61
Miroslav Kružík: Historický vztah mezi fyzikou a technikou	66
A. Wohlmuthová: Termonukleární reakce zdroj energie	71
RNDr. M. Šíroká-RNDr. J. Šíroky: Jsou pulsary neutronové hvězdy?	76
Naše soutěž	79
Doc. O. Setzer: XIII. MO očima účastníků	81
S Horák: Předmět snažení 116 olympioniků	84
Doc. K. Drábek, CSc.: 25. výročí narození G. Monge	86
F. X. z H.: Vzpomínky letce konstruktéra	89
J. Kotyk: Rozhledy pomáhají škole	92
Nejmladším čtenářům	96
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky



MATEMATIKA

0 řešení jednoho typu soustavy rovnic

JAN LIŠKA, PF Plzeň

Mějme soustavu rovnic $x^2 + xy + y^2 = 4$, $x + xy + y = 2$. Trojčlen $x^2 + xy + y^2$ z levé strany první rovnice vyjádříme ve tvaru $(x + y)^2 - xy$. Rovnice pak přepíšeme takto

$$(x + y)^2 - xy = 4, \quad x + y + xy = 2.$$

V obou rovnicích jsou neznámé x , y jednak ve dvojčlenu $x + y$, jednak v jednočlenu xy . Nabízí se zavést nové neznámé u , v pomocí substituce $u = x + y$, $v = xy$. Z rovnic původní soustavy dostáváme nové rovnice pro neznámé u , v

$$u^2 - v = 4, \quad u + v = 2$$

Řešíme-li tuto soustavu, dostaneme 2 dvojice kořenů $u_1 = 2$, $v_1 = 0$, $u_2 = -3$, $v_2 = 5$. Pomocí substitučních rovnic určíme řešení původní soustavy rovnic.

Všimněme si, že levé strany rovnic původní soustavy jsou trojčleny takového tvaru, že záměnou x a y dostaneme opět tytéž trojčleny.

Definujeme. Mnohočlen v proměnných x a y nazveme symetrický, jestliže se nezmění při vzájemné záměně x a y .

Symetrickými mnohočleny v proměnných x , y jsou např.: $x + y$, xy , $x^2 + y^2$, $5x^2y^3 + 5x^3y^2 + x^4 + y^4$. Naproti tomu např. mnohočlen $3x^2y + 2xy + x$ není symetrickým.

Metodu řešení, kterou jsme naznačili v úvodním příkladu, lze uplatnit u celé skupiny soustav rovnic o 2 neznámých, a to u typu

$$\begin{aligned} L_1(x, y) &= P_1(x, y) \\ L_2(x, y) &= P_2(x, y), \end{aligned}$$

kde $L_i(x, y)$, $P_i(x, y)$, $i = 1, 2$, jsou symetrické mnohočleny v proměnných x, y .

Symetrické mnohočleny $x + y$, xy nazveme elementárními symetrickými mnohočleny v proměnných x a y a označíme je $u = x + y$, $v = xy$. Pomocí těchto elementárních symetrických mnohočlenů je možné vyjádřit každý symetrický mnohočlen v proměnných x, y , o čemž hovoří věta.

Věta. Každý symetrický mnohočlen v proměnných x a y je možné vyjádřit jako mnohočlen v proměnných u, v , kde $u = x + y$, $v = xy$.

Důkaz provedeme ve dvou částech.

1. Tvrzení věty dokážeme pro symetrické dvojčleny tvaru $x^n + y^n$, n přirozené číslo. Dvojčleny $x^n + y^n$ budeme označovat s_n a nazývat součty n -tých mocnin proměnných x a y .

Pro $n = 1$ je zřejmě $s_1 = x + y = u$,

pro $n = 2$ vypočteme $s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$.

Předpokládejme, že tvrzení věty platí v případě součtu n -tých mocnin s_n pro nějaké přirozené číslo $n > 2$.

Rovnost $s_n = x^n + y^n$ vynásobíme dvojčlenem $x + y$,

dostaneme $s_n(x + y) = (x^n + y^n)(x + y)$

a dále $s_n \cdot u = x^{n+1} + xy^n + x^n y + y^{n+1} =$
 $= x^{n+1} + y^{n+1} + xy(x^{n-1} + y^{n-1}) = s_{n+1} + v \cdot s_{n-1}.$

Je tedy $s_{n+1} = u \cdot s_n - v \cdot s_{n-1}$, což je rekurentní vzorec pro s_{n+1} , kde n jsou přirozená čísla $n > 2$.

Dvojčlen s_n lze tedy vyjádřit jako mnohočlen v proměnných u, v , neboť pro s_1 a s_2 jsme to provedli a za předpokladu, že tvrzení platí pro s_n , kde n je jisté přirozené číslo, jsme ukázali platnost tvrzení i pro s_{n+1} . Z provedení důkazu je zřejmé, že jsme užili metodu matematické indukce.

2. Každý symetrický mnohočlen v proměnných x a y může obsahovat jen členy dvojího typu.

a) Jednak jednočleny, ve kterých je x i y v téže mocnině

$$ax^k y^k = a(xy)^k = a \cdot v^k$$

a lze je tedy vyjádřit pomocí v ;

b) jednak jednočleny, ve kterých je x i y v různých mocninách

$$bx^k y^l, \text{ kde } k \neq l.$$

Vzhledem k tomu, že daný mnohočlen je symetrický, obsahuje zřejmě se členem $bx^k y^l$ i člen $bx^l y^k$. Jsou tedy v symetrickém mnohočlenu (po

provedené úpravě) dvojčleny tvaru $b(x^k y^l + x^l y^k)$. Bez újmy na obecnosti položíme $k < l$. Pak dvojčlen $b(x^k y^l + x^l y^k)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$b(x^k y^l + x^l y^k) = b x^k y^k (y^{l-k} + x^{l-k}) = b \cdot v^k \cdot s_{l-k}.$$

Podle části 1. důkazu lze vyjádřit s_{l-k} jako mnohočlen v proměnných u, v , pak také uvažovaný dvojčlen lze vyjádřit pomocí u, v . Protože každý symetrický mnohočlen může po úpravě obsahovat pouze jednočleny z odstavce a) a dvojčleny z odstavce b), lze ho vyjádřit jako mnohočlen v proměnných u, v . Tím je věta dokázána.

Na základě 1. části důkazu předcházející věty můžeme postupně vyjádřit součty n -tých mocnin $s_n = x^n + y^n$ pomocí elementárních symetrických mnohočlenů $x + y = u, xy = v$.

Již víme, že

$$s_1 = x + y = u,$$

$$s_2 = x^2 + y^2 = u^2 - 2v$$

a pomocí rekurentního vzorce $s_{n+1} = u \cdot s_n - v \cdot s_{n-1}$ stanovíme vyjádření dalších součtů

$$s_3 = x^3 + y^3 = u s_2 - v s_1 = u(u^2 - 2v) - v u = u^3 - 3uv,$$

$$s_4 = x^4 + y^4 = u s_3 - v s_2 = u(u^3 - 3uv) - v(u^2 - 2v) = \\ = u^4 - 4u^2 v + 2v^2,$$

$$s_5 = x^5 + y^5 = u s_4 - v s_3 = u(u^4 - 4u^2 v + 2v^2) - v(u^3 - 3uv) = \\ = u^5 - 5u^3 v + 5uv^2.$$

Takto lze pokračovat dále.

Nyní ukážeme, jak užijeme možnosti vyjádření každého symetrického mnohočleny v proměnných x, y pomocí elementárních symetrických mnohočlenů $x + y = u, xy = v$.

Máme řešit soustavu rovnic $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91, x^2 - xy + y^2 = 7$. Položíme $u = x + y, v = xy$ a vyjádříme mnohočleny levých stran rovnic pomocí u, v . e

$$x^4 + y^4 + x^2 y^2 = s_4 + v^2 = u^4 - 4u^2 v + 2v^2 + v^2 = u^4 - 4u^2 v + 3v^2,$$

$$x^2 + y^2 - xy = s_2 - v = u^2 - 2v - v = u^2 - 3v.$$

Budeme řešit novou soustavu $u^4 - 4u^2 v + 3v^2 = 91, u^2 - 3v = 7$. Z druhé rovnice této soustavy vypočteme

$$v = \frac{u^2 - 7}{3} \text{ a dosadíme do první z rovnic:}$$

$$u^4 - 4u^2 \frac{u^2 - 7}{3} + 3 \left(\frac{u^2 - 7}{3} \right)^2 = 91 \\ u^4 - \frac{4u^4 - 28u^2}{3} + \frac{u^4 - 14u^2 + 49}{3} = 91 \quad / \cdot 3$$

$$3u^4 - 4u^4 + 28u^2 + u^4 - 14u^2 + 49 = 273$$

$$14u^2 = 224$$

$$u^2 = 16$$

$$u_1 = 4, u_2 = -4$$

$$\text{pak } v_1 = v_2 = 3.$$

Nyní vypočteme kořeny původní soustavy.

$$1. \ x + y = 4$$

$$xy = 3$$

$$y = 4 - x$$

$$x(4 - x) = 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Dostáváme $x_1 = 3, x_2 = 1, y_1 = 1, y_2 = 3$.

$$2. \ x + y = -4$$

$$xy = 3$$

$$y = -x - 4$$

$$x(-x - 4) = 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0.$$

Dostáváme $x_3 = -1, x_4 = -3, y_3 = -3, y_4 = -1$.

Soustava má tedy 4 řešení: $x_1 = 3, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 3;$

$$x_3 = -1, y_3 = -3; x_4 = -3, y_4 = -1.$$

Poznámka 1. Při řešení soustavy rovnic $x + y = u, xy = v$ pro neznámé x, y je výhodnější a elegantnější užít známých vztahů mezi kořeny a koeficienty normovaného tvaru kvadratické rovnice. Jsou-li ξ_1, ξ_2 kořeny kvadratické rovnice $z^2 - uz + v = 0$, pak 2 dvojice kořenů x, y jsou $x_1 = \xi_1, y_1 = \xi_2; x_2 = \xi_2, y_2 = \xi_1$.

Poznámka 2. V uvedeném příkladě jsme dospěli k nové soustavě rovnic, kterou umíme řešit prostředky středoškolské matematiky. Ne v každém příkladě toho dosáhneme; pro řešení takového příkladu musíme užít poznatků, které přesahují osnovy algebry na střední škole. V dalších příkladech na procvičení však toho nebude třeba.

Příklady k procvičení

$$1. \ x^3 + y^3 = 35$$

$$x + y = 5$$

$$2. \ x^2 - xy + y^2 = 19$$

$$x - xy + y = 7$$

$$3. \ x + y = 4$$

$$x^4 + y^4 = 82$$

$$4. \ x^2 + y^2 = 7 + xy$$

$$x^3 + y^3 = 6xy - 1$$

Literatura

V. G. Boltjanskij, N. J. Vilenkin: Symetrie v algebře, Moskva 1967, Nauka, 282 str.

0 jedné rekurentní metodě pro řešení extrémálních úloh*

Dr. JAROSLAV MORÁVEK, CSc.

S pojmem extrémálního problému (tj. úlohy o nalezení maxima nebo minima) se čtenář seznámil již na střední škole. Téměř všechny středoškolské metody řešení extrémálních úloh používají buď elementárních vlastností kvadratické funkce (např. úloha o nalezení minima výrazů $x^2 + x + 1$, nebo $|x| + \frac{1}{|x|}$), nebo různých elementárních geometrických úvah (např. úloha o nalezení dvojice bodů P, Q ležících v tomto pořadí na dvou daných mimoběžkách p, q a majících nejmenší vzájemnou vzdálenost).

Cílem našeho článku je povědět několik slov o jiné elementární metodě pro řešení některých extrémálních problémů pro funkce více proměnných. Tento způsob vyplývá z obecné metody dynamického programování. Jeho základní myšlenka záleží v jistém „rozkladu“ výchozího extrémálního problému na konečnou posloupnost jednodušších extrémálních problémů. Tyto extrémální problémy se řeší postupně s použitím jistého rekurentního vztahu.

Výklad si nečiní ani v nejmenším nároky na jakékoli obecné pojetí. Naším cílem je seznámit čtenáře pouze s existencí metody. Pro ilustraci metody uvádím čtyři extrémální úlohy, z nichž první dvě řešíme podrobně a v případě třetí a čtvrté uvádíme pouze formulace problémů. Čtvrtou úlohu lze přirozeným způsobem zobecnit; takovým zobecněním vysvětlujeme podstatu tzv. principu optimálnosti dynamického programování. Protože vývoj metod dynamického programování byl silně ovlivněn potřebami aplikace matematiky v jiných vědních oborech, uvádějí se i v tomto článku některé (značně zjednodušené) příklady aplikace v ekonomii a technice. Přicházíme k první úloze.

Úloha 1. Nechť je dána posloupnost n reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Budeme uvažovat množinu všech výrazů tvaru

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_j, \quad (1)$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; $i \leq j$. Výraz (1) znamená skutečně součet $j - i + 1$ čísel v případě $i < j$; v případě $i = j$ je jeho hodnota a_i . Naším úkolem je určit hodnotu nejmenšího ze součtů (1).

*) Motivem k napsání tohoto článku byla autorova přednáška pro matematické olympioniky na letním soustředění v Martině roku 1970.

Ve speciálním případě, že všechna čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nezáporná, je hledanou minimální hodnotou zřejmě číslo $\min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. V obecném případě je problém obtížnější. Pro jeho řešení lze použít tohoto algoritmu: Utvoříme všechny součty (1) (tj. celkem $\binom{n}{2} + n$ čísel) a z těchto součtů nalezneme nejmenší. Algoritmy tohoto typu se obvykle nazývají *triviální*, protože neobsahují žádnou „netriviální“ myšlenku a postupují metodou těžkopádného vyzkoušení všech možností. Náš triviální algoritmus musí určit a vyzkoušet $\binom{n}{2} + n$ čísel.

Uvedeme nyní jeden „netriviální“ algoritmus pro řešení úlohy 1, který vystačí s určením a prozkoumáním pouhých n čísel.

Hodnotu nejmenšího ze součtů (1) označíme f^* , tj.

$$f^* = \min \{a_i + a_j \mid i, j \text{ celá, } 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

a pomocí f_j označíme nejmenší ze součtů (1) při pevném j a pro $i = 1, 2, \dots, j$, tj.

$$f_j = \min \{a_i + a_j \mid i = 1, 2, \dots, j\} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Algoritmus počítá posloupnost $f_1, f_2, \dots, f_n, f^*$ rekurentním způsobem, vyplývajícím z následující věty.

Věta 1. O číslech $f_1, f_2, \dots, f_n, f^*$ platí

- a) $f_1 = a_1$,
- b) $f_{j+1} = a_{j+1} + \min \{0, f_j\} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$.
- c) $f^* = \min \{f_1, f_2, \dots, f_n\} = \min \{f_j \mid j = 1, 2, \dots, n\}$.

Důkaz. Tvrzení a) je zřejmé.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f_{j+1} &= \min \{a_i + a_j + a_{j+1} \mid i = 1, 2, \dots, j+1\} = \\ &= \min \left\{ \min \{a_i + a_j + a_{j+1} \mid i = 1, 2, \dots, j\}, \right. \\ &\quad \left. \min \{a_i + a_j + a_{j+1} \mid i = j+1\} \right\} = \\ &= \min \left\{ \min \{a_i + a_j \mid i = 1, \dots, j\} + a_{j+1}, a_{j+1} \right\} = \\ &= \min \{f_j + a_{j+1}, a_{j+1}\} = a_{j+1} + \min \{f_j, 0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f^* &= \min \{a_i + a_j \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; i \leq j\} = \\ &= \min \left\{ \min \{a_i + a_j \mid i = 1, \dots, j\} \mid j = 1, \dots, n \right\} = \\ &= \min \{f_j \mid j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Důkaz je dokončen. Použití věty 1 ukážeme na číselném příkladu pro $n = 10$ a čísla a_j uvedená ve druhém řádku tabulky 1.

Tabulka 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_j	-1	0	1	-2	3	-4	0	1	-2	1
f_j	-1	-1	0	-2	1	-4	-4	-3	-5	-4

Čísla f_j , vypočtená podle věty 1, jsou zapsána ve třetím řádku poslední tabulky. Hodnota minimálního ze součtů (1) je v našem případě $f^* = \min \{f_1, f_2, \dots, f_{10}\} = f_9 = -5$. Snadno nalezneme příslušný součet: je jím $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = -5$. Lze ukázat jednoduchou metodu pro nalézání příslušného minimálního součtu i v obecném případě; tuto otázku však ponecháváme stranou z důvodu omezeného rozsahu článku a přecházíme k další extrémální úloze.

Úloha 2. Máme určit maximum funkce (n proměnných)

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n) \quad (2)$$

na množině všech uspořádaných n -tic celých nezáporných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, splňujících rovnici

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a,$$

kde a je dané, celé nezáporné číslo a $g_1, g_2, \dots, g_n$ jsou dané funkce definované na množině $\{0, 1, \dots, a\}$.

Ukážeme jedno použití této extrémální úlohy na ekonomickou problematiku nejefektivnějšího rozdělení zdrojů. Předpokládejme, že v nějakém závodě pracuje a dělníků a výrobní proces probíhá v n různých dílnách, přičemž v každé dílně se produkce vyrábí samostatně od začátku až do konce, tj. žádná z dílen není závislá na ostatních. Dále budeme předpokládat, že výtěžek z měsíční produkce dílny, vyjádřený v penězích, je známou funkcí počtu dělníků, kteří v dílně pracují. Vedení závodu chce rozdělit dělníky do jednotlivých dílen takovým způsobem, aby měsíční výtěžek z celkové produkce závodu byl maximální. Označíme-li $g_j(x_j)$ výtěžek z měsíční produkce j -té dílny ($j = 1, \dots, n$) v závislosti na počtu dělníků x_j , kteří v dílně pracují, přicházíme zřejmě k extrémální úloze 2.

K popisu algoritmu pro řešení našeho extrémálního problému zavedeme toto označení: Symbolem f^* označíme maximální hodnotu funkce (2), tj.

$$f^* = \max \{g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = a\}^*,$$

*) $x_1, \dots, x_n$ jsou podle předpokladů celá, nezáporná. Poslední okolnost neuvádíme ani zde, ani v dalších obdobných zápisech.

a symbolem $f_j(x)$ ($j = 1, \dots, n; x = 0, 1, \dots, a$) označíme maximum funkce $g_1(x_1) + \dots + g_j(x_j)$ na množině

$$\{(x_1, \dots, x_j) \mid x_1 + \dots + x_j = x\},$$

tj.

$$f_j(x) = \max \{g_1(x_1) + \dots + g_j(x_j) \mid x_1 + \dots + x_j = x\}.$$

Zřejmě platí $f^* = f_n(a)$, takže k určení f^* stačí spočítat hodnoty $f_j(x)$ pro $x = 0, 1, \dots, a; j = 1, \dots, n$. Rekurentní metoda počítá $f_j(x)$ v pořadí pro $j = 1; x = 0, 1, \dots, a; j = 2; x = 0, 1, \dots, a; \dots \dots \dots; j = n; x = 0, 1, \dots, a$, při čemž přechod od j k $j + 1$ probíhá na základě jistého rekurentního vztahu, uvedeného v následující větě.

Věta 2. Platí

a) $f_1(x) = g_1(x)$ ($x = 0, 1, \dots, a$)

b) $f_{j+1}(x) =$

$$\begin{aligned} &= \max \{f_j(x - 0) + g_{j+1}(0), f_j(x - 1) + g_{j+1}(1), \\ &\quad f_j(x - x) + g_{j+1}(x)\} = \\ &= \max \{f_j(x - x_{j+1}) + g_{j+1}(x_{j+1}) \mid x_{j+1} = 0, 1, \dots, x\} \\ &\quad (x = 0, 1, \dots, a; j = 1, \dots, n - 1). \end{aligned}$$

Důkaz.

a) $f_1(x) = \max \{g_1(x_1) \mid x_1 = x\} = \max \{g_1(x)\} = g_1(x).$

b) Platí $f_{j+1}(x) =$

$$= \max \{g_1(x_1) + \dots + g_j(x_j) + g_{j+1}(x_{j+1}) \mid x_1 + \dots + x_j + x_{j+1} = x\},$$

tj. $f_{j+1}(x)$ je maximum funkce $g_1 + \dots + g_j + g_{j+1}$ na množině

$$\{(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}) \mid x_1 + \dots + x_j + x_{j+1} = x\}.$$

Poslední množinu vyjádříme jako sjednocení množin:

$$\begin{aligned} &\{(x_1, \dots, x_j, 0) \mid x_1 + \dots + x_j = x - 0\} \\ &\{(x_1, \dots, x_j, 1) \mid x_1 + \dots + x_j = x - 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\{(x_1, \dots, x_j, x) \mid x_1 + \dots + x_j = x - x\}$$

Z posledního vyjádření vyplývá tento způsob určení $f_{j+1}(x)$: Nalezneme maximum funkce $g_1 + \dots + g_j + g_{j+1}$ na každé z množin (3) a z nalezených „částečných“ maxim určíme maximální. Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} &f_{j+1}(x) = \\ &= \max \left\{ \max \{g_1(x_1) + \dots + g_j(x_j) \mid x_1 + \dots + x_j = x - 0\} + g_{j+1}(0), \right. \end{aligned}$$

$$\max\{g_1(x_1) + \quad + g_j(x_j) \mid x_1 + \quad + x_j = x - 1\} + g_{j+1}(1),$$

$$\begin{aligned} \max\{g_1(x_1) + \quad + g_j(x_j) \mid x_1 + \quad + x_j = x - x\} + g_{j+1}(x) &= \\ = \max\{f_j(x - 0) + g_{j+1}(0), f_j(x - 1) + g_{j+1}(1), \\ \dots, f_j(x - x) + g_{j+1}(x)\}. \end{aligned}$$

Důkaz je dokončen.

Použití dokázané věty ukážeme na číselném příkladu pro $n = 7$, $a = 6$ a pro funkce $g_1, g_2, \dots, g_7$ s hodnotami uvedenými v levé části tabulky 2. Čísla $f_j(x)$, vypočtená podle rekurentních vzorců věty 2, jsou

Tabulka 2

x	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	1	-10	1	1	1	-12	0	/	1	-9	-8	-7	-6	-18	-18
1	-3	1	4	-2	0	-10	2	\	-3	2	3	4	5	-7	-7
2	5	1	4	2	1	0	1	/	5	2	6	7	8	-4	-4
3	7	2	2	1	0	1	4	\	7	6	7	8	9	5	5
4	8	0	1	-3	1	-5	-2	/	8	8	10	11	12	8	8
5	-2	5	1	4	2	0	1	\	-2	9	12	13	14	9	10
6	1	-2	1	0	1	4	0	/	1	9	13	14	15	12	12

zapsána v pravé části této tabulky. Sloupce $f_1, f_2, \dots, f_7$ se vyplňují postupně, přičemž f_1 vznikne opsáním g_1 . Ukažme např. postup při výpočtu $f_6(4)$

$$\begin{aligned} f_6(4) &= \max\{f_5(4 - x_{j+1}) + g_6(x_{j+1}) \mid x_{j+1} = 0, 1, \dots, 4\} = \\ &= \max\{f_5(4) + g_6(0), f_5(3) + g_6(1), f_5(2) + g_6(2), f_5(1) + g_6(3), \\ &f_5(0) + g_6(4)\} = \max\{12 - 12, 9 - 10, 8 + 0, 5 + 1, 6 - 5\} = 8. \end{aligned}$$

Hledaná maximální hodnota v číselném příkladě je $f_7(6) = 12$. Příslušná 7členná posloupnost, pro kterou funkce $g_1 + g_2 + \dots + g_7$ nabývá svého maxima, je (2, 1, 1, 0, 0, 2, 0). Také v tomto případě ponecháváme stranou otázku nalezení n -tice, pro niž funkce $g_1 + g_2 + \dots + g_n$ v obecném případě nabývá maximální hodnoty.

Abychom si učinili představu o výhodnosti tohoto algoritmu, srovnáme jej s triviálním algoritmem, záležejícím v prozkoumání všech prvků množiny

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = a\} \quad (3)$$

a výběru maximální hodnoty $g_1(x_1) + \dots + g_n(x_n)$. Lze dokázat, že

počet prvků množiny (3) je $\binom{a+n-1}{n-1}$. Na druhé straně rekurentní metoda záleží v určení $n \cdot (a+1)$ čísel $f_j(x)$ pro $x = 0, 1, \dots, a$; $j = 1, 2, \dots, n$. V našem konkrétním číselném příkladě vyžaduje algoritmus dynamického programování určit tabulku obsahující $7^2 = 49$ čísel, zatímco triviální algoritmus vyžaduje vytvořit a prozkoumat $\binom{12}{6} = 924$ číselných hodnot.

Také další extrémální úlohu lze za jistých předpokladů výhodně řešit pomocí dynamického programování. Uvedeme však jen motivaci tohoto extrémálního problému, jeho matematickou formulaci a stručně se zmíníme o postupu při řešení; jakékoli podrobnosti však ponecháváme stranou.

Úloha 3. Obchodní loď s nosností b tun se vydává na cestu z jednoho přístavu do druhého a vzniká otázka o vhodné skladbě nákladu. Přitom je k dispozici n různých zboží, kde váha j -tého zboží ($j = 1, 2, \dots, n$) je a_j tun, a jeho cena je c_j jednotek měny. Máme navrhnout takové složení nákladu, aby jeho (celková) cena byla maximální a přitom aby nebyla překročena nosnost lodi.

Hledanou skladbu nákladu lze popsat uspořádanou n -ticí $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z nul a jedniček, kde položíme $x_j = 1$, jestliže j -té zboží je naloženo a $x_j = 0$ v opačném případě. Při použitém způsobu označení je cena nákladu $c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n$ jednotek měny, jeho váha je $a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n$ tuna přicházíme k tomuto extrémálnímu problému. Máme nalézt maximum funkce

$$c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n$$

na množině

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \begin{array}{l} x_j = 0, 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \leq b \end{array} \right\}$$

Idea rekurentní metody pro řešení zformulovaného problému záleží v tom, že se řeší posloupnost „jednodušších“ problémů tvaru: Určit maximum funkce

$$c_1 \cdot x_1 + \dots + c_j \cdot x_j$$

na množině

$$\left\{ (x_1, \dots, x_j) \mid \begin{array}{l} x_i = 0, 1 \quad (i = 1, \dots, j) \\ x_1 + \dots + x_j = x \end{array} \right\},$$

kde $x = 0, 1, \dots, b$; $j = 1, 2, \dots, n$.

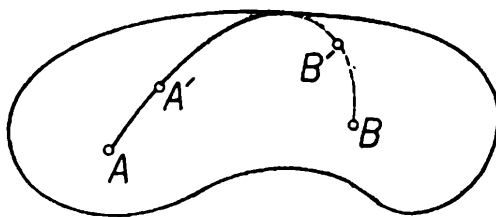
Rekurentní metoda, které jsme použili v případě extrémálních problémů 1, 2 a naznačili v případě extrémálního problému 3, je součástí obecné metody dynamického programování. Tato metoda se dá použít

pro extrémální problémy, jejichž řešení splňuje tzv. *princip optimálnosti* (*dynamického programování*). Podstatu tohoto principu vyložíme na této úloze.

Úloha 4. Na povrchu nějakého (geometrického) tělesa T jsou zvoleny dva různé body A, B . Úloha záleží v tom, spojit tyto dva body nejkratší čarou C , ležící na povrchu tělesa.

Čtenář se středoškolskou úrovní matematického vzdělání musí chápat tuto úlohu pouze intuitivně, neboť pojmy jako čára (křivka), délka čáry (křivky) se definují přesně až na vysokoškolských přednáškách z matematické analýzy. Zformulovaná úloha je v obecném případě značně obtížná, neboť povrch tělesa může být složitá plocha s množstvím „výstupků“ a „proláklin“. Za velmi obecných předpokladů o vlastnostech povrchu T lze však dokázat následující, intuitivně velmi názorné tvrzení:

Čára C na povrchu T , spojující A s B , je nejkratší ze všech takových čar právě tehdy, jestliže je splněna tato podmínka. Pro každé dva různé body A', B' ležící na C , je úsek $C(A', B')$ čáry C ležící mezi A' a B' sám nejkratší čarou na povrchu T , spojující A' s B' (viz obr. 1).



Obr. 1

Tato zdánlivě prostá vlastnost je právě onen hluboký princip optimálnosti, který je podmínkou použití metody dynamického programování. Speciálně extrémální problémy 1, 2, 3 lze v jistém smyslu chápat jako problémy nalezení jistých nejkratších čar; vyložené rekurentní metody pro úlohy 1, 2 vlastně „slepují“ úseky hledané nejkratší čáry, až nakonec zkonstruuji celé řešení.

Úloze o nejkratší čáře z A do B na povrchu T lze však dát ještě „fyzikálnější“ význam. Představme si, že po povrchu (reálného fyzikálního) tělesa T leze z A do B konstantní rychlostní brouk, který chce tuto cestu vykonat v nejkratším čase, čili což je totéž, po dráze nejkratší délky. Tuto cestu budeme nazývat *optimální*. Slovo „optimální“ je latinského původu a jeho význam odpovídá českému výrazu „nejlepší“. V daném případě máme na mysli, že cesta je optimální (nejlepší) z hlediska doby pohybu, nebo, což je v daném případě totéž, z hlediska délky dráhy pohybu. Princip optimálnosti dynamického programování lze nyní vyslovit takto.

Pohyb (v našem speciálním případě pohyb brouka) probíhá optimálním způsobem právě tehdy, jestliže optimálním způsobem probíhá na každém úseku.

V této obecné formulaci lze principu optimálnosti použít k výpočtu pohybů letadel, raket a družic, optimálních vzhledem k minimální době letu, minimální spotřebě pohonných hmot apod. Lze jej však použít i pro určování různých optimálních procesů, např. v technologii, technice nebo ekonomii.

Jestliže čtenáře článek zaujal a dočetl jej až do tohoto místa, vznikla u něho pravděpodobně řada otázek, např. jak lze řešit úlohu o nejmenším nákladu lodi, jak nalézt obecně n -tici odpovídající maximální hodnotě funkce $g_1 + g_2 + \dots + g_n$ aj. S odpověďmi na takové otázky spolu s řadou dalších aplikací rekurentní metody se bude možno seznámit v autorově knížce „O dynamickém programování“, jejíž vydání se připravuje v edici „Škola mladých matematiků“.

Cvičení 1. V podmínkách úlohy 1 popište netriviální algoritmus pro nalezení maxima funkce (1). Algoritmus použijte na číselný příklad z úlohy 1.

Cvičení 2. V podmínkách úlohy 2 popište netriviální algoritmus pro nalezení minima funkce (2) na množině (3) a použijte jej na číselný příklad z úlohy 2.

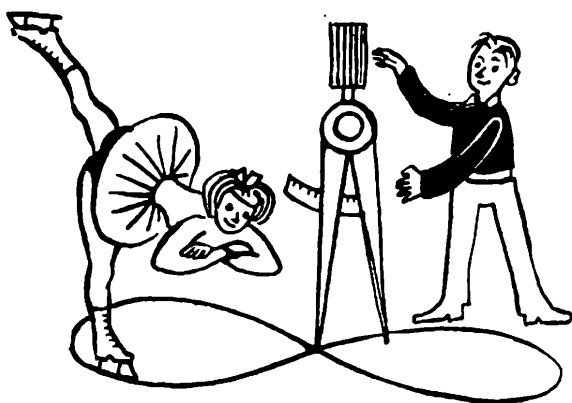
Cvičení 3. Dokažte, že počet prvků množiny (3) je $\binom{a+n-1}{n-1}$

Cvičení 4. Nechť přirozené číslo n je větší než 1. Navrhněte a odůvodněte netriviální metodu pro nalezení minima součtů (1) pro $1 \leq i < j \leq n$.

Cvičení 5. Řešte číselný extrémální problém z úlohy 1 triviálním algoritmem.

OPRAVA

Při redakčním zpracování článku ing. Zdeňka Janouta, Síly setrvačnosti [Rozhledy mat.-fyz., roč. 49, 1970—71, č. 8] došlo k nemilému nedopatření. Řada značek veličin místo sazby kurzivní byla vysazena polotučně, jako se sázejí vektory. Šlo o stránky 372 (od 13. řádku zdola) a 373 (až do konce článku). Prosíme čtenáře, aby si polotučná označení veličin ($\mathbf{a}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1$) změnil na kurzivu (a , g , g_1).



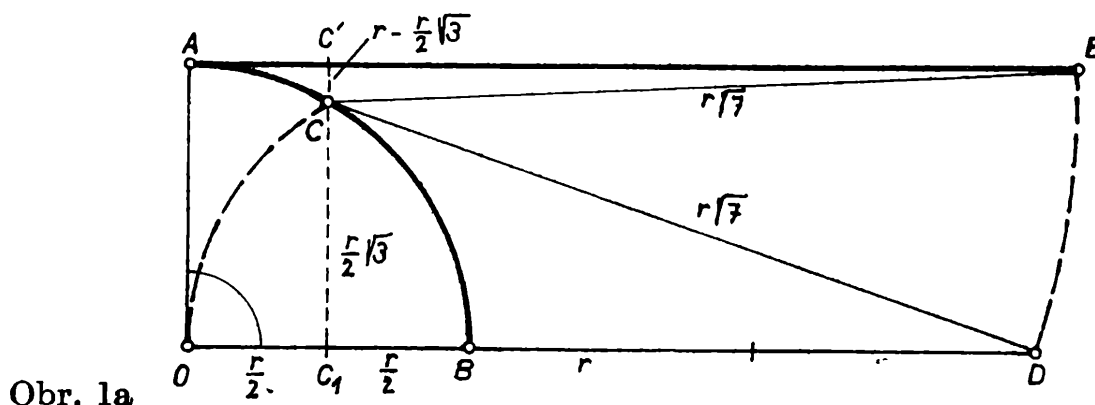
DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Jarolímkovy konstrukce

FRANTIŠEK HARANT, ČVUT Praha

Jarolímkova rektifikace kružnice

Konstrukce pojednává o nalezení úsečky, která má stejnou délku jako kružnice (resp. půlkružnice). Abychom konstrukci odvodili, zvolme čtvrtkružnici o středu O , poloměru r , s krajními body A, B . Na oblouku AB nalezneme bod C tak, aby $BC = r$. Na polopřímce OB sestrojme bod D , přičemž $OD = 3r$. Krajním bodem A oblouku AB vedme přímku $AE \parallel OB$, kde $CE = CD$. Dále si ještě promítneme bod C kolmo na AE do bodu C' a na OD do bodu C_1 (obr. 1a).



Obr. 1a

Z konstrukce bodu C vyplývá, že trojúhelník $\triangle OBC$ je rovnostranný, a tedy, jak známo, pro jeho výšku platí $CC_1 = \frac{r}{2} \sqrt{3}$. Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle CC_1D$ plyne užitím věty Pythagorovy

$$CD = r\sqrt{7} = CE.$$

Snadno nahlédneme, že úsečka $CC' = r - \frac{r}{2} \sqrt{3}$ a potom z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle CC'E$ opět obdržíme

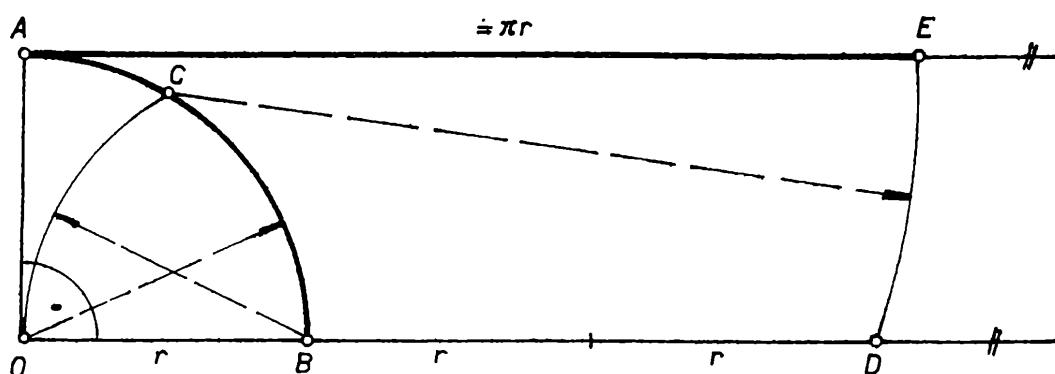
$$C'E = \frac{r}{2} \sqrt{21 + 4\sqrt{3}}$$

Jest tedy

$$AE = AC' + C'E = \frac{r}{2} (1 + \sqrt{21 + 4\sqrt{3}}) = 3,14235 r \doteq \pi r.$$

Konstrukce je tedy velmi přesná a zapamatujeme si ji takto (obr. 1b):

Obr.
1b



Ve čtvrtkružnici o středu O , poloměru r a krajními body A, B oblouku prodloužíme poloměr OB a nanese na tuto polopřímku od bodu B dva poloměry r , čímž získáme bod D . Oblouk AB čtvrtkružnice přetneme poloměrem r z bodu B v bodě C . Z tohoto bodu C pak poloměrem CD přetneme rovnoběžku vedenou bodem A s OD a získáme tak bod E . $AE \doteq \pi r$, tj. polovině délky kružnice. Konstrukce je sice méně přesnější než známá rektifikace Kochaňského (udává $\pi \doteq 3,14150$), avšak přesnost Jarolímkovy konstrukce (na setiny) je pro praktické použití plně dostačující.

Tři Jarolímkovy konstrukce paraboly

Řešení všech těchto tří úloh vychází ze známé ohniskové vlastnosti paraboly formulované obvykle ve větě o subtangentě:

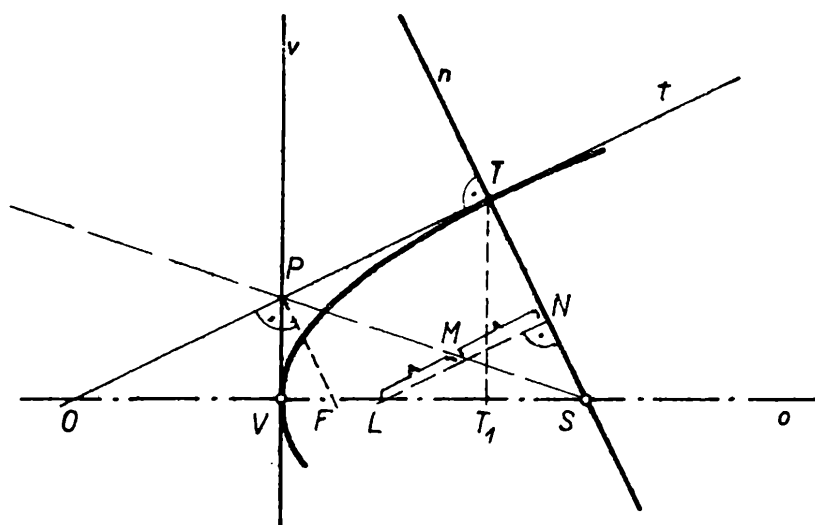
Subtangent paraboly je vrcholem půlena.

Na jejím podkladě pak odvodí autor další vlastnosti, kterých pak používá k řešení níže uvedených úloh.

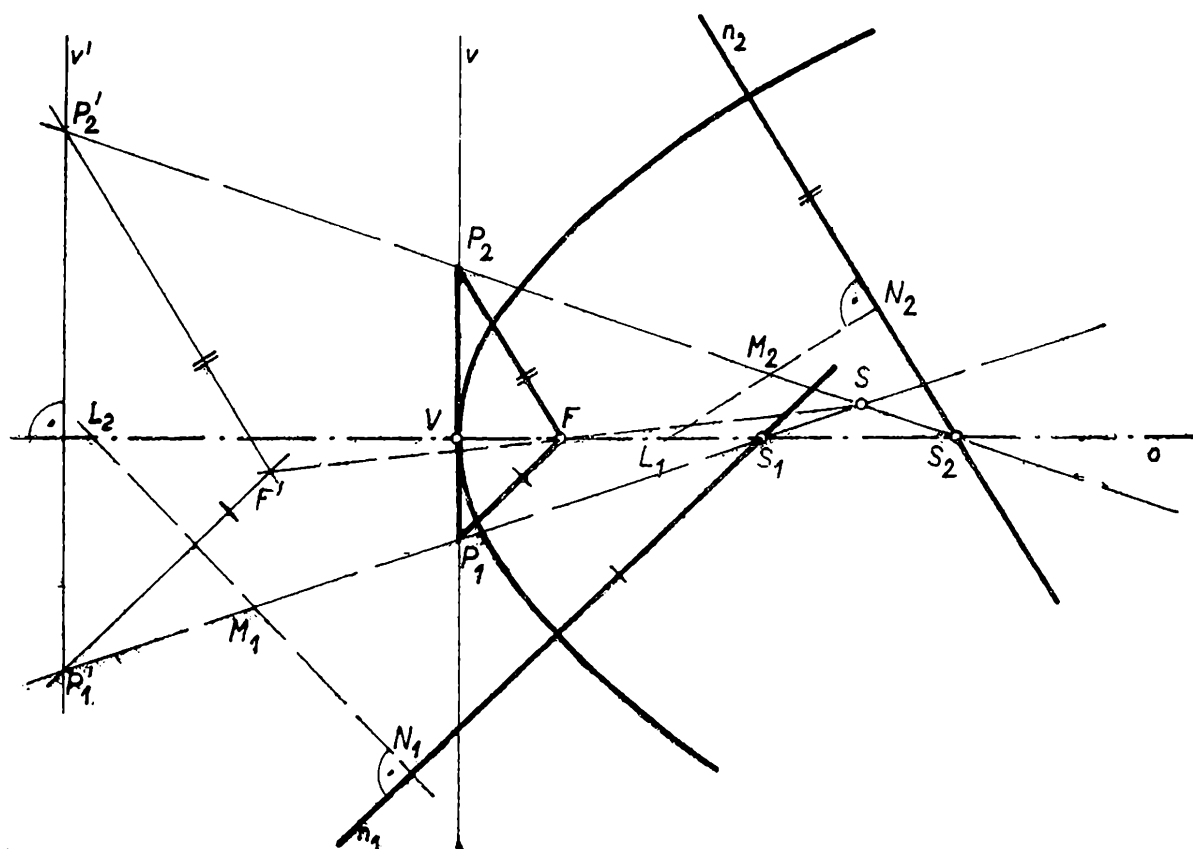
1. *Sestrojte parabolu určenou osou o , vrcholem V a normálou n* (viz obr. 2). (Možno také formulovat osa o , vrcholová tečna v a normála n .) Z věty o subtangentě plyne $OV = VT_1$, a tedy i $OP = PT$. Zvolíme-li průsečík S normály n s osou o za střed stejnohlosti, jsou spojnicí SP půleny všechny úsečky LP s krajními body na o a n a rovnoběžné s t . Odtud plyne ihned konstrukce:

Zvolme na ose o paraboly libovolný bod L a spusťme z něho kolmici na normálu n , která na ni dopadne do paty N . Spojnice průsečíku S osy o a normály n s půlícím bodem M úsečky LN vytne na vrcholové tečně bod P , kterým prochází tečna $t \perp n$ a který je současně patou kolmice spuštěnou z ohniska F paraboly na tečnu t příslušnou k dané normále n .

2. Sestrojte parabolu danou osou o a dvěma normálami n_1 a n_2 (viz obr. 3). Z úlohy 1 víme, že přímky S_1M_1 , resp. S_2M_2 , sestrojené podle tam uvedeného vztahu, vytínají na vrcholové tečně paty P_1 , resp. P_2



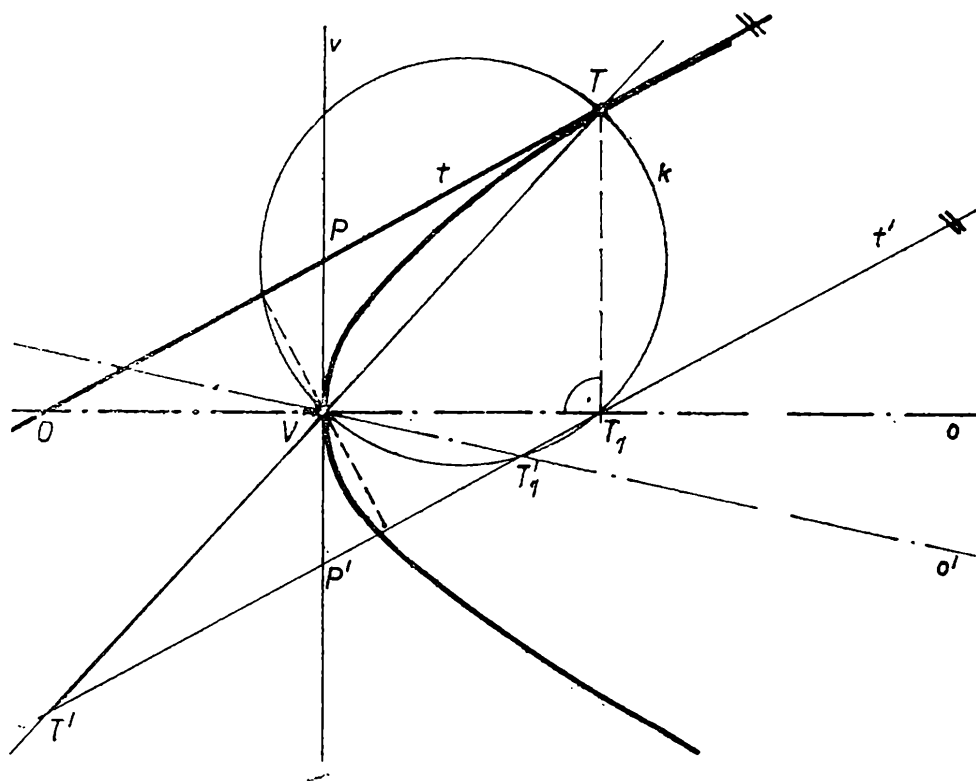
Obr. 2



Obr. 3

kolmic spuštěných z ohniska F na tečny t_1 , resp. t_2 příslušné daným normálám n_1 resp. n_2 . Lehce tedy sestrojíme ohnisko F . Avšak my vrcholovou tečnu v v této úloze neznáme. Použijme tedy stejnohlosti se středem v průsečíku S přímek, S_1P_1 resp. S_2P_2 a sestrojíme k $\triangle P_1P_2F$ stejnohlý trojúhelník $\triangle P'_1P'_2F'$. Odtud pak obdržíme řešení:

Zvolme libovolný bod L_1 (L_2) na ose o a vedme jím kolmici k zadané normále n_1 (n_2). Kolmice určí na normále bod N_1 (N_2) a půlícími body M_1 (M_2) úseček L_1N_1 (L_2N_2) a průsečíky S_1 (S_2) normál n_1 (n_2) s osou o procházejí hledané přímky S_1M_1 (S_2M_2). Jejich průsečík S zvolíme za střed stejnohlosti a sestrojíme v libovolné vzdálenosti přímku $v' \perp o$. Ta vytne na S_1M_1 (S_2M_2) bod P'_1 (P'_2) a my sestrojíme $\triangle P'_1P'_2F'$ tak, že $P'_1F' \parallel n_1$ ($P'_2F' \parallel n_2$). Spojnice $F'S$ vytíná na ose o ohnisko F a úloha je vyřešena.

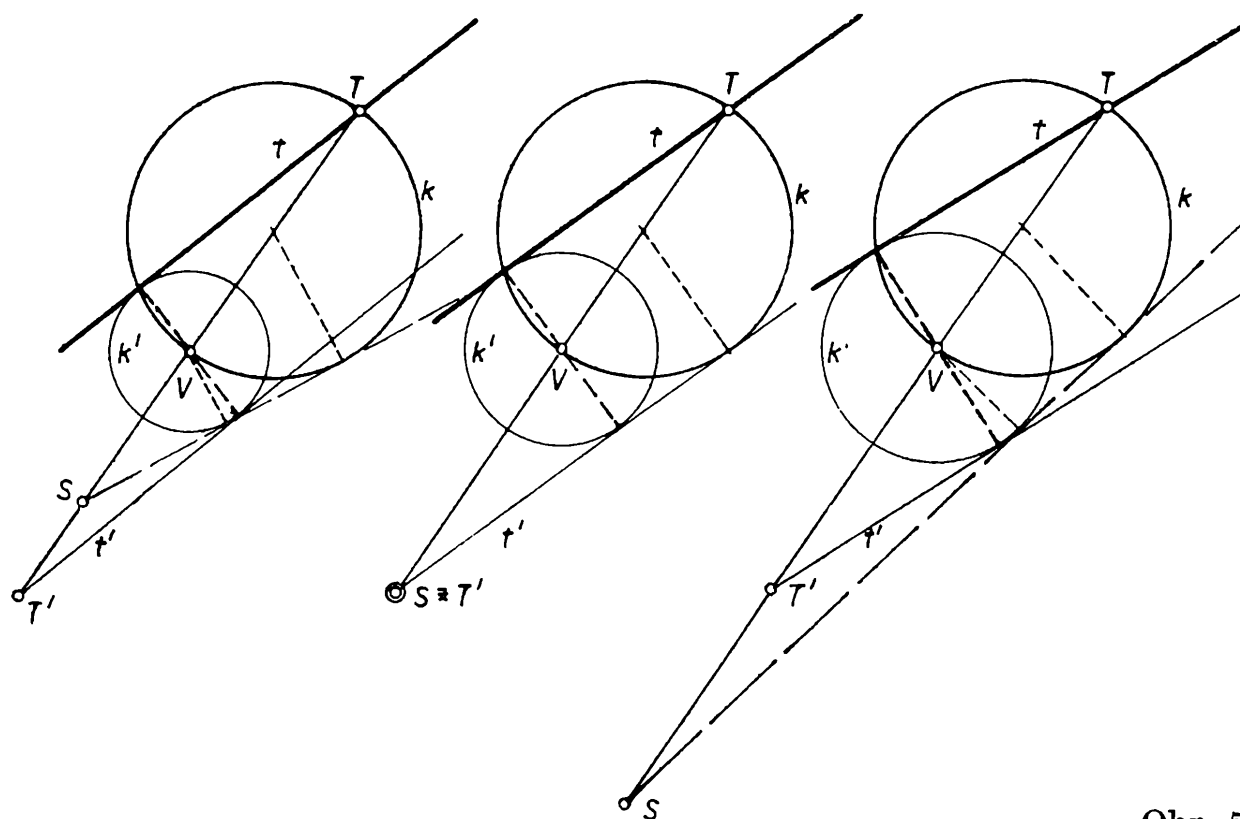


Obr. 4

3. Sestrojte parabolu danou vrcholem V , tečnou t s bodem dotyku T (obr. 4). Podle věty o subtangentě je $OV = VT_1$ i $OP = PT$ a tedy. užitím stejnohlosti se středem v bodě O obdržíme $TT_1 = 2 \cdot VP = PP'$. Přímka $P'T_1$ je tedy středově souměrná s t vzhledem k vrcholu V . Mimo to bod T_1 , který leží na ose o , je vrcholem pravého úhlu VT_1T . Odtud plyne konstrukce:

Sestrojíme přímku $t' \parallel t$, souměrnou s t vzhledem k vrcholu V a dále kružnici k nad průměrem VT . Průsečíky přímky t' s kružnicí k (pokud jsou reálné) jsou body T_1 (T'_1), jimiž prochází osa $o_1 \equiv VT_1$, resp. $o_2 \equiv VT_2$ pro dvě paraboly, které jsou řešením dané úlohy.

Zajímavá je zde diskuse úlohy, kterou autor V. Jarolínek ve svém článku neuvádí. Vzhledem k symetrii se středem ve vrcholu V plyne, že přímka t' vytíná na spojnici VT bod T' souměrný s T vzhledem k V . Předpokládáme-li pevné VT a pohyblivou tečnu t , potom úloha bude mít jediné řešení, když přímka $t' \in T'$ se dotkne kružnice k . V tomto případě je T' vnější střed stejnolehlosti kružnic k a k' ($V, r' = d = V \vdash t$). Bude-li mít kružnice k' poloměr $r' < d$, bude úloha dvojznačná, v případě $r' > d$ nemá řešení.



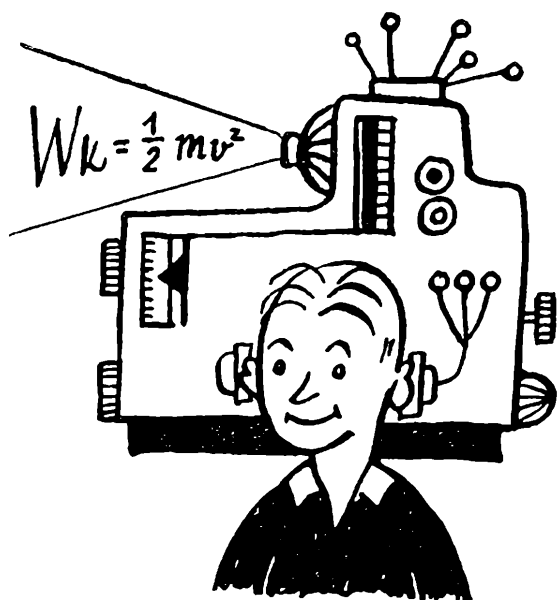
Obr. 5

Konstrukce je tedy tato:

Sestrojíme kružnice k nad průměrem VT a k' se středem V a dotýkající se t , a bod T' souměrný s T vzhledem k V . Jestliže vnější střed stejnolehlosti S kružnic k, k' leží uvnitř úsečky VT' , úloha je dvojznačná, pro $S = T'$ je jednoznačná a leží-li S vně úsečky VT' , úloha nemá řešení (viz obr. 5).

OPRAVA:

Na str. 45 v 1. čísle Rozhledů škrtněte ve 3. příkladě slovo „kladná“.



FYZIKA

Historický vztah mezi fyzikou a technikou

MIROSLAV KRUŽÍK

Fyzika jako věda se začíná v dějinách jasně rýsovat již v období starořecké kultury. Charakter vývoje fyziky však neurčovaly jen vnitřní otázky vědeckého bádání, ale byly to často aktuální potřeby, které musely být řešeny. Problémy astronomie, která sloužila k určování času a k orientaci pro námořní plavbu, problémy konstrukce mechanických strojů, které usnadňovaly lidskou práci při přemísťování těžkých nákladů a pomáhaly při obraně před nepřítelem, byly mocnými prvotními podněty pro rozvoj jednotlivých fyzikálních oborů.

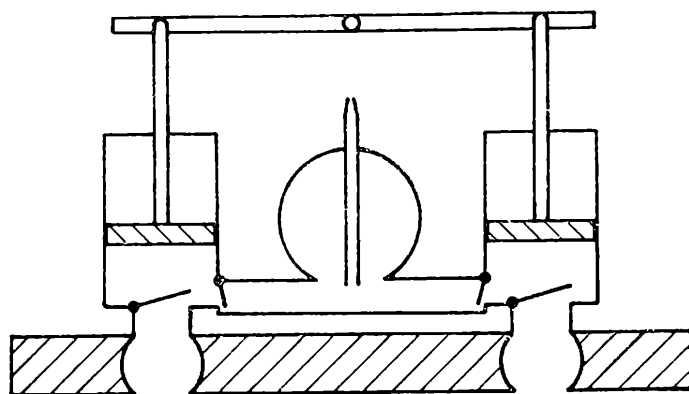
Již v prvobytně pospolné společnosti se začíná užívat páky, hrnčířského kruhu, primitivního tkalcovského stavu a ručního mlýnu na obilí. Pomocí tepelné energie se získávají kovy a vypalují se hrnčířské výrobky. Lodě se vyrábějí vypalováním kmenů stromů.

V otrokářské společnosti se převážně rozvíjely dopravní a zvedací stroje. Budování opevnění, paláců, chrámů, hrobek a cest vyžadovalo přepravu velkého množství stavebního materiálu. Velmi se rozšířilo užití páky v jedné z nejstarších úloh techniky při čerpání vody pro zavlažování.

Použití pák a saní při dopravě těžkých předmětů dalo postupně podnět k vynálezu kola, kladky a kladostroje. Z pozdější kombinace páky s kolem vznikla ozubená kola a byl objeven i šroub. Jednoduchých převodových mechanismů, které vznikly při vývoji dopravních a zvedacích strojů, se užívá dodnes při předávání a transformaci různých druhů

energie. Od jednoduché páky, pomocí které byly postaveny tak vynikající stavby, jako jsou egyptské pyramidy, došel vývoj v období vyspělé otrokářské společnosti až ke složitým zvedacím strojům, užívaným v době rozkvětu Římské říše. Vitruvius ve svých „Deseti knihách o architektuře“ (16. až 13. r. př. n. l.) nezná ještě žádné jiné stroje kromě stavebních strojů. Stroj definuje jako spojení dřevěných částí, které usnadňuje zvedání břemen.

Velká města bylo nutno zásobovat vodou. Rozvíjející se zemědělství vyžadovalo rozsáhlé zavlažování. Energetická část tohoto úkolu, doprava vody do akvaduktu, se řešila využitím nejlevnější pracovní síly — otroka. Voda byla čerpána buď pomocí zvedacího kola, nebo Archimédova šroubu. Kdyby se u zvedacího vodního kola využilo energie proudící vody, změnilo by se vodní kolo v energetický stroj. Toto řešení bylo v otrokářské společnosti známé a skutečně ho bylo použito u vodního mlýna. Ale použití bylo velmi řídké, protože práce otroků byla levnější. V této době byla Řekem Ktesibiem sestrojena i požární stříkačka (obr. 1).



Obr. 1

Při řešení úkolu čerpání vody byl vyřešen vynikající technický úkol. Byl sestrojen válec a píst, který se později uplatnil při konstrukci tepelných strojů. Částečně byl zdokonalen i tkalcovský stav, který však ruční tkaní pouze usnadňoval. Technika ruční práce, primitivní zvedací stroje a nedokonalé nástroje nemohly zabezpečit vysokou produktivitu práce na stavbách. Proto velké stavby stavěly statisíce lidí po dobu několika desítek let. Jsou to však dodnes vynikající ukázky stavebního umění. Dokonce i některé mosty a silnice přetrvaly tisíciletí a slouží svému účelu dodnes.

Architektura, budování složitých zvedacích zařízení a stavba lodí daly podnět k řešení celé řady úloh statické mechaniky. Je možno říci, že starověká fyzika ve své první etapě byla filosofií přírody a statikou. Platon (427 až 347 př. n. l.) ještě však naprosto pohrdá vším empirickým bádáním a projevuje živou nelibost nad všemi snahami svést vznešenou vědu z výše čistých idejí a znesvětit ji použitím na předměty zkušenosti.

Aristoteles (384 až 322 př. n. l.) zanechal z fyziky ve své velkolepé vědecké soustavě jen několik základních pojmů, převzatých dosti nekriticky z povrchního zjišťování skutečnosti.

Opoprhování tělesnou prací, které je tak charakteristické pro otrokářský řád, se zvláště výrazně projevovalo ve vědě. Považovalo se za ponižující pro vědce, aby spojoval vědecké objevy s praktickými úlohami a zvláště s výrobou. Je známo, že starověcí spisovatelé považovali za nevyhnutelné ospravedlnit ve svých spisech velkého učence Archiméda, který svých znalostí použil ke konstrukci vojenských obranných zařízení. Jediným ospravedlněním tohoto činu bylo vlastenectví Archiméda, protože jeho vynálezy byly nutné pro obranu rodného města před nepřítelem. Plutarchos píše o Archimédovi, že byl tak geniální, že měl tak vynikající rozum a ovládal takovou spoustu teoretických vědomostí, že si nepřál, aby po něm zůstaly jeho důmyslné technické objevy, kterými získal jméno a slávu a v nichž uplatnil své téměř božské poznání. Mechaniku a všeobecně každou praktickou nauku pokládal Archimédes za nedůstojné řemeslo.

Archimédes (287 až 212 př. n. l.) se narodil v Syrakusách na Sicílii. Vzdělával se v Alexandrii, kde vynalezl šroub po něm nazvaný a přístroj na určení zorného úhlu slunečního kotouče. Archimédes sledoval podmínky rovnováhy tuhých těles, definoval pojem těžiště a objevil metodu určení těžiště. S jeho jménem se pojí teoretické zdůvodnění zákona rovnováhy na páce a teoretický důkaz zákona Archimédova. Archimédova pojednání mají znaky přísně vědecké teorie a jsou vypracována ve stejném duchu jako Eukleidova geometrie. Archiméda je možno plným právem pokládat za zakladatele statiky a hydrostatiky. V dílech Archiméda nenajdeme žádné poznámky o praktickém použití teorie. Není v nich žádných poukazů na provedený pokus, ani potvrzení teorie pokusem. Slovní formulace vět a důkazů vyniká stručností a logickou dokonalostí.

Pro rozvoj fyziky ve starověku měla význam i astronomická a meteorologická pozorování. V Číně již v 18.—12. st. př. n. l. byl vytvořen kalendář, v němž délka roku byla stanovena na 366 dní. V 11. st. př. n. l. se užívalo slunečních hodin a ve 3. st. př. n. l. Číňané znali kompas. V Egyptě začínal rok heliakickým východem jasné hvězdy Siria, který určoval počátek záplav řeky Nilu a dělil se na 36 dekád podle souhvězdí zvířetníku. K těmto 360 dnům Egyptané přidávali každý rok 5 dní.

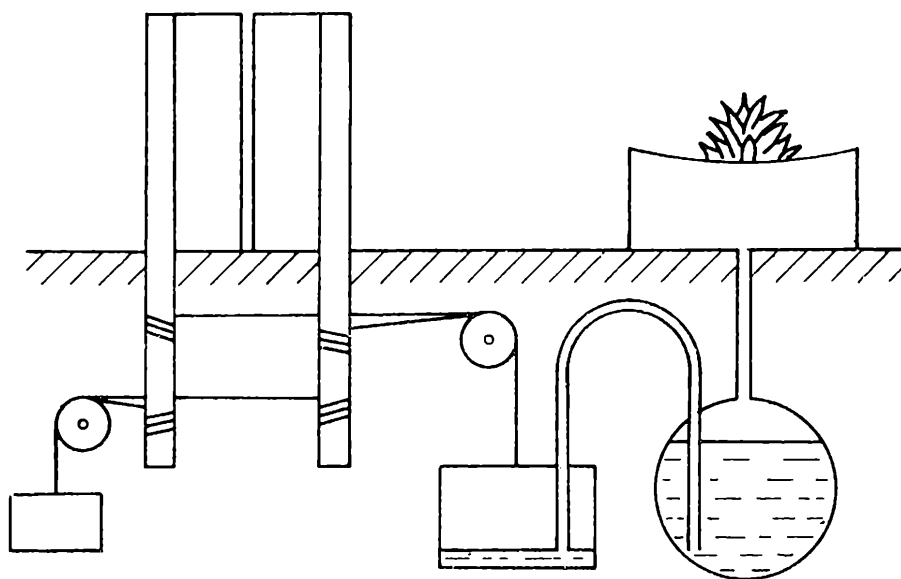
Babylóňané prováděli pozorování hvězd s takovou přesností, že určili periodičnost zatmění, měřili čas pomocí vodních hodin a dělili den na hodiny a minuty. Heron Alexandrijský (120 r. př. n. l.) dokázal, že světlo, které se šíří z bodu A do bodu B odrazem od zrcadla, prochází cestou, ke které je třeba nejkratšího času. Dráha $AO'B > AOB$. Dráha AOB souhlasí se zákonem odrazu (obr. 2).

Antická technika řecké epochy dosáhla vysoké úrovně, avšak užití strojů ve výrobě se neuskutečnilo, protože úroveň výrobních sil byla velmi nízká. Jediným významným vynálezem v oblasti energetické techniky byl římský vodní mlýn, který se objevil počátkem našeho leto-

69

počtu. Byl to první mechanický motor. Technické vynálezy v období otrokářského řádu se uplatnily většinou jako technické hračky. Násoska se stálou rychlostí výtoky vody se stala základní součástí vodních hodin, u kterých rovnoměrný přívod vody zvedal postupně plovák, který na otáčejícím se bubnu odměřoval čas. Dvojitá násoska, u níž je možno přesně určit množství vody, která má vytéci, se stala základní součástí známé mechanické hračky: Zpívající ptáček. Do horní uzavřené nádoby přitékala voda, která z nádoby vytlačovala vzduch tenkou trubičkou do hrdla ptáčka. Když dvojitá násoska horní nádobu vyprázdnila, otočila se sova a ptáček přestal zpívat. Pak vstoupila v činnost spodní násoska, spodní nádoba se vyprázdnila a sova se vrátila do původní polohy. Zatím se přitékající vodou plnila horní nádoba a ptáček začal znovu zpívat (obr. 3).

Zvláště je zajímavé, že Heron první využil energie tepla. Reaktivním tlakem páry se dutá koule pohybovala otáčivým pohybem kolem své osy. Tak téměř 2000 let před vynálezem parního stroje byl zkonstruován tepelný motor. Známý je i Heronův automat, který při zapálení ohně na oltáři otevřel dveře chrámu. Jeho činnost spočívá v důmyslném využití teplotní rozpínivosti vzduchu. Zahřátý vzduch v nádobě pod



Obr. 4

ohništěm oltáře vytlačil z bány vodu do vědra a dveře se otevřely. Při uhasnutí ohně přetekla voda z vědra zpět do bány a dveře se zavřely.

Ani výrobní metody, kterých člověk používal od nejranějších dob svého vývoje, nebyly v této době podstatně změněny nebo zdokonaleny. Ve starověku k nejstarším výrobním metodám sekání, broušení, pilování a vrtání přibýlo soustružení, jak to dokazují reliéfy na staroegyptských chrámech. Svislá osa prvních soustruhů ukazuje, že vzorem pro ně byl hrncířský kruh. Ze zemí Přední Asie a severní Afriky se rozšířila znalost výrobních metod obrábění do zemí jižní Evropy, do Řecka a

Římské říše a odtud do zemí střední a severní Evropy. Evropské národy se brzy seznámily s těmito výrobními metodami, pozvedly později ve středověku řemeslnou výrobu, zpracování kovů a jiných materiálů na vysokou úroveň, ale po dlouhá staletí ustrnuly na převzatých metodách práce a prakticky samy nic pro jejich zdokonalení a rozmnožení o nové formy práce neučinily.

V období feudálního řádu se stále častěji místo lidské síly používalo jako energetického zdroje síly zvířat a energie neživé přírody, především větru a vody. Z hlubokých dolů je čerpána voda soustavou pístových pump, které jsou poháněny koňmi nebo vodním kolem. K čerpání vody se používalo košových elevátorů. Drtiče rudy, stoupy a měchy, kterých se používá při získávání a úpravě kovů, vyžadují stále mocnějších zdrojů energie. Od 4. století se všeobecně rozšířilo použití vodního kola a od 10. století větrného kola při mletí mouky. Vodní kolo se postupně zdokonalovalo. Německý učenec Agricola (1494—1555) popisuje důmyslný mechanismus spojení dvou vodních kol na svrchní vodu. Při těžení rudy z dolů se tato soustava postupně otáčela oběma směry. V r. 1582 byla uvedena do provozu londýnská vodárna na řece Temži, kde 5 vodních kol na spodní vodu o průměru 6—7 m čerpalo za 1 den 18 000 m³ vody. V r. 1685 byla sestrojena čerpací stanice na řece Seině ve Francii, kde 14 vodních kol na spodní vodu pohánělo 235 pístových pump, které čerpaly za 1 den 3000 m³ vody do výše 162 m pro fontány.

Do stagnace výrobních metod zasáhl kolem r. 1500 význačný renesanční umělec a současně technik Leonardo da Vinci (1452—1519), jehož heslem se stalo přísloví: „Moudrost je dcera pokusu.“ Ve svých poznámkách píše: „Pokus se nikdy nemýlí, mýlí se jen váš úsudek, jestliže od pokusu očekáváte to, co není v jeho moci.“ Jasně ukázal význam teorie pro praxi: „Každá praxe musí být vybudována na dobré teorii. Teorie je vojevůdce, praxe, to jsou vojáci.“ Leonardo da Vinci vyřešil úlohu lomené páky, navrhl řadu zdokonalení brousicích strojů, vrtaček a soustruhů. Od něho pochází návrh prvního automatu na broušení konců jehel.

(Pokračování)

Termonukleární reakce - zdroj energie

ANEŽKA WOHLMUTHOVÁ, ČVUT Praha

Veškerá průmyslová výroba je podmíněná dodáváním energie. Je tedy pochopitelné, že jedním z hlavních cílů vědy a techniky je vyhledávání jejích nových zdrojů.

V roce 1939 bylo objeveno štěpení jader uranu neutrony. Při této

jaderné reakci se uvolňuje nesmírné množství energie. Proti užití štěpných procesů k získávání energie však vystupují dvě závažná fakta:

1. zásoby uranu a thoria jsou omezené,
2. při reakci jaderného štěpení vznikají jádra izotopů lehčích prvků, která jsou silně radioaktivní.

Jaderná reakce, při níž nevzniká radioaktivní odpad a přitom se uvolňuje velké množství energie, je jaderná syntéza — reakce, při níž se jádra lehkých prvků spojují v jádro těžšího prvku. Reakce jaderné syntézy, vyvolané vysokou teplotou, se nazývají termonukleární reakce. Jak se ukazuje, bylo by jejich uskutečnění velmi výhodným zdrojem energie.

Jaderná energie

Zopakujme si stručně poznatky o stavbě atomu. Atom se skládá z hmotného kladně nabitého jádra a záporně nabitých elektronů, obíhajících kolem jádra a vytvářejících tzv. elektronový obal. Jádra atomů obsahují protony a neutrony (společný název nukleony). Neutrony jsou částice elektricky neutrální, protony nesou kladný elementární náboj. Hmotnosti obou těchto elementárních částic jsou přibližně stejné.

Mezi částicemi atomového jádra působí zvláštní síly specifické právě pro jádro. Tyto tzv. jaderné síly (též síly vazbové) jsou v oboru malých vzdáleností velmi značné. S rostoucí vzdáleností se však velmi rychle zmenšují; ve vzdálenosti 2 až $3 \cdot 10^{-13}$ cm jsou prakticky nulové.

Obrovská velikost jaderných sil způsobuje, že přeměny atomových jader jsou doprovázeny uvolněním nebo spotřebováním velkého množství energie. Mírou velikosti uvolněné energie je klidová hmotnost nukleonů jádra. Čím je klidová hmotnost nukleonů jádra větší, tím více energie se může uvolnit přeměnou takového jádra na jiné jádro, jehož nukleony mají menší klidovou hmotnost. To vyplývá z Einsteinova vztahu mezi hmotností a energií

$$E = c^2 \Delta m,$$

kde E je pohybová energie částice,

c rychlost světla a

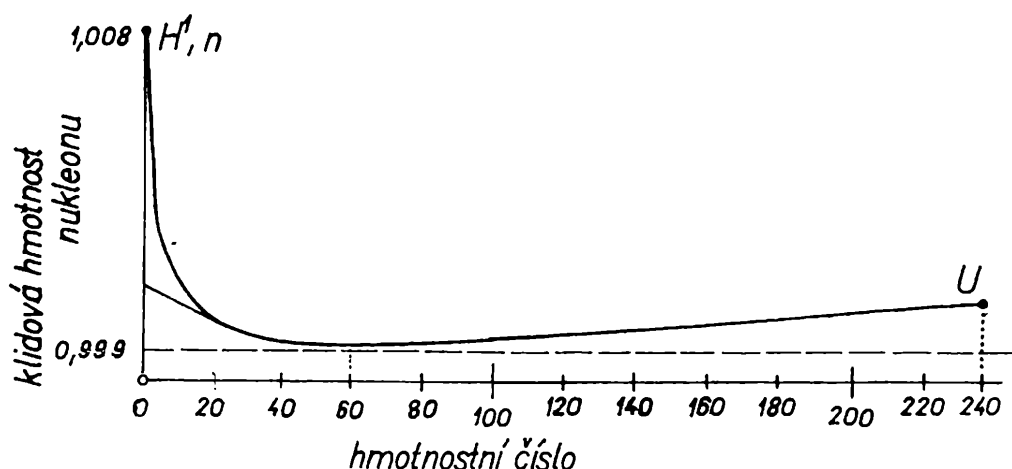
Δm úbytek klidové hmotnosti částice.

Z Einsteinova vztahu lze vyvodit ještě jeden závěr: Jaderná reakce, při níž se uvolňuje energie, probíhá tak, že klidová hmotnost vzniklých jader je menší než hmotnost jader, která vstupují do reakce. Abychom tedy při jadrové přeměně získali energii, musíme uskutečňovat takové reakce, při nichž nově vzniklá jádra mají menší klidovou hmotnost než jádra výchozí.

Z Einsteinovy rovnice a z obr. 1 vyplývá, že uvolnění energie při jaderných přeměnách je možné dvojím způsobem:

1. přeměnou nejtěžších jader na jádra lehčí,
2. spojováním nejlehčích jader na jádra těžší.

K tomuto druhému způsobu patří termionukleární reakce — reakce jaderné syntézy, vyvolané vysokou teplotou.



Obr. 1

Reakce jaderné syntézy

Aby mezi dvěma jádry proběhla reakce jaderné syntézy, je nutné, aby se jádra k sobě přiblížila na vzdálenost dosahu jaderných sil.

Dokud jsou dvě jaderné částice, které se mají spojit, od sebe vzdáleny, působí mezi nimi odpuzivá elektrostatická síla, neboť obě částice nesou souhlasný elektrický náboj. Velikost této odpuzivé síly můžeme vyjádřit pomocí Coulombova zákona

$$F = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{r^2}$$

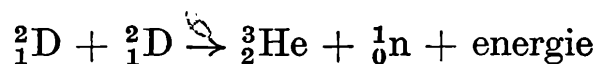
kde Z_1 , Z_2 jsou atomová čísla jader, e velikost elementárního náboje, r vzdálenost mezi středy jader.

Pak pro potenciální energii E_p soustavy těchto dvou jader platí

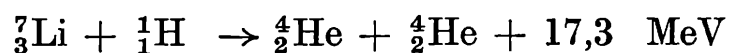
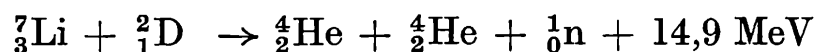
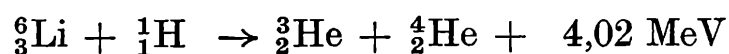
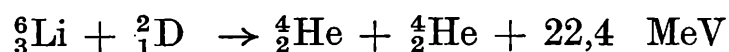
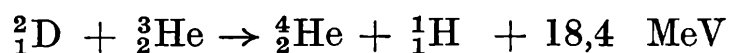
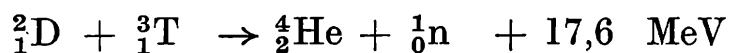
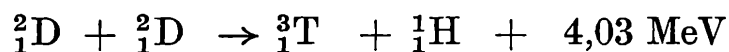
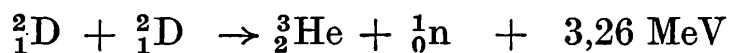
$$E_p = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{r}$$

Z tohoto vztahu je vidět, že energie odpuzivých elektrostatických sil roste s přiblížováním jader. Při jejich dotyku dosahuje maximální hodnoty $E_{\max}$. Jestliže kinetická energie jádra, jímž bombardujeme druhé jádro, je větší než $E_{\max}$, potom částice snadno pronikne k druhému jádru. Jestliže však kinetická energie částice je menší než $E_{\max}$, pak tato energie nestačí k překonání tzv. Coulombovy bariéry, která je tvořena právě energií elektrostatických odpuzivých sil: částice neproletí. Ve skutečnosti však existuje i malá pravděpodobnost, že částice překoná Coulombovu bariéru, i když její energie je menší než $E_{\max}$. Tento úkaz zveme „tunelovým jevem“. (Částice proniká jakoby tunelem v bariéře.)

Překonat Coulombovu bariéru se poprvé podařilo Cockroffovi a Rutherfordovi. Deuterony, urychlenými na rychlost 10^4 km/s, bombardovali terčík, obsahující těžký vodík. Přiblížil-li se bombardující deuteron k deuteronu v terčíku na vzdálenost působení přitažlivých jaderných sil, došlo k reakci jaderné syntézy obou jader. Produktem této syntézy bylo jádro izotopu helia ${}^3_2\text{He}$, neutron a velké množství energie, projevující se rychlostí nově vzniklých částic, která vysoko převyšovala rychlost deuteronů. Tak byla poprvé uskutečněna jaderná syntéza. Můžeme ji popsat rovnicí



Výzkum reakcí jaderné syntézy vedl pak k nalezení celé řady dalších reakcí, při nichž spojením lehčích jader vznikají jádra těžší za současného uvolnění energie. Za hlavní z nich jsou pokládány tyto:



Z rovnic je patrna jedna z hlavních vlastností jaderné syntézy: spojením dvou částic vznikají opět alespoň dvě částice. Tento jev není náhodný. Kdyby ze dvou jader při reakci vzniklo jádro jediné, pak energie uvolněná při reakci by se nemohla projevit jako kinetická energie vzniklého jádra. Tím by nebyl splněn zákon o zachování hybnosti, což ovšem není možné. Další důležitá vlastnost: seskupení protonů a neutronů v nově vzniklých jádrech je energeticky výhodnější než v jádrech, která do reakce vstoupila.

Při pokusech bylo zjištěno, že různé reakce probíhají za stejných podmínek s různou četností. Například bombardujeme-li urychlenými deuterony terčík s tritiem, proběhne mnohem větší počet reakcí, než když jimi po stejnou dobu bombardujeme za stejných podmínek terčík s deuteriem. Vypadá to, jako by jádro tritia mělo větší, a tedy snadněji zasažitelnou plochu než jádro deuteria. Tato myšlená plocha se nazývá účinný průřez jádra. Znalost účinných průřezů jader je velmi důležitá pro výpočet rychlostí reakcí jaderné syntézy působením vysoké teploty — termonukleárních reakcí.

Termonukleární reakce

Aby mezi dvěma jádry došlo k reakci jaderné syntézy, musí tato jádra mít velkou kinetickou energii. Tu mohou získat např. v urychlovačích, což však není výhodné, neboť energie vynaložená na urychlení jader je větší než energie získaná.

Urychlení jader v urychlovačích však není jediný způsob, jak atomovým jádrům dodat rychlost nutnou k uskutečnění jaderné reakce. Je známo, že rychlost chaotického pohybu částic roste s teplotou. Proto ohříváním látky můžeme principiálně dostat tak rychlé částice jako v urychlovačích. Při neuspořádaném pohybu částic dochází ke srážkám. Setkají-li se dvě jádra, jejichž rychlost je dostatečně velká, může se stát, že překonají odpudivé síly — dojde k reakci jaderné syntézy. Jestliže takových reakcí bude dostatečné množství, aby svou energií kryly energetické ztráty, popřípadě ještě zvýšily teplotu látky, nutnou k udržení rychlosti jejich částic, proběhne termonukleární reakce.

Částice vykonávající tepelný pohyb mají nejrozmanitější velikost energie. Při teplotě několika desítek miliónů stupňů dosahuje střední energie tepelného pohybu částic řádově několika keV. Při těchto teplotách mají atomy látky již tak značnou rychlost, že při srážce dochází k oddělení elektronů od jádra. Atom se ionizuje. Plynnou látku, která je v ionizovaném, elektricky vodivém stavu, nazýváme plazmatem.

Částice plazmatu se pohybují volně. Vlastní energie jejich tepelného pohybu je řádově keV i desítky keV. Všechny tyto energie však ještě nestačí k překonání Coulombovy bariéry, k tomu je nutná energie (400 až 500) keV.

Pravděpodobnost proniknutí jednoho jádra k druhému však s růstem energie roste neobyčejně rychle. Tak např. pro dvě jádra deuteria je tato pravděpodobnost při $E = 1,7$ keV 10^{47} krát větší než při $E = 17$ eV.

Čím vyšší teplota, tím intenzivnější tepelný pohyb, tím častěji dochází ke srážkám jader. Ukazuje se, že teploty desítek miliónů stupňů jsou dostatečně velké, aby proběhla celá řada termonukleárních reakcí. Přitom různé termojaderné reakce v závislosti na svých individuálních zvláštěnostech (výšce Coulombovy bariéry, velikosti účinného průřezu jádra atd.) probíhají s různými rychlostmi. Ukazuje se, že obecně budou termonukleární reakce mít uspokojivou rychlost jen v případě velmi lehkých jader.

Zda bude možné využít termojaderné reakce jakožto zdroje energie, závisí na tom, jak se podaří vyřešit problémy spojené s uskutečněním řízené termonukleární reakce.*)

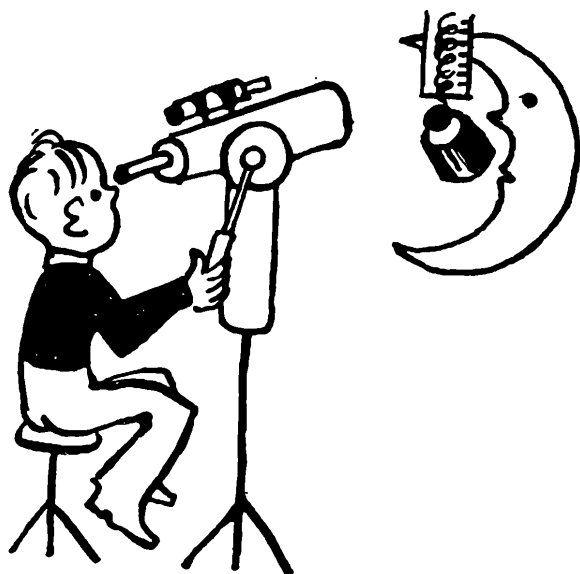
*) Ukázalo se, že neřízená termonukleární reakce není k výrobě elektrické energie vhodná. Termonukleární reakce (neřízené) se podařilo uskutečnit ve velkém měřítku pouze jako výbušné děje v tzv. vodíkových bombách.

Hlavní problémy spojené s uskutečněním termojaderné reakce na Zemi se týkají:

a) zahřátí termonukleárního paliva na teplotu nutnou k zapálení reakce;

b) konstrukce nádoby, jež by v sobě udržela plazma zahřáté na desítky milionů stupňů.

Na řešení obou těchto úkolů vědci v mnoha zemích (zvláště v SSSR, Anglii a USA) intenzívně a s dobrými výsledky pracují.



ASTRONOMIE

Jsou pulsary neutronové hvězdy?

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

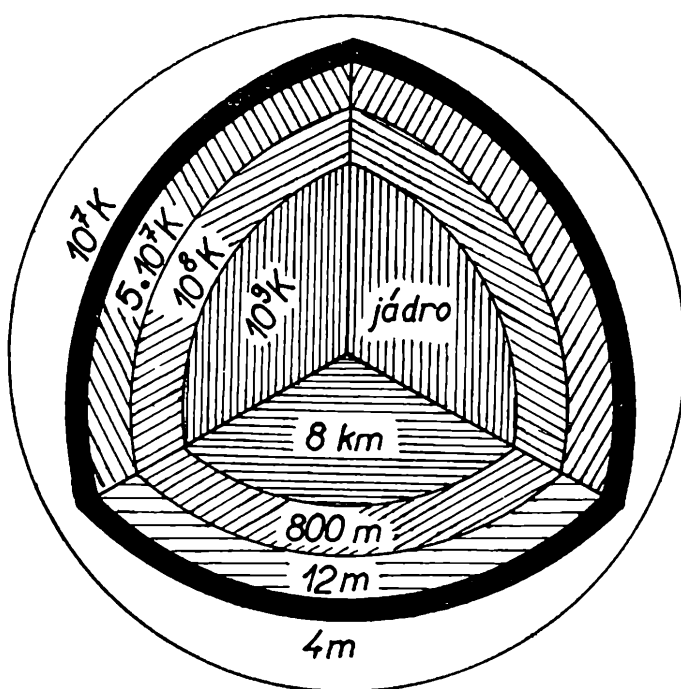
Zprávu o objevu pulsarů přinesl již náš časopis v článku Signály z vesmíru (RMF 48, 1969/70, č. 2, s. 78). Nyní bychom chtěli seznámit čtenáře s některými dalšími údaji a úvahami, týkajícími se těchto zajímavých objektů. Je třeba ještě připomenout, že pulsary se označují podle seznamů, které sestavily různé radioastronomické observatoře. Označení CP znamená „Cambridge Pulsed Source“, neboli Cambridgeský pulsar, písmena HP znamenají pulsar z Harvardského seznamu, JP pulsar ze seznamu observatoře v Jodrell Bank v Anglii atd. Číslice za písmeny udávají rektascenzi a deklinaci daného pulsaru; např. označení JP 1933+16 znamená, že jde o pulsar ze seznamu observatoře v Jodrell Banku, jehož rektascenze je 19^h33^m a deklinace +16°; údaj o deklinaci se však často vynechává.

Záření pulsarů se studuje na kmitočtech od 40 MHz do 1670 MHz. Rozložení energie ve spektru je charakteristické pro neteplné zdroje rádiového záření — záření vysílají elektrony, pohybující se v magnetickém poli. Intenzita záření se periodicky mění, přičemž perioda je velmi malá; u většiny pulsarů je kolem 1 sekundy. Nejkratší periodu má pulsar v tzv. Krabí mlhovině, označení NP 0531; jeho perioda je pouze 0,033 s.

Pulsary jsou předmětem intenzivního pozorování i teoretického studia. Jedna z hypotéz předpokládá, že pulsary jsou neutronové hvězdy. Existence neutronových hvězd byla teoreticky předpovězena již před 30 lety, tedy mnohem dříve, než byly objeveny pulsary. Až do objevu pulsarů nebyly známy žádné objekty, jejichž vlastnosti by odpovídaly teorii o neutronových hvězdách.

Předpokládá se, že neutronové hvězdy mají hmotnost řádově rovnou hmotnosti Slunce, ale velmi malé rozměry — průměr hvězdy je pouze 15 až 20 km. Taková hvězda pak musí mít obrovskou hustotu (10^{17} až 10^{18}) kg m^{-3} , což je řádově hustota atomového jádra. Připomeňme, že jeden krychlový centimetr látky při této hustotě má hmotnost miliardu tun, takže látka nemůže již existovat v normálním stavu: kolem jader atomů neexistují elektronové obaly a jádra jsou na sebe těsně natlačena. Hustota látky vzrůstá směrem od povrchu do nitra hvězdy.

Na obr. 1 je nakreslen model neutronové hvězdy. Povrchová vrstva o tloušťce asi 4 m je složena převážně z iontů železa a lehkých prvků. Pod touto vrstvou leží vrstva, v níž je již tak vysoká hustota, že elektronové obaly jsou zcela rozrušeny a elektrony jsou promíchány s jádry prvků. Další vrstva o tloušťce několika set metrů má ještě větší hustotu, obsahuje jádra prvků a relativistické elektrony, což znamená, že rychlost elektronů je srovnatelná s rychlostí světla. Jádro



■ železo a lehké prvky; chybí H a He

▨ nerelativistické elektrony, jádra

▤ relativistické elektrony, jádra

▦ neutrony

Obr. 1. Model neutronové hvězdy s povrchovou teplotou 10^3 K.

hvězdy má hustotu řádově rovnou hustotě atomového jádra; při této hustotě se elektrony spojují s protony a vytvářejí neutrony. Připomeňme, že neutron je elementární částice, která se chová jako elektricky neutrální a vyskytuje se v jádrech všech prvků s výjimkou obyčejného vodíku, jehož jádro tvoří jediný proton. Volný neutron mimo jádro je nestabilní a rozpadá se na proton a elektron. Při obrovských hustotách, jaké jsou v jádrech neutronových hvězd, může již jakákoli látka existovat pouze ve stavu neutronů.

Pulsary mají velmi vysokou povrchovou teplotu, řádově 10^7 K až 10^8 K, což rovněž souhlasí s teorií o neutronových hvězdách. Za předpokladu, že pulsary jsou neutronové hvězdy, pak můžeme vysvětlit vznik pulsů rotací takové hvězdy, přičemž perioda rotace je totožná s periodou pulsů. Předpokládáme, že na povrchu pulsaru je jedno nebo více míst, která vyzařují energii s větší intenzitou než jejich okolí. V okamžiku, kdy je takové místo obráceno k Zemi, zaznamenáme zvýšenou intenzitu rádiového záření. Protože periody pulsarů jsou kolem jedné sekundy, znamená to, že se za tuto dobu otočí celé těleso kolem své osy. I když rozměry pulsarů jsou velmi malé, dosahuje rychlost na „rovníku“ hvězdy kolem 100 km s^{-1} a u pulsaru v Krabí mlhovině dokonce hodnoty blízké 2000 km s^{-1} .

Čtenáře bude jistě zajímat, jak pulsary vznikají. Nejpravděpodobnější je hypotéza, podle níž jsou pulsary pozůstatky supernov. Podle této hypotézy je při výbuchu supernovy část látky hvězdy vyvržena velkou rychlostí do prostoru (tak vznikne planetární mlhovina) a zbytek, v němž je soustředěna převážná část látky, se začne velmi rychle smršťovat, přičemž se také zvyšuje rychlost otáčení kolem osy. Pulsar získá velmi velkou úhlovou rychlost; s postupem doby se však rotace zpomaluje. Výbuch supernovy není zcela symetrický a je-li plynná obálka vržena převážně jedním směrem, pak ze zákona zachování hybnosti plyne, že se vznikající pulsar začne pohybovat ve směru opačném. Pro tuto hypotézu svědčí údaje získané pozorováním pulsarů. Bylo zjištěno, že se pulsary pohybují vzhledem ke Slunci velkými rychlostmi — řádově 100 km s^{-1} — a rovněž bylo pozorováno postupné prodlužování periody pulsarů.

Názorným příkladem svědčícím pro tuto hypotézu je již zmíněný pulsar v Krabí mlhovině. Studium starých čínských kronik bylo zjištěno, že tato mlhovina vznikla při výbuchu supernovy dne 2. května 1054 a současně vznikl pulsar, jehož stáří tedy známe s velkou přesností: letos mu bude právě 917 roků. Je to pravděpodobně nejmladší pulsar z dosud objevených v naší Galaxii a má též nejkratší periodu pulsů. Budeme-li předpokládat, že pulsar vznikne při každém výbuchu supernovy, pak můžeme odhadnout, že za dobu existence Galaxie (asi 10 miliard roků, vzniklo kolem jedné miliardy pulsarů. Protože se pulsary

pohybují velkými rychlostmi, unikne jich značná část z gravitačního působení Galaxie a není vyloučeno, že za dobu existence Galaxie doletěly některé až do sousedních galaxií a právě tak nelze vyloučit, že z těchto galaxií „přiletěly“ některé velmi staré neutronové hvězdy do naší Galaxie. Stáří takových objektů by ovšem bylo značné a prakticky by již nevyzařovaly, takže bychom je pravděpodobně nemohly pozorovat.

Studium pulsarů podstatně rozšiřuje naše poznatky o hmotě, existující za mimořádně vysokých teplot a tlaků. Měření na rádiových i optických vlnách přinesou jistě další údaje o těchto zajímavých kosmických objektech.

NAŠE SOUTĚŽ

Úlohy k řešení

Matematika

7. Buďte a a b reálná čísla a položme

$$f(x) = ax + b.$$

Vyšetřete všechny případy, kdy posloupnost

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))),$$

obsahuje jen konečný počet různých členů.

Břetislav Novák

8. Čtyři body čtyřstěnu, které neleží v jedné rovině, mají stejný součet vzdáleností od rovin jeho stěn. Dokažte, že stěny tohoto čtyřstěnu jsou navzájem shodné trojúhelníky.

Jiří Sedláček, Jaroslav Zemánek

9. V aritmetické posloupnosti je součet prvních p členů roven číslu q a součet prvních q členů je roven číslu p ($p \neq q$). Určete součet prvních $(p + q)$ členů.

Ota Setzer

10. V každém rohu čtvercového náměstí je vchod do jednoho z kin K_1, K_2, K_3, K_4 . Občan Váhavec stál u vchodu do kina K_1 , ale nevešel dovnitř a vydal se podél jedné strany náměstí ke kinu K_2 , v polovině své cesty se však zastavil a vydal se z tohoto místa ke kinu K_3 , v polovině této cesty se opět zastavil a vyrazil přímo ke kinu K_4 , v polovině cesty opět zaváhal a změnil směr ke kinu K_1 . Zformulujte geometrickou

úlohu, která by zahrnovala i neomezené pokračování této pouti a vyřešte tyto úkoly:

- a) Charakterizujte polohu všech bodů, v nichž chodec mění směr.
- b) Popište hranici oblasti zahrnující střed náměstí, do které by nevšedl ani při nekonečně mnoha okruzích své obchůzky.

Jaroslav Šedivý

11. Která celá nezáporná čísla vyhovují rovnici

$$x^3 + y^3 = (x - y)^4?$$

Václav Vilímek

12. Zjistěte, kolik různých sítí dané krychle lze sestrojit. Přitom dvě sítě (tj. rovinné obrazce) pokládáme za totožné, jsou-li příslušné obrazce shodné.

Jan Vyšín

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány dvě mimoběžky a , b , rovina p a kladné číslo r . Sestrojte přímku p , která je rovnoběžná s rovinou p , kolmo protíná přímku a a od přímky b je vzdálena o délku r .

Stanislav Horák

2. Je dána přímka a a na ní čtyři různé body A , B , C , D (v tomto pořadí). Kromě toho je dána rovina ϱ . Sestrojte přímku p rovnoběžnou s rovinou ϱ tak, aby roviny pA , pC byly k sobě kolmé a roviny pB , pD byly také k sobě kolmé.

Stanislav Horák

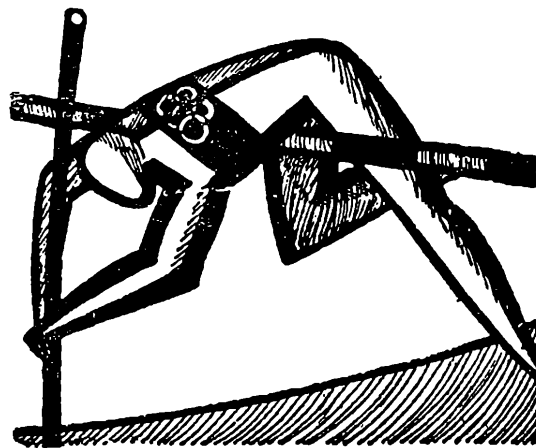
3. Je dána přímka p a mimo ni bod M . Sestrojte krychli, je-li bod M středem její hrany a jestliže jedna tělesová úhlopříčka krychle leží na přímce p .

František Hradecký

4. Sestrojte rotační válec, jsou-li dány dvě různoběžné tečny t , u jedné podstavy a bod A na obvodu druhé podstavy.

Vítězslav Littman

MMO



XIII. MMO očima účastníků

Doc. OTA SETZER, ČVUT Praha

Třináctá mezinárodní matematická olympiáda se letos konala v Žilině ve dnech 10.—20. července za účasti 15 států: Anglie, Bulharska, Československa, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunska, SSSR a Švédsko.

Zatímco vedoucí všech delegací zasedali již od 7. července, izolováni od svých svěřenců, aby vybrali soutěžní úlohy, stanovili počty bodů za jednotlivé příklady a přeložili texty do mateřských jazyků účastníků, sjížděli se mladí olympionici během 10. července do Bratislavy, kde byli ubytováni v Domově mládeže. Druhý den se žáci a žákyně přesunuli autobusy do místa soutěže, Žiliny. Cestou byly zastávky v Piešťanech a Trenčíně, vždy s prohlídkou města. Během celé soutěže byly každé národní skupině přiděleny tlumočnice vybrané z posluchaček Komenského university. V Žilině byli všichni účastníci ubytováni a stravováni v koleji Vysoké školy dopravní. Den před soutěží, 12. července, vykonala všechna družstva — až na ojedinělou výjimku — delší rekreační zájezd do lázeňského místa Bojnice přes Prievidzu.

Vlastní soutěž začala v úterý 13. července v moderní, vlajkami vyzdobené budově střední průmyslové školy stavební v Žilině (obr. 1) za účasti náměstka ministra školství SSR, prof. dr. Greguša, DrSc. zástupců SAV, vedoucích funkcionářů města i strany. Po úvodním ceremoniálu dostali soutěžící všech národů podle abecedního pořadí v svém družstvu startovní čísla od 1 do 8. Potom převedli pořadatelé všechny jednotky jednotlivých národů do místnosti č. 1, dvojky do posluchárny

č. 2 až osmičky do č. 8. Nastal tuhý boj s časem (3 příklady na 4 hodiny) i s obtížností nezvyklých úloh.

Ve středu 14. července pokračovala soutěž řešením dalších tří příkladů. Odpoledne si žáci prohlédli Žilinu, věnovali se sportu a večer se sešli s žilinskou mládeží a dlouho do noci besedovali při svíčkách v klubovně koleje VŠD za zvuků lidového orchestru.



Obr. 1

Čtvrtek 15. července byl vyhrazen exkurzím do patronátních závodů v Žilině, Martině, Púchově, Bytči, Varíně, Kysuckém N. Městě a Povážské Bystrici. Všude byli cizinci vřele uvítáni a pohoštěni, dostali vzpomínkové dárky a závody jim připravily kratší výlety do okolí. Mohutně působila na nás i na Francouze, kteří jeli s námi, návštěva Povážských strojírén a jejich společenského domu, snad nejlépe vybaveného v celé republice. Závod reprezentovaný ing. Jozefem Bednárem přichystal vedle nákladného dvojího pohoštění, zájezdu do Vrátné doliny a večere v hotelu Polom v Žilině vítězi olympiády motocykl Babeta.

Nezapomenutelným dojmem musel na velkou většinu studentů působit společný autobusový výlet do Vysokých Tater ve dnech 16. a 17. července s trasou: Žilina, Oravský Podzámok, Strečno, v jehož okolí navštívili Francouzi památník partyzánů, Demänovské jeskyně, Lipťovský Hrádok, Poprad s přenocováním, Tatranská Lomnica, Starý Smokovec, Štrbské pleso, Podbanské, Žilina. Krásná slovenská příroda, moderní vybavení navštívených turistických i lázeňských míst a pěkné počasí vytvořily výborný rámec této mezinárodní družbě studující mládeže.

V neděli 18. července se účastníci MMO přesunuli rychlíkem do Bratislavy a ubytovali se v Mladé gardě. V pondělí 19. července se ráno konala v Domě pionýrů beseda s bratislavskou mládeží a pak nás autobusy odvezly na Bratislavský hrad a na Slavín, kde sovětští studenti položili věnec. Odpoledne bylo v aule Komenského university slavnostní rozdělení cen za účasti konzulů zúčastněných států akreditovaných v Bratislavě. Po úvodním slově akademika Schwarze a náměstka ministra školství prof. dr. Greguše přijali vítězové diplomy z rukou aka-



Obr. 2

demika Nováka. Slovenky v národních krojích rozdaly věcné ceny darované slovenskými závody i upomínkové předměty. Na závěr pozval zástupce Poláků ostatní delegace na příští XIV. MMO do Varšavy. Večer se sešli všichni účastníci soutěže naposled na slavnostní večeři, kterou uspořádal SZM v hotelu Carlton.

Odborná část MMO, texty a řešení úloh, umístění jednotlivců a národů celkem i v jednotlivých příkladech jsou obsahem jiných článků.

Rád bych se však ještě zmínil o dojmech našich československých závodníků. Otázku na nejmilejší zážitek z MMO zodpověděli všichni shodně: výlet do Vysokých Tater, kde byli někteří z nich poprvé. Nejnepříjemnější byly pro ně chvíle při vlastním řešení úloh, dále zbytečně časný budíček 16. VII., jindy zase nedodržování odjezdů autobusů pro nekázeň zahraničních jednotlivců. Úlohy MMO se většinou jevily těžší než minulé roky, nezvyklé, ale po oznámení jejich správných řešení uznali žáci jejich vhodnost. Nejprátelejší vztahy měli naši s Jugoslávci, nejveselejší se jim jevili Holanďané, dobře ocenili i způsob, jak Francouzi oslavovali zpěvem a tancem svůj národní svátek, 14. červenec, výročí dobytí Bastily.

Poměrný neúspěch československého družstva, složeného ze žactva různých koutů republiky (Strakonice, Praha, Brno, Bratislava, Rimavská Sobota a Prievidza), lze jen částečně omluvit okolností, že se u nás nevěnujeme výchově obzvláště nadaných matematiků tak jako v jiných státech, kde se pro ně zřizují zvláštní školy a kde soustředění olympioniků trvají déle.

Nakonec musím poděkovat slovenským kolegům, kteří neúnavně pomáhali vytvářet srdečné prostředí a v zájmu dobré věci obětovali kus svých prázdnin třinácté MMO; měli zářný příklad ve všudypřítomném dr. L. Bergerovi.

Na připojeném obr. 2 je znázorněn emblém XIII. MMO a odznáček účastníků olympiády.

Předmět snažení 116 Olympioniků

Rozhledy sledují pečlivě všechno dění nejen v domácí MO, ale i v MMO. Proto i letos přinášíme kromě informací o průběhu MMO též texty soutěžních příkladů z MMO, aby si čtenáři dovedli představit jejich úroveň. Řešení otiskneme v některém z dalších čísel.

Pod textem každé úlohy je vždy uveden stát, který úlohu navrhl, a maximální počet bodů přiřčených úloze.

S. H.

První den — 13. 7. 1971

1. Dokážte, že tvrdenie:

„Pre ľubovoľné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ je splnená nerovnosť

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_1 - a_n)(a_2 - a_1) + (a_2 - a_3)(a_2 - a_n) + \\ + (a_n - a_1)(a_n - a_2) + (a_n - a_{n-1}) \geq 0$$

je pravdivé pre $n = 3$ a $n = 5$ a nie je pravdivé pre žiadne iné prirodzené $n > 2$.

(Maďarsko, 5 bodů)

2. Nech je daný konvexný mnohosten P_1 , ktorý má práve deväť vrcholov $A_1, A_2, \dots, A_9$. Označte P_i ($i = 2, 3, \dots, 9$), mnohosten, ktorý sa dostane z P_1 rovnobežným posunutím, pri ktorom sa bod A_1 premiestni do bodu A_i ($i = 2, 3, \dots, 9$).

Dokážte, že aspoň dva z mnohostenov $P_1, P_2, \dots, P_9$ majú aspoň jeden spoločný vnútorný bod.

(Sovietský svaz, 7 bodů)

3. Dokážte, že postupnosť $\{2^n - 3\}, n = 2, 3, 4, \dots$ obsahuje nekonečne mnoho čísel, z ktorých každé dve sú nesúdeliteľné.

(Poľsko, 9 bodů)

Na riešenie vyššie uvedených úloh je 4 hodiny čistého času.

Druhý deň — 14. 7. 1971

4. Všetky steny štvorstena $ABCD$ sú ostrouhlé trojuholníky. Uvažujme o všetkých uzavretých lomených čiarach $XYZTX$, ktoré sú definované nasledujúcim spôsobom:

X je bod hrany AB rôzny od A aj B . Analogicky Y, Z, T sú vnútorné body hrán BC, CD, DA v uvedenom poradí.

Dokážte, že

a) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA \neq 0$, potom medzi týmito lomenými čiarami neexistuje najkratšia;

b) ak $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CDA = 0$, potom existuje nekonečne mnoho lomených čiar minimálnej dĺžky a táto dĺžka je rovná $2 \cdot AC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, kde $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

(Holandsko, 6 bodů)

5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje neprázdna konečná množina S bodov v rovine s tou vlastnosťou, že ku každému bodu $A \in S$ existuje v S práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A sa rovná jednej.

(Bulharsko, 7 bodů)

6. Uvažujme o štvorcovej tabulke

$$a_{11} \ a_{12} \quad a_{1n}$$

$$a_{21} \ a_{22} \quad a_{2n}$$

$$a_{n1} \ a_{n2} \quad a_{nn}$$

ktorá je zostavená z nezáporných čísel a vyhovuje následujúcej podmienke: ak $a_{ij} = 0$, potom platí nerovnosť

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geq n.$$

Dokážte, že pre súčet s všetkých čísel tabuľky platí:

$$s \geq \frac{1}{2} n^2.$$

(Švédsko, 8 bodů)

Na riešenie vyššie uvedených úloh je štyri hodiny čistého času.

R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

225. výročí narozenin Gasparda Monge

Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

S rozvojem stavebnictví a strojírenského průmyslu je spjat vývoj rýsování a zobrazovacích nauk. V tomto vývoji na předním místě je zapísáno jméno muže, který na konci 18. a začátku 19. století patřil ke špičce matematiků a zejména geometrů.

Je to Gaspard Monge, narozený 10. května 1746 v Beaune, který ve svých čtrnácti letech sestrojil požární stříkačku a pomocí úhloměrného aparátu, vlastní konstrukce, zaměřil a vykreslil situační plán svého rodného města. Jako šestnáctiletý se stal profesorem fyziky na církevní škole v Lyonu, ale na přání otce vstoupil na vojenskou ženíjní školu v Mézières. Hlavním úkolem na této škole bylo projektování pevností, které se však dalo do té doby velmi složitými konstrukcemi a výpočty. Monge rozřešil předloženou úlohu vlastním způsobem použitím metody, kterou nazval deskriptivní geometrií a která byla pak až do roku 1795 utajována jako důležité francouzské státní tajemství. Na škole v Mézières působil v letech 1765 až 1783 jako učitel, od roku 1768 jako profesor matematiky a později i fyziky. Od roku 1780 byl profesorem hydrauliky v Louvru, v témž roce byl zvolen za člena Francouzské akademie věd. V roce 1789 se stal členem komise pro zavedení metrické soustavy měr a vah, po svržení krále byl ministrem námořnictva a později ředitelem zbrojovky. Koncem roku 1794, kdy po ukončení hrůzo-

vlády se vrátil do Paříže, spolupůsobil při zakládání dvou škol: školy pro učitele (école normale) a technické školy (école polytechnique). Druhá z nich se stala vzorem pro tehdy zakládané technické vysoké školy i v jiných zemích a také pro přeměnu pražské stavovské inže-



nýrské školy na královské české stavovské technické učiliště (1806), z něhož se postupem času vyvinulo dnešní ČVUT.

Na obou školách byl profesorem deskriptivní geometrie. Již v roce 1795 v časopise a v roce 1798—99 knižně vydává svou práci o této nauce.

Z Francie se deskriptivní geometrie (v podstatě pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny — dnes krátce zvané Mongeovo promítání) rozšířila do sousedního Německa a odtud do bývalého Rakouska, jehož součástí byly také české země.

Gaspard Monge také položil základ k diferenciální geometrii. Použil diferenciální počet v teorii křivek a ploch v knize *Application de l'analyse à la géométrie* (Použití analýzy v geometrii).

V roce 1809 se vzdal profesury, přesto však dále vědecky pracoval. Během svého působení na technické škole poznal též pozdějšího císaře Napoleona a stal se jeho oddaným stoupencem. Po jeho pádu byl při reorganizaci Akademie věd vyloučen z řad jejích členů. To na něj, již tehdy vážně nemocného, po katastrofální Napoleonově výpravě do Ruska byl raněn mrtvicí, zapůsobilo tak, že v těžké duševní chorobě zemřel 18. července 1818 v Paříži.

Jeho kniha o deskriptivní geometrii (podle vydání z roku 1811) je uváděna zajímavým programem, který má dosud (i pro nás) platnost.

Pro zajímavost uvedme aspoň z jeho začátku:

„Aby bylo možné vymanit francouzský národ ze závislosti na cizím průmyslu, v níž se dosud nacházel, je nutno předně zaměřit celé národní vyučování na poznávání předmětů, které vyžadují přesnost, což bylo dodnes naprosto zanedbáváno; zvykat ruce našich řemeslníků zacházet s nejrůznějšími nástroji, které umožňují přesnost ve výrobě a jimiž lze měřit přesnost různých stupňů. Pak také spotřebitelé budou citliví na přesnost a budou ji též u různých výrobků vyžadovat a vhodně ji oceňovat. Naši řemeslníci, kteří jí budou přivykat od nejútlejšího věku, budou jí také schopni dosahovat.

Za druhé je nutno rozšířit znalost velkého počtu přírodních zákonů, které jsou nezbytné pro pokrok výroby a využít té šťastné okolnosti, v níž se nalézá národ, který disponuje hlavními zdroji, jichž potřebuje, k pokroku všeobecné vzdělanosti.

Konečně je nutno rozšířit mezi našimi řemeslníky znalost řemeslných postupů a příslušných strojů, které buď snižují rukodělnou práci, nebo umožňují větší sériovost či přesnost výrobků. V tomto ohledu, to musíme přiznat, máme mnoho co čerpat od jiných národů.“

Vzpomínky letce konstruktéra

F. X. z H.

Bylo červnové nedělní odpoledne. Pěkně jsme leželi v trávě, jen kdyby kamarádi dali člověku pokoj. Stále mě sváděli, abych si zalétal s novým, malým sportovním dvousedadlovým letounem. „Dělá i 185 km za hodinu,“ tvrdili.

Byl jsem tehdy vedoucím konstrukční kanceláře jiné továrny na letadla. Naším výrobním programem nebyly sportovní letouny, ale stíhačky a větší stroje od 800 k výš. Nic nepomáhalo to, že jsem je odbýval konstatováním, že letoun jistě 185 km/h dělá, letí-li po větru.

Báze pro měření rychlosti byla nedaleko. Byla vytyčena podél státní silnice rovné jako pravítko. Báze byla dlouhá 5 km. Aby se vyřadil vliv větru na měření, prolétá se báze dvakrát, jedním a druhým směrem. Po odečtení času průletu smyčky nutné k obrácení letounu do protisměru, obdrží se čistý čas průletu trati 10 km dlouhé. Smyčku prolétají letci zpravidla vertikální zatačkou, tj. při plné, nezmenšené rychlosti se letoun nakloní tak, že leží na boku a křídlo směřuje téměř kolmo k zemi. Celý vztlak křídla, až na malou část, se využije k překonání odstředivé síly. Ona malá část vztlaku křídla a vztlak na bok položeného trupu stačí k tomu, aby letoun při průletu zatačky neztrácel výšku. Po provedeném obratu se letoun vyrovná do horizontu a znovu prolétá nad bází v opačném směru. Celou trať nad bází musí letoun proletět v obou směrech bez ztráty výšky. Říká se, že nesmí být tlačén.

Měl-li mít letoun maximální rychlost 185 km/h, musel bázi proletět v obou směrech v čistém čase asi 194,6 s, tj. po odečtení času potřebného k průletu smyčky od celkového času průletu v jednom i druhém směru. Tento jednoduchý výpočet jsem zvládl pomocí logaritmického pravítka. Potom jsem se zvedl z trávy a bez nadšení jsem se připravoval k letu. Stále jsem se nemohl zbavit pocitu, že s letounem není něco v pořádku. Doslechl jsem se už o několika smrtelných pádech, ale nikdy jsem se nedozvěděl příčinu. Konečně neměl jsem ani čas se o to starat. Byla to vina letounu? Byla to chyba pilotáže? Jeden letoun se zřítíl dokonce na náměstí jednoho severomoravského městečka, z něhož pocházel pilot, který letoun řídil. V tom městě bydlelo i jeho děvče. Při vyšetřování příčiny pádu vyšlo najevo, že se tomu děvčeti a kamarádům přiletěl pochlubit svým leteckým uměním. To však nemusela být příčina smrtelného pádu. S těmito pocity a myšlenkami jsem nasedal do letounu.

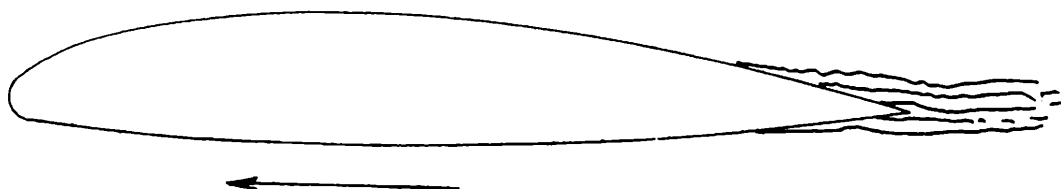
Abych se s letounem seznámil, udělal jsem větší okruh nad letištěm. Tím získali mládenci čas, aby obsadili měřicí stanice na bázi. Přeletěl



jsem nad oběma měřicími stanicemi a přesvědčil jsem se, že je vše k měření připraveno. Příčným zakymácením letounu jsem dal časoměřičům smluvené znamení, že příští průlet je už rychlostní. V patřičné vzdálenosti od první měřicí stanice jsem letoun obrátil do směru průletu báží, vyrovnal jej do horizontálního letu a dal plný plyn. Tak jsem proletěl nad prvním bodem a za necelé dvě minuty i nad druhým bodem báze. A už jsem začal letoun klonit k zatáčke, při níž levé křídlo se čím dál tím více sklánělo po polohy téměř kolmé k zemi. A tehdy se to stalo. Letoun se přetočil, zcela nečekaně, kolem své podélné osy na pravé křídlo, tedy na stranu opačnou, než byl původní sklon a přešel do pádu ve šroubovici. Kormidla nereagovala. Stačil jsem jenom vypnout motor a vzepřít se rukama o stěnu trupu nad deskou s palubními přístroji. A už se levé křídlo dotklo okrajovým obloukem země a s ohlušujícím praskotem se ulomilo. To bylo moje štěstí, protože větší část energie pádu se tím utlumila a zbytek se utlumil ulomením motoru s motorovým ložem a zadní částí trupu, který se přelomil. Z přelomeného trupu jsem vypadl, ležel jsem naznak, ale vaz jsem neměl zlomený. Vyvázl jsem s menšími oděrkami a zhmožděninami, duševně deprimován (obr. 1).

Tato havárie měla za následek, že jsem změnil místo. Přešel jsem jako vedoucí podniku a šéfkonstruktor do továrny, která vyráběla ony spor-

tovní letouny. Dát sympatický, malý a laciný sportovní letoun aerodynamicky a konstrukčně do pořádku, byla v novém místě má první práce. Po pádu mi bylo jasné, že došlo k nežádoucímu odtržení vzdušného proudu na konci pravého křídla, které při levé zatáčce zřejmě překročilo kritický úhel náběhu (obr. 2a, b). Tím došlo na pravém křídle ke ztrátě vztlaču: v důsledku toho k přetočení a pádu letounu do vývrtky, která nebyla nebezpečná, kdybych byl letěl v dostatečné výšce. Těch 120 m výšky, ve kterých jsem letěl, mi k vybrání letounu z vývrtky nestačilo.



2a. Úplav (vírové pole) za křídlem



2b. Úplav (vírové pole) za křídlem
po odtržení proudu na konci profilu

Diagnózu jsem udělal, bylo nutné potvrdit ji pokusem. Na horní strany obou křídel jsem nechal nalepit jedním koncem tkalouny asi 10 cm dlouhé, které za letu vlály jako praporečky ve směru proudícího vzduchu. Zkoušky jsme konali za úplného bezvětří. Tovární pilot, v bezpečné výšce, záměrně letoun přetáhl, tj. letěl s nadkritickým úhlem náběhu. Tkalouny na koncích křídel se postavily do polohy k povrchu křídla téměř kolmé a neklidně se třepaly, zatím co na zbývajících částech křídla vlály skoro těsně nad povrchem křídla. To byl výsledek pozorování pilota, který byl potvrzen snímky z fotokomor zamontovaných do trupu. Křídlo je aerodynamicky vadné, nastává-li při přetažení odtržení vzdušného proudu na konci křídla u okrajového oblouku (obr. 2b). Odtržení vzdušného proudu musí nastat neprve na partiích křídel blízkých trupu, aby zvířený vzduch v úplavu narážel na kormidla a tyto nárazy aby upozornily pilota, že letí při téměř nadkritickém úhlu náběhu křídla. Odtrhávání vzdušného proudu na koncích křídel není nebezpečné při přímém nebo stoupavém letu za bezvětří. Stačí však malý větrný poryv, rovnováha se poruší a může nastat pád. Při letu v zatáčce je to velice nebezpečné, protože vnější křídlo letí při větším úhlu náběhu než vnitřní a potom dojde k tomu, co se stalo mně.

Závada byla bezpečně zjištěna. Odpomoc byla docela jednoduchá. Na obě náběžné hrany křídel poblíž trupu jsem dal nalepit dřevěné lištičky asi 60 cm dlouhé, trojúhelníkového průřezu $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$. Tím jsem v oné partii porušil nejcitlivější část profilu křídla tak, že odtržení vzdušného proudu nastávalo nejdříve v blízkosti trupu, jak je to žádoucí, takže pilot byl včas varován. Tato úprava měla ještě tu výhodu, že se dala snadno provést i u letounů již hotových.

Rozhledy pomáhají škole

Prof. JOSEF KOTYK, Pardubice

Na toto téma bylo v našem časopise uveřejněno při různých příležitostech již několik článků¹⁾. Všechny se shodovaly v tom, že Rozhledy matematicko-fyzikální nabyly v řadách naší mládeže, studující na školách všeobecně vzdělávacích a odborných, plné obliby a staly se našim středním školám při vyučování reálným předmětům vydatným pomocníkem. Okolnost, že časopis vstupuje letos již do jubilejního 50. ročníku a oslavuje půl století svého trvání, je nám podnětem k tomu, abychom připomenuli jeho význam a záslužné výchovné působení také nynější studující mládeži.

Úvodem několik vzpomínek!

Byl jsem před 50 lety také ještě žákem střední školy, když mě naši pečliví učitelé matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie upozornili na nový časopis. Číslo jeho prvního ročníku mně ihned také zapůjčili a s úsměvem dodali: „Kdo si lízne jednou, je ‚ztracen‘ navždy!“ Měli pravdu: Milované Rozhledy staly se od té doby skutečně mým stálým pomocníkem ve studiích i v učitelském povolání, věrným a spolehlivým průvodcem po celý další život.

Za nejvhodnější příležitost k provedení náboru předplatitelů časopisu, zejména pak získání nových čtenářů z tříd I. ročníku školy, považoval jsem vždy besedy učitelů s odběrateli časopisu nebo zájmové kroužky, jejichž pracovní program se přimyká běžnému, články Rozhledů však účelně rozšířenému, učivu. Ukázalo se, že dobrý časopis se při tom doporučoval sám. Velmi přitažlivou kapitolou, v níž mohou žáci všech ročníků projevit svůj zájem současně a ve společném kroužku nalézt

¹⁾ Viz také autorovy články „Rozhledy pomáhají škole“ v roč. 41, čís. 1, str. 44 až 47, a v roč. 45, čís. 6, str. 302 až 303.

zároveň přiměřené další poučení, je z matematiky např. řešení lineárních rovnic. Ze zkušeností tohoto druhu vyličím nyní jednu podrobněji.

Na začátku školního roku projevíli jednou nově přijatí „prvňáčci“ rovněž přání v zájmovém kroužku hlouběji procvičit řešení lineárních rovnic. Žákům postupujících tříd a čtenářům Rozhledů, pokud se chtěli práce v kroužku také zúčastnit, jsem jako přípravný úkol doporučil prostudovat dva články Dr. Jaroslava Chudého, doc. ČVUT v Praze, ze starších ročníků časopisu; pojednávají jednak o determinantech²⁾, jejich základních vlastnostech a užití, jednak o řešení soustavy lineárních rovnic metodou eliminační³⁾. Při orientačním přezkoumání jejich přípravy měl jsem ovšem stále na zřeteli i žáky, kteří byli v našem kroužku poprvé, aby také oni nový pojem determinantu správně pochopili a nabyli tím odvahy se na činnosti kroužku ihned podílet. To se brzy opravdu podařilo. Již řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a tří lineárních rovnic o třech neznámých pomocí determinantů se i žákům I. ročníku tak zalíbilo, že se ho záhy aktivně, ba přímo nadšeně, rovněž účastnili.

Mohl jsem pak postoupiti dále. „ROZHLEDY jsou odrazovým můstkem,“ prohlásil jsem, „který dovoluje žákům středních škol proniknouti snadno až do látky vysokoškolské“. Pohotově jsem otevřel připravenou vysokoškolskou učebnici a v napjatém očekávání vybíral z ní postupně další úlohy a cvičení:

1. Odvoďte podmínku, aby každé dvojici celých čísel c_1, c_2 (včetně nuly) odpovídala dvojice celých čísel x, y (včetně nuly), daných soustavou rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

jsou-li koeficienty a_1, a_2, b_1, b_2 rovněž celá čísla!

2. Kterými čísly nutno násobit rovnice soustavy

$$x - 2y + 2z + 3 = 0$$

$$3x + 5y + 4z = 15$$

$$4x + 3y - z = 19,$$

aby po sečtení odpadly neznámé a) y, z ; b) x, z ; c) x, y ?

²⁾ Viz článek „Determinanty“ v roč. 37, čís. 2, str. 54 až 57, a v čís. 3, str. 97 až 100.

³⁾ Viz článek „Eliminační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic“ v roč. 36, čís. 4, str. 145 až 153, a čís. 5, str. 195 až 199.

3. Řešte soustavu rovnic:

$$L_1 \equiv x - 5y + 2z - 4u = 0$$

$$L_2 \equiv -x + 2y - z + 5u = 0$$

$$L_3 \equiv 3x + y - 3z - 2u = 0$$

$$L_4 \equiv 4x - 10y + z - 4u = 0$$

4. Řešte soustavu rovnic:

$$L_1 \equiv 5x - 2y + 4u - 2 = 0$$

$$L_2 \equiv -x + 3y - 6z + 7 = 0$$

$$L_3 \equiv 2x + 3z - 6u - 14 = 0$$

$$L_4 \equiv 5x - 8y + 9z + 10u = 0$$

Žáci řešili úlohy s náležitým elánem. Běželo přece o úlohy z učebnice pro vysoké školy! Za živé účasti všech přítomných dospěli k těmto výsledkům:

1. Determinant soustavy $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1.$

2. Hledaná čísla jsou:

a) $-17, 4, -18$; b) $19, -9, 2$; c) $-11, -11, 11.$

3. Rovnice dané soustavy jsou na sobě závislé, neboť

$$3L_1 + 2L_2 + L_3 = L_4.$$

Pozornost řešitelů jsem cílevědomě orientoval i k determinantu soustavy. Žáky jsem při této příležitosti seznámil kromě toho také se řešením: Rovnice čtvrtá je lineární kombinací prvních tří rovnic s koeficienty 3, 2, 1.

4. Rovnice této soustavy obsahují spor. Žáci se o tom přesvědčili tak, že jednak součtem $2L_2 + L_3$, jednak rozdílem $L_1 - L_4$ dospěli k témuž výrazu $6y - 9z - 6u$, shledali však, že má různé hodnoty.

K posílení samostatnosti v úsudcích následovala krátká písemná práce, v níž byla každému z dvou oddělení A), B) zadána jedna úloha: Řešiti soustavu rovnic

$$A) \quad L_1 \equiv 3x + y + 2z - u - 8 = 0$$

$$L_2 \equiv x - y - z + u + 1 = 0$$

$$L_3 \equiv 4x + 5y + z - 3u = 0$$

$$L_4 \equiv -x + 2y - 4z + 17 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad L_1 &\equiv 5x + y + z - 2u - 3 = 0 \\ L_2 &\equiv x - 2y + 3z + 4u - 4 = 0 \\ L_3 &\equiv -2x - 7y + 8z + 14u - 9 = 0 \\ L_4 &\equiv 4x + 3y - 2z - 6u + 1 = 0 \end{aligned}$$

Přes mé připomenutí, že účast na řešení úlohy je dobrovolná a není míněna jako závodění, pracovali všichni žáci a s malými časovými rozdíly dost brzy hlásili, že rovnice dané soustavy jsou na sobě závislé, neboť v odd. A) $L_2 + L_3 - L_4 = 2L_1$,

v odd. B) $L_1 + L_4 = 5L_2 - 2L_3$.

V obou případech byl vyšetřen také determinant soustavy.

Čas pokročil a zájmový kroužek končil. Za „nadílku“ domů jsem žákům doporučil studijní úkol z vysokoškolské učebnice, které jsem užíval. Zájem o ni byl nepopsatelně velký. Mohl jsem jej však ihned uspokojit zapůjčením 10 výtisků, jež jsem si k podobným příležitostem opatřil, když v roce 1930 vyšla. Výtečná kniha univ. prof. dr. Bohumila Bydžovského⁴⁾ „Základy teorie determinantů a matic a jich užití“, vydaná nákladem Jednoty čsl. matematiků a fyziků, si té pozornosti zaslouží.

Domácí úkol účastníků zájmového kroužku spočíval v tom, aby se zabývali soustavami rovnic

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad L_1 &\equiv 3x + y - 2u - 5 = 0 \\ L_2 &\equiv 2x + 4z - u + 10 = 0 \\ L_3 &\equiv x + 2y - z + 5u - 8 = 0 \\ L_4 &\equiv 5x + 4y - 5z + 2u - 28 = 0 \\ \text{B)} \quad L_1 &\equiv 3x + y - 2u - 5 = 0 \\ L_2 &\equiv 2x + 4z - u + 10 = 0 \\ L_3 &\equiv 5x + y + 4z - 3u + 5 = 0 \\ L_4 &\equiv x + y - 4z - u - 15 = 0 \end{aligned}$$

a provedli jejich řešení podle výkladu § 6 „Teorie soustavy lineárních rovnic“, odst. 34⁵⁾; s použitím pojmu tzv. hodnoty determi-

⁴⁾ Vynikající Bydžovského Aritmetiky pro býv. gymnasia, reálná gymnasia a reálky i jeho proslulé Sbírky příkladů se dočkaly až osmi vydání a sloužily našim středním školám ještě po roce 1945.

Jeho Úvod do analytické geometrie (JČMF, Praha 1923) patřil rovněž po desítky let k nejoblíbenějším učebnicím vysokoškolským.

⁵⁾ Viz str. 67 až 69 cit. knihy; cvičení, jež tvořila pracovní náplň našeho kroužku, mohou čtenáři nalézt v pořadí, jak byla uvedena, na str. 10, úl. 6; na str. 42, úl. 5; na str. 77, úl. 9, 4, 2 a 3.

nantu lze snadněji než dosavadním postupem ukázat, že rovnice jsou na sobě závislé, neboť

v př. A) jest $2L_1 - L_2 + L_3 = L_4$,

v př. B) pak $L_1 + L_2 = L_3$, $L_1 - L_2 = L_4$.

Na ROZHLEDY, jež nám pomohly vnést do zájmového kroužku mnohé podněty a vytvořily v něm — podobně jako v obci čtenářů časopisu — pracovní prostředí vhodné žákům všech ročníků, jsme ovšem nezapomněli. Hlásili se o ně všichni účastníci kroužku, jehož činnost byla ROZHLEDŮM, POMOCNÍKU ŠKOLY, tím nejlepším doporučením.

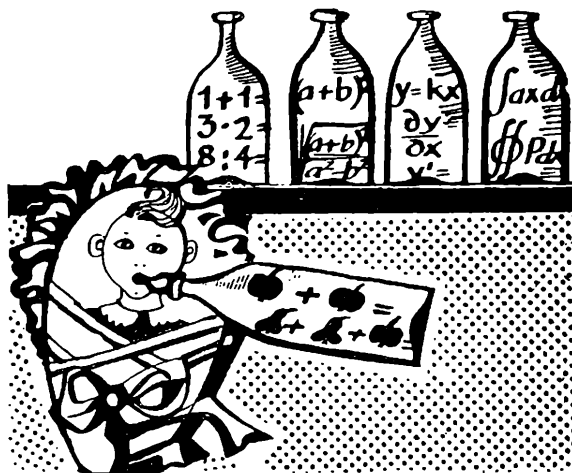
Cvičení našim čtenářům.

Řešte soustavu rovnic:

$$3x - 2y + z = 2$$

$$x - 18y + 15z = 10$$

$$2x + 3y - 3z + 1 = 0.$$



NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM

Barevná kořata

Karel, Vít, Petr a Jan dostali každý jedno kořatě jiné barvy. Kořata jsou A, B, C, D. O tom, kdo dostal které, svědčí pět výroků, z nichž každý říká jednou pravdu a jednou lž:

1. C není strakaté a D není šedé.
2. A není bílé a B není šedé.
3. Karel dostal černé a Vít dostal D.
4. Petr dostal B a Jan dostal bílé.
5. A není šedé a Jan nedostal C.

Rozdělte kořata mezi chlapce a určete jejich barvy.

O. S.

Barevná kořata. Karel dostal bílé A, Vít šedé D, Petr strakaté B a Jan černé C.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ

cyklický
 cyklická permutace
 cyklická
 válcový

cyclique, circulaire
 permutation $\tilde{z}$ circulaire
 changement m cyclique
 substitution cyclique
 cylindrique

Č

čára
 lomená čára
 čas
 časoprostor
 část
 A je částí B (o množinách)
 částečný
 četnost
 číselník
 číslice
 číslicový počítač
 číslo
 celé číslo
 desetinné číslo
 imaginární číslo
 komplexní číslo
 liché číslo
 pořadové číslo
 prvočíslo
 přirozené číslo
 reálné číslo
 sudé číslo
 čísla nesoudělná

ligne $\tilde{z}$, courbe
 ligne brisée
 temps
 espace-temps
 partie $\tilde{z}$, sous-ensemble
 A inclus dans B
 partiel, elle
 fréquence
 facteur
 chiffre m
 calculatrice numérique
 nombre
 nombre entier
 nombre décimal
 nombre imaginaire
 nombre complexe
 nombre impair
 numéro
 nombre premier
 nombre
 nombre réel
 nombre pair
 nombres premiers entre eux

čítání	compte <i>m</i>
čítat	compter
čítatel	numérateur <i>m</i>
člen	membre <i>m</i> , terme <i>m</i>
člen mnohočlennu	monôme <i>m</i>
člen řady	membre (terme) d'une série d'une progression <i>ž</i>
čtrnáct	quatorze
čtvercový	carré, <i>e</i>
čtverec	carré <i>m</i>
metoda nejmenších čtve.	méthode <i>ž</i> des moindres carrés
čtvereční	carré, <i>e</i>
čtveřice, čtveřina	quadruplet <i>m</i>
čtvrtina	quart <i>m</i>
čtvrtekruh	quadrant <i>m</i>
čtvrtý	quatrième
čtyřhranný	quadrangulaire
čtyři	quatre
čtyřicet	quarante
čtyřnásobný	quadruple
čtyřroh	quadrilatère <i>m</i>
čtyřstěn	tetraèdre <i>m</i>
čtyřstran	quadrilatère <i>m</i>
úplný čtyřstran	quadrilatère complet
čtyřstranný	quadrilatéral, quadrilatère
čtyřúhelník	quadrilatère <i>m</i> , quadrangle <i>m</i>
zborcený čtyřúhelník	quadrilatère gauche
čtyřúhelníkový	quadrangulaire

Po redakční uzávěrce tohoto čísla nám došla tato radostná zpráva, kterou sdělujeme svým čtenářům:

„Ministerstvo školství ČSR a Český odborový svaz pracovníků umění, kultury a společenských organizací udělily titul

**Kolektiv 25. výročí osvobození Československa
Sovětskou armádou**

kolektivu pracujících Státního pedagogického nakladatelství v Praze za výsledky dosažené rozvojem pracovní iniciativy v roce 25. výročí osvobození Československa Sovětskou armádou.“

Rádi kvitujeme a srdečně blahopřejeme.

Redakce

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

3

ROČNÍK 50, 1971-1972, LISTOPAD



ROČNÍK 50
LISTOPAD 1971

3

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhu o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 g, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Heřnerová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

Doc. J. Chudý: K volbám	97
Š. Iláš: O pojme vzdialenosť	99
O. Odvárko: O základech Booleovy algebry	104
S. Baník: Niektoré problémy o elektrickom prúde	107
M. Kružík: Historický vztah mezi fyzikou a technikou (Pokračování)	114
Marcel Grün: Cil výzkumu Mars	119
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Česká jména na mapách Měsíce	122
Naše soutěž	125
XIII. MMO	133
J. Kotyk: Předmět matematiky	141
Vejmladším čtenářům	144
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

K VOLBÁM



Milí mladí přátelé,

ve dnech 26. a 27. listopadu 1971 přistoupí náš lid k volebním urnám, aby zvolil své zástupce do všech zastupitelských orgánů v našem státě. Příprava voleb, volební program s reálnými cíli a jeho uskutečňování se hluboce dotýkají nás všech, tedy i vás, kteří se pro svůj věk ještě přímo volebního aktu nezúčastníte. Proto také ani v našem časopise nemůžeme o této, v nynější době nejvýznamnější události v životě naší společnosti, nehovořit a nepřipomenout právě vám mladým, co všechno volby znamenají.

Letošní volby jsou první ve federativním uspořádání v naší republice, konají se v slavném roce 50. výročí KSČ a v období, kdy strana a celá naše společnost překonala krizová léta 1968–1969 a soustřeďuje se k dalšímu rozvoji socialismu. Volby v našem socialistickém zřízení vyjadřují třídně chápanou socialistickou demokracii a jejich smyslem je umožnit a zaručit co nejširší účast pracujících na řízení a správě státu a poskytnout možnost každému občanu vyjádřit se na veřejných schůzích k aktuálním problémům místního i celostátního významu i k jednotlivým navrhaným kandidátům. Právě v tom je nesporná přednost našich voleb proti volebním systémům buržoazních zřízení.

Volby jsou i příležitostí k hodnocení dosavadního vývoje společnosti a dosažených výsledků. Přes některé nezdary lze jednoznačně konstatovat, že životní a kulturní úroveň pracujícího lidu podstatně stoupla a že má stále zvyšující se tendenci. Sociální vymoženosti v oblasti péče o pracující, ve zdravotnictví, školství a kultuře jsou pro nás již tak samozřejmé, že si ani neuvědomujeme, že jsou výsledkem dlouholetých bojů dělnické třídy v čele s KSČ a jejího vítězství v socialistické revoluci. Jestliže si toto všechno poctivě a pravdivě přiznáme, pak – zejména jako matematici – musíme logicky vyvodit důsledek v tom, že každý poctivý občan našeho státu má bezprostřední zájem na udržení všech již získaných vymožeností a na jejich dalším rozšiřování tak, jak to dovolí ekonomická situace. Na tomto základním faktu nemění nic ani různé kritiky těch či oněch záporných jevů nebo chyb;

tyto kritiky však ve své převážné většině míří k odstranění chyb a tím v podstatě k posílení socialistického zřízení. Mluvím o tom proto, že zejména vy mladí máte vlastnost generalizovat a že by ve vás mohl vzniknout falešný názor, že kritiky, jež kolem sebe slyšíte, vyjadřují nesouhlas se socialistickým zřízením.

Letošní volby ukáží také, že se náš pracující lid vyrovnal s krizovými vlivy let 1968–1969 a že plně podporuje snahu vedení strany KSČ a státu o upevnění komunistické politiky a o další všestranný rozvoj všech oborů lidské činnosti. Tyto snahy jsou také zakotveny ve volebních programech příslušných zastupitelských orgánů. A právě proto, že tyto programy vyjadřují zájmy všech občanů, je logické očekávat, že navrhovaní kandidáti budou zvoleni naprostou většinou hlasů. K tomu byste měli i vy mladí pomoci jak můžete, v agitačních střediscích, při výzdobě volebních místností, v organizaci tematických výstavek atd. a podílet se tak na úspěchu voleb.

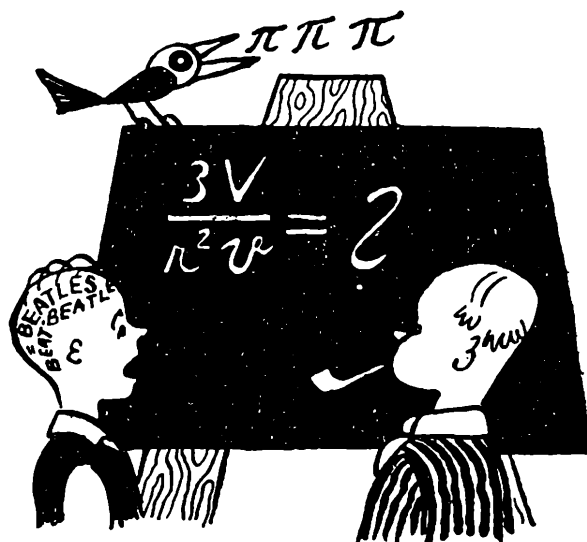
Na závěr vám předkládám volební příklad, jehož řešení pošlete redakci do 15. prosince 1971:

Přirozenými čísly řešte soustavu rovnic

$$29z - 8y = 1971,$$

$$x^2 - 53x + 12y + 8z < 0$$

Doc. Jaroslav Chudý



0 pojme vzdialenosť

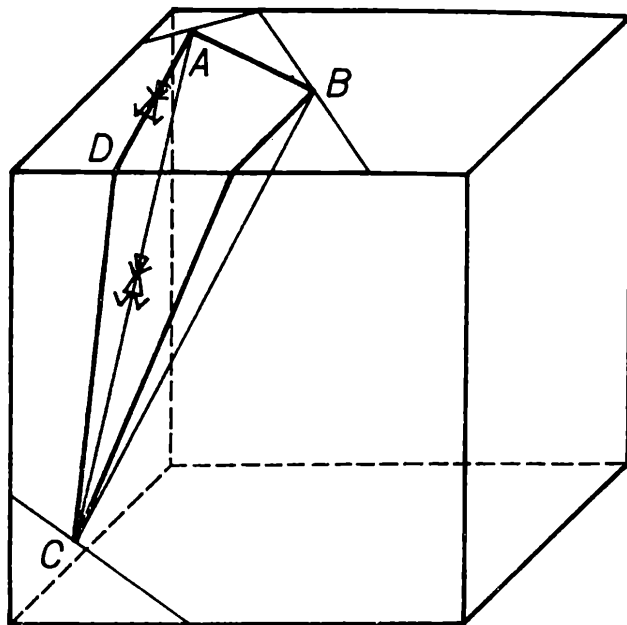
ŠTEFAN IĽAŠ, PF Prešov

Ak na otázku, čo je to vzdialenosť dvoch daných bodov, odpovie stredoškôla, že je to predsa dĺžka úsečky, ktorej koncové body sú práve tieto dané body (pretože takto bolo predsa povedané na hodine geometrie), ľahko ho presvedčíme, že iba s takouto predstavou o vzdialenosti nevystačíme ani v bežnom praktickom živote.

Napríklad v železničnej doprave merať vzdialenosť dvoch miest (žel. staníc) podľa takejto školskej predstavy o vzdialenosti, tj. „vzdušne“, nemá praktický význam.

Uvediem príklad v podobe akejsi bájk, ktorý môže objasniť a dokresliť správnu predstavu pojmu „vzdialenosť“. Obr. 1 predstavuje kocku z priesvitného materiálu. Zvonku kocky lieta a prechádza sa po stenách kocky múdra mucha, ktorá sa nemôže dostať do vnútra a vôbec nič nevie o jeho existencii. Vnútri kocky lieta a prechádza sa po stenách druhá múdra mucha, ktorá sa nemôže dostať von. Obe múdre muchy riešia ten istý problém: chcú najstť najkratšiu cestu spájajúcu dva body ležiace na povrchu kocky, napr. A a B , A a C , B a C a vypočítať vzdialenosť bodov každého uvedeného páru. Pomôžme prvej muche napnutím gumky na povrch kocky, ktorá vyznačí cestu od A do C . To isté urobíme pre páry bodov A a B , ako aj B a C . Pre druhú muchu, ktorá je vnútri kocky, natiahneme podobne gumku medzi dvoma bodmi predtým vymenovaných párov (na obr. 1, tenšie vytiahnuté čiary). Muchy takýmto spôsobom už poznajú najkratšie cesty spájajúce tieto body. (Nech „mušia“ jednotka merania vzdialenosti je u oboch múch tá istá - rovnaká.) Niektoré výsledky merania môžu byť v oboch prípá-

doch rovnaké (napr. vzdialenosť A od B), iné budú rôzne (napr. vzdialenosť A od C a B od C). Prvá mucha správne tvrdí, že v jej svete (priestore) „súčet vzdialeností A od D a D od C sa rovná vzdialenosti A od C “, pretože idúc od A do C najkratšou cestou, treba prejsť cez bod D . Druhá mucha miesto toho spozoruje niečo celkom iné; vzdialenosť A od C je tu menšia, než súčet vzdialeností A od D a D od C . Avšak niektoré dôležité pozorovania oboch múch sú rovnaké: „tvrdia“



Obr. 1

totiž, že vzdialenosť dvoch bodov na stenách kocky nezáleží na postupe merania; vždy každému páru bodov X , Y na stenách kocky odpovedá presne jedno číslo, vyjadrujúce vzdialenosť X od Y , s nasledovnými vlastnosťami:

a) Vzdialenosť X od Y sa rovná nule práve vtedy, ak $X = Y$ (vzdialenosť dvoch rôznych bodov nikdy nie je nula; vzdialenosť bodu od samého seba, tj. od toho istého bodu, je nula).

b) Vzdialenosť X od Y = vzdialenosť Y od X (najkratšia cesta od X do Y má tú istú dĺžku - veľkosť, ako najkratšia cesta od Y do X).

c) Vzdialenosť X od Y + vzdialenosť Y od Z = vzdialenosť X od Z ; (vzdialenosť X od Z je dĺžka najkratšej cesty, ktorú možno prejsť od X do Z).

Preložme našu bájkku do matematického jazyka. Daná bola istá množina bodov (povrch kocky). Vzdialenosťou dvoch bodov v tejto množine sme v dvoch rôznych prípadoch rozumeli niečo iné a ich meraním (rôznymi spôsobmi) dostali sme rôzne čísla. A tak je to jednak v našom praktickom živote, ako aj v teoretických pojednaniach (štúdiach) o vzdialenostiach. Hovoríme napr. o vzdialenosti vzdušnej, ale tiež o vzdialenosti geografickej (na povrchu Zeme) apod. Takže slovo „vzdialenosť“ má rôzny zmysel, v závislosti od toho, v akom (ako tomu

hovoríme) priestore o nej uvažujeme. Ak hovoríme o vzdialenosti, myslíme tým vždy najmenšiu možnú dĺžku cesty od jedného bodu do druhého, či už vzdušne, na povrchu Zeme apod. tak, že táto vzdialenosť má tri vlastnosti a), b), c). Ak položíme tieto vlastnosti za základ istého matematického systému, dostávame sa k definícii dôležitého matematického pojmu, a to metrického priestoru. V matematike množinovou terminológiou zavádzame metrický priestor nasledovnou definíciou:

Nech je daná množina $\mathbf{m}$, ktorá obsahuje aspoň dva prvky. Potom hovoríme, že v danej množine $\mathbf{m}$ je definovaná „vzdialenosť“, ak každému páru prvkov X, Y tejto množiny je priradené jediné reálne číslo $d(X, Y)$, splňujúce nasledovné požiadavky (postuláty):

- P_1 . Vzdialenosť X od $Y = 0$ práve vtedy, ak prvky X, Y sú totožné; tj. $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \equiv Y$ (postulát totožnosti, alebo identity).
- P_2 . Vzdialenosť X od $Y =$ vzdialenosti Y od X ; tj. $d(X, Y) = d(Y, X)$ (postulát symetričnosti).
- P_3 . Vzdialenosť X od $Z \leq$ vzdialenosť X od $Y +$ vzdialenosť Y od Z ; tj. $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$, (postulát trojuholníkovej nerovnosti).

Potom funkcia d , ktorá každému páru prvkov X, Y z množiny $\mathbf{m}$ určí (priradí) číslo $d(X, Y)$ nazvané vzdialenosť prvkov X, Y , sa nazýva metrika v množine $\mathbf{m}$ a množinu $\mathbf{m}$ spolu s metrikou d nazývame metrickým priestorom, ktorého prvky sa zvyčajne nazývajú bodmi metrického priestoru.

Na množinu $\mathbf{m}$ sa teda z hľadiska súčasnej (modernej) matematiky pozeráme ako na bodovú množinu, medzi ktorej prvkami-bodmi existujú určité relácie vyslovené v postulátoch P_1 až P_3 . Množina $\mathbf{m}$, spolu so zavedenou v nej metrikou d predstavujú istú matematickú štruktúru, tj. štruktúru metrického priestoru na množine $\mathbf{m}$, preto metrický priestor je dvojicou vecí (množiny $\mathbf{m}$ a metriky d), čo podrobne označujeme $(\mathbf{m}, d)$. Takto definovaný metrický priestor je značne abstraktný matematický pojem a treba pripomenúť, že jeho prvkami - bodmi môžu byť rôzne objekty (celkom ľubovoľné veci, nielen body v úzkom slová zmysle stredoškolskej matematiky), čo nakoniec uvidíme v niektorých nasledovných príkladoch. Prv však uvedieme ešte jednu dôležitú vlastnosť vzdialenosti týmto tvrdením:

Vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov metrického priestoru je nezáporné číslo, tj. $d(X, Y) \geq 0$.

Skutočne, ak použijeme najprv P_3 , kde položíme $X = Z$; potom P_2 a P_1 , dostaneme $d(X, X) \leq d(X, Y) + d(Y, X) = d(X, Y) + d(X, Y) = 2d(X, Y)$, z toho $0 \leq 2d(X, Y) \Rightarrow d(X, Y) \geq 0$.

Príklady metrických priestorov:

1. Číselná os (množina reálnych čísel) s metrikou d , ktorá určuje

dvom bodom (čísľam) tejto osi vzdialenosť rovnú absolútnej hodnote ich rozdielu, tj. $d(X, Y) = |x - y|$. Požiadavky P_1 a P_2 sú splnené; P_3 – trojuhelníková nerovnosť plynie z absolútnych hodnôt: $d(X, Z) = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(X, Y) + d(Y, Z)$.

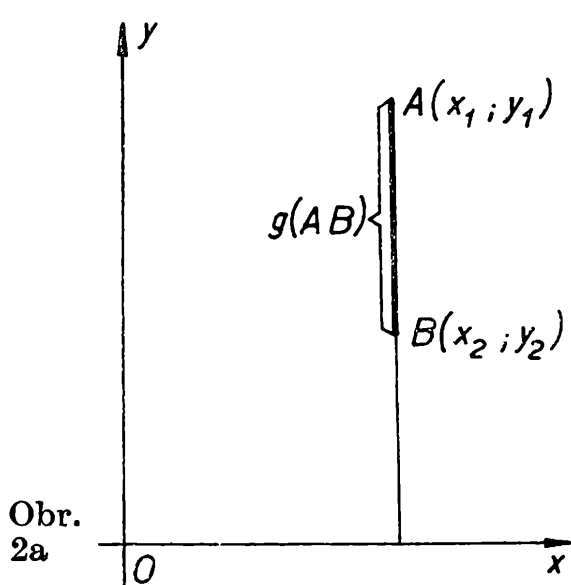
Pokuste sa overiť, či platia nasledovné vlastnosti vzdialenosti bodov (reálnych čísel): a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$; b) $d(xy, 0) = d(x, 0) \cdot d(y, 0)$.

Podobne rovina - E_2 , priestor, v ktorom žijeme - E_3 , ako aj všeobecne n -rozmerný euklidovský priestor E_n , metrické priestory s euklidovskou metrikou $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$, kde vzdialenosť je úsečka a bod $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

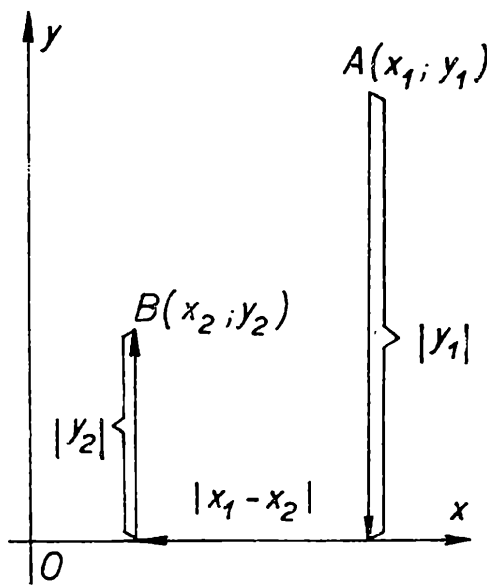
2. Nech $m = E_2$ je euklidovská rovina s kartézskym súradnicovým systémom súradníc. Metriku d definujme pre ľubovoľný pár bodov $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nasledovne

$$d(A, B) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{ak } x_1 = x_2, \text{ obr. 2a;} \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & \text{ak } x_1 \neq x_2, \text{ obr. 2b.} \end{cases}$$

Sami sa presveďte, že ide v tomto prípade naozaj o metrický priestor (m, d) . Obrazne možno povedať, že táto metrika charakterizuje situáciu v istom hustom lese (husto stromami zarastenom kraji), ktorým preteká rieka $y = 0$. Obyvatelia tohto kraja, aby si mohli zadovážiť



Obr.
2a



Obr.
2b

vodu z rieky, urobili cesty kolmo od svojich domov (v hustom lese) k rieke. Aby sa však dostali z istého miesta (domu) $A(x_1, y_1)$ na iné miesto (do iného domu) $B(x_2, y_2)$, najjednoduchšie je ísť kolmo cestou k rieke, potom člnom (alebo plávaním) ísť po rieke tak dlho, až sa dostanú na miesto rieky, najbližšie k bodu B a znovu prejdú cestou lesa od rieky k domu B , obr. 2b.

3. Sväzok priamok v E_3 , prechádzajúcich daným bodom, s metrikou, ktorá priraduje dvom priamkam - bodom ich vzdialenosť rovnú veľkosti menšieho z dvoch rôznych uhlov (ktoré tieto dve priamky zvierajú) a v prípade kolmých priamok, ich vzdialenosť sa rovná veľkosti pravého uhla, predstavuje metrický priestor, ktorý nazývame eliptickou rovinou.

Poznámka. V jednej a tej istej množine možno zaviesť i rôzne metriky; tj. množinu možno metrizovať i viacerými rôznymi spôsobmi. Napr. v 2. príklade je zavedená metrika roviny, ktorá sa líši od euklidovskej metriky z 1. príkladu. Potom tá istá množina s rôznymi metrikami predstavuje rôzne metrické priestory.

Cvičenia.

I. Po skončení futbalovej súťaže všetky súťažiace mužstvá získali rôzny počet bodov. Každé z nich obsadilo v tabuľke také miesto, ktoré mu odpovedá podľa počtu získaných bodov. Vzdialenosť názvov dvoch mužstiev v tabuľke sa určí pomocou absolútnej hodnoty z rozdielu počtu získaných bodov. Je takáto tabuľka metrickým priestorom?

II. Električka (trolejbus) jazdí po trati, ktorá má tvar uzavretej čiary (trebars tvaru „O“, alebo kružnice). Pre sprievodcu a cestujúcich v tejto električke je vzdialenosť zástavky A od zástavky B rovná dĺžke dráhy, ktorú prešla električka (trolejbus) po svojej trati od A do B . Je táto vzdialenosť metrikou? Ak nie, ktorá z požiadaviek P_1 až P_3 nie je splnená?

Doporučená literatúra

- [1] Kuřina, F.: Metrické prostory; časopis Rozhledy mat.-fyz., roč. 46 (1967—68), č. 2 a 3, str. 53, resp. 111.
- [2] Šisler, M.: Metrické prostory; časopis Matematika ve škole, roč. XIV. (1963), č. 1 a 2, str. 48, resp. 119.
- [3] Koman, M.: Geometrie s neobvyklou vzdáleností; časopis Matematika ve škole, roč. XIV. (1963), č. 3, str. 173.
- [4] Vasiljev, N. B.: Metričeskije prostranstva; sovietsky časopis Kvant, No. 10, 1970.
- [5] Šrejder, J. A.: Čto takoe rasstojanije? Moskva: Nauka 1963.
- [6] Aleksandrov, P. S.: Úvod do obecné theorie množín a funkcí. Praha: Akadémia 1954 (preklad z ruštiny).

0 základech Booleovy algebry

OLDŘICH ODVÁRKO MFF KU Praha

V minulém ročníku Rozhledů jsme se v číslech 9 a 10 seznámili s tzv. Booleovou algebrou. Ukázali jsme dva její důležité příklady - algebru pravdivostních hodnot a množinovou algebru. V tomto článku se budeme hlouběji zabývat definicí Booleovy algebry, proto ji úvodem připomeňme:

Zvolme nějakou neprázdnou množinu B , která obsahuje dva význačné prvky 0 a 1 , ale jinak počet jejích prvků neomezujeme. Písmeny x, y, z označujeme libovolné prvky množiny B . Předpokládejme, že v množině B jsou definovány dvě operace - nazýváme je sčítání (součet prvků x, y označujeme $x + y$) a násobení (součin prvků x, y označujeme $x \cdot y$ nebo xy). Dále předpokládejme, že ke každému prvku $x \in B$ existuje právě jeden prvek $x' \in B$, který budeme nazývat doplňkem prvku x .

Množinu B , v níž jsou definovány uvedené operace, nazveme Booleovou algebrou, právě když pro všechny její prvky x, y, z platí:

$$(0) \quad (x')' = x$$

$$(1) \quad 1 + x = 1 \qquad \qquad \qquad 0 \cdot x = 0 \qquad \qquad \qquad (2)$$

$$(3) \quad 0 + x = x \qquad \qquad \qquad 1 \cdot x = x \qquad \qquad \qquad (4)$$

$$(5) \quad x + x = x \qquad \qquad \qquad x \cdot x = x \qquad \qquad \qquad (6)$$

$$(7) \quad x + x' = 1 \qquad \qquad \qquad x \cdot x' = 0 \qquad \qquad \qquad (8)$$

$$(9) \quad x + y = y + x \qquad \qquad \qquad xy = yx \qquad \qquad \qquad (10)$$

$$(11) \quad (x + y)' = x' \cdot y' \qquad \qquad \qquad (xy)' = x' + y' \qquad \qquad \qquad (12)$$

$$(13) \quad x + xy = x \qquad \qquad \qquad x \cdot (x + y) = x \qquad \qquad \qquad (14)$$

$$(15) \quad x + yx' = x + y \qquad \qquad \qquad x \cdot (y + x') = xy \qquad \qquad \qquad (16)$$

$$(17) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \qquad \qquad \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \qquad \qquad (18)$$

$$(19) \quad (x + y) \cdot z = xz + yz \qquad \qquad \qquad xy + z = (x + z)(y + z) \qquad \qquad \qquad (20)$$

Počet vět v našem seznamu je jistě úctyhodný. Přirozeně se naskytá otázka, zda všechny z nich musí být nutně v definici Booleovy algebry uvedeny. Kdybychom některou z těchto vět uměli dokázat pomocí zbývajících, pak bychom ji mohli „bez následků“ pro naši definici vynechat. Tím by se stala definice Booleovy algebry alespoň o něco stručnější a také přehlednější.

Uvažujme třeba větu (1). Lze ji dokázat pomocí vět (0), (2)–(20)? Pokusme se o to! Podle (4) je $1 + x = 1$ ($1 + x$), podle (7) je

$1 \cdot (1 + x) = (x + x') \cdot (1 + x)$. Dále postupně užitím (9), (20), (10), (4) a (7) dostaneme $(x + x') \cdot (1 + x) = (x' + x) \cdot (1 + x) = x' \cdot 1 + x = x' + x = 1$. Důkaz je proveden. Můžeme tedy bez obav větu (1) v definici Booleovy algebry vynechat.

Zabývejme se například ještě větou (3). Ukážeme, že je také „závislá“ na ostatních větách z původní definice, tj. že ji lze dokázat na základě vět (0), (1), (2), (4)–(20). Platí

$$0 + x = x \cdot x' + x = x \cdot x' + x \quad 1 = x \quad (x' + 1) = x \quad 1 = x$$

[Postupně jsme použili (4), (8), (9), (19), (9), (1), (9), (4).]

Aby definice Booleovy algebry byla co nejkratší, budeme se snažit „odstranit“ z původního systému co největší počet vět. Můžeme například vynechat v původní definici obě věty (1) i (3) zároveň? Při důkazu věty (3) jsme použili větu (1), na první pohled se tedy zdá, že takovouto redukci nelze provést (nemůžeme si ovšem tímto tvrzením být nijak jisti; třeba se někomu z nás podaří dokázat větu (3) bez pomoci (1).

Z naší poslední úvahy vysvítá tato skutečnost: Podle toho, na které věty se zaměříme s úmyslem „odstranit je bez následků“ pro definici, můžeme dospět k různým „redukovaným“ systémům.

Uvedeme pro ilustraci jeden z nich, který obsahuje z původních 21 vět pouze 10. Ukážeme, že v definici Booleovy algebry stačí ponechat pouze (3), (4), (7), (8), (9), (10), (17), (18), (19), (20). Ostatní věty lze z nich, případně z vět pomocí nich dokázaných, už odvodit.

Dokažme nejprve větu (0):

Úkolem je dokázat, že pro každé $x \in \mathbf{B}$ platí $(x')' = x$, čili že x je doplňkem prvku x' . Vlastnosti charakterizující doplněk jsou dány větami (7) a (8). K důkazu tedy stačí ověřit, že platí $x' + x = 1$ a zároveň $x' \cdot x = 0$. To však již bezprostředně plyne ze (7), (8), (9) a (10).

Větu (1) jsme dokázali již dříve, a to skutečně jenom pomocí „povolených“ vět.

Další důkazy provedeme stručněji. Prosím čtenáře, aby si zdůvodňoval jejich jednotlivé kroky a zvláště kontroloval, zda opravdu používáme jenom našich deseti vět.

$$(2): 0 \cdot x = 0 \quad x + 0 = 0 \quad x + x' \cdot x = (0 + x') \cdot x = x' \cdot x = 0$$

$$(5): x + x = (x + x) \cdot 1 = (x + x) \cdot (x + x') = x + x \cdot x' = x + 0 = x \quad e$$

$$(6): x \cdot x = x \quad x + 0 = x \quad x + x \cdot x' = x \quad (x + x') = x \quad 1 = x$$

(11): Zde musíme dokázat, že $x' \cdot y'$ je doplňkem prvku $x + y$, čili je nutno prověřit, že pro všechna x, y z množiny $\mathbf{B}$ platí

a) $(x + y) + x' \cdot y' = 1$ a zároveň

b) $(x + y) \cdot x' \cdot y' = 0$

Proveďme nejprve důkaz a):

$$\begin{aligned}(x + y) + x' \cdot y' &= [(x + y) + x'] \cdot [(x + y) + y'] = \\ &= [(x + x') + y] \cdot [x + (y + y')] = (1 + y) \cdot (x + 1) = 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

(Zde jsme kromě našich deseti vět užili též větu (1) - ale to plným právem, neboť jsme ji už výše dokázali.)

Důkaz části b), který je zcela jednoduchý, přenechávám čtenáři. Dále nechtě si čtenář samostatně dokáže větu (12).

$$(13): x + xy = x \cdot 1 + xy = x \cdot (1 + y) = x \cdot 1 = x$$

Větu (14) nechtě čtenář dokáže opět samostatně; je vhodné použít (19) a (13).

$$(15): x + yx' = (x + y) \cdot (x + x') = (x + y) \cdot 1 = x + y$$

Důkaz poslední věty (16) je zcela obdobný.

Můžeme se nyní ptát, zda redukovaný systém deseti vět obsahuje už skutečně vzájemně „nezávislé“ věty či nikoli. Dá se dokázat, že lze z něho vynechat ještě věty (17) a (18). Ponechme tyto důkazy pro samostatnou práci čtenáře. Poněvadž však nejsou tak zcela jednoduché, podejme alespoň stručnou ideu důkazu věty (17), důkaz věty (18) je pak zcela obdobný.

Nejprve se pokusme dokázat, že platí:

$$[x + (y + z)] \cdot x = [(x + y) + z] \cdot x \text{ a zároveň} \quad (a)$$

$$[x + (y + z)] \cdot x' = [(x + y) + z] \cdot x' \quad (b)$$

Poté sečtete levé a pravé strany (a) a (b). Je ovšem nutné vyhnout se při důkazu užití vět (11) a (12), neboť v nich jsme platnosti (17) a (18) použili. Věty (11) a (12) můžeme v naší „nejstručnější“ definici dokázat až po ověření platnosti (17) a (18).

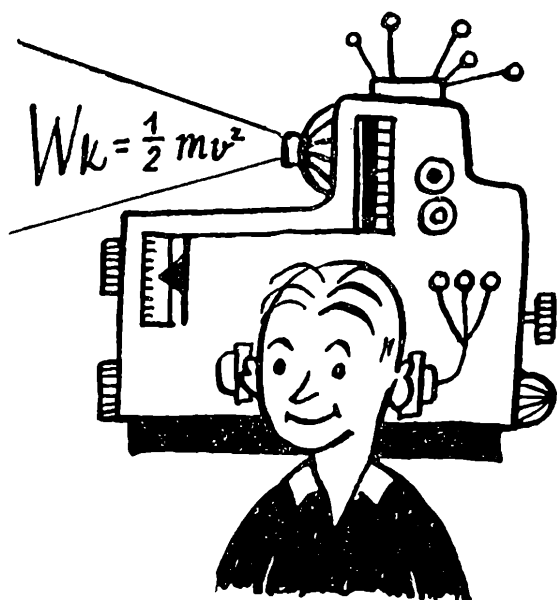
Za cvičení zkuste ještě dokázat, že z původního systému vět (0)–(20) lze vynechat (20); dále se snažte najít systém o co nejmenším počtu vět, v němž se (20) nevyskytuje.

Literatura

[1] F. Kuřina, Množiny v geometrii, Rozhledy č. 2, ročník 49.

[2] J. Šedivý, Vstupme do množinového ráje, Rozhledy č. 2, ročník 47.

[3] O. Odvárko, Nebojme se množinové algebry, Rozhledy č. 7, ročník 47.



F Y Z I K A

Niektoré problémy o elektrickom prúde

STANISLAV BANÍK, katedra fyz. PF B. Bystrica

I. Stredná hodnota elektrického prúdu

V článku budeme sa zaoberať elektrickým prúdom, ktorý je najďôležitejším pojmom náuky o elektrine; jeho jednotka zv. ampér*) (A) je štvrtou základnou jednotky sústavy SI (Système International).

V elektrotechnike je výhodné nasledujúce rozlíšenie označovania: Prúd konštantný sa značí veľkým písmenom I ; ak je prúd premenlivý v čase, označuje sa (jeho okamžitá veľkosť) malým**) písmenom i . Teda veľkosť premenlivého prúdu (aj event. jeho smer) je funkciou času čiže

$$i = f(t).$$

Podobne sú zavedené znaky pro elektrické napätie: U značí napätie konštantné, u značí napätie premenlivé v čase (resp. jeho okamžitú hodnotu).

*) Tým práve sa líši od bývalej sústavy CGS, kde jednotka prúdu je vybudovaná z jednotiek centimetr, gram, sekunda.

**) Vo fyzike je pre tzv. imaginárnu jednotku zavedený znak j , (takže platí $j^2 = -1$), aby nenastala mylná zámena s okamžitou hodnotou premenlivého prúdu (i).

1. Ak vodičom prechádza konštantný elektrický prúd I , prejde jeho prierezom za čas t (rozumej v časovom intervale $\langle 0, t \rangle$, tj. (od 0 po t) elektrický náboj

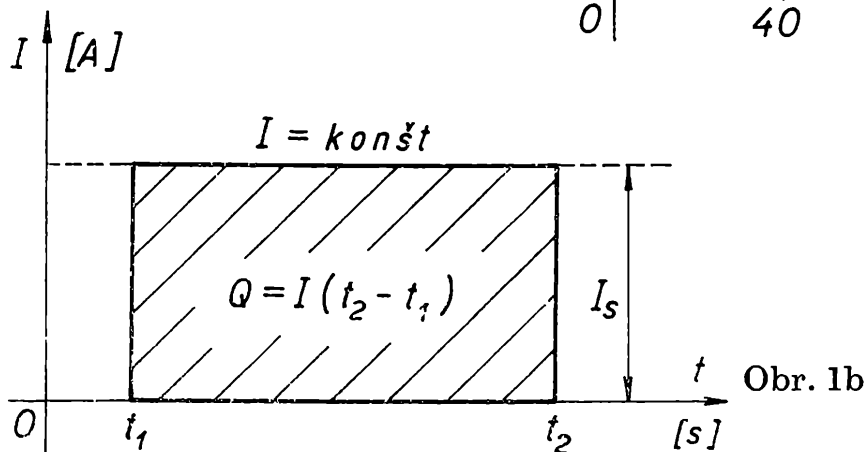
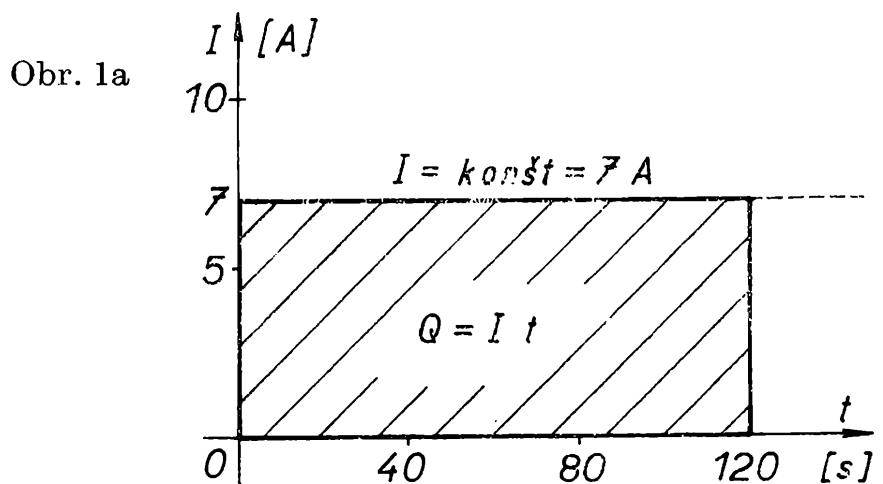
$$Q = It \quad (1)$$

Jednotky v sústave SI (Système - International d'Unités):

Značka a názov veličiny	Značka a názov jednotky SI. Převody
Q = elektrický náboj	C = coulomb = As = ampérsekunda
I = elektrický prúd konštantný	A = ampér = Cs ⁻¹
i = elektrický prúd premenlivý	
t = čas (doba)	s = sekunda

Príklad 1: Vodičom prechádza prúd $I = 7$ A; aký veľký elektrický náboj prejde prierezom vodiča v dobe $t = 20$ s?

$$\begin{array}{ll} I = 7 \text{ A} & Q = It = 7 \text{ A} \cdot 120 \text{ s} = 840 \text{ As} = 840 \text{ C} \\ t = 120 \text{ s} & \text{Prierezom vodiča prejde za 120 s náboj 840 C} \\ \hline Q = ? & \\ \hline Q = 840 \text{ C} & \end{array}$$



Grafické znázornenie: Veľkosť prešlého elektrického náboja Q možno graficky znázorniť plošným obsahom. Na vodorovnú os nanášajme čas t (v sekundách) a na zvislú veľkosť prúdu I (v ampéroch); vtedy grafom závislosti prúdu $I = \text{konšt}$ od času t je priamka rovnobežná

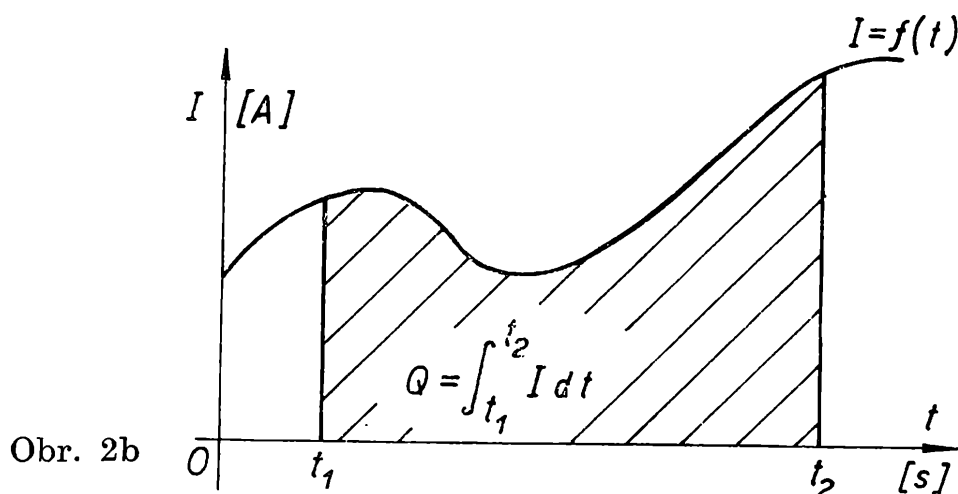
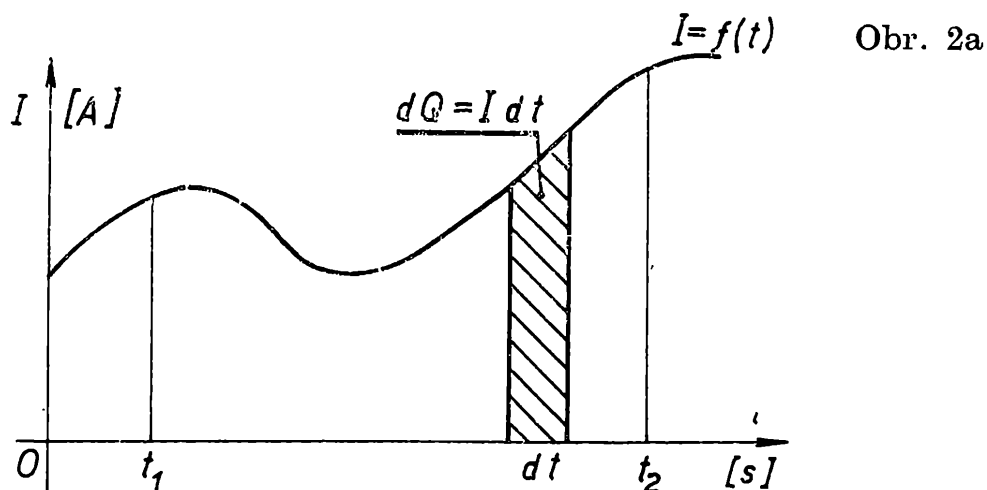
s osou t . Prešlý náboj $Q = It$ sa veľkosťou rovná obsahu plochy vyšrafovananej na obr. 1a.

Analogicky je veľkosť náboja, aký prejde prierezom vodiča pri prúde $I = \text{konšt}$ v dobe od t_1 po t_2 , daná vzťahom

$$Q = I(t_2 - t_1), \text{ kde } I = \text{konšt}, t_1 < t_2 \quad (2)$$

a graficky je znázornená obsahom vyšrafovananej plochy na obr. 1b.

2. Vyšetrujme teraz prípad, kedy vodičom prechádza prúd časove premenlivý, tj. $i = f(t)$.



K výpočtu elektrického náboja prešlého prierezom vodiča pri časove premenlivom prúde nemožno určiť ani vzťahu (1) ani (2). Preto uvažujeme najprv nekonečne krátky časový interval dt (čo značí „diferenciál“ času t). Počas jeho trvania možno prúd považovať za konštantný, takže v tomto intervale pretečie prierezom vodiča náboj dQ , daný vzťahom

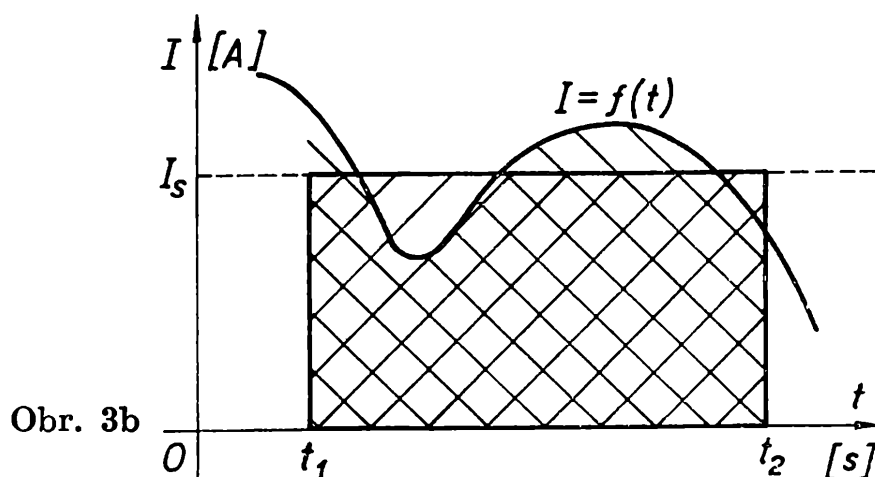
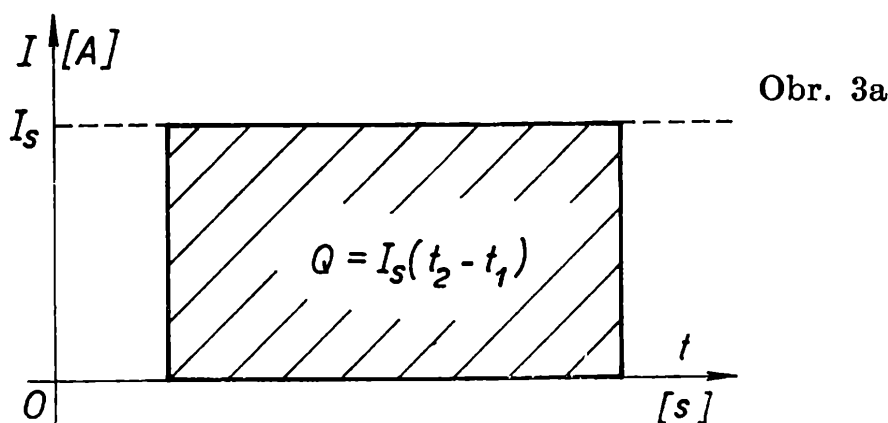
$$dQ = i dt. \quad (3)$$

V grafickom vyobrazení sa veľkosť náboja dQ rovná veľkosti obsahu obdĺžníka o základni dt a výške i (viď obr. 2a).

Ak chceme zistiť náboj Q , prešlý v celom časovom intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$, spočítame nekonečný počet súčinov $i \, dt$ integrálom, v ktorom i treba nahradiť funkciou času (obr. 2b):

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt. \quad (4)$$

3. Zavedme pojem „stredný prúd“: Užijeme definíciu „prúd je podiel prešlého náboja a doby, k prejdeniu potrebnej“. Dostaneme tak tzv. „stredný prúd I_s “, ktorý predstavuje náboj, prešlý priemerne



za 1 sekundu prierezom vodiča v časovom intervale t_1 až t_2 . Ak vyjadríme prešlý náboj Q vzťahom (4), dostávame vzorec pre stredný prúd,

$$I_s = \frac{Q}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i \, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) môžeme vyjadriť prešlý náboj Q vzťahom

$$Q = I_s(t_2 - t_1) \quad (5a);$$

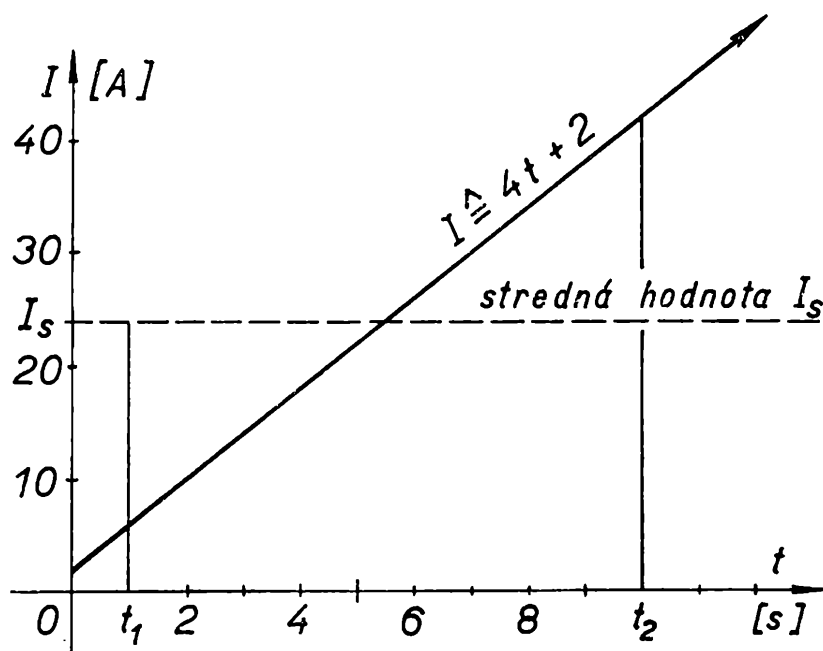
tento náboj sa (číselne) rovná obsahu obdĺžnika o základni $t_2 - t_1$ a výške I_s (viď obr. 3a).

Graf na obr. 3b ukazuje, že hodnota stredného prúdu I_s pre časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ je výškou obdĺžnika $ABCD$, ktorého obsah sa rovná vyšrafovanej ploche pod krivkou, znázorňujúcou priebeh premenlivého prúdu $i = f(t)$.

Vzťah (5) definuje strednú hodnotu prúdu, značenú I_s .

Príklad 2: Vodičom prechádza prúd*) $i = f(t) = 4t + 2$; ak veľký náboj Q prejde prierezom vodiča v dobe od $t_1 = 1$ s po $t_2 = 10$ s? Vypočítajte tiež strednú hodnotu I_s tohoto prúdu v danom intervale!

$i = f(t) = 4t + 2$ $t_1 = 1 \text{ s}$ $t_2 = 10 \text{ s}$ $Q = ?; I_s = ?$ $Q = 216 \text{ As} = 216 \text{ C}$ $I_s = 24 \text{ A}$	$dQ = i dt$ $Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = \int_{t_1}^{t_2} (4t + 2) dt =$ $= \left[4 \cdot \frac{1}{2} t^2 + 2t \right]_{t_1}^{t_2} = 2 \left[t^2 + t \right]_{t_1=1}^{t_2=10} =$ $= 2[(10^2 + 10) - (1^2 + 1)] = 2 \cdot 108 = 216 \text{ C}$ $I_s = \frac{Q}{t_2 - t_1} = \frac{216}{10 - 1} = \frac{216 \text{ As}}{9 \text{ s}} = 24 \text{ A}$
--	--



*) Všimnime si, že zadaný vzťah $i = 4t + 2$ je dimenzionálne nesprávny, veď i je v ampéroch, čas t v sekundách; preto sme v celom výpočte vynechali fyzikálnu jednotku a pripísali ju len do výsledkov. Pravdaže by bolo možné (pridaním dimenzionálnych konštánt do zadaného vzťahu) dosiahnuť, aby obidve strany rovnice mali ten istý fyzikálny rozmer (totožito ampér); ale potom by zápis výpočtu bol oveľa dlhší. Praktik, vediac že ide vlastne len o výpočet číselných hodnôt, pripisuje preto správnu fyzikálnu jednotku až do výsledku.

Slovné odpovedi: Premennivý prúd $i = 4t + 2$ preniesol v časovom intervale (1, 10) celkový náboj 216 coulombov; stredná hodnota tohoto prúdu v danom časovom intervale je $I_s = 24$ A. Grafické znázornenie je na obr. 4.

Poznámka: Ten istý prúd $i = 4t + 2$ má v inom časovom intervale inú strednú hodnotu. Skúste sami vypočítať strednú hodnotu tohoto prúdu v intervale od $t'_1 = 10$ s až po $t'_2 = 20$ s.

Príklad 3: Časove premenlivý prúd, idúci vodičom, je daný funkciou $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, kde I_0 , ω , φ sú konštantné veličiny. Aký veľký náboj prejde prierezom vodiča v dobe od t_1 do t_2 ? Robte výpočet všeobecne a potom dosadte hodnoty: $I_0 = 1$ A; $\omega = 0,3 \text{ s}^{-1}$; $\varphi = 0,8 \text{ rad}$; $t_1 = 4$ s; $t_2 = 10$ s.

Stanovte ďalej veľkosť stredného prúdu I_s v danom časovom intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$

(Pretože sa v matematike funkcia tvaru $y = k \sin(Px + Q)$ nazýva harmonickou, nazývame daný prúd tiež prúdom harmonickým.) Jeho smer a veľkosť sa periodicky menia, preto je to prúd striedavý.

$$I_0 = 1 \text{ A}$$

$$\omega = 0,3 \text{ s}^{-1}$$

$$\varphi = 0,8 \text{ rad}$$

$$t_1 = 4,0 \text{ s}$$

$$t_2 = 10,0 \text{ s}$$

$$Q = ? \quad I_s = ?$$

$dQ = i dt$. Integruje sa pomocou vzorca

$$\int \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega t + \varphi) dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega} I_0 \left[\cos(\omega t_2 + \varphi) - \cos(\omega t_1 + \varphi) \right],$$

čo je obecným riešením našej úlohy.

Pred číselným dosadzovaním premeníme radiány na stupne pomocou (približného) vzťahu

$$1 \text{ rad} \doteq 57,3^\circ,$$

takže

$$\omega t_1 + \varphi = 0,3 \cdot 4 + 0,8 = 2,0 \text{ rad} \doteq 114,6^\circ \doteq 180^\circ - 65,4^\circ,$$

$$\omega t_2 + \varphi = 0,3 \cdot 10 + 0,8 = 3,8 \text{ rad} \doteq 215,7^\circ \doteq 180^\circ + 37,7^\circ.$$

Dosadzujeme do obecného riešenia:

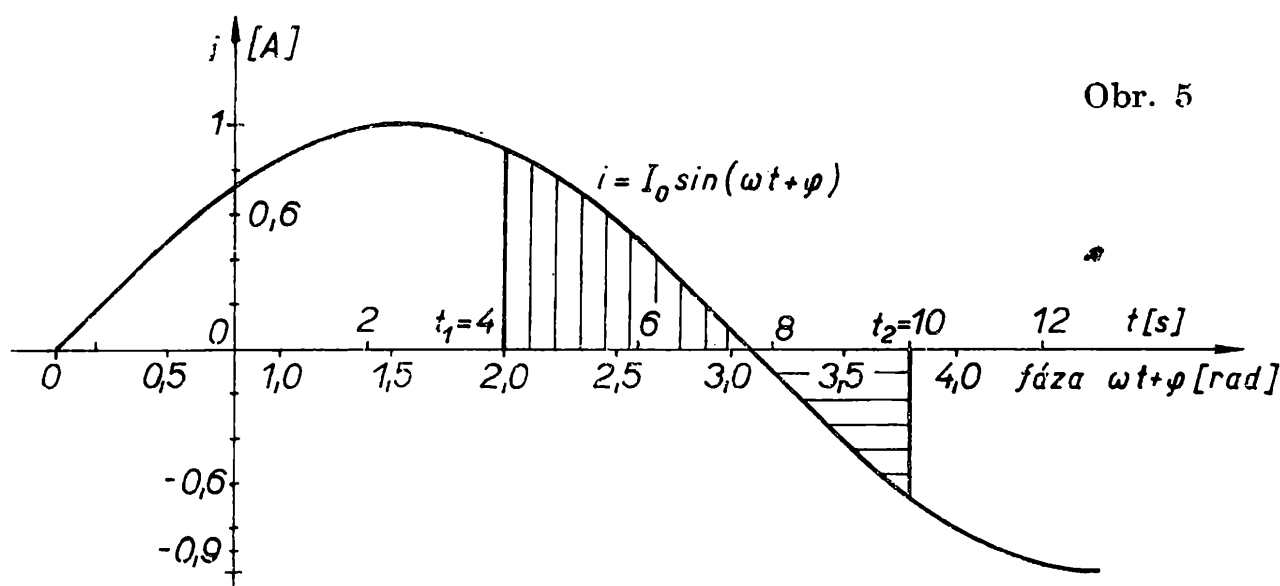
$$Q \doteq -\frac{1}{0,3} \cdot 1 \cdot (\cos 217,7^\circ - \cos 114,6^\circ) \doteq -\frac{10}{3} (-\cos 37,7^\circ +$$

$$+ \cos 65,4^\circ) \doteq \frac{-10}{3} (-0,791 + 0,416) \doteq \frac{+10}{3} \cdot 0,375 \doteq \\ \doteq 1,25 \text{ As} \doteq 1,25 \text{ C}$$

Stredná hodnota I_s prúdu sa určí podľa (5), takže

$$I_s = \frac{Q}{t_2 - t_1} \doteq \frac{1,25 \text{ As}}{6 \text{ s}} \doteq 0,21 \text{ A}$$

Zostrojenie grafu (obr. 5): Na vodorovnú os nanášajme jednak uhol čiže fázu (v radiánoch), jednak čas t (v sekundách); na zvislú sa nanáša prúd i (v ampéroch). Vidno, že počiatok času ($t = 0$) je v priesečníku obidvoch súradnicových osí, kým počiatok fázy ($\omega t + \varphi$) je posunutý o úsečku $\varphi = 0,8 \text{ rad}$ do ľava.



Vyšrafovaná plocha nad vodorovnou osou predstavuje prešlý náboj kladný, pod osou prešlý náboj záporný. Výsledok integrácie hore tj. $Q \doteq 1,25 \text{ C}$ teda hlási, o koľko je elektrický náboj, prenesený v kladnom smere, väčší od náboja, preneseného v zápornom smere. Snadno nahliadneme, že integrálom sa plochy nad osou započítavajú kladne, ale plochy pod osou záporne, veď integrálom $\int i \, dt$ sa vlastne robí limita súčtu úzkych obdlžníkov $i \, dt$, kde základňa dt je vždy kladná, však výška (i) je nad vodorovnou osou kladná, pod osou záporná.

Presvedčte sa sami, že $\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$, ale $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

Úlohy na precvičovanie:

1. Prúd $i = I_0 \sin \omega t$ je harmonický striedavý prúd; o jeho perióde T platí $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Aká je stredná hodnota I_s tohoto prúdu v in-

tervale $t_1 = 0$ až $t_2 = \frac{T}{2}$? Řešte obecně! (Výsledek $I_s \doteq 0,637 I_0$).

2. Časově proměnlivý proud je $i = f(t) = 2t^2 - 7t$. Aká je jeho střední hodnota I_s v intervalu $t_1 = 2$ s až $t_2 = 5$ s? (Výsledek $I_s = 1,5$ A).

3. Vypočítejte střední hodnotu harmonického střídavého proudu $i = I_0 \sin \omega t$ v intervalu $t_1 = 0$ až $t_2 = T$! (Výsledek: $I_s = 0$).

4. Vodičem prochází konstantní proud $I = 7$ A. Aká je jeho střední hodnota v intervalu $t_1 = 2$ s až $t_2 = 12$ s? (Vyjde $I_s = 7$ A).

Záver: Analogickým způsobem ako střední proud sa zavádzajú aj stredné hodnoty iných časově proměnlivých veličin.

Vezmeme napr. střední hodnotu časově proměnlivého napětí u v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$: Vztah (5) násobíme odporem R vodiče; součin iR je podle Ohmova zákona okamžité napětí u ; součin $I_s R$ označíme U_s (střední hodnota napětí). Dostaneme tak

$$U_s = I_s R = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i R dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u dt \quad (6)$$

kde $u = f(t)$ je funkcí času.

Vztah (6) možno považovať za definíciu strednej hodnoty proměnlivého napětí u v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Historický vztah mezi fyzikou a technikou

MIROSLAV KRUŽÍK, Pardubice

(Pokračování)

Koncem 15. století začíná technická revoluce. Velké zeměpisné objevy vedly k rozvinutí světového trhu, opevňování, budování loďstva, cest a průplavů. Začíná boj nové třídy proti feudálním silám. Politické a kulturní jevy spojené s reformací způsobují postupný rozklad duchovní diktatury církve. Středověké řemeslo nemělo bezprostřední vliv na rozvoj vědy, protože řemeslná výroba nebyla členěna na jednotlivé technické operace. Toto rozčlenění se objevuje teprve v manufakturách, k jejichž rozvoji daly impuls zeměpisné objevy a námořní plavba. Bylo třeba budovat nové typy lodí. Technický pokrok byl tak rychlý, že teorie budování lodí se stala nevyhnutelnou podmínkou námořního trhu a transportu. Tak se objevily první technické spisy o budování lodí, které byly založeny na zákonech mechaniky. Otázky námořní plavby

zdůraznily i význam konstrukce dalekohledu a sextantu. Na lodích se staly důležitým astronomickým nástrojem hodiny. Jimi se určovala zeměpisná délka. Výroba přesných hodin, které byly vlastně prvním automatickým přístrojem, se stala školou pro plnění dalších složitějších úkolů technické mechaniky. Při budování plavebních komor a průplavů se rozvíjí stavební mechanika, která společně s architekturou se stala praktickou základnou statiky. Největší význam pro rozvoj mechaniky mělo však sporadické užití strojů v manufakturách. Široce byly rozšířeny soustruhy a lisy, u kterých bylo užito otáčivého pohybu. U hamrů, kladiv, stoup a měchů byla páka tlakem vačky hřídele uváděna do vratně posuvného pohybu. Současně se vedle staršího ozubeného převodu začalo užívat řemenového převodu, který umožní luvést do pohybu současně větší množství strojů. V arzenálech, loděnicích, dolech a manufakturách se stále častěji objevují kladkostroje, zvedáky a kombinace jednoduchých mechanismů: páky, kladky, šroubu a nakloněné roviny. Účelné využití těchto kombinací nutně vyžadovalo určité teorie jednoduchých strojů.

Jestliže řemeslník byl ve své dílně současně dělníkem, technologem i organizátorem výroby, pak dělník manufaktury ztrácí svou mnohostrannost. Jsou od něho vyžadovány pouze určité mechanické výkony, ke kterým není třeba žádných teoretických vědomostí. Intelaktuální povaha práce získává samostatný význam a stává se zaměstnáním duševních pracovníků. V této době se stále častěji objevuje nový typ učence, jehož oborem je vědecká mechanika. Do 15. století byl tento typ nemyslitelný. Mechanikem byl mistr, empirik, pro kterého řemeslná tajemství fyzikálně chemické technologie byla skutečným tajemstvím. Učencem byl komentátor Aristotelových knih. Vědce - mechanika-charakterizují především příčinně mechanické představy o přírodě. Vznikají nové školy, které se liší od tehdejších universit a církevních škol. Budoucí architekti, dělostřelci, konstruktéři a budovatelé opevnění se v nich seznamují s mechanickými a matematickými vědomostmi a soustřeďují svou pozornost na užitou a později i na teoretickou mechaniku. Tak se s rozvíjením kapitalismu objevuje technicko-inženýrská inteligence a vzniká současně možnost i nevyhnutelnost užití přírodních věd ve výrobě.

Z počátku je dáována přednost přírodním vědám, které přinášejí praktický užitek. Přírodní vědy stávají se jedním z nejdůležitějších prostředků zvýšení hmotného blahobytu. Nový význam přírodních věd, přízeň, kterou jim prokazují boháči a vládní činitelé, zesílení zájmu o výsledky bádání pokrokových vědců, daly vznik organizovaným formám rozvíjení přírodních věd. Vedle universit vznikají akademie. V r. 1660 vznikla v Anglii společnost, která v r. 1662 obdržela název: „Královská učená společnost“, a prakticky se stala první vědeckou akademií. Toto vědecké sdružení mělo velký význam pro rozvoj pří-

rodních věd v Anglii. V r. 1666 byla založena pařížská vědecká Akademie, která hned od počátku svého vzniku byla pověřena řešením praktických úloh, jako je výzkum dráhy dělostřeleckých nábojů, problémy vojenských opevnění atd. Postupně byly tyto akademie zakládány i v ostatních státech západní Evropy.

Podnět k prvním dynamickým výzkumům dala určitě balistika. Při sestavování dělostřeleckých tabulek bylo nutno zjistit, jak se pohybuje těžiště vrženého tělesa v gravitačním poli. První období klasické fyziky jako vědy začíná Mikulášem Koperníkem (1473—1543). Jeho heliocentrická soustava se stala výchozím bodem nebeské mechaniky a v jeho spise se poprvé uplatňují pojmy zemské mechaniky v kosmu. Po Koperníkovi Jan Kepler (1571—1630) ve svých spisech sjednocuje zkušenost názorné zemské mechaniky s výsledky přesných astronomických pozorování. Jeho zákony jsou počátkem nebeské mechaniky nového věku. Kepler však ještě neznal dynamické zákony pohybu těles. Domníval se, že pohyb musí být udržován silou a proto hledal sílu, která udržuje pohyb planet. Nazval ji světová harmonie. Světové harmonii podle jeho názoru podléhají nejen pohyby planet, ale i pozemské jevy, historické události i osudy lidí. Proto Kepler nedošel k racionálnímu objasnění pohybu planet.

Vědecko - technické zájmy Galilea (1564—1642) se projevují od jeho mládí. Jeho učitelem byl Ricci, významný představitel názorné mechaniky a matematiky 16. století. Pod jeho vedením studoval Galileo vojenské inženýrství, budování vodovodů, regulaci řek a vyměřování ulic ve Florencii. Galileo sám napsal dva traktáty o opevňování a vojensko-inženýrské a dělostřelecké problémy vzbudily jeho trvalý zájem. Avšak příčinné objasnění přírodních jevů nikdy nepřestalo být středem jeho vědeckého bádání.

Astronomické objevy Galileovy vyvolaly v širokých kruzích Itálie i celé Evropy velký ohlas. Pomocí dalekohledu, který sám navrhl a sestavil, objevil Jupiterovy měsíce, krátery na Měsíci, hvězdnou podstatu Mléčné dráhy, fáze Venuše a sluneční skvrny. Všechny tyto objevy, kterými začala jeho sláva, přispěly k rozšíření a fyzikálnímu chápání Koperníkovy heliocentrické soustavy. Povrch Měsíce, jak jej Galileo pozoroval dalekohledem, byl názorným důkazem fyzikální totožnosti Země a nebeských těles. Takový důkaz před Galileem neexistoval.

Slavný Koperníkův spis „O drahách nebeských těles“ byl vydán v Norimberce pod vedením Andrea Ossiandera, protestantského bohoslovce, který obdržel rukopis od Koperníka těsně před jeho smrtí. Ossiander napsal ke spisu předmluvu, jejíž hlavní smysl byl, že pohyb Země představuje čistě formální matematickou hypotézu a jen nevzdělanec může myslet, že se v knize dokazuje skutečný pohyb Země. Tato hypotéza má čistě praktický význam. Může být i nevěrohodná, stačí však, jestliže vede ke správnému výpočtu kalendáře ve shodě s pozorováním.

Proto většina bohoslovců druhé poloviny 16. století nevystoupila proti Koperníkovi.

Galileo v r. 1615 ve svých poznámkách ke Koperníkovým spisům důrazně zamítá Ossianderovu předmluvu a dokazuje skutečný pohyb Země kolem Slunce. Již v březnu r. 1616 byl Koperníkův spis zakázán a Galileovi žáci upadli v podezření z kacířství. Spojení žáků s učitelem bylo přerušeno a zákaz šíření Koperníkova učení byl počátkem dlouhého Galileova osamocení.

V r. 1632 se Galileo domníval, že bude možno Koperníkovo učení obhájit a vydal ve Florencii svůj znamenitý „Dialog“ o dvou nejdůležitějších systémech světa, o soustavě Ptolemaiově a Koperníkově. Avšak vydání této knihy vyvolalo bouři. V r. 1633 byl Galileo donucen rozsudkem inkvizice odvolat své učení a do konce svého života zůstal pod stálým dozorem. Po rozsudku se Galileo usídlil poblíž Florencie a v r. 1635 dokončil své vynikající dílo „Besedy a matematické důkazy“. V tomto spise shrnuje výsledky svých fyzikálních objevů. Uvádí připomínky a poznámky z benátského arzenálu, vysvětluje, proč voda nemůže být čerpána z větší hloubky a navrhuje, jak změřit odpor, který tělesa kladou vytváření prázdna. Vysvětluje pohyb rovnoměrný i rovnoměrně zrychlený a zákony volného pádu. Analyzuje podmínky rovnováhy na páce, na nakloněné rovině a na kladkostroji. Některé pojmy, jako setrvačnost, okamžitá rychlost, zrychlení, skládání rovnoměrného pohybu se zrychleným pohybem, nebyly však ještě přesně definovány a jsou chápány v různém významu.

Nové, přesnější a konkrétnější představy o světě vyžadovaly doplnění setrvačného pohybu určením jeho směru. U Galilea nejjednodušším, nejskutečnějším a nejdokonalejším pohybem byl pohyb křivočarý.

U Descarta je to přímočarý, rovnoměrný, setrvačný pohyb, který je složkou křivočarého pohybu. Toto pojetí bylo východiskem teorie dostředivé síly, vytvořené Huygensem.

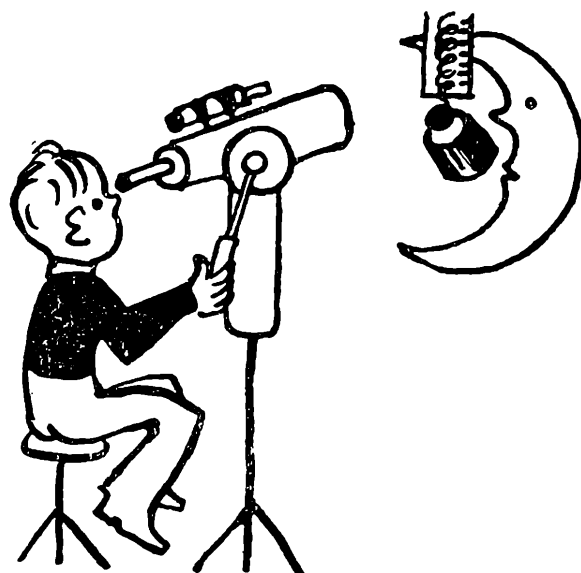
René Descartes (1596—1650) byl současníkem a svědkem vzniku velkých manufaktur ve Francii a v Holandsku. Zabýval se po celý život otázkami manufakturní výroby. Vypracoval i učební plány zvláštních škol pro přípravu řemeslníků. Prvním fyzikálním dílem Descartovým je „Traktát o světě“. Napsal jej v letech 1622—1632. Aby se vyhnul pronásledování církve, použil pro svůj spis formy fantastického románu. Po odsouzení Galilea se rozhodl, že vyloží své fyzikální názory ještě opatrněji. Spis byl vydán až v r. 1664. Descartes dokazuje, že mechanika může cele a úplně vysvětlit všechny přírodní jevy. Prvořadý význam měl jeho princip nezničitelnosti pohybu. Každé těleso zůstává buď ve stavu klidu nebo pohybu, pokud vnější příčina nevynucuje jeho změnu. Těleso nezachovává jenom rychlost, ale i směr pohybu. Proto je setrvačný pohyb přímočarý. Křivočarý pohyb není pohybem setrvačným, jak se ještě domníval Galileo.

Descartes vypracoval teorii rázu, která měla velký význam pro kinetickou fyziku. Vysvětlení všech přírodních jevů úderem bylo ideálem mechanického vysvětlení přírody. Descartes neznal rozlišení těles na elastická a plastická a jeho teorie se vztahuje k absolutně tuhému tělesu. Dynamické vzájemné působení těles na dálku je vyjádřeno nárazem, který se předává prostředím. Tak je možno vysvětlit šíření zvuku, tepla i světla. Vlivem Descartovým vchází do fyziky idea éteru, kterou vypracoval Christian Huygens (1629—1695).

V poslední čtvrtině 17. století a v první polovině 18. století vytváří fyzika vědecký názor na přírodu, který má nesrovnatelně vyšší úroveň než v předcházejících obdobích. Zcela jednoznačně zobecňuje empirické zkušenosti prověřené pokusem a vytváří přesné kvantitativní vztahy. Newtonovy „Matematické základy přírodních věd“ se staly vzorem vědeckého bádání. Isaac Newton (1643—1727) ukazuje, že jediným zdrojem objevu jeho zákonů je pozorování a pokus. „Hypotheses non fingo“ hypotézy nevymýšlím“, praví ve svém díle. Pro fyziku Newtonovy „Základy“ nebyly jen sbírkou zákonů a svět, ale i vzorem čistě induktivního a proto absolutně správného poznání. Úkolem Newtonovým bylo nesporné, naprosto správné a absolutně přesné vysvětlení přírody. Nic tak neposílilo úctu před novou vědou fyzikou, jako Newtonův výpočet planetárních drah. Od této doby nebylo možno fyziku lhostejně přehlížet.

Východiskem optických Newtonových pokusů byly otázky praxe. Tvůrci prvních velkých dalekohledů se setkali se sférickou aberací. Newton objevil chromatickou aberaci, proto místo refraktoru navrhuje konstrukci reflektoru. Na rozdíl od Descarta Newton nerozvíjí hypotézu éteru, protože nemá možnost určit přesné zákony jeho působení. Tak společně s Newtonovou mechanikou vchází do fyziky princip působení na dálku. Newton osobně však nebyl jednostranným přívržencem tohoto principu. Nedovedl si představit, jak by mohlo jedno těleso bez jakéhokoliv materiálního prostředí působit na druhé těleso, než při vzájemném dotyku. Přitažlivost musí působit nějaký faktor podle určitých zákonů. Jaký je to faktor, materiální nebo nemateriální, to Newton přenechal přemýšlení svých čtenářů. Tak vidíme, že Newton éter prakticky vylučuje z jednoznačného vědeckého názoru na svět.

(Dokončení)



Cíl výzkumu - Mars

MARCEL GRÜN, Praha

Lety do vzdálenějšího kosmického prostoru jsou limitovány energetickými možnostmi dnešních nosných raket. Aktivní úsek letu, kdy je sondě potřebná rychlost udělována, je velmi krátký (několik minut), zatímco let setrvačností trvá týdny a měsíce. Chceme-li z dráhy Země dosáhnout dráhy sousední planety, je zapotřebí vypustit sondu hyperbolicou rychlostí tak, aby na hranici sféry aktivity Země měla ještě dostatečnou rychlost pro přechod na jinou oběžnou dráhu. Poloměr sféry aktivity můžeme určit z přibližného vztahu

$$R = d \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{2}{5}}$$

kde d - vzdálenost uvažovaných kosmických těles; m - hmotnost centrálního tělesa, tj. Země nebo planety; M - hmotnost Slunce. Poloměr sféry aktivity Země je 928 000 km. Potřebná střední rychlost startu k Marsu je 11,6 km/s a doba letu v tom případě asi 260 dní. Nejmenší startovní rychlost vyžadují půlelipsoidní dráhy, tzv. Hohmanovy, dotýkající se drah obou planet. Období, kdy jsou Země v okamžiku startu a Mars v době přiletu sondy ve vhodných polohách, se opakují každých 26 měsíců a startovní okno trvá pouze několik týdnů. Pro planetu Mars jsou vhodná období pro start kolem oposice této planety se Sluncem. Letos došlo k významnému přiblížení Marsu k Zemi a proto se připravovalo několik startů k rudé planetě.

Bylo by vhodné, kdyby si čtenáři nejprve přečetli článek Široký J.-Široká M., Velká oposice Marsu v r. 1971, který vyšel v minulém ročníku Rozhledů na str. 424.

První starty sond k Marsu uskutečnili sovětští odborníci. Jestliže nebudeme brát v úvahu neoficiální dohady o startech sond 10. a 14. října 1960 (mohlo jít jen o zkoušky raket, které dopadly do Tichého oceánu), bylo první využití okna na podzim 1962. Dne 1. 11. 1962 byla vypuštěna sonda MARS 1 o hmotnosti 893,5 kg; po stejných parkovacích drahách se pohybovaly i dvě družice, ke kterým se půdě OSN nepřihlásil žádný stát (24. 10. a 4. 11.). MARS 1 se měl přiblížit k povrchu planety na 1000 až 10 000 km a fotografovat jej zblízka. Velmi náročný experiment se však nepodařilo realizovat, protože pro poruchu v orientačním systému sonda přestala vysílat tři měsíce před průletem kolem planety (20. 6. 1963 ve vzdálenosti 193 000 km).

Další výhodné startovní okno nastalo na podzim r. 1964. Dne 5. 11. startovala sonda MARINER 3 o hmotnosti 261 kg; pro mechanickou poruchu se neoddelil aerodynamický štít a aparatura pracovala necelou hodinu. 28. 11. byla vypuštěna sonda MARINER 4, která absolvovala celou cestu bez poruchy, přiblížila se k Marsu na vzdálenost 9846 km dne 15. 7. 1965 a vedle jiných unikátních informací (nepřítomnost magnetického pole a radiačních pásů) vyslala 21 snímků povrchu Marsu, na kterých byly poprvé objeveny krátery. Vysílání sondy bylo zachycováno do 20. 12. 1967 (300 mil. km). Dne 30. 11. vypustil SSSR sondu ZOND 2, jejíž cíl nebyl oficiálně uveden. Po startu poklesl příkon energie ze slunečních baterií na polovinu a tři měsíce po zahájení pokusu bylo přerušeno radiové spojení. Sonda prolétla 8. 8. 1965 ve vzdálenosti pouhých 1500 km od povrchu Marsu!

Následující oposice nevyužila žádná z velmocí a Sověti se zřejmě na řadu let zaměřili na výzkum Venuše. Proto r. 1969 startovaly jen dvě americké sondy MARINER 6 (24. 5.) a MARINER 7 (27. 3.). Každá měla hmotnost 413 kg a kolem Marsu prolétly 31. 7. a 5. 8. ve vzdálenosti asi 3200 km od povrchu. Při tom bylo pořízeno 74 a 114 záběrů této planety a získána řada měření v infračerveném, ultrafialovém a radiovém oboru (určení teploty, složení, hustoty atmosféry atd.).

V letošním roce, kdy je energetická bilance pro let k Marsu nejvýhodnější za celá sedmdesátá léta (minim. rychlost 24. 5. 1971 11,490 km/s), bylo připraveno celkem pět startů, z nichž tři se zdařily, takže na cestu k Marsu se vydaly sondy MARINER 9 (29. 5.), MARS 2 (20. 5.) a MARS 3 (31. 5.).

U sovětských sond je překvapivá zejména vysoká hmotnost: 4650 kg! Tak vysoká hodnota dává podklad pro mnohé dohady a nevylučuje ani pokus o vytvoření družice Marsu, při čemž by pouzdro s přístroji mohlo sestoupit z oběžné dráhy, přistát na povrchu a vyložit pohyblivý dopravní prostředek (tedy zařízení podobné Luně 17 a Lunochodu 1). I když pro dokonalé využití této metody výzkumu v podmínkách planety Marsu by bylo natno zvolit jiný způsob řízení a ovládání než jaký lze použít na Zemi, měl by tento pokus značný význam i v dnešní po-

době. Navíc i případný nezdar přistání by měl mimořádný význam pro technické zkušenosti sovětských odborníků a posunul by značně sovětské vyhlídky na úspěšné přistání při příštích opozicích.

Ze dvou amerických plánovaných letů se uskutečňuje pouze jediný. MARINER 9 má být 14. 11. 1971 uveden na dráhu umělé družice Marsu a soustavně sledovat po dobu nejméně tří měsíců povrch a atmosféru této planety. Celková hmotnost je 1014 kg. Základnu sondy tvoří osmiboký hranol z hořčíkových slitin (průměr 140 cm, výška 46 cm). Na horních hranách jsou čtyři panely slunečních baterií 90×213 cm. Energetický systém dodává u Marsu 450 W. Na horní základně je systém korekčního motoru a nádrží pohonných hmot. Na spodní základně je pohyblivá plošina s vědeckými přístroji o hmotě asi 90 kg.

Nejdůležitější aparaturou jsou dvě *televizní kamery*: širokoúhlá je schopná z výšky 1600 km rozlišit na povrchu detaily o velikosti 1 km; úzkoúhlá s teleobjektivem pro detailní záběry má rozlišovací schopnost desetkrát lepší. Cílem experimentu je sledování pevných i proměnných útvarů na povrchu a v atmosféře Marsu a výzkum tvaru a povrchu měsíců Phobose a Deimose. Dále jsou na sondě tyto přístroje: *Infračervený radiometr*, umožňující v součinnosti s televizním experimentem porizovat tepelné mapy povrchu (snad se též podaří definitivně rozhodnout o složení jižní polární čepičky - CO_2 nebo H_2O). *Infračervený spektrometr* pro měření spektrálního rozložení tepelného záření (zjištění molekul vody, kyslíčnicku uhličitého, methanu, ethylenu aj., svědčících o biochemických reakcích). *Ultrafialový spektrometr*, určený zejména pro studium atmosféry. *Palubní vysílač*, vysílající signál o přesně stabilisované frekvenci (pásmo S - kolem 2195 MHz): signál při vstupu a výstupu ze zákrytu planetou prochází atmosférou a z jeho zeslabení a frekvenčního posunu lze určovat vlastnosti různých vrstev atmosféry a rozměry planety. Odrazem radiových signálů od povrchu a jejich zachycováním na Zemi lze studovat elektromagnetické charakteristiky povrchu (bistatický radar). Samo sledování signálu vysílače během letu přináší řadu informací o dráze a jejích variacích.

Odborníci předpokládají, že bude zmapováno asi 70 % povrchu planety, z toho asi 5 % s detailním rozlišením. Kromě toho by mělo být získáno dostatek materiálů o proměnných útvarech. Obecně lze shrnout cíle výzkumu do čtyř oblastí: obecné poznatky planetární fyziky, planetologie a kosmologie; hledání známek biologické aktivity; pokrok v řešení otázek spojených se vznikem a vývojem sluneční soustavy a podklady pro přípravu měkkého přistání.

Pro příští okno za dva roky neplánují Američani žádný pokus, neboť sonda VIKING, která má na Marsu měkce přistát, byla z finančních důvodů odložena na rok 1975. Návrh na sondu byl předložen již v polovině šedesátých let, dostal název VOYAGER a byl zrušen r. 1967 z finančních důvodů. Nynější podoba sondy VIKING má dvě části:

jedna zůstane na dráze kolem Marsu (jako Mariner), kdežto druhá sestoupí jako Surveyor na povrch. Celková hmotnost je 3200 kg, z toho přistávací zařízení má 500 kg. Dvě sondy tohoto typu odstartují v říjnu 1975 (raketa TITAN 3 D - CENTAUR) a po osmi měsících letu budou navedeny na oběžné dráhy kolem Marsu ve vzdálenosti 1000—33 000 kilometrů).

Tento pokus má definitivně objasnit problematiku života na Marsu. Nález sebejednodušší živé hmoty by měl převratný dopad na dosavadní teorie možnosti života ve vesmíru. VIKING má také přispět k rozhodnutí, zda se Američani rozhodnou financovat let člověka k rudé planetě ještě v tomto století. Má-li se totiž vydat expedice na cestu počátkem devadesátých let, je nutno v druhé polovině let sedmdesátých s vývojem a přípravou začít.

Česká jména na mapách Měsíce

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Základ pojmenování měsíčních horstev, kruhových pohoří, valových rovin a kráterů pochází ze 17. století. Od té doby řada badatelů zapisovala do svých map povrchu Měsíce další názvy a jména, takže se často stávalo, že názvy téhož útvaru byly na různých mapách různé. Proto Mezinárodní astronomická unie pověřila v roce 1932 *M. A. Blaggovou* a *K. Müllera*, aby sestavili jednotnou nomenklaturu, která by byla závazná. Podle této nomenklatury jsou na přivrácené straně Měsíce celkem čtyři krátery, pojmenované po českých vědcích. (Dva z nich mají jména zlatinizovaná, takže na první pohled česká jména nepřipomínají.) V dalším popíšeme jednak tyto útvary, jednak připomeneme některá důležitá data o vědcích, po nichž byly pojmenovány. Všechny čtyři krátery si mohou čtenáři vyhledat buď na mapě č. 5, která je otištěna ve školním zeměpisném atlasu (1971, Orientační mapa Měsíce, měřítko 1 : 20 000 000), anebo na mapě ing. *A. Růkly* (měřítko 1 : 6 000 000), kterou vydalo Kartografické nakladatelství v Praze (1967) jako zájmový výklad pro lidovou hvězdárnu v Praze na Petříně. Cena této mapy je Kčs 8,— a průměr obrazu Měsíce je na ní 58 cm. V abecedním pořadí jsou na přivrácené straně Měsíce tyto čtyři „české“ krátery:

1. Anděl kráter o průměru 30 km. Stěny Andělova kráteru jsou nepravidelného tvaru. Jeho jižní stěna je nálevkovitě otevřena a zata-

rasena skalami, které zejména při vnější východní stěně jsou členité. V okolí hlavního kráteru označila Mezinárodní astronomická unie dalších jedenáct kráterů písmeny Anděl A, Anděl B, atd.

Český učitel *Karel Anděl* (1884—1948) vydal v Praze v r. 1926 skvělou mapu povrchu Měsíce, nazvanou *Mappa Selenographica*. Byl také jedním ze zakladatelů České astronomické společnosti v Praze, která se ustavila na sklonku první světové války. Návrh na pojmenování kráteru podal prof. *Lamèch*, ředitel hvězdárny v Aténách. Andělova mapa byla mnohokrát přetiskována a byla pojata např. i do Velké sovětské encyklopedie.

2. Biela kráter o průměru 77 km. Kromě hlavního kráteru jsou ještě Krátery Biela B (44 km) a Biela C (25 km), které leží po jeho obou osách.

Kapitán rakouské armády *Vilém Biela* (1782—1856) pocházel ze staročeského rodu pánů z Bělé, kteří se za třicetileté války stali exulanty. Vilém Biela se narodil v Drážďanech a jako důstojník sloužil v Josefově. Roku 1826 objevil kometu, která byla totožná s kometami z let 1772, 1779 a 1806. Při návratu Bielovy komety v r. 1846 došlo k jejímu rozpadu na dvě části, které měly vlastní jádro i chvost. Později se již Bielova kometa neobjevila a místo ní byl pozorován mohutný meteorický déšť. Tak bylo dokázáno, že komety a meteorické roje spolu velmi úzce souvisí.

3. Hagecius - kráter o průměru 78 km. Výška valu na západě je 4,2 km, na východě 2,7 km.

Hagecius je zlatinizované jméno českého hvězdáře a lékaře *Tadeáše Hájka z Hájku* (lat. Thaddaeus Hagecius ab Hagek), který žil v letech 1525 až 1600. Pojmenování Hagecius zavedl do měsíčních map *Langrenus*, což svědčí o věhlasu Hájkově, který jako současník *Tycho Brahea* a *Jana Keplera* vydal celou řadu významných publikací o pozorování komet, zatmění Slunce a o pozorování Braheovy supernovy v souhvězdí Kasiopeje. Tato supernova vzplanula v roce 1572.

4. Rheita kráter o průměru 72 km; v jeho blízkosti je Údolí Rheita, anglicky Rheita Valley. Délka údolí je 200 km.

Pojmenování *Rheita* patří vlastně *Antonínu Maria Šírkovi z Reity* (ve zlatinizované podobě Anton Maria Schyrleus de Rheita), který se narodil v r. 1597 v Čechách a zemřel r. 1660 v Ravenně v Itálii. Šírek byl velmi zkušeným optikem; v díle „*Oculus Enoch et Eliae*“, které vyšlo r. 1645 v Amsterdamu, uveřejnil mapu Měsíce. Šírek vynalezl terestrický okulár a sestavil binokulární dalekohled. Z jeho citovaného díla čerpal i *Jan Amos Komenský* pro své dílo „*Orbis pictus*“.

V r. 1930 podal český badatel *František Fischer* návrh, aby kráter Cyrillus B byl nazván na počest *Vojtěcha Šafaříka* (1829 až 1902), pro-

Tabulka I.
České krátery na Měsíci

Poř. čís.	Název	Plné jméno	Dat. nar. a úmrtí	Průměr [km]
a) <i>Přivrácená část</i>				
1.	ANDĚL	Karel Anděl	1884—1948	30
2.	BIELA	Vilém Biela	1782—1856	77
3.	HAGECIUS	Tadeáš Hájek z Hájku	1525—1600	78
4.	RHEITA	Antonín Maria Šírek z Reity	1597—1660	72
	(Údolí Rheity	Rheita Valley, délka 200 km)		
b) <i>Odvracená část</i>				
5.	BEČVÁŘ	Antonín Bečvář	1901—1965	75
6.	MARCI	Jan Marcus Marci z Kronlandu	1599—1667	30
7.	NECHVÍLE	Vincenc Nechvíle	1890—1964	90(?)
8.	NUŠL	František Nušl	1867—1951	65
9.	PURKYNĚ	Jan Evangelista Purkyně	1787—1869	50
10.	ŠAFAŘÍK	Vojtěch Šafařík	1829—1902	35

fesora University Karlovy, který se zabýval studiem proměnných hvězd. Tento návrh však nebyl již před druhou světovou válkou realizován.

Dalších šest českých jmen je od r. 1970 na mapách odvrácené strany Měsíce. Na pražském XIII. kongresu Mezinárodní astronomické unie v r. 1967 byla ustavena komise, která připravila návrhy na pojmenování útvarů na odvrácené straně Měsíce. Předsedou komise byl Američan prof. *D. H. Menzel* a jejími členy byli: Holanďan prof. *Minnaert*, sovětský astronom prof. *Michajlov* (později nahrazen dr. *Levinem*) a Francouz dr. *Dollfus*. Výsledky práce komise byly předloženy XIV. kongresu Unie v srpnu 1970 ke schválení. Z navržených 500 jmen bylo původně českým vědcům určeno pět jmen, ale dodatečně na návrh prof. *Zdeňka Kopala* z Manchesterské university bylo k nim připojeno i šesté jméno (Nechvíle); nebylo však ještě stanoveno, ke kterému kráteru bude toto jméno definitivně přiřazeno. Takto máme na Měsíci 10 jmen českých vědců. Pro zajímavost připomeňme, že stejný počet jmen byl přidělen Belgii a Kanadě. Na odvrácené straně Měsíce jsou tato nová česká jména:

5. Bečvář kráter o průměru 75 km.

RNDr. *Antonín Bečvář* (1901—1965), zakladatel hvězdárny na Skalnatém Plese, autor světoznámých hvězdných atlasů, objevitel komet a vytrvalý pozorovatel Slunce a meteorů.

6. Marci kráter o průměru 30 km.

Jan Marcus Marci z Kronlandu (1599—1667), přírodovědec a filosof, profesor University Karlovy. Použil kyvadla k měření času, studoval zákony disperze a barvy tenkých vrstev.

7. Nechvíle kráter o průměru 90 km (návrh).

PhDr. Vincenc Nechvíle (1890—1964), docent University Karlovy v Praze. Těžiště jeho prací spočívalo v teoretické astronomii.

8. Nušl kráter o průměru 65 km.

PhDr. František Nušl (1867—1951), profesor astronomie na Univerzitě Karlově, spoluzakladatel a býv. ředitel Ondřejovské hvězdárny, konstruktér přístroje nazvaného cirkumzenitál.

9. Purkyně kráter o průměru 50 km.

Jan Evangelista Purkyně (1787—1869), největší český přírodovědec 19. století.

10. Šafařík kráter o průměru 35 km.

Vojtěch Šafařík (1829—1902), první profesor astrofyziky na Univerzitě Karlově v Praze, průkopník moderních cest astronomického výzkumu v českých zemích. Tímto pojmenováním bylo tak odstraněno opomenutí z předválečných let.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

1. Na strane BC (AC) trojúhelníka ABC leží bod M (N) tak, že $BM = \frac{a}{m}$ ($AN = \frac{b}{n}$), pričom m, n sú prirodzené čísla. Úsečka MN delí trojúhelník ABC na dva útvary rovnakého obsahu. Určte veľkosť úsečky MN , ak sú dané strany a, b, c trojúhelníka ABC

(Došlo 18 řešení)

Pavol Bartoš

Riešil Imrich Vrto, II A ročník Gymnázia v Rimavskej Sobote.

Označme γ uhol pri vrchole C a obsahy trojúhelníkov NMC , ABC po rade P_1 , P_2 . Vypočítajme CN , CM

$$CM = a - \frac{a}{m} = a \frac{m-1}{m} \quad CN = b \frac{n-1}{n} \quad (1)$$

Podľa podmienok úlohy platí $P_1 = \frac{1}{2} P_2$, čiže

$$\frac{1}{2} CM \cdot CN \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (2)$$

Dosadme (1) do (2) a upravme:

$$2a \frac{m-1}{m} b \frac{n-1}{n} = ab, \quad 2mn - 2m - 2n + 2 = mn$$

$$(m-2)(n-2) = 2 \quad (3)$$

Nemože byť $m = 1$, lebo by podľa (3) bolo $n = 0$. Obdobne $n \neq 1$. Taktiež $m \neq 2$, lebo v opačnom prípade dá (3) $0 = 2$. Obdobne $n \neq 2$. Vo vzťahu (3) sú preto $m-2$, $n-2$ prirodzené čísla, takže buď $m-2 = 2$, $n-2 = 1$, buď $m-2 = 1$, $n-2 = 2$, a tak

$$(m, n) = (4, 3), (3, 4) \quad (4)$$

$$(CM, CN) = \left(\frac{3}{4} a, \frac{2}{3} b \right), \left(\frac{2}{3} a, \frac{3}{4} b \right) \quad (5)$$

Pre úsečku MN platí z trojuholníka MNC

$$MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2 CM \cdot CN \cos \gamma \quad (6)$$

Z trojuholníka ABC vypočítame

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (7)$$

Dosadme (5) a (7) do (6):

$$(MN)_1 = \sqrt{\frac{9}{16} a^2 + \frac{4}{9} b^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} a \cdot \frac{2}{3} b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} =$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{9a^2 - 8b^2 + 72c^2}$$

$$(MN)_2 = \frac{1}{12} \sqrt{9b^2 - 8a^2 + 72c^2}.$$

2. Nechť k je kružnice, opsaná danému obecnému trojuholníku o vrcholech A_i ($i = 1, 2, 3$), k_i kružnice, ktorá kružnici k protína kolmo vo vrcholech A_j , A_k daného trojuholníka (i, j, k ľubovoľná cyklická permutácia čísel 1, 2, 3). Budiž ďalej $P \neq A_j$, $P \neq A_k$ ľubovoľný bod kružnice k_i , $\sphericalangle A_i A_j P = \varphi_j$, $\sphericalangle A_i A_k P = \varphi_k$. Pak platí $\operatorname{tg} \varphi_j \operatorname{tg} \varphi_k = \pm 1$, alebo tento súčin není definován.

Josef Brejcha

Došlo 10 řešení

Označme S, S_i středy kružnic k, k_i . Pak nastane právě jeden ze čtyř dále uvedených případů.

Nechť oba úhly $\sphericalangle A_j A_i A_k$ a $\sphericalangle A_j P A_k$ jsou ostré. Úhly $\sphericalangle S A_j S_i$, $\sphericalangle S A_k S_i$ jsou zřejmě pravé, protože kružnice k a k_i se protínají kolmo. Čtyřúhelník $S A_j S_i A_k$ je zřejmě tětiový. Pomocí věty o obvodových úhlech získáme $\sphericalangle A_j A_i A_k + \sphericalangle A_j P A_k = 90^\circ$; ze čtyřúhelníka $A_j P A_k A_i$ máme snadno $\varphi_j + \varphi_k = 270^\circ$. Pak výraz

$$\operatorname{tg} (\operatorname{tg} \varphi_j + \varphi_k) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_j + \operatorname{tg} \varphi_k}{1 - \operatorname{tg} \varphi_j \operatorname{tg} \varphi_k}$$

není definován, což může nastat pouze tehdy, není-li aspoň jeden ze symbolů $\operatorname{tg} \varphi_j$, $\operatorname{tg} \varphi_k$ definován, nebo platí-li $\operatorname{tg} \varphi_j \cdot \operatorname{tg} \varphi_k = 1$.

II. Nechť oba úhly $\sphericalangle A_j A_i A_k$ a $\sphericalangle A_j P A_k$ jsou tupé. Pak obdobně jako sub I.) ukážeme, že platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_j A_i A_k + \sphericalangle A_j P A_k &= 270^\circ \\ \varphi_j + \varphi_k &= 90^\circ, \end{aligned}$$

odkud plyne též závěr jako v případě předešlém.

III. Nechť úhel $\sphericalangle A_j A_i A_k$ je tupý, úhel $\sphericalangle A_j P A_k$ ostrý. Stejně jako v případě I. se ukáže, že $\sphericalangle A_k S A_j + \sphericalangle A_j S_i A_k = 180^\circ$. Pak zase z věty o obvodových úhlech plyne

$$\sphericalangle A_j A_i A_k - \sphericalangle A_j P A_k = 90^\circ.$$

Vznikne-li nekonvexní čtyřúhelník $A_j P A_k A_i$, jehož strany se navzájem neprotínají, pak pro součet jeho vnitřních úhlů platí $\varphi_j + \varphi_k + \sphericalangle A_j P A_k + (360^\circ - \sphericalangle A_j A_i A_k) = 360^\circ$, odkud po dosazení $\varphi_j + \varphi_k = 90^\circ$. a tedy též závěr jako v předešlých dvou případech. Vznikne-li nekonvexní čtyřúhelník $A_j P A_k A_i$, kde např. strana $A_i P$ protne stranu $A_k A_i$, pak z rovnosti vrcholových úhlů se dokáže, že platí

$$\varphi_j - \varphi_k = \sphericalangle A_j A_i A_k - \sphericalangle A_j P A_k = 90^\circ;$$

pro součin $\operatorname{tg} \varphi_j \operatorname{tg} \varphi_k$ tedy platí $\operatorname{tg} \varphi_j \operatorname{tg} \varphi_k = -1$, nebo tento součin není definován.

IV. Nechť úhel $\sphericalangle A_j A_i A_k$ je ostrý a úhel $\sphericalangle A_j P A_k$ tupý. Řešení tohoto případu je zcela analogické případu III.

Případ, že by aspoň jeden z úhlů $\sphericalangle A_j A_i A_k$, $\sphericalangle A_j P A_k$ byl pravý, nemůže v obecném trojúhelníku nastat, jak je z charakteru kružnic k, k_i patrné.

Tvrzení neplatí obecně neboť např. pro trojúhelník rovnoramenný $A_i A_k = A_j A_k$, $\sphericalangle A_k = R$, když bod P leží na přímkce $A_k S_i$, snadno ukážeme $\operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k = 1/3 \neq 1$

3. Pro kterou hodnotu parametru k tvoří kořeny rovnice

$$x^4 - (3k + 4) \cdot x^2 + (k + 1)^2 = 0$$

aritmetickou posloupnost. Proveďte zkoušku.

(Došlo 20 řešení.)

Jan Fráňa

Řešil Jiří Frýda, 3.a G Kladno.

Mají-li kořeny této rovnice tvořit aritmetickou posloupnost, můžeme je psát ve tvaru: $a - 3d$; $a - d$; $a + d$; $a + 3d$, kde a , d jsou reálná čísla, difference aritmetické posloupnosti je $2d$.

Při řešení použijeme známých vztahů mezi kořeny a koeficienty obecné rovnice n -tého stupně

$$\begin{aligned} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n &= 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= (-1)^1 \cdot a_1 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &= (-1)^2 \cdot a_2 \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n &= (-1)^3 \cdot a_3 \\ x_1 x_2 x_3 \dots x_n &= (-1)^n \cdot a_n. \end{aligned}$$

Pro danou rovnici dostáváme:

$$a - 3d + a - d + a + d + a + 3d = 0, \quad (1)$$

z toho $a = 0$, takže kořeny rovnice jsou: $-3d$; $-d$; d ; $3d$.

Pro koeficient $-(3k + 4)$ platí:

$$(-3d) \cdot (-d) + (-3d) \cdot d + (-3d) \cdot 3d + (-d) \cdot d + (-d) \cdot 3d + d \cdot 3d = -(3k + 4) \text{ a po zjednodušení:}$$

$$10d^2 = 3k + 4. \quad (2)$$

Pro koeficient $(k + 1)^2$ platí: $(-3d) \cdot (-d) \cdot d \cdot 3d = (k + 1)^2$, což dá vztah

$$9d^3 = (k + 1)^2 \quad (3)$$

Řešením soustavy rovnic (2), (3) vychází vyloučením d rovnice:

$$19k^2 - 16k - 44 = 0,$$

$$\text{kteřá má kořeny: } k_1 = 2; k_2 = -\frac{22}{19}$$

Dosadíme-li do dané rovnice $k_1 = 2$, máme rovnici $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ s kořeny $(-3; -1; 1; 3)$, což je aritmetická posloupnost s diferencí $2d = 2$, resp. $2d = -2$ pro opačné pořadí kořenů $(3; 1; -1; -3)$; její hodnotu dává také rovnice (2).

Dosadíme-li do dané rovnice $k_2 = -\frac{22}{19}$, pak dostáváme rovnici

$$x^4 - \frac{10}{19} x^2 + \frac{9}{361} = 0 \text{ s kořeny } \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{19}}; \frac{-1}{\sqrt[3]{19}}; \frac{1}{\sqrt[3]{19}}; \frac{3}{\sqrt[3]{19}} \right), \text{ což je}$$

aritmetická posloupnost s diferencí $2d = \frac{2}{\sqrt{19}}$, resp. $2d = -\frac{2}{\sqrt{19}}$ pro opačné pořadí kořenů; její hodnotu dává opět rovnice (2).

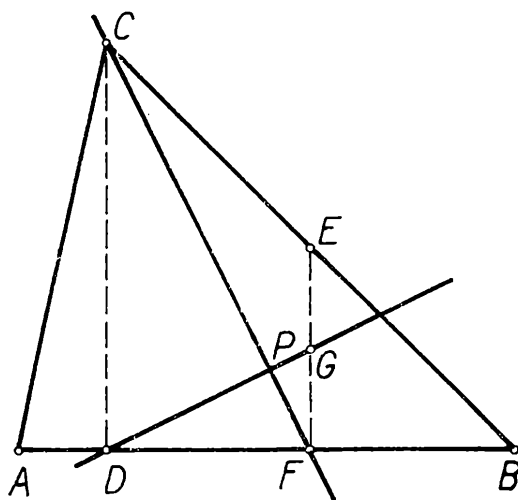
Kořeny rovnice $x^4 - (3k + 4) \cdot x^2 + (k + 1)^2 = 0$ tvoří aritmetickou posloupnost pro hodnoty parametru $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{22}{19}$

4. Je dán trojúhelník ABC . Označme D patu výšky z vrcholu C , E střed strany BC , F patu kolmice spuštěné z bodu E na stranu AB a G střed úsečky EF . Dokažte následující tvrzení: K tomu, aby přímky DG , CF byly navzájem kolmé je nutné a také stačí, aby trojúhelník DEF byl rovnoramenný.

(Došlo 26 řešení.)

Stanislav Horák

Riešil Imrich Vrto, 2.a G Rimavská Sobota



Obr. 1

a) Nech sú priamky DG a CF kolmé a nech P je priesečník týchto priamok (obr. 1). Zrejme platí

$$\begin{aligned}\sphericalangle DCF &= \sphericalangle FDG, \\ \sphericalangle FDC &= \sphericalangle GFD = 90^\circ\end{aligned}$$

Potom

$$\triangle DCF \sim \triangle FDG (uu)$$

a z toho

$$GF : DF = DF : CD \quad (1)$$

Úsečka EF je strednou priečkou v $\triangle DBC$, tj.

$$CD = 2 \cdot EF \quad (2)$$

Okrem toho

$$GF = \frac{1}{2} EF \quad (3)$$

Ak dosadíme vzťahy (2) a (3) do (1), vyjde

$$EF : 2 \cdot DF = DF : 2 \cdot EF$$

čiže

$$EF^2 = DF^2, \text{ tj. } EF = DF \quad (4)$$

To znamená, že trojuholník DEF je rovnoramenný.

b) Nech je trojuholník DEF rovnoramenný, tj.

$$EF = DF$$

Potom platí

$$GF : DF = DF : CD = \frac{1}{2}$$

Okrem toho

$$\sphericalangle CDF = \sphericalangle DFG = 90^\circ.$$

Preto

$$\triangle CDF \sim \triangle DFG.$$

Z toho

$$\sphericalangle GDF = \sphericalangle FGD$$

Vypočítajme veľkosť $\sphericalangle DPF$:

$$\begin{aligned} \sphericalangle DPF &= 180^\circ - (\sphericalangle GDF + \sphericalangle DFC) = 180^\circ - (\sphericalangle FCD + \\ &+ \sphericalangle DFC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Priamky DG , CF sú navzájom kolmé.

5. Nájdite aritmetickú postupnosť tej vlastnosti, že súčet prvých n členov je vždy rovný $3n^2$ pre každé $n \geq 1$.
(Došlo 23 riešení.)

Stanislav Horák

Riešil Karel Šafařík, III. b SVŠ Bratislava

Predpokladajme, že aspoň jedna taká postupnosť existuje. Potom nech má prvý člen a_1 , n -tý a_n , diferenciu d , kde a_1 , a_n a d sú vhodné reálne čísla. Pre súčet prvých n členov je známy vzorec

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad (1)$$

Ďalej vieme, že pre n -tý člen platí

$$a_n = a_1 + (n - 1) d \quad (2)$$

Dosadením do (1) dostávame

$$S_n = \frac{n}{2} \left[2a_1 + (n - 1) d \right].$$

Podľa textu vieme, že pre každé $n \geq 1$ platí $S_n = 3n^2$ a preto

$$3n^2 = \frac{n}{2} \left[2a_1 + (n - 1) d \right]$$

a po úprave

$$n^2 (d - 6) + n (2a_1 - d) = 0 .$$

Táto rovnica musí platiť pre každé n , a to je možné len tak, že

$$d - 6 = 0 \text{ a súčasne } 2a_1 - d = 0 .$$

Riešením dostáneme

$$a_1 = 3, d = 6 .$$

Tým jsme úlohu rozřešili. Skúškou sa presvedčíme, či je tomu tak.

$$S_n = \frac{n}{2} \left[3 + 3 + (n - 1) 6 \right] = 3n + 3n^2 - 3n = 3n^2.$$

Záver: Úlohe vyhovuje práve jedna aritmetická postupnosť, a to s prvým členom $a_1 = 3$ a s diferenciou $d = 6$.

6. Určete nejmenší číslo končící cifrou 3, které se vynásobí třemi tak, že se ta „konecová“ trejha přesmykne na jeho počátek (a pořadí ostatních cifer je beze změny),

(Došlo 21 řešení.)

František Kejla

Řešil Slavomír Kolčava, 3.S SVVŠ Brno

Hledané číslo označme

$$A = (a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2 3) \quad (1)$$

kde $a_k, a_{k-1}, \dots$ představují cifry. Druhé číslo, vzniklé z prvního násobením třemi, zapíšeme obdobně:

$$B = (3a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2) \quad (2)$$

Podle textu úlohy platí

$$3 A = B$$

a tudíž

$$(a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2 3) \cdot 3 = (3a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2) \quad (3)$$

Vztah (1) přepíšeme

$$A = (a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2) \cdot 10 + 3 \quad (4)$$

Položme

$$(a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2) = x$$

a vztah (4) je

$$A = 10 x + 3 \quad (5)$$

Číslo B se dá pak zapsat

$$B = 3 \cdot 10^k + x \quad (6)$$

Z rovnic (5) a (6) dosadíme do (3):

$$29 x = 3 \cdot 10^k - 9 \quad (7)$$

Vyjádríme x :

$$x = \frac{3 \cdot 10^k - 9}{29} \quad (7')$$

To se dá vyjádřit kongruencí

$$3 \cdot 10^k - 9 \equiv 0 \pmod{29} \quad (8)$$

Je samozřejmé, že platí

$$-29 \mid 10^{k-1} - 9 \pmod{29}$$

Sečtením vztahů (8) a (9) dostaneme (9)

$$10^{k-1} - 9 \equiv 0 \pmod{29} \quad (10)$$

Úplně samozřejmá je

$$31 \cdot 29 = 0 \pmod{29}, \text{ tj. } 899 = 0 \pmod{29} \quad (11)$$

Kongruenci (10) znásobíme 10^2 a pak od ní odečteme (11):

$$10^{k+1} - 1 = 0 \pmod{29} \quad (12)$$

Tím jsme však dospěli ke tvaru malé Fermatovy věty: *Je-li p prvočíslo, a takové přirozené číslo, že platí $(p, a) = 1$, potom též platí*

$$p/a^{p-1} - 1 \text{ neboli } a^{p-1} - 1 = 0 \pmod{p} \quad (13)$$

Srovnáním vztahů (12) a (13) dostáváme

$$k + 1 = 28, \text{ tj. } k = 27$$

Nyní již můžeme počítat x :

$$x = \frac{3 \cdot 10^{27} - 9}{29}$$

$$x = 103\,448\,279\,862\,068\,965\,517\,241\,379$$

Hledané číslo A je tedy

$$A = 1\,034\,482\,798\,620\,689\,655\,172\,413\,793 \quad (14)$$

Shrnutí: Nejmenší číslo A , splňující dané vlastnosti je číslo právě napsané.

UPOZORNĚNÍ!

Řešitelé naší letošní soutěže zašlou řešení soutěžních příkladů v předepsané úpravě (píše se na jedné straně papíru formátu A4, každý příklad zvlášť, uvést třídu, školu a adresu bydliště)

n e j p o z d ě j i

do 31. března 1972.

Red.



XIII. mezinárodní MO

Jak jsme slíbili, přinášíme v tomto čísle řešení úloh MMO. Texty si jistě čtenář vyhledá v předcházejícím čísle.

Řešení úlohy č. 1

Pre $n = 3$ má dané tvrdenie tvar: Pre každé reálne čísla a_1, a_2, a_3 platí:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geq 0$$

Dôkaz:

Nech a_1, a_2, a_3 sú reálne čísla. Výmenou a_1, a_2, a_3 sa tvrdenie nezmení, položíme $a_1 \geq a_2 \geq a_3$.

Upravujeme levou stranu dokazovanej nerovnosti

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) &= \\ = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3 - a_2 + a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) &= \\ = (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) &\geq 0, \end{aligned}$$

protože $(a_3 - a_1)$ i $(a_3 - a_2)$ jsou podle předpokladu nekladné.

Pre $n = 5$

Nech $a_1, a_2, \dots, a_5$ sú reálne čísla. Vzájomnou výmenou sa tvrdenie nezmení, označme $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$.

potom

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= a_1 - a_2 \geq 0 \\ a_1 - a_3 &\geq a_2 - a_3 \geq 0 \\ a_1 - a_4 &\geq a_2 - a_4 \geq 0 \\ a_1 - a_5 &\geq a_2 - a_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \\ (a_2 - a_5) \geq 0; \end{aligned}$$

(1)

podobne

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 &\geq 0 \\ a_2 - a_3 &\geq 0 \\ a_3 - a_4 &\geq 0 \\ a_3 - a_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(a_3 - a_1) (a_3 - a_2) (a_3 - a_4) (a_3 - a_5) \geq 0 \quad (2)$$

a

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 - a_4 \leq a_1 - a_5 \\ 0 &\leq a_2 - a_4 \leq a_2 - a_5 \\ 0 &\leq a_3 - a_4 \leq a_3 - a_5 \\ 0 &\leq a_4 - a_5 \leq a_4 - a_5 \end{aligned}$$

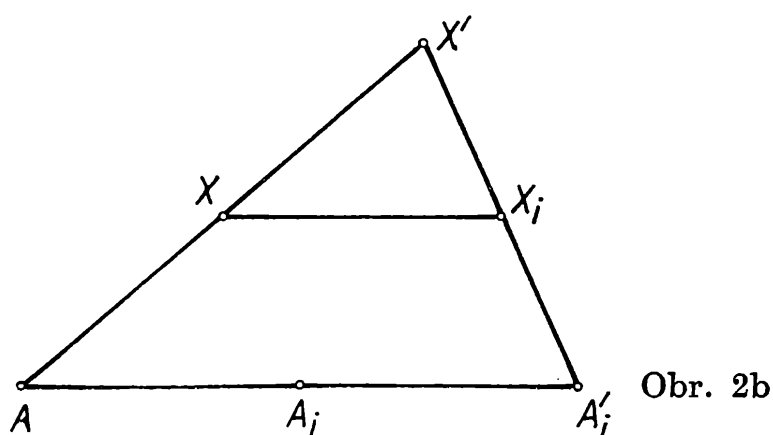
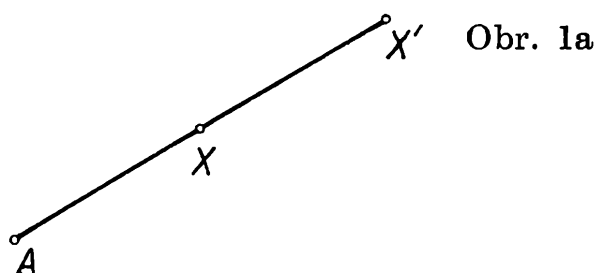
$$(a_4 - a_1) (a_4 - a_2) (a_4 - a_3) (a_4 - a_5) + (a_5 - a_1) (a_5 - a_2) (a_5 - a_3) (a_5 - a_4) \geq 0 \quad (3)$$

Sčítaním (1) (2) (3) dostaneme dané tvrdenie.

Pre $n = 4$ a pre každé prirodzené $n \geq 6$ existuje n -tica reálnych čísel, ktoré nespĺňajú danú nerovnicu, teda tvrdenie neplatí.

pre $n = 4$ je to $a_1 = -1, a_2 = a_3 = a_4 = 0$

pre $n \geq 6$ je to $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 2, a_5 = a_6 = \dots = a_n = 0$.



Riešenie úlohy č. 2.

Nech P je mnohosten rovnoľahlý s daným mnohostenom P_1 podľa bodu A_1 s koeficientom $k = 2$. Dokážeme, že mnohosteny $P_1, P_2, \dots, P_0$ sú časťami mnohostenu P .

a) Nech bod $X \in P_1$ (obr. 1), potom v rovnolehlosti prejde X do bodu X' . Mnohosten je konvexný, teda aj P je konvexný, čiže $A_1X' \subset P$, teda $X \in P$ a z toho vyplýva $P_1 \subset P$.

b) Nech $X \in P_1$ (obr. 2) a potom posunutím A_1A_i prejde

$$\begin{array}{l} A_1 \text{ do } A_i, \\ X \text{ do } X_i, \\ A_i \text{ do } A_i' \end{array}$$

a rovnolehlosťou prejde X do X' a A_i do A_i' . Lahko sa dokáže, že, $X_i \in X'A_i'$, a to aj keď $X \in A_1A_i$. Mnohosten P je konvexný, čiže $X'A_i' \subset P$, teda $X_i \in P$ a z toho vyplýva $P_i \subset P$, q. e. d.

Predpokladajme teraz, mnohosteny $P_1, P_2, \dots, P_9$ nemajú spoločný vnútorný bod. Potom objem telesa P_1 označme V . Zjednotenie mnohostenov $P_1, P_2, \dots, P_9$ má objem $9V$ a je časťou mnohostena P , ktorý má objem $8V$, čo je spor. Odtiaľ máme, že aspoň dva z mnohostenov $P_1, P_2, \dots, P_9$ majú spoločný aspoň jeden vnútorný bod.

Řešení úlohy č. 3.

Tvrzení dokážeme tak, že sestrojíme posloupnost čísel

$$a_k = 2^{n_k} - 3, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

v níž je každé číslo a_k nesoudělné se všemi předcházejícími.

Nejprve položíme $n_1 = 3, n_2 = 4$, takže bude $a_1 = 5, a_2 = 13$. Čísla 5 a 13 jsou prvočísla, tedy je skutečně a_2 nesoudělné s a_1 .

Předpokládejme dále, že jsme již našli čísla $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) s požadovanými vlastnostmi, a hledejme vhodné číslo a_{k+1} . Vypíšeme si všechny prvočíselné dělitele čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$; nechť to jsou prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_N$. Poněvadž čísla tvaru $2n - 3$ jsou vesměs lichá, budou také prvočísla p_j ($j = 1, 2, \dots, N$) všechna větší než 2. Nyní položíme

$$n_{k+1} = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_N - 1)$$

a ukážeme, že číslo

$$a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$$

je nesoudělné s každým z čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Označme

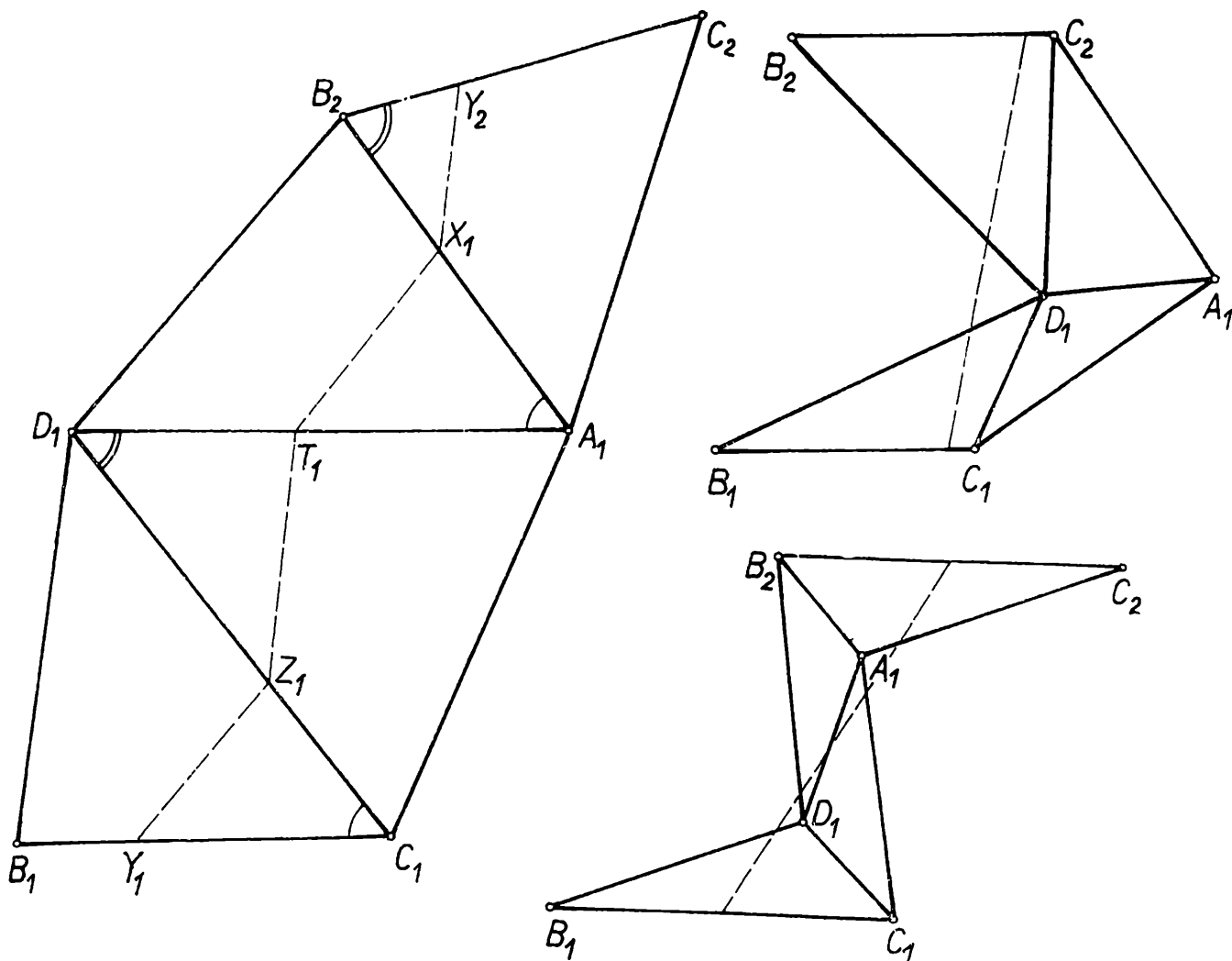
$$P_j = (p_1 - 1) \dots (p_{j-1} - 1)(p_{j+1} - 1) \dots (p_N - 1),$$

kde $j = 1, 2, \dots, N$. Tedy

$$n_{k+1} = (p_j - 1)P_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Podle malé Fermatovy věty platí pro každé p_j ($j = 1, 2, \dots, N$) vztah

$$2^{p_j-1} \equiv 1 \pmod{p_j}$$



a tedy

$$2^{n_{k+1}} = 2^{(p_j-1)P_j} \equiv 1^{P_j} \equiv 1 \pmod{p_j}.$$

Odtud dále plyne

$$a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3 \equiv -2 \pmod{p_j}$$

pro každé $j = 1, 2, \dots, N$. Poněvadž $p_j \neq 2$, vidíme, že a_{k+1} není dělitelné žádným z prvočísel p_j ($j = 1, 2, \dots, N$), a je tedy skutečně nesoudělné s každým z čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Poznámka redakce. Toto řešení nám na naši žádost poskytl dr. František Zítek z Matematického ústavu Čs. akademie věd.

Riešenie úlohy č. 4

Vytvorme vhodnú sieť daného štvorstena $ABCD$ (obr. 1). Tým body A, B, C, D prejdú do bodov $A_1, B_1, C_1, D_1, B_2, C_2$. Lomené čiary $YZTXY$ a $Y_1Z_1T_1X_1Y_2$ majú rovnakú dĺžku. Stačí teda skúmať lomené čiary v uvedenom rozvinutí do roviny.

$$\sphericalangle DAB + BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA \quad (1)$$

právě vtedy, keď

$$\sphericalangle D_1A_1B_2 + \sphericalangle B_1C_1D_1 = \sphericalangle A_1B_2C_2 + \sphericalangle C_1D_1A_1.$$

Lahko sa zistí, že posledná nerovnosť platí právě vtedy, keď $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

a) Ak neplatí (1), potom neplatí $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Potom sa dá zistiť, že lomená čiara $Y_1Z_1T_1X_1Y_2$ je tým kratšia, čím je niektorý jej „vrchol“ (Y_1, Z_1, T_1, X_1, Y_2) bližšie k niektorému vrcholu siete ($A_1, B_1, C_1, D_1, B_2, C_2$). Ležať však v ňom nemôže, teda v tomto prípade neexistuje najkratšia lomená čiara.

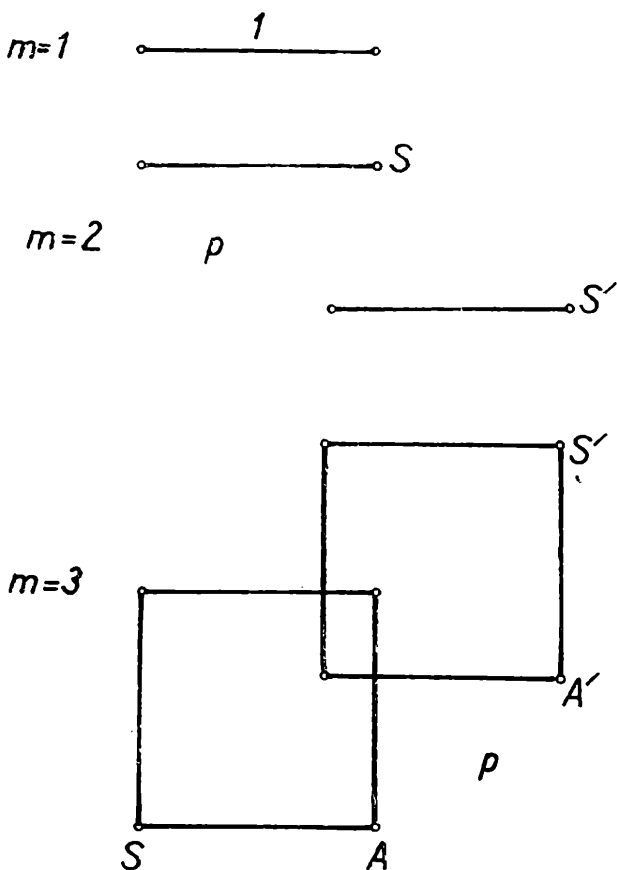
b) Ak (1) platí, je tiež $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Zrejme $C_1Y_1 = C_2Y_2$, a štvoruholník $Y_1C_1C_2Y_2$ je rovnobežník a $Y_1Y_2 = C_1C_2$. Lomená čiara $Y_1Z_1T_1X_1Y_2$ môže mať minimálnu dĺžku $Y_1Y_2 = C_1C_2 = 2 \cdot AC \cdot \sin \alpha / 2$. Nadobúda túto dĺžku a nadobúda ju pre nekonečne veľa polôh bodu Y , pretože jednotlivé trojuholníky siete sú ostrouhlé. Stačí ukázať, že nemôžu nastať prípady zobrazené na obr. 2.

Toto riešenie nám na požiadanie poslal Štefan Sakaloš. Z československých účastníkov podal nejlepší řešení a dostal za ně od holandské delegace zvláštní cenu.

Riešenie úlohy č. 5.

Pre $m = 1$ existuje množina S dvoch bodov, ktorých vzdialenosť sa rovná jednej (obr. 1).

Pre $m > 1$ popíšeme množinu S postupom matematickej indukcie. Nech S_m , kde $m \geq 1$, je množina 2^m bodov, ktoré majú túto vlastnosť: ku každému bodu $A \in S_m$ existuje v S_m práve m bodov, ktorých vzdialenosť od A je rovná 1. Jednotkovým posunutím P bodov množiny S_m vznikne množina S'_m , pričom A prejde do A' a platí $A'A$ rovná sa 1. Pre $m + 1$ existuje množina $S_{m+1} = S_m \cup S'_m$ 2^{m+1} bodov, pre ktoré platí: ku každému bodu $A \in S_{m+1}$ ($A \in S_m$) existuje práve m bodov v S_m a jeden bod $A' \in S'_m$, ktorých vzdialenosť od A sa rovná 1. Ak k bodu A existuje viac ako jeden bod v S'_m , ktorých vzdialenosť od A sa rovná 1, potom existuje jednotkové posunutie P'



(také, že vektor posunutia nesviera so spojnicami bodů množiny S'_m s bodom A uhol veľkosti $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$), pre ktoré ku každému bodu $A \in S_m$ existuje jediný bod $A' \in S'_m$, ktorého vzdialenosť od A sa rovná 1. (Podobne ak $A \in S'_m$.)

Záver. Pre každé prirodzené m existuje množina bodov predpísaných vlastností.

Řešení úloh 1, 2, 5 nám zaslal na naši žádost Jan Franců z Bratislavy, účastník MMO.

Řešení úlohy č. 6.

Představme si, že jsme pro každý sloupec i každý řádek tabulky (1) vypočetli součet všech jeho čísel. Nechť $p \geq 0$ je nejmenší číslo ze všech těchto součtů. Pro číslo p rozlišíme dvě možnosti.

a) Je-li $p \geq \frac{1}{2}n$, pak protože pro součet s všech čísel v tabulce platí

$$s \geq p \cdot n,$$

je

$$s \geq \frac{1}{2}n^2,$$

takže nerovnost (3) platí.

b) Nechť $p < \frac{1}{2}n$. Nechť v jistém řádku resp. sloupci tabulky (1) je součet čísel právě p . Předpokládejme, že je tomu tak v i -tém řádku. Kdyby šlo o i -tý sloupec, budou následující úvahy zcela analogické; jen je třeba zaměnit vzájemně slova řádek a sloupec.

Označme q počet čísel různých od nuly v i -tém řádku; zřejmě

$$q \leq p < \frac{1}{2}n, \quad (4)$$

neboť v tabulce (1) jsou pouze celá nezáporná čísla, tj. nejmenší nenulová jsou rovna 1. Součet všech čísel všech těch sloupců, v nichž v i -tém řádku leží čísla různá od nuly, označme s_1 . Platí pak

$$s_1 \geq q \cdot p. \quad (5)$$

Podle podmínky (2) platí pro součet s' všech čísel ležících ve sloupci, který má v i -tém řádku 0, nerovnost

$$s' + p \geq n,$$

tj.

$$s' \geq n - p.$$

Pro součet s_2 všech čísel všech sloupců, v nichž v i -tém řádku je 0, tedy platí

$$s_2 \geq (n - q)(n - p). \quad (6)$$

	Počet získ. bodů	Počet 1. cen	Počet 2. cen	Počet 3. cen	Počet zvlášť- ních cen
Britanie	110	—	1	4	—
Bulharsko	39	—	—	—	—
ČSSR	55	—	—	—	1
Francie	38	—	—	—	—
Holandsko	46	—	—	2	1
Jugoslavie	71	—	—	2	—
Kuba	jen 4 delegáti	—	—	—	—
Maďarsko	255	4	4	—	2
Mongolsko	26	—	—	—	—
Něm. dem. rep.	142	1	1	4	1
Polsko	118	1	—	4	—
Rakousko	82	—	1	4	—
Rumunsko	110	—	—	4	—
Sov. svaz	205	1	5	2	—
Švédsko	jen 7 delegátů 1 onemocněl	—	—	2	—

Potom vzhledem k (5) a (6) dostáváme

$$s = s_1 + s_2 \geq q \quad p + (n - q) \quad (n - p) = 2qp + n^2 - np - nq,$$

tj.

$$s \geq 2\left(\frac{n}{2} - p\right)\left(\frac{n}{2} - q\right) + \frac{n^2}{2}.$$

Podle (4) tedy pro s platí

$$s > \frac{1}{2} n^2,$$

tj. nerovnost (3) je splněna i v případě b).

	1. příklad	2	3	4	5	6	celkem bodů
Brychta Jan, Praha	4	3	0	3	0	1	11
Černý Anton, Bratislava	3	0	0	4	1	0	8
Franců Jan, Bratislava	3	1	0	5	0	0	9
Horák Karel, Strakonice	4	0	0	2	0	0	6
Husová Helena, Praha	2	1	0	0	1	0	4
Kmošek Miroslav Brno	2	0	0	5	0	0	7
Sakaloš Štefan, Prievidza	2	0	0	6	0	0	8
Vrto Imrich, Rim. Sobota	1	0	0	0	1	0	2

Řešení tohoto příkladu nám na naši žádost zaslal Jiří Mída z PF v Brandýse n. L.

Informace o MMO zakončíme přehledem výsledků. V 1. tabulce vidíte, jak si vedli delegáti jednotlivých států. Až příliš do očí bíjící je převaha Maďarska. Z osmi soutěžících nedostal nikdo nižší cenu než druhou. Při rozmluvě s koordinátory jsme zjistili, že jejich práce byly skutečně vynikající.

Druhá tabulka ukazuje, jak si počínali naši. Musíme, bohužel, přiznat, že se v tabulce vyskytuje příliš mnoho nul, příklady byly nad jejich síly.

Předmět matematiky

JOSEF KOTYK, Pardubice

V chápání definice matematiky¹⁾ vychází marxismus z předpokladu, že všechno má svůj historický vývoj. Také na předmět matematiky se musíme správně jen takto dívat. Požadavkům marxistické dialektiky vyhovuje proto pouze vědecká definice Engelse (1877), jež odpovídá historickému vývoji matematiky. Podstatu matematiky vyjadřuje výrokem: „Objektem (předmětem) matematiky jsou prostorové formy a kvantitativní vztahy vnějšího reálného světa a vztahy hmotné společnosti, které jsou prvním nebo druhým podobné.“²⁾

Ve své materialistické definici Engels ukázal, že matematika odráží souvislosti a vztahy materiálních objektů vnějšího světa a má tedy zcela reálný materiální původ. K tomuto tvrzení dospěl zobecněním historických fakt, zobecněním skutečností, jak matematika vznikla a jak se vyvíjela.

Matematika vznikla z hmotných potřeb lidské společnosti. Když kočovníci sestoupili s hor do údolí velkých řek, zabývali se stavbami hrází a kanálů, vysoušeli močály apod. K tomu potřebovali měřit pozemky i vodu, potřebovali míry, aby mohli provádět výpočty pro stavby, pro rozdělení obilí ze sýpek aj. Každodenní materiální potřeby tohoto druhu vedly nutně ke vzniku a počátkům vývoje matematiky.

Důkazy těsné souvislosti vzniku matematických pojmů s hmotnými potřebami společnosti shledáváme např. v jazycích Sumerů a Semitů mezopotámských; v „knihovnách“, přesněji řečeno sbírkách hliněných tabulek, jež se po nich dochovaly, nalézáme pro pojem „objem“ též klínopisný znak jako pro „hromadu hlíny“, pro pojem „výměra pozemku“ též znak jako pro „množství zrní“ potřebného k jejímu osetí apod.

Avšak nejen v poříčních civilizacích (v Mezopotámii v poříčí Eufratu a Tigridu, ve starém Egyptě v poříčí Nilu, v Indii v povodí Gangu

¹⁾ Viz autorův článek „Definice matematiky“ v Rozhledech, roč. 49, čís. 7, str. 328 až 330.

²⁾ Viz Bedřich Engels: Anti-Dühring (Praha 1949).

a v Číně v povodí řek Chuang-che a Jang-c-tiang), také jinde, např. v Kyjevské Rusi, byli prvními matematiky písaři, kteří se zabývali měřením půdy a vypočítáváním daní. Staroruské záznamy tohoto obsahu jsou nejstarším památkem svérázného ruského matematického myšlení, rovněž zcela spojeného s materiálními potřebami tehdejší společnosti.

Rozdílnost společenských kultur v různých zemích přivodila ovšem pozdější rozdílnost charakteru matematiky u různých národů. Dalším vývojem začínala se matematika postupně také od své materiální základny vzdalovat a oprostila se časem od počátečního úzce aplikovaného charakteru. Názor, že čistá matematika vznikla teprve u starých Řeků jako důsledek zvláštního národního ducha, jenž měl sklon k abstrakcím a starým Egyptanům, Sumerům a Semitům mezopotámským byl cizí, je však nesprávný. Řecká matematika nevznikla odtrženě od matematiky vyspělých národních kultur starého Orientu, byla naopak přímou jejich pokračovatelkou. Mnozí řečtí matematikové pocházeli z Malé Asie a učili se u Babylóňanů, jiní zase podle vlastního doznání u Egyptanů. Řecké matematické nedal také zvláštní ráz matematický „helénský duch“³⁾, nýbrž společenské vědomí otrokářského řádu. Otrokářské aristokracii řecké byla totiž výrobní činnost cizí, i produkovala ve svém prostředí přírodovědce, filosofy a jiné specialisty, také matematiky, kteří se zabývali abstrakcemi. Tak se i matematika postupně stávala vědou abstraktní. Řecká matematika se během třístoletého vývoje stala vědou teoretickou, logicky důslednou, jež měla např. ve slavných Eukleidových „Základech“⁴⁾ kolem roku 300 před n. l. již axiomatický charakter a s ním zásadní význam pro elementární geometrii podnes.

Od těch dob pokročila matematika ve svém vývoji jistě o obrovský kus cesty. Zájem o filosofické problémy současné matematiky⁵⁾ však trvá. Zakladateli kybernetiky Norbertu Wienerovi byl vzorem matematika David Hilbert († 1943), profesor na proslulé uni-

³⁾ Na mezinárodním matematickém kongresu, konaném ve dnech 1. až 10. září 1970 v Nice, vybízel francouzský ministr školství O. Guichard rovněž, aby také dnešní matematikové usilovali o „demythifikaci matematického ducha“, o němž se veřejnost stále domnívá, že je vyhrazen jen jakési elitě.

⁴⁾ Stěžejní dílo geniálního Eukleida z Alexandrie „Stoicheia“ (Elementa, Základy) rozvíjí přehledně soustavu eukleidovské axiomatiky, jež neinteresuje jen matematika, nýbrž představuje také neodlučitelnou součást logiky. Do češtiny bylo přeloženo Františkem Servítem roku 1097.

⁵⁾ Poučení o abstraktním charakteru matematiky, o materialistickém pojetí matematiky, o matematickém empirismu a krizi filosofických základů matematiky přináší stať Arnošta Kolmana „Filosofické problémy současné matematiky“ sborníku FILOSOFIE A PŘÍRODNÍ VĚDY (Praha, 2. vyd. 1961), str. 309 až 342.

versitě v Göttingen, jenž z novodobých matematiků pojednal o axiomatické matematice nejdůkladněji a vytvořil soustavu tak dokonalou, že jednotlivé axiomy jsou zcela nezávislé; podle Wienera⁶⁾ „kombinoval ohromnou schopnost abstraktního myšlení se smyslem pro zcela přízemní fyzikální realitu“.

Na přelomu 19. a 20. století přednesl Hilbert dne 8. srpna 1900 na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži památnou přednášku o matematických problémech⁷⁾, z níž vyjímáme:

„Významná data podněcují nás k ohlédnutí do minulosti, avšak obra-
cejí naše myšlení také k neznámé budoucnosti.

Při dalším rozvíjení kterékoli matematické disciplíny lidský duch, povzbuzován úspěchy, uvědomuje si svou samostatnost a staví si sám, často pouze pomocí logických kombinací a bez znatelného vlivu vnějšího světa, nové a plodné problémy.

Zatím, co takto působí tvůrčí síly čistého myšlení, hlásí se však vnější svět opět o slovo: Prostřednictvím reálných skutečností staví nám rovněž nové otázky a otvírá nové oblasti matematického poznání. V procesu začleňování těchto nových oblastí poznání do říše čistého myšlení nacházíme pak často odpovědi na staré nerozřešené problémy; takto dokážeme nejlépe postoupit vpřed i v klasických teoriích. Běží tak o stále se opakující hru, v níž myšlení a zkušenost si střídají role . . .“

Podle Alberta A. Michelsona jsou pokroky matematiky ryzí a aplikované (užité) spjaty tak úzce, že je obtížné říci, která z nich prokázala větší službu druhé.

Norbert Wiener pak přiznává: „Hledám matematický nástroj, kterým bych mohl popsat přírodu. A začínám si stále více uvědomovat, že musím hledat řeč i problémy svého matematického bádání — přímo v přírodě.“

A tak si po staletích opět uvědomujeme pravdivost slov slavného Galilea Galileiho, jenž již roku 1623 v díle *Il Saggiatore* napsal: „Filosofie je napsána ve veliké knize, jež leží před našima očima otevřena. Myslím přírodu. Neporozumíme jí však, jestliže neporozumíme řeči a nepoznáme písmo, jímž je psána. Je napsána — v jazyce matematickém . . .“

Robert Boyle prohlásil v témž století podobně: „Matematika jest — abeceda řeči, kterou k nám promlouvá příroda. Této řeči se však začíná rozumět teprve v našem století, kdy

⁶⁾ Jeho knihu vzpomínek „Můj život,“ vydanou v překladu Zdenky Hermannové nakladatelstvím Mladá fronta roku 1970, doporučuji zároveň pozornosti čtenářů. Překlad Wienerovy „Kybernetiky“ vyšel roku 1960.

⁷⁾ Viz článek Davida Hilberta „Matematické problémy“ v časopise *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. XVI. (1971), čís. 1, str. 15 až 22. (Úvodní část a závěr Hilbertovy přednášky v českém překladu Jaroslava Foltý a Oldřicha Kowalskiho.)

se ukázalo, že právě ryze matematické myšlení nejlépe vystihuje zákonitosti, jimiž se přírodní děje řídí.“

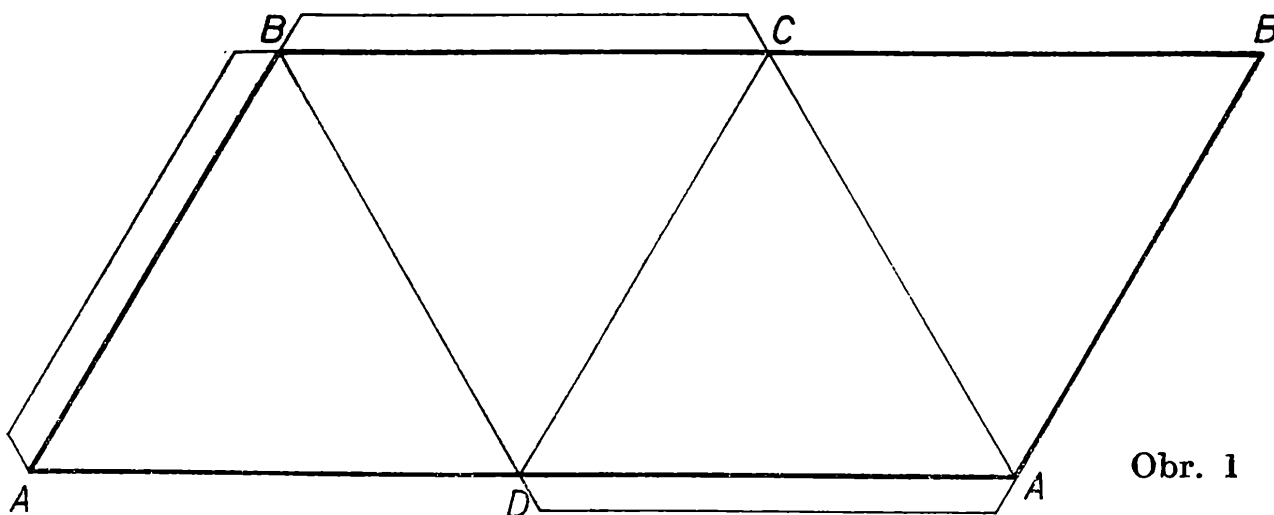
Slova Wienerova rovněž potvrzují, že i v našem pokročilém atomovém věku zůstává matematice zdrojem problémů příroda a nejvyšší formulací zákonitostí přírody matematika. Jestliže matematika se stala již obecnou řečí ve vědeckém dorozumění mezi národy, je naším přáním, aby se brzy stala řečí všech lidí.



NEJMLADŠÍM
ČTENÁŘŮM

Pravidelné mnohostěny

Z vás, nejmladších čtenářů, uděláme teď kutily. V obr. 1 jsou narýsovány čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky. Narýsujte co nejpřesněji podobný obrázek tak, aby strana trojúhelníků měla délku asi 10 cm



Obr. 1

(nezapomeňte na záložky), vystřihněte a trojúhelníky složte tak, aby vznikl trojboký jehlan. Říkáme raději pravidelný čtyřstěn. To je první pravidelný mnohostěn.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ

D

daný
 dedukce
 dedukovat
 deduktivní
 defekt
 definice
 definitní
 definovat
 definovaný
 deformace
 degenerovat
 dekadický
 dekadický logaritmus
 deklinace
 délka
 zeměpisná délka
 derivace
 derivace zleva, zprava
 parciální derivace
 derivace
 derivovat
 derivování
 desátý
 deset
 desetina
 desetinný
 desetinné číslo
 desetinné místo
 desetinný zlomek
 desetiúhelník
 desetistěn
 determinant
 devadesát
 devátý

donné, e
 déduction
 déduire
 déductif, ive
 défaut *m*
 définition
 défini
 définir
 défini
 déformation
 dégénéré
 décimal, e
 logarithme *m* décimal
 déclinaison
 longueur
 longitude
 dérivée
 dérivée gauche, à dro
 dérivée partielle
 dérivées successives
 dériver
 dérivation
 dixième
 dix
 dixième *m*
 décimal, e
 nombre *m* décimal
 décimale
 fraction décimale
 décagone *m*
 décaèdre *m*
 déterminant *m*
 quatre-vingt-dix; nonante
 neuvième

devět
 devítina
 devítiúhelník
 dělence
 dělení
 1. (ve smyslu operace)
 2. (ve smyslu dělení intervalu)
 dělit
 dělitel
 největší společný dělitel
 dělitelnost
 dělitelný
 diagonální
 diagram
 difference
 difference aritmetické řady
 diferenciál
 diferenciální
 diferenciální počet
 diferenciální rovnice

 diferencovat
 dilatace
 díl
 dimenze
 direktrix
 disjunkce
 disjunktní
 diskrétní
 diskriminant
 diskuse
 disperse
 distributivní
 divergence
 divergentní
 divergovat
 dlouhý
 dodatek
 dolní
 dolní mez
 dolní podstava
 dokázat
 doplněk
 doplněk prvku
 doplněk prvku determinantu
 doplněk úhlu do 180-
 doplňkový
 dosadit
 dosazení
 dotyk
 bod dotyku

neuf
 neuvième *m*
 enneagone *m*
 dividende *m*
 division *ž*

 subdivision
 diviser
 diviseur *m*
 plus grand commun diviseur
 divisibilité *ž*
 divisible
 diagonal, e
 diagramme *m*
 différence *ž*
 raison *ž* d'une progression
 arithmétique
 différentielle *ž*
 différentiel, elle
 calcul *m* différentiel
 équation *ž* différentielle
 différencier
 dilatation *ž*
 portion *ž*
 dimension
 directrice
 disjonction
 disjoint, e
 discret, ète
 discriminant *m*
 discussion *ž*
 dispersion *ž*
 distributif, ive
 divergence *ž*
 divergent, e
 divergér
 long. gne
 appendice *m*
 inférieur
 borne *ž* inférieure
 base *ž* inférieure
 démontrer
 complément *m*; supplément *m*
 cofacteur *m* d'un élément d'un
 détérminant
 supplément d'un angle
 complémentaire; supplémentaire
 substituer
 substitution *ž*
 contact *m*; tangence *ž*
 point *m* de contact; point de
 tangence

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

4

ROČNÍK 50, 1971-1972, PROSINEC

ROČNÍK 50
PROSINEC 1971-1972

3

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT Praha
s redakční radou

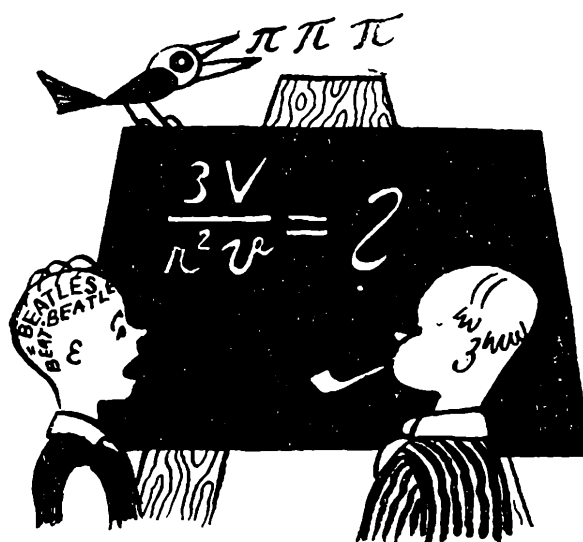
REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odbornou péči Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 g, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřižská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Helleroová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

Ing. J. Myslík: Některé aplikace Booleovy algebry	145
Ing. M. Geryk: Iterační hledání kořene a minima funkce	149
Doc. ing. L. Drs: Automatické kreslení	156
P. Ferko: Nerelativistické pohyby elektronu	158
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Z historie mezinárodní soustavy jednotek SI	166
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Doplnkové jednotky SI	167
M. Kružík: Historický vztah mezi fyzikou a technikou (Dokončení)	168
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Fyzikální znaky hvězd	174
Naše soutěž	177
Prof. dr. R. Košťál: Třetí kolo kat. A XII. roč. FO	179
Prof. dr. R. Košťál: Pátá MFO v Sofii	181
E. Říman, CSc.: Recenze knihy Kepler, Selbstzeugnisse	183
Ing. P. Bartuška: O objevu rentgenových paprsků	186
Ing. P. Bartuška: M. V. Lomonosov osobnost ruské vědy	188
S. Horák: Pravidelné mnohostěny	190
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky



Některé aplikace Booleovy algebry

Ing. JIŘÍ MYSLÍK, Plzeň

Booleova algebra má v současné době velké uplatnění nejen v matematice, ale v mnoha jiných odvětvích vědy a techniky, např. v oboru konstrukce a programování samočinných počítačů, v elektrotechnice, v logice a v právních vědách atd. Uvedme nejprve příklady aplikace Booleovy algebry v elektrotechnice, při navrhování a optimalizaci elektrických kontaktních obvodů.

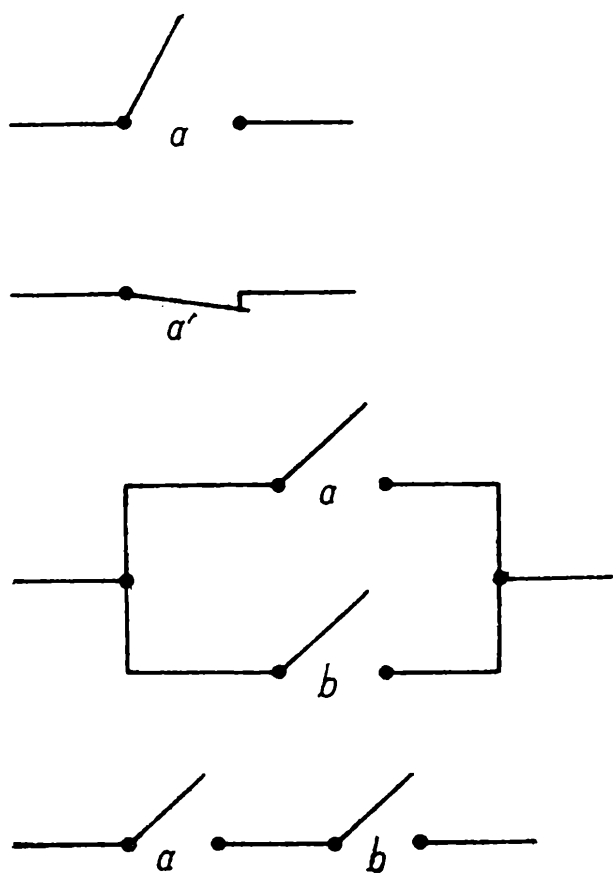
Booleovskou funkci $f(a, b, c)$ modelujeme kontaktním obvodem, který se skládá ze spínacích a rozpínacích kontaktů (viz první dva řádky na obr. 1). Každý výskyt proměnné v booleovské funkci je v obvodu modelován spínacím kontaktem, negace proměnné je zastoupena rozpínacím kontaktem, součtu $a + b$ odpovídá paralelní spojení kontaktů a, b (obr. 1), zatímco součinu $a \cdot b$ odpovídá sériové spojení kontaktů a, b . Je-li $a = 1$, je příslušný kontakt sepnut, je-li $a = 0$, je rozpojen a nemůže jím protékat proud.

Jednotlivé řádky tabulek, kterými jsou definovány booleovské operace sčítání a násobení představují fyzikální stavy obvodů I, II, III a IV, které jsou znázorněny na obr. 2 a 3. I na základě pouhé představy o průchodu proudu obvodem můžeme snadno ověřit, že každým ze zkoumaných obvodů prochází proud právě tehdy, když příslušná booleovská funkce nabývá hodnoty 1.

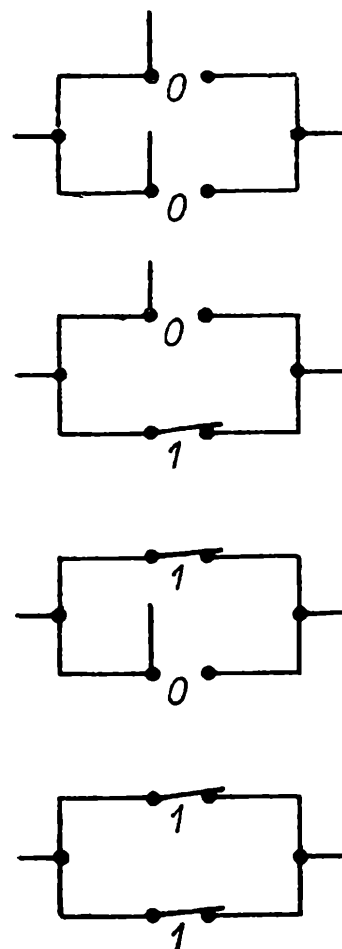
	a	b	$a + b$
I	0	0	0
II	0	1	1
III	1	0	1
IV	1	1	1

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ověřme pomocí kontaktního schématu platnost distributivního zákona $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$. Schéma obvodu modelujícího logickou funkci $f = (a + b) \cdot (a + c)$ je na obr. 4a. Uvědomte si, že všechny kontakty a modelují stejnou hodnotu proměnné a , jsou tedy současně spojene nebo současně rozpojene, takže jejich sériové spojení můžeme nahradit jediným kontaktem, aniž se tím změní podmínky pro průchod proudu obvodem. Schéma na obr. 4b můžeme popsat logickou funkcí $g = a + b \cdot c$, jelikož kontakty b, c jsou spojeny v sérii a k tomuto spojení je paralelně připojen kontakt a . Je zřejmé, že při všech kombinacích stavů kontaktů fungují obvody na obr. 4a, b stejně, tj. platí $f = g$, $(a + b) \cdot (a + c) = a + b \cdot c$.



Obr. 1

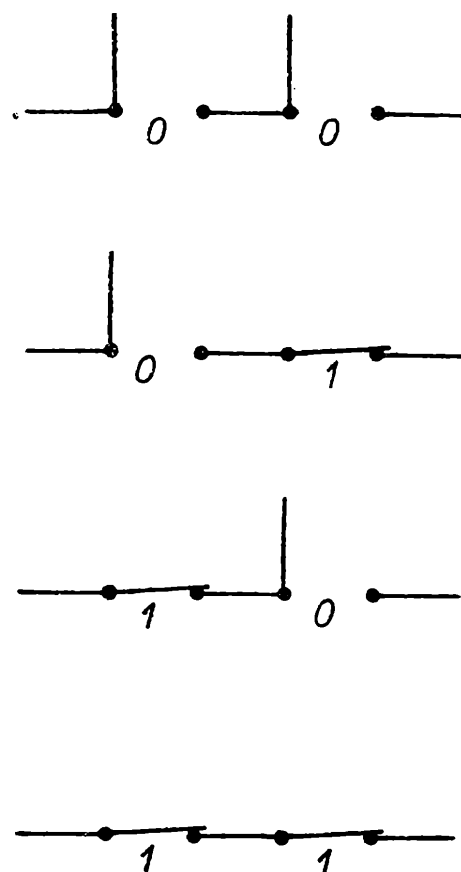


Obr. 2

Ukažme si příklad praktického využití úprav booleovských výrazů. Při návrhu jistého ovládacího obvodu bylo nejprve nakresleno schéma podle obr. 5, kde je použito osmi vypínačů. Zjednodušíme toto schéma tak, aby nový obvod fungoval stejně jako dosavadní při všech možných stavech kontaktů.

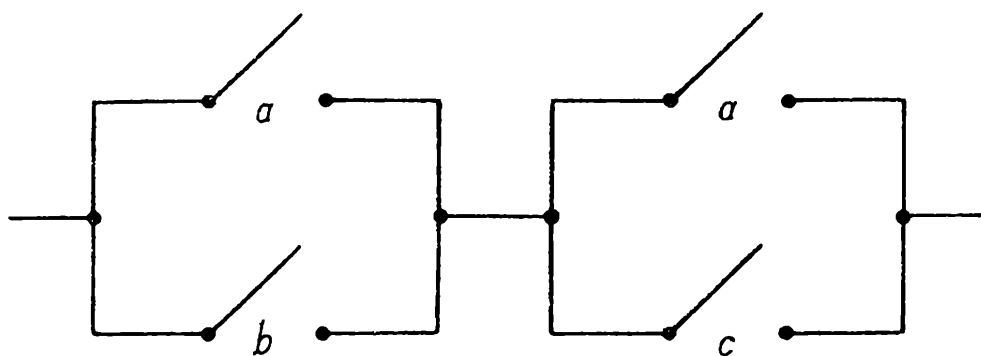
Obvod na obr. 5 lze popsat booleovskou funkcí $f = a \cdot c + a \cdot \bar{d} + b \cdot c + b \cdot \bar{d}$, kterou dovede upravit:

$$a \cdot c + a \cdot \bar{d} + b \cdot c + b \cdot \bar{d} = (a + b) \cdot (d + c)$$

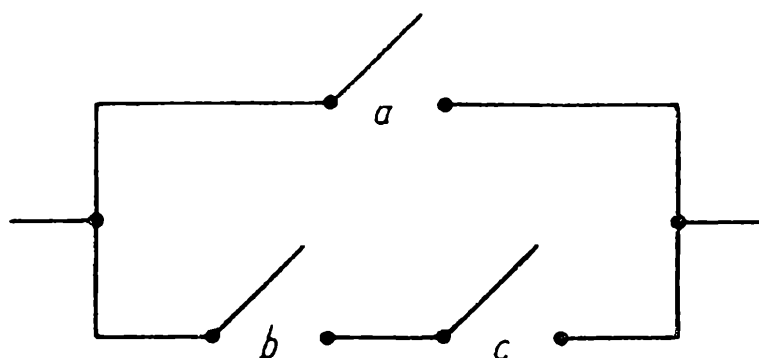


Obr. 3

Obvod na obr. 5 lze zjednodušit podle obr. 6, tj. k jeho realizaci bude zapotřebí pouze čtyř vypínačů.

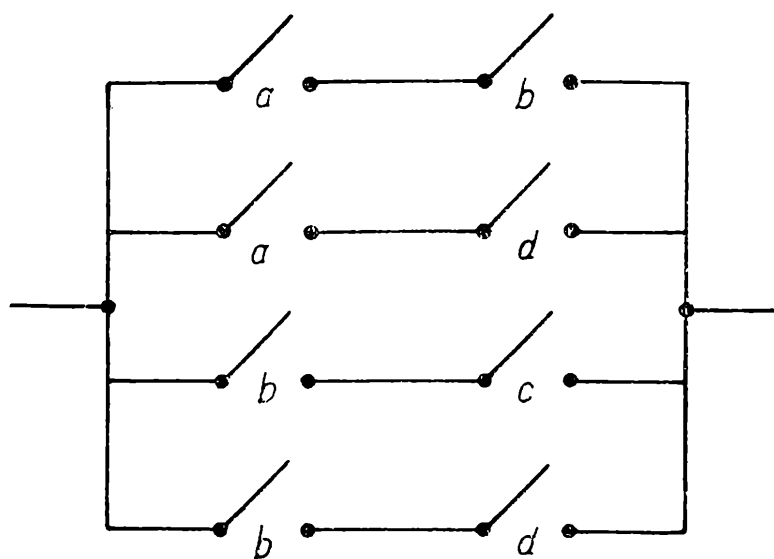


Obr. 4a

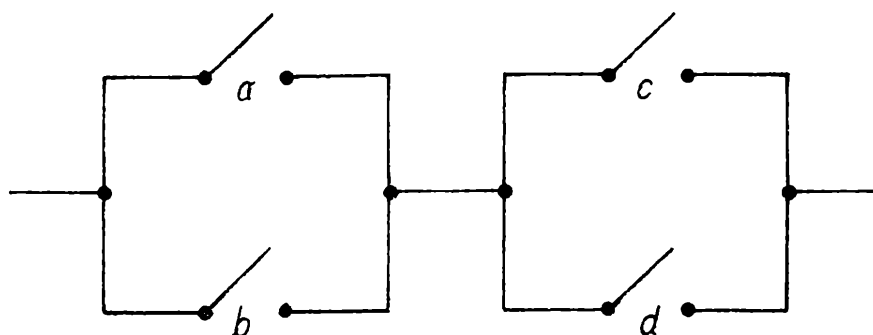


Obr. 4b

Operace samočinných počítačů provádějí tzv. logické obvody. Logické obvody jsou takové fyzikální soustavy, které se chovají podle booleovských funkcí, přesněji řečeno — modelují booleovské funkce. Prvkem



Obr. 5



Obr. 6

logického obvodu může být jakýkoliv fyzikální objekt, který má dva možné stavy. Ve starších počítačích (např. v čs. počítači SAPO) se používalo relé, v současných počítačích se uplatňují zejména tranzistorové klopné obvody. Relé je v podstatě elektromagnet, který ovládá elektrické kontakty. Klopný obvod je elektronický obvod, který je podle druhu impulsu přivedeného na jeho vstup buď v otevřeném nebo uzavřeném stavu. Návrh logických obvodů samočinných počítačů je nemyslitelný bez použití Booleovy algebry. Požadovaná booleovská funkce se co nejvíce zjednoduší podle pouček Booleovy algebry a teprve pak se nakreslí příslušný obvod.

Zájemci, kteří se chtějí hlouběji seznámit s použitím Booleovy algebry k navrhování logických obvodů, se mohou poučit např. v knize G. H. Hoernes - M. F. Heiweil, *Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů*, kterou vydalo nakladatelství SNTL.

Prosíme čtenáře, aby si laskavě opravily obr. 5 tak, aby kontakt vpravo nahoře byl označen c místo b.

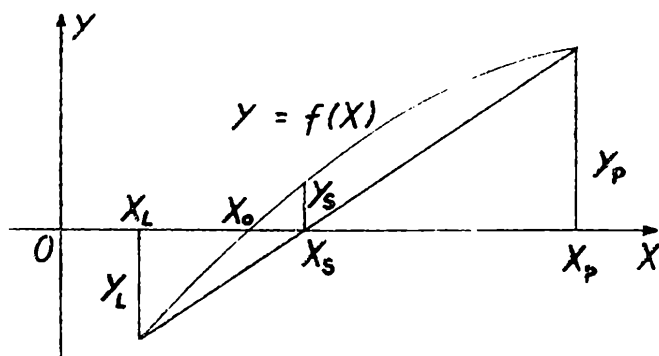
Iterační hledání kořene a minima funkce

MILAN GERYK, Přerov

Iterací (z latinského *iter* = pochod, *iteratio* = opakování) rozumíme metodu, kdy k nějakému cíli se postupně přibližujeme prostřednictvím opakování stejného algoritmu (tj. jednoznačného postupu složeného z konečného počtu úkonů). Jednonásobné provedení tohoto algoritmu nazýváme *krokem* iterace. Hledáme-li iterací hodnotu x_0 splňující určitou vlastnost, krok spočívá v tom, že k hodnotě „staré“ x_n (získané v minulém kroku) najdeme hodnotu x_{n+1} „novou“, od které očekáváme, že je blíže hledaného x_0 než hodnota stará. Místo „hodnoty“ x_n lze si snadno představit jiný objekt, např. interval I_n zmenšující se s n . Dokáže-li se, že při daném iteračním způsobu po nekonečném počtu kroků získá se přesně x_0 , říkáme, že tato iterace *konverguje* k přesnému řešení. Stejně zajímavé je však zjištění, po kolika krocích n odchylka vypočteného x_n od přesné hodnoty x_0 je zaručeně menší než požadovaná přesnost, např. 10^{-5} (rychlost konvergence).

Hledání kořene.

Nechť je dána spojitá funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $I =]x_I, x_{II}[$, která právě v jednom vnitřním bodě x_0 nabývá nulové hodnoty. Bod x_0 nazveme *kořenem* funkce. U některých funkcí (např. lineární, kvadratické) lze kořen najít přímým výpočtem, u jiných (např. $y = \cos x - x$) nikoliv. Mezi nepřímými metodami zaujímají důležité místo metody iterační, neboť přesnost lze regulovat počtem kroků a snadno je lze interpretovat na samočinných počítačích. Uvedeme některé z nich.



Obr. 1

Prvé tři vycházejí z předpokladu, že funkční hodnoty v bodech napravo od x_0 jsou opačného znaménka než funkční hodnoty v bodech nalevo od x_0 . Kořen je vždy sevřen v otevřeném intervalu (x_L, x_P) , který se iteracemi zmenšuje, viz obr. 1. Pro první krok dosadí se $x_L = x_I$, $x_P = x_{II}$.

Zřejmě v každém kroku platí

$$f(x_L) \cdot f(x_P) < 0 \quad (1)$$

Společným rysem prvních tří metod je, že nejsou choulostivé na další vlastnosti funkce $f(x)$.

1. Metoda regula falsi (lineární interpolace) body $[x_L, f(x_L)]$, $[x_P, f(x_P)]$ proloží přímkou dle obr. 1 a její průsečík x_S s osou x

$$x_S = x_L - f(x_L) \frac{x_P - x_L}{f(x_P) - f(x_L)} \quad (2)$$

udává přibližnou hodnotu kořene. Zřejmě při platnosti (1) je x_S uvnitř intervalu (x_L, x_P) . Je-li $f(x_S)$ stejného znaménka jako $f(x_L)$, dosadíme x_S jako novou dolní mez x_L (v opačném případě jako novou horní mez x_P), čímž se interval pro kořen zkrátí. Po této úpravě intervalu (x_L, x_P) přikročíme k dalšímu kroku a prostřednictvím (2) získáme další hodnotu x_S . Postup lze libovolněkrát opakovat. Po každém kroku zjišťujeme, zda je výpočet ukončen. Je to buď tehdy, když $f(x_S)$ vyšlo menší než předem daná požadovaná přesnost pro y , nebo tehdy, když délka intervalu $|x_P - x_L|$ vyšla menší než předem daná požadovaná přesnost pro x . U funkce s vypuklým grafem dle obr. 1. zůstává jedna mez stále tatáž, z čehož plyne jednak to, že velikost intervalu nekonverguje k bodu, jednak to, že k zastavení dojde vždy jen z první příčiny. Konvergence x_S k x_0 je však za uvedených předpokladů zaručena.

2. Metoda půlení intervalu k daným x_L, x_P najde

$$x_S = \frac{1}{2} (x_L + x_P) \quad (3)$$

a funkční hodnotu $f(x_S)$. Je-li tato stejného znaménka jako $f(x_L)$, dosadíme x_S jako novou dolní mez x_L pro další krok (v opačném případě jako novou horní mez x_P). Interval (x_L, x_P) se tím zmenšil na poloviční, takže po n krocích má předem známou délku $(x_{II} - x_I) \cdot 2^{-n}$, což je výhodné oproti první metodě. Též i to, že u funkce s vypuklým grafem hodnotě x_0 neblížíme se pouze z jedné strany, takže k zastavení výpočtu může dojít z obou uvedených důvodů. Pro docílení přesnosti 10^{-k} pro x je třeba učinit n kroků, kde

$$n \geq \frac{k + \log(x_{II} - x_I)}{\log 2} > n - 1 \quad (4)$$

Je zajímavé, že ke stejnému postupu vede jiná úvaha. Označíme znaménko funkční hodnoty $f(x)$ jako $\text{sgn}[f(x)]$. Zvolíme hodnotu $x_1 \in I$, pevnou část intervalu Δx ($0 < \Delta x < x_{II} - x_I$) a kvocient q ($0 < q < 1$). Pak přesnější hodnotu kořene budeme určovat stále z podmínky

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \cdot q^n \cdot \text{sgn}[f(x_n)] \cdot \text{sgn}[f(x_I)] \quad (5)$$

Prakticky to znamená, že přírůstek veličiny x se geometrickou posloupností zmenšuje a má vždy takové znaménko, aby směřoval dovnitř naposledy stanoveného intervalu (x_L, x_P) od naposledy vypočtené meze tohoto intervalu. Aby bylo možno posloupností obsáhnout libovolný bod intervalu (x_L, x_P) , musí být $q \geq \frac{1}{2}$. Z důvodu rychlosti konvergence volíme $q = \frac{1}{2}$. Abychom nepřekročili definiční obor, volíme $x_1 = \frac{1}{2}(x_I + x_{II})$, $\Delta x = \frac{1}{4}(x_{II} - x_I)$. Při této volbě však metoda početně splývá s předešlou.

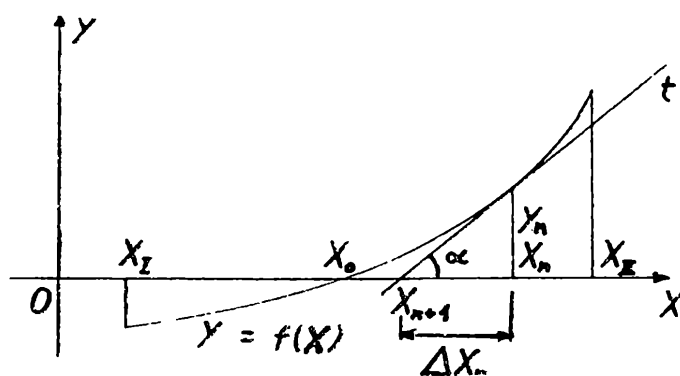
3. Metoda skokového zdrobňování přírůstku x . Interval I rozdělíme na a stejných dílů (a celé ≥ 2) a zvolíme

$$\Delta x = \frac{1}{a}(x_{II} - x_I), \quad x_1 = x_I$$

Dále určujeme postupně $f(x_1), x_2, f(x_2), x_3, \dots$ s pomocí

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad (6)$$

tak dlouho, až funkční hodnota změní znaménko. V tom okamžiku změníme původní hodnotu Δx na $-\frac{\Delta x}{a}$ a tuto v dalším považujeme za Δx . Pak pokračujeme ve stejném postupu opět dle (6). Po opětovné změně znaménka funkční hodnoty znovu přírůstek Δx vynásobíme $-\frac{1}{a}$, atd. Postup opakujeme do dosažení přesnosti. Zřejmě v nejnepríznivějším případě po $n \cdot a$ krocích — v nejpríznivějším po n krocích docílíme přesnosti $(x_{II} - x_I) \cdot a^{-n}$ pro x . I když zvolíme a co nejmenší ($a = 2$), počet kroků je v obecném případě vyšší než u minulé metody. Konvergence je však i u této metody zřejmá.



Obr. 2

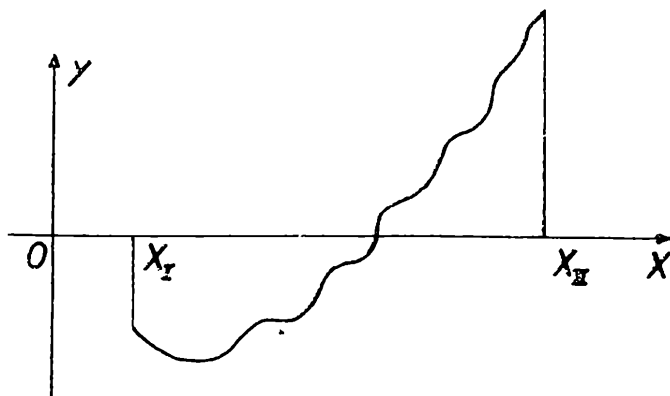
4. Metoda Newtonova (tečnová) předpokládá funkci $f(x)$, u níž dovedeme v každém bodě $x_n \in I$ najít derivaci $f'(x_n)$, udávající směrnici tečny ke grafu v bodě x_n , viz obr. 2. Subtangentu Δx_n plyne z podmínky

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{\Delta x_n} \quad (7)$$

Za přibližnou hodnotu kořene považujeme průsečík tečny t s osou x , tj.

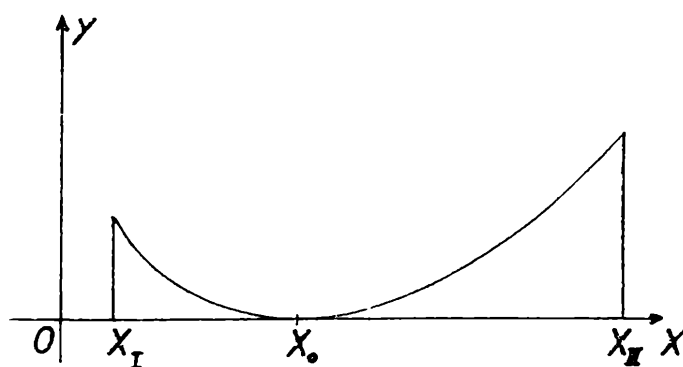
$$x_{n+1} = x_n - \Delta x_n \quad (8)$$

Postup začneme ze vhodného bodu intervalu I a můžeme opět libovolněkrát opakovat, při čemž výsledek předcházejícího kroku je výchozím bodem pro krok příští. Je však navíc třeba hlídat konvergenci (vybočení



Obr. 3

z definičního oboru, zvětšování funkčních hodnot), která závisí na vlastnostech funkce $f(x)$. Např. pro funkci dle obr. 3. metoda selhává, vede však k cíli u funkce dle obr. 4. Konverguje-li metoda u dané funkce s daným výchozím bodem, pak oproti dřívějším metodám stačí mnohem menší počet kroků ke stejné přesnosti. Výpočet ukončíme po dosažení $f(x_s)$ menšího než předem daná požadovaná přesnost pro y .



Obr. 4

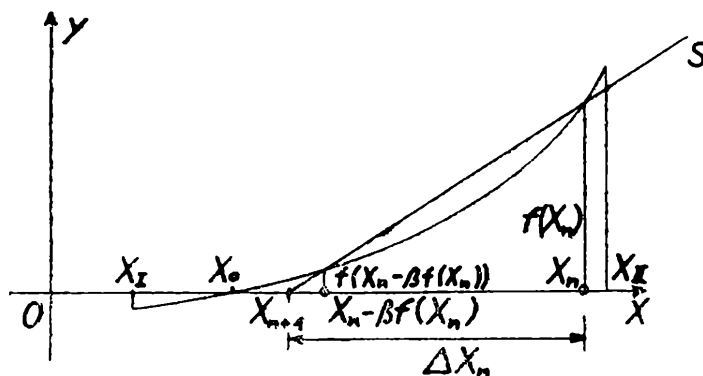
5. Steffensenův postup (tětivová metoda) nahrazuje Newtonovu sobtangentu „subsekantou“ dle obr. 5. Sečna se spojením bodů $[x_n, f(x_n)]$, $[x_n - \beta f(x_n), f(x_n - \beta f(x_n))]$ kde β je měřítko zabraňující, aby druhý bod nevybočil z intervalu I . Pak subsekanta Δx_n plyne z podmínky

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_n)}{\Delta x_n} = \frac{f(x_n - \beta f(x_n)) - f(x_n)}{-\beta f(x_n)} \quad (9)$$

a za přibližnou hodnotu kořene považujeme x_{n+1} dle (8). Předpokládáme-li konvergenci, tj. od jistého n

$$|f(x_n)| > |f(x_{n+1})| > |f(x_{n+2})| > \dots > f(x_0) = 0 \quad (10)$$

základna pro sečnu $\langle x_n - \beta f(x_n), x_n \rangle$ se zmenšuje k nule, blíží se tedy s rostoucím n tato metoda metodě Newtonově. Má proti ní i výhody, že při řádově stejném počtu kroků k docílení stejné přesnosti nepotřebuje derivaci a má méně omezujících požadavků na funkci $f(x)$. Ukončení výpočtu provede se stejným kritériem jako u metody předešlé. Kromě nultého kroku lze za β výhodně dosadit vždy $+\cotg \alpha$ vypočtené v minulém kroku.



Obr. 5

V této povšechné stati nebylo možno podrobně se zabývat omezujícími podmínkami pro funkci $f(x)$ resp. výchozí bod x_1 s ohledem na poslední dvě metody. Při „ručním“ výpočtu se zpravidla první tři metody kombinují s posledními, takže v posledních stupních se užívá Newtonova nebo Steffensenova metoda k upřesnění kořene. Při použití počítače je třeba metodu vybrat případ od případu. Záleží-li příliš na tom, aby funkčních hodnot se počítalo co nejméně (doba výpočtu příliš dlouhá), stojí zato přezkoumat vlastnosti funkce $f(x)$ a pokud možno zvolit 4. nebo 5. metodu.

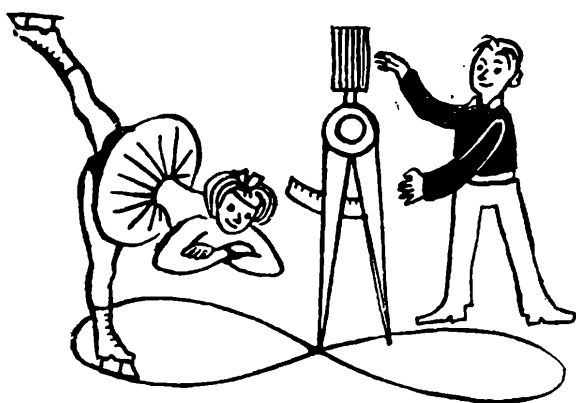
V tabulce I je proveden příklad nalezení kořene funkce $y = x^2 - 5x + 4$ v intervalu $\langle 0; 3 \rangle$. Tento příklad bylo možno řešit přímo jako kořen kvadratické rovnice, vyšlo by $x_0 = 1$. V tabulce značí p pořadové číslo kroku a F počet dosud spočítaných funkčních hodnot resp. včetně hodnot derivací. U posledních dvou metod vyšlo se z bodu $x_1 = 0$, neboť pro $x_1 \geq 2,5$ by metody vedly mimo definiční obor. U poslední bylo zvoleno $\beta = 0,1$. Třetí metoda zde početně splývá s druhou, přírůstek pravidelně střídá znaménka, proto není uvedena zvlášť. V tabulce II. je uvedeno totéž pro funkci $y = -\log x - 2 + x$ v intervalu $\langle 0,1; 3 \rangle$, x_1 bylo zvoleno 3, neboť pro $0 < x \leq \log 2,71828$ poslední dvě metody by nevedly ke správnému kořenu. Bylo použito $\beta = -1$.

Tabulka II. pokračování.

Newtonova metoda						Steffensonova metoda							
P	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δx	P	F	x_n	$f(x_n)$	$-f(x_n)$	$ f(x_n) - f(x_{n-1}) $	$tg\alpha$	Δx	P
	3	0,52287874	0,85523517	0,01138591		2	3	0,52287874	2,4771213	0,08317399	0,840931	0,62178581	2
1	2,3886141	0,01046810	0,81818140	0,01279434		4	2,3728421	0,00196321	2,3762510	0,00035866	0,817312	0,00240204	4
2	2,3758197	0,00000626	0,81720226	0,00000766		6	2,3782142	0,00000004	2,37581211	0,00000001			6
3	2,3758121	0,00000000				7							

Tabulka II. $y = -\log . - 2$

Regula falsi						Přímý intervalu					
P	x_L	x_P	$f(x_L)$	$f(x_P)$	P	P	x_L	x_P	$f(x_L)$	$f(x_P)$	P
1	0,1	3	-0,9	0,52287874	2	1	0,1	3	-0,9	0,52287874	2
2	1,9343095	3	-0,35221645	0,52287874	3	2	1,5500000	3	-0,64033170	0,52287874	3
3	2,3632385	3	-0,01026902	0,52287874	4	3	2,2750000	3	-0,08198140	0,52287874	4
4	2,3755033	3	-0,00025236	0,52287874	5	4	2,6375000	2,6375000	-0,08198140	0,21630754	5
5	2,3758045	3	-0,00000618	0,52287874	6	5	2,2750000	2,4562500	-0,08198140	0,06597744	6
6	2,3758119	3	-0,00000015	0,52287874	7	10	2,3656250	2,4562500	-0,00832089	0,06597744	7
	2,3758121	3	-0,00000000	0,52287874		25	2,3741211	2,3769531	-0,00138175	0,00093251	12
							2,3758121	2,3758122	-0,00000000	0,00000006	27



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Automatické kreslení

Doc. Ing. LADISLAV DRS, Praha

V posledním desetiletí se stále více nahrazuje ruční kreslení a rýsování automatickým kreslením na zvláštních kreslicích automatech (plottrech), řízených samočinnými počítači (computery). Je zjištěno, že automatický kreslicí stroj nahradí až třicet kvalifikovaných pracovníků, takže zavedením těchto strojů podstatně stoupla produktivita práce. A nejen to. Automatické kreslení umožňuje řešit i problémy, které vzhledem k pomalosti ručního kreslení byly dříve neřešitelné (kreslení hydrometeorologických map pro předpovídání počasí, problémy spojené s řízením družic aj.).

Účelem tohoto článku je seznámit čtenáře s podstatou činnosti automatických kreslicích strojů z geometrického hlediska.

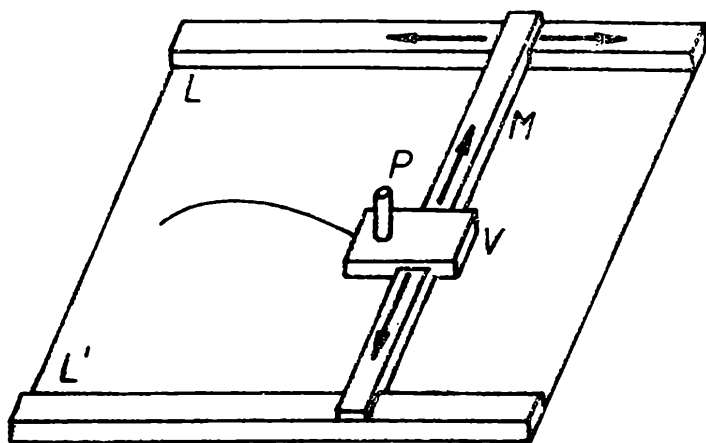
Kreslicí automaty můžeme rozdělit do dvou typů.

1. Stolový typ.

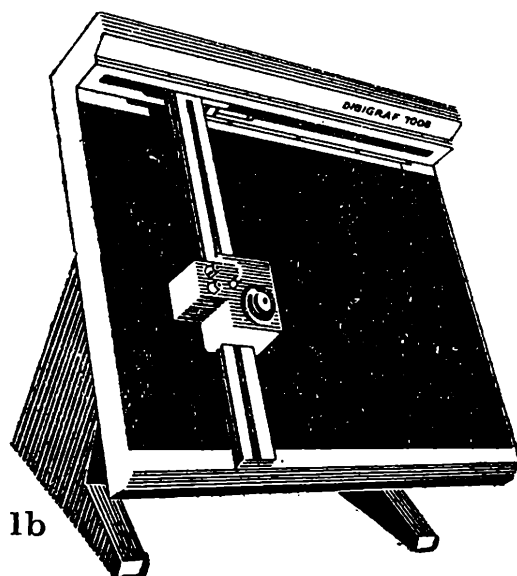
Stolový typ (obr. 1) vznikl automatisováním pohybů při rýsování na rýsovacím prkně. V podélném směru stolu se pohybuje „příložník“, most M , po dvou vodících lištách L , L' , upevněných na podélných stranách stolu. Po mostu M se posouvá vozík V v němž je upevněno kreslicí pero P . Pohyb mostu M po lištách L , L' , právě tak jako pohyb vozíku V po mostu M je řízen počítačem. Vhodné současné skládání obou pohybů umožňuje peru kreslit žádané čáry.

2. Bubnový typ.

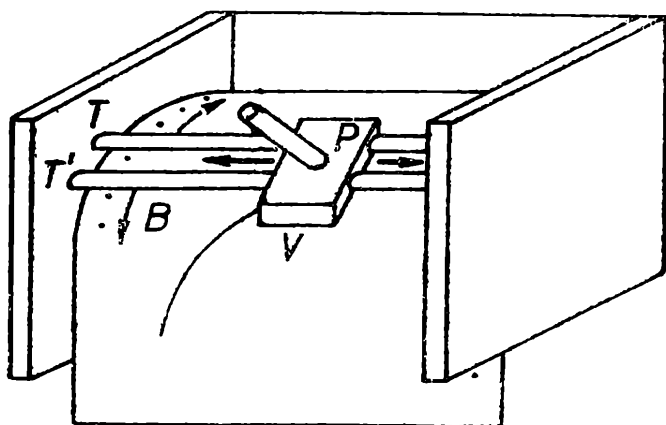
Bubnový typ se vyvinul z jiného zařízení. Jistě znáte automatické zapisovače tlaku vzduchu nebo teploty. Na plášť rotačního válce se svislou osou se navine milimetrový papír. Válec se rovnoměrně otáčí kolem své osy (na příklad jedna otáčka ze den) a pero se po něm pohybuje vzhůru (při zvyšování tlaku, teploty) a dolů (při snižování tlaku nebo



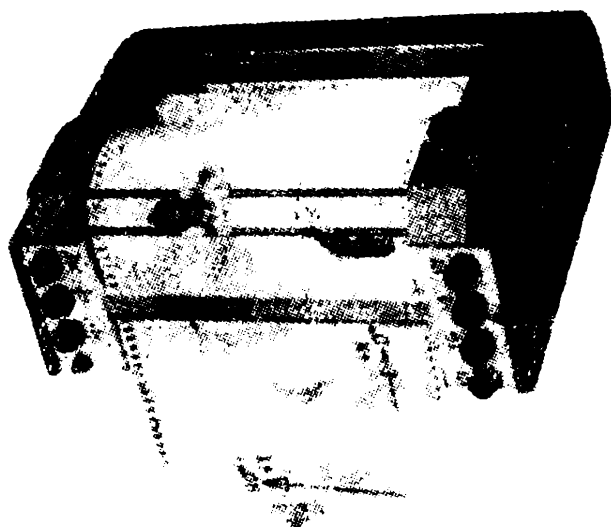
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 2a

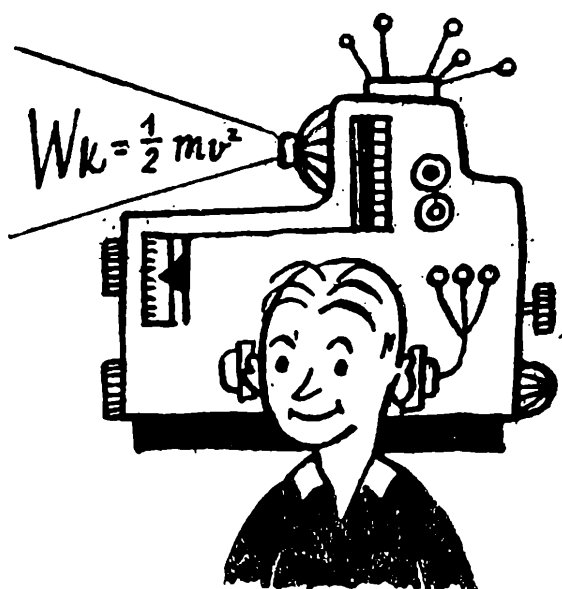


Obr. 2b

teploty) a psaním vytvoří na milimetrovém papíru graf průběhu tlaku nebo teploty během dne. Tento systém v podstatě přejala bubnové kreslicí automaty. Obr. 2. Role kreslicího papíru se odvíjí na buben B tvaru rotačního válce. Papír má po obou stranách otvory, do nichž přesně zapadají zuby bubnu. Buben s papírem se otáčí v obou směrech kolem své osy. Po vodících tyčích T, T' upevněných v bocích stroje se posouvá vozík V s perem P. Pohyb vozíku i bubnu řídí počítač. Vhodným složením jejich pohybů lze kreslit libovolné čáry.

V ČSR byly vyvinuty a vyrobeny automatické kreslicí stoly Digigraf (digi od slova digitální, tj. číslicový, tedy kreslicí stůl řízený číslicovým počítačem). Mají rozměry 800 × 1000 mm a 1200 × 1600 mm. Jejich přesnost je 0,1 mm a kreslí rychlostí 50–100 mm/sec. Kreslicí stroje bubnového typu se u nás nevyrábějí. Mají šířku role 300–800 mm a podobnou přesnost a rychlost jako Digigraf.

Příště se seznámíte se způsobem, jakým stroj kreslí.



FYZIKA

Nerelativistické pohyby elektrónu

PAVOL FERKO, PF Banská Bystrica

1. Zavedenie pojmu elektrické pole

V 19. storočí vystupuje vo fyzike do popredia dosť závažná otázka, stará niekoľko storočí, je to otázka štruktúry hmoty. Fyzici sa dôsledne pridržiavajú spojitosti štruktúry a atómová štruktúra hmoty sa používa ako pracovná hypotéza len v kinetickej teórii plynov. Až manželka Curieovci svojim objavom, ktorý ukázal, že atómy možno rozbiť, prispievajú k víťaznému atomizmu aj vo fyzike. Týmto však vzniká určité nedorozumenie. Hmotnosť je sústredená do bodov — atómov, a čo je medzi nimi? Vzájomné pôsobenie medzi týmito oddelenými objektami by sa muselo prenášať prázdny priestorom nejakým nevyspytateľným spôsobom.

Už M. Faraday siaha k pojmu poľa, aby prokázal známe ťažkosti s pôsobením sily na diaľku. Upúšťa od predstavy bezprostredného pôsobenia na diaľku a sústreďuje svoju pozornosť na priestor medzi elektrickými nábojmi a prúdmi. Dôsledne vykladá elektrické a magnetické pôsobenie fyzikálne reálnym pochodom, ktorý sa odohráva v priestore medzi elektrickými nábojmi alebo prúdmi. Zaviedol pojem elektrického poľa okolo náboja, ktoré pôsobí na iné náboje. Týmto sa vo fyzike dostávame k pojmu poľa.

V tomto smere účinne zasiahol Maxwell, ktorý nielen matematicky zdôvodnil myšlienky Faraday, ale tiež ich v mnohých veciach podstatne

doplnil. V celej svojej teórii dôsledne používa pojmu elektromagnetického poľa, ktoré je stálym spojením poľa elektrického a magnetického. Ak je však pozorovateľ v pokoji voči elektrickým nábojom, pozoruje len pole elektrické. Akonáhle sa pohybuje voči nábojom, alebo náboje sa pohybujú voči pozorovateľovi, prejavuje sa pole elektromagnetické.

Pojem elektromagnetického poľa je dnes vo fyzike bežný a o jeho existencii nie je pochybnosť. Moderná veda podáva stále dôkazy o jeho objektívnej realite. Potvrďuje sa názor, že elektromagnetické pole je formou matérie, ktorej pohyb sa riadi špeciálnymi zákonmi, odlišnými od zákonov platných pre neznámejší druh matérie — látku.

2. Elektrické pole

Elektrické pole sa často definuje ako priestor, v ktorom pôsobia elektrické sily. Táto definícia je ale v rozpore so skutočnosťou, lebo priestor neexistuje sám o sebe, ale je len formou existencie matérie. Pole je preto jednou z foriem matérie.

Elektrické pole je charakterizované silou pôsobiaceou na jednotkový náboj, ktorú nazývame intenzita elektrického poľa E a platí pre ňu vzťah

$$E = \frac{F}{Q}$$

Pričom Q značí elektrický náboj.

Je to veličina vektorovej povahy a preto má svoju veľkosť a orientovaný smer. Smer intenzity elektrického poľa v ľubovoľnom mieste je smer pôsobiaci na kladný skúšobný náboj umiestnený v danom mieste poľa. Sila, ktorou pole pôsobí na elektrón má opačný smer.

Medzi ľubovoľnými rôznymi dvoma bodmi A , B , ktoré ležia v elektrickom poli existuje rozdiel potenciálov. Rozdiel potenciálov medzi bodmi A , B nazývame napätie. Je definovaný vzťahom

$$\varphi_{AB} = - \int_A^B (E \, dr)$$

Po vyšetrení integrálu možno skalárny súčin vo výraze nahradiť úplným diferenciálom napätia:

$$(E \, dr) = dU$$

potom

$$\varphi_{AB} = - \int_A^B (E \, dr) = - \int_A^B dU = U_A - U_B$$

Pojem rozdielu potenciálov má zmysel len pre pole elektrostatické (nevírové), o ktorom budeme ďalej stále uvažovať.

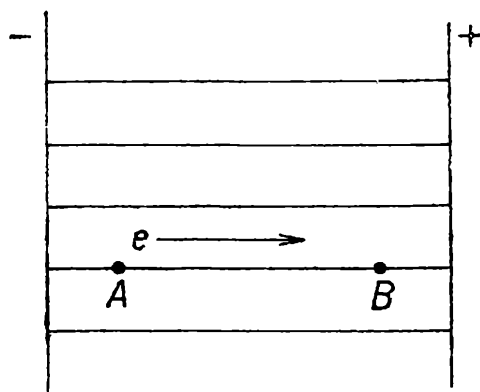
Sila pôsobiaca na elektrón s nábojom e v elektrickom poli je daná vzťahom

$$F = eE$$

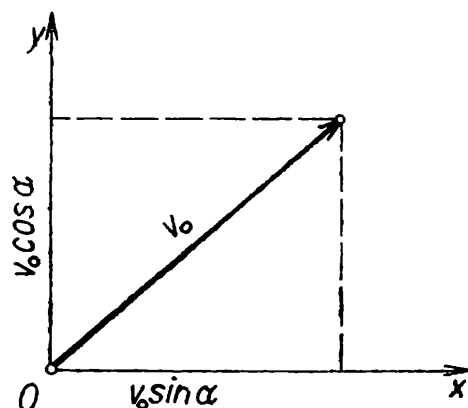
Potom práca vykonaná pri posunutí elektrónu z bodu A do bodu B vo vzdialenosti r je

$$A = e \int_B^A (E \, dr) = e\varphi_{AB}$$

Elektrické pole možno tiež určiť i jeho indukčnými účinkami. Vektor elektrickej indukcie D sa vo vákuu definuje ako elektrické množstvo indukované na jednotkovej ploche povrchu vodiča, kolmej ku smeru



Obr. 1



Obr. 2

intenzity poľa. V tejto polohe je indukovaný náboj najväčší. Medzi základnými veličinami E , D elektrického poľa vo vákuu platí lineárna závislosť

$$D = \varepsilon_0 E ,$$

kde ε_0 je konštanta zvaná permitivita vákua. Jej hodnota je

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2} .$$

Ak sa pole vzbudí v látkovom prostredí, potom súvislosť medzi vektormi E , D je iná — závislá na látke prostredia

$$D = \varepsilon E ,$$

kde ε je permitivita (dielektrická konštanta) prostredia, pre ktorú platí

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r ,$$

pričom ε_r je relatívna permitivita prostredia.

Doteraz sme uviedli všeobecné poznámky o elektrostatickom poli. Prejdime teraz na pohyby elektrónu, ktoré budeme vyšetrovať v homogennom elektrostatickom poli. Vyšetříme dva pohyby elektrónu: pohyb priečny a pozdĺžny. Najskôr to bude riešenie pomocou jednoduchých úvah, potom riešenie toho istého problému urobíme za pomoci trochu zložitejšieho matematického aparátu.

Pri skúmaní pohybu elektrónu v elektrickom poli si ho musíme trochu priblížiť a pri výpočtoch s ním jednáme ako so záporne nabitou časticou, ktorá sa vzhľadom na svoj záporný náboj bude pohybovať určitým spôsobom.

Pri popise tohto pohybu bude veľmi nutné prihliadať na rýchlosť pohybu. Budeme riešiť len pohyby elektrónu pri rýchlostiach ďaleko menších ako rýchlosť svetla. Riešenie bude jednoduchšie, lebo nemusíme brať do úvahy relativistické efekty. Teda v ďalšom budeme pojednávať o nerelativistických pohyboch elektrónu, ktoré sme už spomenuli.

3. Pohyby elektrónu v homogénnom elektrostatickom poli

a) Pohyb priečny

Uvažujeme priečny pohyb elektrónu v homogennom elektrostatickom poli, ktorého smer pohybu je kolmý na siločiar elektrického poľa. Predpokladajme, že pohyb sa deje v rovine (x, y) . Urobme riešenie jednoduchou úvahou. Orientujme pohyb elektrónu v smere osi y . Na elektrón pôsobí pole silou $\vec{F} = e\vec{E}$. Ak sa elektrón pohybuje vo vákuu, udeľuje mu táto sila zrýchlenie $a = \frac{eE}{m_e}$. Smer tohoto zrýchlenia je opačný vzhľadom k smeru elektrických siločiar.

Ak elektrón mal počiatočnú rýchlosť v , potom po uplynutí doby t od okamžiku vystrelenia bude jeho poloha v pravouhlej sústave súradníc určená súradnicami x, y . Pre určenie týchto súradníc postupujeme analogicky ako pri vodorovnom vrhu:

$$y = v_0 t$$

$$x = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} t^2$$

Vylúčením parametra t dostávame rovnicu

$$x = \frac{eEy^2}{2m_ev_0^2},$$

čo je rovnica paraboly — dráha elektrónu.

Z rovnice vidieť, že elektrón sa odchyľuje od pôvodného smeru tým ďalej, čím je väčšia intenzita poľa. Tiež jeho počiatočná rýchlosť má vplyv na túto odchýlku.

Výsledná rýchlosť je dotyčnicou paraboly v tom-ktorom bode dráhy. Možno ju rozlíšiť na zložku horizontálnu a vertikálnu. Potom na základe poznatkov o vektoroch možno určiť jej veľkosť

$$v = \sqrt{v_0^2 + (at)^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eE}{m_e} t\right)^2}$$

Urobme riešenie toho istého pohybu použitím matematickej analýzy. Sila, ktorou pôsobí elektrostatické pole na elektrón je

$$F = eE$$

Podľa druhého Newtonova zákona silu F možno vyjadriť

$$F = m_e \cdot a.$$

Zrýchlenie dá sa vyjadriť ako prvá derivácia rýchlostí, alebo ako druhá derivácia polohového vektora r (alebo ako druhá derivácia dráhy) podľa času

$$a = v = \ddot{r}$$

Po dosadení do základnej rovnice dostávame $m_e r = \ddot{eE}$, čo sa dá zapísať

$$\text{ako } m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = eE.$$

Ak uvažujeme, že v čase $t = 0$ je rýchlosť elektrónu $v = 0$ a pohyb sa koná v rovine x, y tak, že orientujeme pole v smere osi x , dostávame pohybovú rovnicu v súradnicovom tvare

$$\begin{aligned} m_e \ddot{x} &= eE \\ m_e \ddot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Ak mal elektrón počiatočnú rýchlosť $\tilde{v}_0$ orientovanú pod uhlom α k osi y a nachádzal sa v súradnicovom počiatku, integrovaním pohybovej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{e}{m_e} Et + v_0 \sin \alpha \\ \dot{y} &= v_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

Po ďalšom integrovaní:

$$\begin{aligned} x &= \frac{et^2 E}{2m_e} + (v_0 \sin \alpha)t \\ y &= (v_0 \cos \alpha)t \end{aligned}$$

Vylúčením parametra t z rovnice pre x a y dostávame rovnicu dráhy

$$\begin{aligned} t &= \frac{y}{v_0 \cos \alpha} \\ x &= \frac{eEy^2}{2m_e(v_0 \cos \alpha)^2} + \frac{yv_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \\ x &= y \operatorname{tg} \alpha + \frac{eEy^2}{2m_e(v_0 \cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

čo je rovnica paraboly, ako sme už predtým vypočítali. Zistili sme, že elektrón sa pri svojom priečnom pohybe v homogénnom elektrostatickom poli pohybuje po parabole. Homogénne elektrostatické pole má na pohybujúci sa elektrón fokusujúci vplyv.

b) Pohyb pozdĺžny

Uvažujme, že elektrón sa pohybuje v homogénnom elektrostatickom poli, ktoré má intenzitu E v smere rastúceho potenciálu. Predpokladajme, že rýchlosť elektrónu v okamžiku, keď predchádza bodom A , ktorý má potenciál φ_1 je v_1 , v bode B , ktorý má potenciál φ_2 je rýchlosť v_2 . Preto, že elektrón pri svojom pohybe proti siločiaram elektrického poľa zväčšuje svoju rýchlosť, to znamená, že $v_2 > v_1$, je jeho kinetická energia v bode B väčšia ako v bode A .

Prírastok kinetickej energie elektrónu vypočítame z rovnice

$$\Delta W_k = e \int_A^B (E \, dr) = e\varphi_{AB}$$

pričom φ_{AB} je rozdiel potenciálov, čo je napätie, teda

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = U$$

Potom po dosadení dostávame

$$\Delta W_k = e\varphi_{AB} = e(\varphi_A - \varphi_B) = eU$$

To znamená, že elektrón pri pozdĺžnom pohybe homogénnym elektrostatickým poľom z bodu A do bodu B získa energiu eU . Ak elektrón pri svojom pohybe neprekoná žiadne prekážky (ak sa pohyb deje vo vákuu), prejaví sa tento prírastok energie zväčšením jeho kinetickej energie:

$$\frac{1}{2}m_e(v_2^2 - v_1^2) = eU$$

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU$$

z čoho

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m_e} U}$$

Urobme riešenie toho istého pohybu za použitia matematickej analýzy.

Zvoľme si smer pohybu elektrónu totožný so smerom intenzity poľa, a to v smere osi x . Potom $E = E_x$, $E_y = E_z = 0$. Sila poľa pôsobiaca na elektrón je $F = eE$. Za použitia druhého pohybového zákona, po úprave a dosadení do uvedenej rovnice (pozri riešenie pri priečnom pohybe) dostávame skalárnu pohybovú rovnicu

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = eE$$

alebo v inom vyjadrení

$$m_e \frac{dv}{dt} = eE$$

Po vynásobení tejto rovnice s v a ďalšej malej úprave dostávame

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_e v^2}{2} \right) = eEv$$

Vzhľadom na podmienku, že $E = E_x$ môžeme zapísať

$$E = - \frac{d\varphi}{dx}$$

Potom

$$Ev = - \frac{d\varphi}{dx} \quad v = - \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = - \frac{d\varphi}{dt}.$$

Po dosadení do predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_e v^2}{2} \right) = -e \frac{d\varphi}{dt},$$

alebo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_e v^2}{2} + e\varphi \right) = 0$$

Riešením tejto rovnice dostávame zákon zachovania energie v tvare

$$\frac{m_e v^2}{2} + e\varphi = \text{konšt.}$$

kde súčin $e\varphi$ znamená potenciálnu energiu elektronu v danom bode poľa, kde je potenciál rovný φ .

Ak sa elektrón v poli pohybuje, to znamená, že sa mení jeho poloha v poli, a každej polohe je priradený určitý potenciál poľa. Ak predpokladáme, že sa elektrón začal pohybovať z bodu s potenciálom φ_1 do bodu s potenciálom φ_2 , potom rozdiel týchto potenciálov $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, čo je napätie.

Potom zákon zachovania energie v bodoch s rôznymi potenciálmi nadobude tvar

$$\frac{m_e v_1^2}{2} + e\varphi_1 = \text{konšt.}$$

$$\frac{m_e v_2^2}{2} + e\varphi_2 = \text{konšt.}$$

Na základe zákona o zachovaní energie môžeme zapísať:

$$\frac{m_e v_1^2}{2} + e\varphi_1 = \frac{m_e v_2^2}{2} + e\varphi_2$$

a po úprave

$$\frac{m_e v_2^2}{2} - \frac{m_e v_1^2}{2} = e(\varphi_1 - \varphi_2) = eU$$

Za predpokladu, že $v_1 = 0$ dostávame

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU ,$$

z toho

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m_e} U} ,$$

čo súhlasí už s uvedeným vzťahom.

Vyvodili sme vŕah pre výpočet rýchlosti elektrónu pri pozdĺžnom pohybe v homogénnom elektrostatickom poli. Keď do nej dosadíme mer-
ný náboj elektrónu

$$\frac{e}{m_e} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1} ,$$

rýchlosť elektrónu v tomto poli bude

$$v = \sqrt{2 \cdot 1,759 \cdot 10^{11} \cdot U} = 5,93 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{U} [\text{ms}^{-1}] .$$

Ak je napr. napätie medzi katódou a anódou diódy $U = 100 \text{ V}$, do-
siahne potom elektrón v tesnej blízkosti anódy rýchlosť $v = 5930 \text{ km s}^{-1}$.

Literatúra:

- [1] FUKA, J. - HAVELKA, B.: Elektromagnetické pole. Praha, 1958
- [2] ŠPOLSKIJ, E. V.: Atomová fyzika I. Praha, 1957
- [3] MAREK, J.: Atomová fyzika pro 3. ročník střední průmyslové školy
jaderné techniky. Praha, 1964

Oprava. V tabulke na str. 139 v řádku ČSSR patří do 1 sloupce pro po-
čet třetích cen.

Z historie mezinárodní soustavy jednotek (SI)

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Mezinárodní soustava jednotek, krátce označovaná jako SI (což je zkratka z francouzského *Système — International d'Unités*) nabývá celosvětově stále větší důležitosti a postupně proniká do všech oblastí lidské činnosti. Letos tomu bude 23 let, co nejvyšší orgán Mezinárodní organizace vah a měr, kterou je Generální konference vah a měr (byla to konkrétně 9. Gen. konference v r. 1948), rozhodl, aby jí podřízený Mezinárodní výbor vah a měr se zabýval problémem vytvoření praktické soustavy měrových jednotek. Přitom se mělo vycházet z výsledků široké ankety, písemné dotazníkové akce, při níž se měl výbor seznámit s míněním a zkušenostmi význačných vědeckých, technických a pedagogických kruhů z různých zemí. Soustava měla být určena pracovištím všech zemí, které podepsaly tzv. Metrickou konvenci.

9. Generální konference vah a měr stanovila již řadu jednotek se zvláštními názvy a kromě toho obecné principy pro značky jednotek. Následující 10. Generální konference vah a měr, která se konala v roce 1954 stanovila šest základních veličin spolu s jejich hlavními jednotkami jako základ budoucí mezinárodní soustavy jednotek. Byly to tyto veličiny: délka, hmotnost, čas, elektrický proud, termodynamická teplota a svítivost. Název nové soustavy, tak jak byl uveden na počátku, byl přijat v roce 1960 na 11. Generální konferenci vah a měr. Současně tato konference stanovila pravidla pro tvorbu násobných a dílčích jednotek (vytvářených zpravidla) z jednotek hlavních (případně základních) a řadu jednotek odvozených veličin. Kromě toho stanovila také tzv. jednotky doplňujících veličin (k nimž patří rovinný a prostorový úhel), tj. takových, jež nebyly zařazeny s konečnou platností ani mezi veličiny základní, ani mezi veličiny odvozené.

Následující 12. Generální konference vah a měr v roce 1964 rozšířila počet předpon pro dílčí jednotky (femto a atto*) a prostřednictvím Mezinárodního výboru vah a měr připravuje novou definici jednotky času. Definitivně pak novou definici sekundy schválila 13. Generální konference vah a měr v roce 1967 a 1968 (konference měla dvě zasedání). Současně byla schválena nová definice jednotky termodynamické teploty (kelvinu) a svítivosti (kandely). Rovněž byl doplněn seznam již dříve stanovených jednotek odvozených veličin a několik dalších a byla vzata na vědomí nová Mezinárodní praktická teplotní stupnice (značená podle data konference jako EIPT 1968 nebo českou zkratkou MPTS 1968).

V letošním roce 1971 bude SI dále doplněna a zpřesněna. O tom si krátce pojednáme v některé příští informaci k tomuto tématu.

Poznámka redakce. femto = 10^{-15} jednotek (od švédského slova „fem-ton“ = 15); atto = 10^{-18} jednotek (od švédského slova aderton, čteno aten = 18).

Doplňkové jednotky SI

Ing. dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Doplňkové (doplňující) jednotky jsou jednotky těch veličin, o nichž dosud Generální konference vah a měr nerozhodla, zda mají být připojeny k veličinám základním nebo veličinám odvozeným. Tyto jednotky SI jsou zařazovány do třetí třídy. Lze je používat jako jednotky základní nebo jednotky odvozené.

Tato třída jednotek obsahuje dnes pouze dvě čistě geometrické jednotky SI: jednotku rovinného úhlu (radián) a jednotku prostorového úhlu (steradián). O doplňkových jednotkách pojednává 2. usnesení 11. Generální konference vah a měr z roku 1960. Značkami obou zmíněných jednotek SI je rad, resp. sr. Jejich definice zní takto:

Radián je rovinný úhel sevřený dvěma radiálními paprsky (poloměry, rameny úhlu), které vytínají na obvodě kruhu oblouk stejné délky, jako je poloměr.

Steradián je prostorový úhel, který s vrcholem ve středu koule, vytíná na povrchu této koule plochu velikosti čtverce o straně rovné délce poloměru koule.

Obě tyto definice obsahuje doporučení ISO R31, 1. část, 2. vydání, z prosince 1965.

Doplňkové jednotky se používají (obdobně jako jednotky základní) při tvorbě odvozených jednotek.

Uvedme si několik příkladů:

veličina	název jednotky SI	značka jednotky SI
úhlová rychlost	radián za sekundu	rad . s ⁻¹
úhlové zrychlení	radián za sekundu na druhou	rad . s ⁻²
zářivost	watt na steradián	W . sr ⁻¹ = = m ² kg . s ⁻³ sr ⁻¹
zář	watt na metr čtverečný a steradián	W m ⁻² sr ⁻¹ = = kg s ⁻³ . sr ⁻¹

Poznámka. Bylo by možno ovšem uvést ještě řadu příkladů jiných, uvádíme však pouze ty, které jsou obsaženy v informativní publikaci Mezinárodního úřadu vah a měr. Stejnou zásadou se hodláme řídit i u dalších informativních článků věnovaných SI.

Historický vztah mezi fyzikou a technikou

MILOSLAV KRUŽÍK

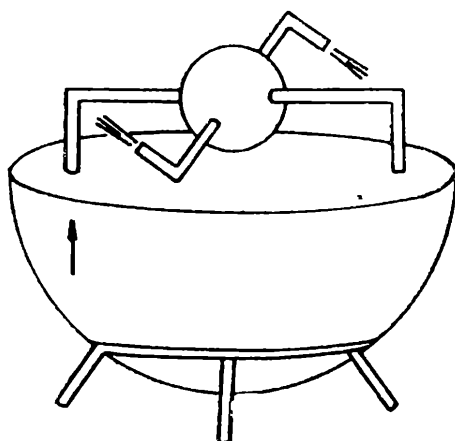
Pro vědu 18. století je charakteristická idea jednoznačnosti, určité a přesně stanovené závislosti jedněch jevů na druhých. Průmyslová revoluce 18. století byla užitím klasické mechaniky v tom smyslu, že výpočet strojů a motorů spočíval v řešení jednoduchých mechanických úloh. Avšak poznání činnosti parního stroje nebylo možno provést čistě mechanickými výpočty. Bylo nutno použít fyzikálního pokusu. Pára vytváří z fyziky experimentální vědu. Fyzikální pokusy se prováděly i dříve. Byly však sporadické a byly odděleny od průmyslu. V 19. století fyzikální pokusy odpovídají na bezprostřední otázky techniky, nejdříve na výrobu a využití parních strojů a koncem století v rostoucí míře na otázky praktické elektrotechniky.

Pokusy ukázaly, že skutečnou zákonitost přírody nelze vždy vyjádřit jednoduchými mechanickými schématy. Zákony mechaniky byly experimentálně prokázány pro určitý okruh jevů. Descartes tvrdí, že tyto zákony jsou univerzální a přenáší je do libovolné oblasti. Newton ohraničuje jejich působnost na oblast, kterou je možno pokusně prověřit a velmi neochotně se vyjadřuje o mikrokosmu nebo éteru.

V počátečním období po objevení parního stroje nebyla otázka jeho účinnosti a hospodárnosti bezprostředním cílem jeho konstrukčního zlepšení. Parní stroj osvobodil průmysl od nutnosti stavět továrny u řek, a to opravňovalo jeho použití. Teprve při rozšíření parního stroje se stává spotřeba paliva kritériem pro určení vhodného typu. Bylo třeba porovnat jednotlivé konstrukce s ideálním strojem. Teorie tepelných motorů zaostávala za praxí. Bylo nutno řešit otázku, kterou parní stroj předložil fyzice: „Je omezená nebo nekonečná hybná síla ohně? Existuje určitá hranice pro zdokonalení parního stroje nebo žádné omezení neexistuje?“

Na tuto otázku odpovídá francouzský inženýr Sadi Carnot (1796 až 1832) ve své geniální práci: „Úvahy o hybné síle ohně“, která byla vydána v r. 1824. Carnot se vyjadřuje o základním rozdílu mezi mecha-

nickými a tepelnými motory slovy: „Stroje, které nejsou uváděny do pohybu teplem, u nichž je zdrojem pohybu síla člověka nebo zvířat, spád vody nebo vítr, mohou být prozkoumány do nejmenších podrobností prostřednictvím teoretické mechaniky. Všechny možné případy jsou předvídány, všechny možné pohyby zobecněny v principy, kterých je možno použít ve všech případech. Podobná teorie zřejmě chybí u parních strojů. Nelze ji vytvořit, pokud zákony fyziky nebudou dostatečně rozšířeny a zobecněny, aby bylo možno předem určit výsledky působení daného množství tepla na libovolné těleso.“ (S. Carnot: Úvahy o hybné síle ohně, str. 19, Moskva, ruský překlad.)



Obr. 4

Původní Carnotova koncepce byla mechanická v tom smyslu, že cyklus tepelného stroje se podobá cyklu vodního motoru. Tepelný motor pracuje na stejném principu jako vodní motor, jenom voda je zaměněna tepelným prostředím a rozdíl vodních hladin teplotou. Tíha vody násobená spádem je ekvivalentní živé síle, jak podle Leibnitze byl nazýván součin $m v^2$. Název energie ve smyslu dynamické proměnné s rozměrem Leibnitzovy živé síly zavedl do fyziky počátkem 19. století Joung. Násobek množství tepla a rozdílu teplot je ekvivalentní práci, kterou vykoná tepelný stroj.

Další výzkumy přivedly Carnota k zamítnutí tohoto nesprávného předpokladu. V zápisech, které byly nalezeny po jeho smrti, je jasně vysloven zákon zachování energie a číselně určen mechanický ekvivalent tepla. Carnot dokazuje, že vznik hybné síly v parním stroji není spojen se skutečnou ztrátou tepla, ale s přechodem tepla z teplejšího tělesa na chladnější těleso, to jest se vznikem tepelné rovnováhy. Teplo je nezničitelnou substancí. Podle Carnotova principu nestačí jen určité množství tepla, aby byl vytvořen tlak hybné síly. Je nutno ještě získat chlad, bez něhož by bylo teplo bezcenné. Všude, kde existuje rozdíl teplot, kde je možno docílit tepelné rovnováhy, je možno získat hybnou sílu. Vodní pára je jedním z prostředků k přenosu této síly, ale není jediným. Všechna tělesa, která působením tepla mění objem,

jsou schopna při změně objemu překonávat odpor a tak dát vznik hybné síle.

Avšak je možný i obrácený děj. Použitím mechanické energie je možno získat rozdíl teplot a narušit tepelnou rovnováhu. Příkladem může být úder, tření těles, stlačení plynu nebo páry. Tak je možno vytvořit obrácený cyklus. U prvního cyklu při přechodu tepla z tělesa A na těleso B získáme mechanickou práci. Během druhého cyklu se vrací teplo z tělesa B na těleso A. Jestliže však v obou cyklech použijeme stejného množství páry a zanedbáme ztráty, pak množství práce a množství tepla bude v obou případech stejné. Kdyby bylo možno získat při přechodu tepla z ohřívače na chladič více mechanické práce než u ideálního cyklu parního stroje, bylo by možno část této práce použít na zpětné vrácení tepla z chladiče na ohřívač, obnovit tak původní stav a tepla znovu použít k získání mechanické práce. Carnot praví, že podobný děj zcela odporuje zákonům mechaniky i fyziky. Vidíme, že pro Carnota je nemožnost perpetua mobile základním axiomem.

Hluboké myšlenky Carnotovy však nebyly jeho současníky oceněny a jeho spis zůstal bez povšimnutí. Pozornost francouzské Akademie byla tehdy soustředěna na otázky optiky a elektrodynamiky.

Zvláště velký význam na pronikání vědy do průmyslu měla elektrotechnika. Řešení tak složité úlohy, jako např. telegrafování pomocí transatlantického kabelu, bylo nemyslitelné bez účasti fyziků. Fyzikové se živě zajímali o problémy elektrického osvětlení, o přenos elektrické energie, inženýři-elektrotechnici byli nuceni zajímat se o zákony elektromagnetismu a o problémy elektrických měření. Technika dodávala fyzice nové, dokonalejší prostředky k provedení pokusů, ale současně ukládala takové úkoly, které nebylo možno řešit dřívějšími metodami práce fyzika. Dříve fyzik pracoval samostatně a vystačil s nejjednoduššími prostředky. Připomeňme si fyzikální výzbroj Faradaye: cívky drátu, kousky železa, magnetické střelky. Michael Faraday (1791 až 1867) také nezaložil svou fyzikální školu. Newton a vynikající astronom Herschel sami vyráběli své reflektory, sami stříbřili zrcadla. Takový stav se udržel až do druhé poloviny 19. století. Joseph John Thomson vzpomíná v r. 1931, že v Anglii před (60 až 70) lety nebyly skutečné fyzikální laboratoře. Laboratoři Williama Thomsona (1824—1907) byla malá místnost sousedící se sklepem na uhlí. James Prescott Joule (1818—1889) prováděl své vynikající pokusy ve svém domě v Manchesteru. George Gabriel Stokes (1819—1903) konal své pokusy z optiky za stejných podmínek jako před 150 lety Isaac Newton.

Koncem 19. století si však technika vynutila nové formy práce ve fyzice. V silné kapitalistické konkurenci nebylo možno čekat na výsledky vědeckého bádání jednotlivých, třeba i geniálních osobností. Byla nutná nová organizace vědeckého výzkumu, nové tempo rozvoje.

Vznikají nové, bohatě vybavené vědecké laboratoře a fyzikálně technické instituty, vedené vynikajícími teoretickými fyziky, jako byl Maxwell (1831—1879), Helmholtz (1821—1894) a Boltzmann (1844—1906). Velké podniky zhotovují pro fyzikální laboratoře fyzikální vědeckou aparaturu. Jakmile byla objevena spektrální analýza a nastal rozvoj elektrotechniky, pak na fyziku nikdo nelitoval peněz. James Dewar (1842—1923) vypracoval metodu získání vakua, pro kterou průmysl dodal dokonalé zařízení. Jestliže věda pomáhala budovat průmysl, zde technika pomohla vědě. Vakuum získané dokonalými vývěvami bylo velmi důležité při studiu elektricky nabitých částic. Vedlo k objevu elektronů. Jako příklad spolupráce fyziky s technikou je možno uvést i činnost Ernesta Abbeho (1840—1905), syna tkalce, který se ve 30 letech stal profesorem teoretické fyziky v Jeně. Společně s univerzitním mechanikem Karl Zeissem založili optickou dílnu, která měla dobrý vědecký základ. Abbe vypracoval novou dokonalou recepturu, nové konstrukce přístrojů, které založily světovou slávu firmy. Ze zisků továrny byl vybudován fyzikální institut v Jeně.

V honbě za dosažením praktických výsledků nelze zanedbávat rozvíjení vlastní teorie. Vynikající teoretický fyzik Boltzmann dokazuje, že teorie vyhrává v přesném zobrazení přírody a že je možno říci, že teorie zvítězila nad světem. Tvořivá teoretická abstrakce se stala mohutnou silou. Jako příklad uvádí Eifelovu věž, která nestojí pevně pouze proto, že je vybudována z oceli. Jejím pevnějším základem je teorie pružnosti. Jiným příkladem spolupráce teoretických a praktických fyziků jsou objevy v oblasti atomové fyziky. Kdyby američtí učenci chtěli uskutečnit své vynikající technické úspěchy bez evropské pomoci, pak by v r. 1945 atomová bomba neexistovala, neboť počátky těchto úspěchů byly položeny v Evropě: Rutherford (Anglie), Einstein (Německo), Fermi (Itálie), Joliot-Curie (Francie), Hahn a Strassmann (Německo), Bohr (Dánsko). Robert Oppenheimer, americký fyzik, který vedl skupinu vědců pracujících na výrobě první atomové bomby v Los Alamos, skončil svá univerzitní studia v r. 1927 v Göttingen. Je třeba zdůraznit, že samotná experimentální fyzika bez jakéhokoli spojení s teoretickou fyzikou představuje velmi ohraničenou vědu, která nedostatečně vysvětluje fyzikální jevy. Opačně teoretická fyzika bez experimentální fyziky je jednostranná a neplodná. Vybudování teorie přírodních jevů není užitečné, pokud se pokusem neseznámíme s těmito jevy.

Základem rozvoje teoretické fyziky byla Maxwellova teorie elektromagnetického pole. Zde se poprvé zvláště význačně projevíly přednosti prohloubeného přístupu k fyzikálním jevům. James Clark Maxwell sám zdůraznil, že jeho cílem není vytvořit jakoukoli teorii v té oblasti vědy, ve které neprovedl téměř ani jednoho pokusu, a že jeho úlohou je

pouze ukázat, jak bezprostředním použitím idejí a metod Faradaye mohou být nejlépe vysvětleny vztahy mezi jeho jednotlivými objevy. I když pro mnohé tehdejší fyziky byl Maxwellův „Traktát o elektríně a magnetismu“ knihou uzavřenou „sedmi pečeti“, není Maxwellova teorie matematickou teorií. Je to hluboká fyzikální teorie, která odkrývá pro vědu strukturu elektromagnetického pole. Jak nově zapůsobila Maxwellova teorie na pojetí tehdejší fyziky, dokazuje jednání samého Boltzmann, který ještě v r. 1891 uvádí své přednášky o Maxwellově teorii veršem z Göthova Fausta: „So soll ich denn mit saurem Schweiss Euch lehren, was ich selbst nicht weiss.“ William Thomson do konce svého života neuznával Maxwellovu teorii a zvláště ne tlak světla.

Koncem 19. století stále složitější přístroje pomáhají objasnit podstatu hmoty. Překonávají nedokonalost našich smyslů, odkrývají nové formy pohybu hmoty, které nemůžeme bezprostředně vnímat svými smysly. Náhornou ukázkou jsou Hertzovy pokusy, které dokazují existenci elektromagnetických vln. Bezprostřední spojení fyziky s technikou se stává zvláště zřetelným ve 20. století. Vynález radiopřijímače vedl k vytvoření celé nové oblasti fyziky, která má bezprostřední vliv na celou řadu nových oblastí techniky. Jaderná fyzika se začala významně rozvíjet teprve tehdy, když bylo možné praktické využití jaderné energie. V naší době je jaderná fyzika bezprostředně spojena s technikou a slouží nejen vojenské technice, ale celé řadě různých oblastí techniky.

Další rozvoj fyziky jde cestou upevnění svazků s technikou. Fyzika vrůstá do techniky a technika vrůstá do fyziky. Věda se tak stává bezprostřední výrobní silou. To ovšem nelze chápat zjednodušeně v tom smyslu, že mezi všemi problémy fyziky a techniky existuje bezprostřední spojení. Je nutno se vyjadřovat o fyzikální vědě jako celku. Dnes věda nejen realizuje bezprostřední požadavky techniky, ale do značné míry určuje i jejich vývoj. Základem revolučních změn v nynější technice a výrobě je revoluce v teoretické fyzice, která začala vytvořením teorie relativity, kvantové mechaniky a některých dalších oblastí teoretické fyziky. Revoluční změny v technice a technologii výroby nejsou dnes možné bez důkladných teoretických výzkumů. Jednota vědy a techniky je uskutečňována také ve splývání vědeckého a průmyslového experimentu. Jako náhorný příklad lze uvést atomové elektrárny, které jsou současně experimentální základnou pro vývoj a realizaci teoretických základů jaderné energetiky.

Věda je ve svém vývoji poměrně samostatná, neslouží jen potřebám dneška, ale i budoucnosti, neboť vytváří nezbytnou zásobu poznatků, které mohou být aplikovány třeba i v době poměrně vzdálené. Vznikl zásadně nový moment ve funkci vědy jako výrobní síly, neboť věda plní nejen běžné požadavky techniky a národního hospodářství, ale do

značné míry určuje i samostatný postupný pohyb v technicko-výrobní sféře. Předstih vědeckého bádání umožňuje vytvářet základní předpoklady pro rychlé a všestranné zdokonalování tradičních výrob i pro vznik zcela nových výrob.

Rozvoj vědy a její revoluční změny jsou stále silněji závislé na pokroku výroby a techniky, neboť úspěch vědeckých výzkumů a sama možnost poznat mnohé přírodní jevy jsou do značné míry určovány technickým vybavením vědeckých ústavů moderními přístroji. Fakta ukazují, že země, které zaostávají ve svém průmyslovém rozvoji, narážejí v oblasti vědeckých výzkumů a v jejich zajišťování nezbytnými vědeckými a technickými experimentálními prostředky na značné obtíže.

V posledních desetiletích se podstatně urychlilo tempo technického rozvoje a svět vstoupil do období nové, vědecko-technické revoluce. Je zřejmé, že tato nová revoluce předstihne svým významem technickou revoluci z 18. a počátku 19. století, která uskutečnila přechod od ruční práce ke strojní průmyslové velkovýrobě. Rychlost zavádění automatizace do hospodářské praxe značně předstihuje tempo, kterým se do výroby zaváděly technické objevy minulosti.

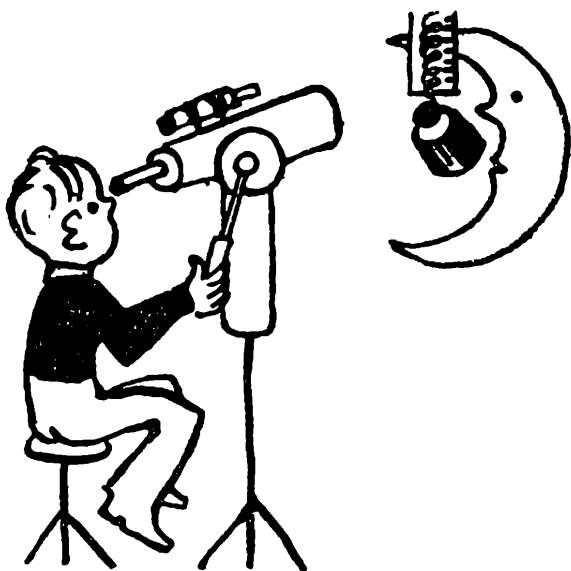
V období mechanizace člověk řídil a kontroloval stroj. Automatizace odstraňuje účast člověka na bezprostředním výrobním procesu, protože stroj podle daného programu kontroluje a řídí svou vlastní činnost. Automatizace umožňuje technologické procesy, které by byly zcela neuskutečnitelné v podmínkách ručního ovládání, jako je např. provoz jaderné elektrárny. Samočinné počítače umožňují více než tisícinásobně zkrátit čas, který je nutný k provedení složitých vědeckých a technických výpočtů. V jednotlivých izolovaných případech mechanizace od samého začátku uskutečňovala jednotlivé prvky automatického řízení, avšak teprve kybernetika vytvořila teoretický základ pro vytváření systému automatického řízení. Zařízení kybernetického charakteru byla zatím realizována v omezeném počtu případů. Jejich rozvoji se však musí věnovat plná pozornost, protože teprve tyto systémy jsou schopny řídit výrobní i nevýrobní procesy podle ekonomických hledisek.

Použitá literatura.

Kudrjavcev P. S., Konfederatov U. A.: Istorija fiziki i tehniki. Moskva 1960.

Kuzněcov B. G. Razvitije fizičeskich iděj. Moskva 1963.

Spasskij B. I. Istorija fiziki. Moskva 1963.



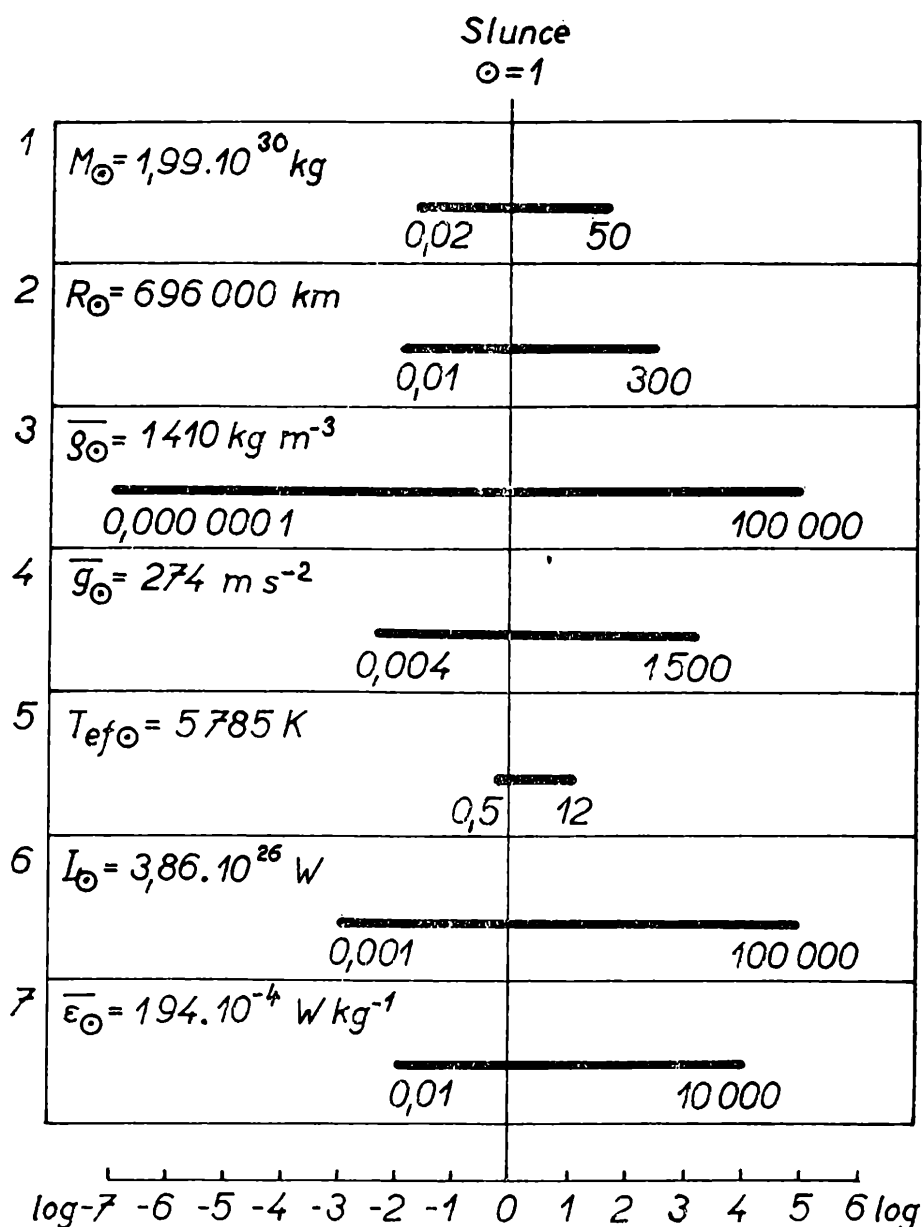
ASTRONOMIE

Fyzikální znaky hvězd

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Hvězdy můžeme charakterizovat jako plynná tělesa, která jsou zdrojem záření. V nitru hvězd probíhají termonukleární reakce za teplot vyšších než 1 milión stupňů. Soudobá astrofyzika nashromáždila mnoho údajů o statisících hvězd, studuje hvězdy v různých fázích jejich vývoje a zabývá se studiem odchylek mezi nimi. Za základní fyzikální znaky hvězd můžeme považovat tyto veličiny: hmotnost, poloměr, střední hustotu, gravitační zrychlení na povrchu, efektivní teplotu, zářivost a celkový výdaj energie na jednotku hmotnosti. Fyzikální charakteristiky hvězd obvykle srovnáváme s odpovídajícími charakteristikami našeho Slunce, které pak považujeme za jednotku. Hmotnosti hvězd tedy vyjadřujeme v hmotnostech Slunce, poloměry hvězd v poloměrech Slunce atd. V jak velkém intervalu se jednotlivé veličiny vyskytují, je v logaritmické stupnici znázorněno na obr. 1. Nyní přistoupíme k stručnému popisu jednotlivých fyzikálních znaků hvězd:

1. Hmotnosti M hvězd určujeme z jejich gravitačního působení, a to dvojím způsobem: buď z účinků na jiné těleso (tj. na planetu nebo hvězdu, používáme přitom třetí zákon Keplerův), anebo z gravitačního účinku na fotony (tzv. gravitační posuv). Jak je z obr. 1 zřejmé, hmotnosti hvězd se příliš od sebe neliší. Příliš hmotné hvězdy by byly tlakem záření rozrušeny již při svém vzniku a naopak u málo hmotných hvězd by nemohly nastat termonukleární reakce. Podle teoretických výpočtů sovětského astrofyzika G. M. Idlise (1965) nemohou existovat hvězdy, jejichž hmotnost by byla menší než $0.002 M_{\odot}$. (Značka představuje



Obr. 1

hmotnost Slunce). O určování hmotností dvojhvězd jsme psali v článku Hmotnosti dvojhvězd (Rozhledy MF, 47, 1969, č. 10, s. 476) a postup jsme ukázali nadvou příkladech.

2. Poloměry R hvězd se určují buď nepřímo (ze zákonů záření za předpokladu, že známe jednak absolutní hvězdnou velikost, jednak teplotu hvězd), anebo přímo — pomocí interferometrů. Pro měření průměrů hvězd byl sestaven Michelsonův interferometr ve spojení s 250cm zrcadlovým dalekohledem hvězdárny na Mount Wilsonu. Nejnověji se užívá tzv. intenzitních interferometrů, u nichž se k registraci používají násobiče elektronů. Poloměry hvězd můžeme určit též u zákrytových proměnných hvězd. Jednoduchý příklad jsme vyložili v článku Zákrytové proměnné hvězdy (RMF, 48, 1969/70, č. 6, s. 266).

Nejmenší poloměr mají tzv. bílí trpaslíci, jejichž poloměr se příliš neliší od poloměrů velkých planet sluneční soustavy; největší poloměry mají pak veleobři, v jejichž objemu by se ukryla část sluneční soustavy až po dráhu planety Marsu.

Kdybychom znázornili Slunce jako kouli o poloměru 10 cm, pak by bílí trpaslíci měli poloměr 2 mm a veleobří hvězdy bychom museli znázornit jako koule o poloměru několika metrů až desítek metrů; např. hvězda Betelgeuze (α Orionis) by měla poloměr 40 m.

3. Střední hustotu $\bar{\rho}$ hvězdy v jednotkách hustoty Slunce vypočteme ze vzorce

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V},$$

do něhož hmotnost hvězdy M dosadíme v jednotkách hmotnosti Slunce ($M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg) a objem V hvězdy v jednotkách objemu Slunce ($V_{\odot} = 1,41 \cdot 10^{27}$ m³). Hustoty hvězd jsou ve velmi širokém intervalu — od $10^{-7}\rho_{\odot}$ do $10^5\rho_{\odot}$. Nejmenší hustotu mají veleobři, největší bílí trpaslíci. Hustoty ovšem ubývá směrem od středu k povrchu hvězdy.

4. Gravitační zrychlení g na povrchu hvězdy závisí na hmotnosti a na poloměru hvězdy a lze je vypočítat pomocí Newtonova gravitačního zákona. Na povrchu Slunce je gravitační zrychlení 27,5 krát větší než na povrchu Země; je tedy $g_{\odot} = 274 \text{ m s}^{-2}$.

5. Efektivní povrchová teplota T_{ef} je dána Stefanovým-Boltzmannovým zákonem, podle něhož výkon vyzařovaný plošnou jednotkou absolutně černého tělesa teploty T je úměrný mocnině absolutní teploty:

$$E = \sigma T^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ deg}^{-4}$ je Stefanova konstanta.

Kromě efektivní teploty se používají v astrofyzice ještě jiné druhy povrchových teplot, které se určují rovněž ze zákonů záření. Povrchové teploty hvězd úzce souvisí se spektrálními třídami hvězd. Rozlišujeme 8 hlavních spektrálních tříd (viz článek Spektrální klasifikace hvězd, RMF, 49, 1970/71, č. 2, s. 72). Odchyly v chemickém složení hvězd jsou malé; většina hvězd je složena z vodíku a hélia s příměsí dalších prvků.

6. Zářivost L hvězd určujeme jako poměr výkonu vyzařovaného celým povrchem hvězdy k zářivosti Slunce, přičemž $L_{\odot} = 3,86 \cdot 10^{26}$ W. Pro výpočet zářivosti Slunce potřebujeme znát tzv. solární konstantu, která udává množství zářivé energie všech vlnových délek, které dopadá za 1 s na 1 m² plochy postavené kolmo k dopadajícímu slunečnímu záření ve střední vzdálenosti Země od Slunce a mimo zemskou atmosféru. Mnoha měřeními bylo zjištěno, že hodnota solární konstanty je $1,40 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2}$. Zářivosti hvězd jsou po hustotách ve velmi širokém inter-

valu. Pro srovnání můžeme uvést tento příklad: kdybychom zářivost bílého trpaslíka znázornili běžnou žárovkou o výkonu 60 W, pak pro Slunce bychom potřebovali 600 kW a pro veleobří hvězdu (Betelgeuze) již 6 000 MW!

7. Střední výdaj energie $\bar{\varepsilon}$ na jednotku hmotnosti úzce souvisí s předcházejícími veličinami, zejména však se zářivostí L hvězdy a její hmotností M , čili

$$\bar{\varepsilon} = \frac{L}{M}.$$

Závěr

Popsali jsme hlavní fyzikální znaky hvězd. U některých typů hvězd (např. zákrytové proměnné hvězdy) můžeme měřit rotační dobu a ze světelné křivky určit zploštění obou hvězd; to jsou však již speciální problémy, které přesahují rámec našeho článku. Velmi zajímavé je rovněž studium magnetických polí hvězd, která se projevují rozštěpením spektrálních čar na dvě nebo více složek. Toto rozštěpení je tím větší, čím silnější je magnetické pole. Měření magnetických polí hvězd jsou však velmi náročná na přesnost použitých přístrojů, a proto jsou vyhrazena jen největším observatořím.

≡ NAŠE SOUTĚŽ ≡

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Loňské soutěže Rozhledů se zúčastnilo 33 soutěžících. Překvapující je, jak málo z nich řeší příklady konstruktivní geometrie, i když nejde o nějaké náročné příklady. Doufejme, že zájem o řešení příkladů této krásné části geometrie stoupne. Vždyť redakce nevyžaduje zpravidla grafické provedení, stačí prostorové řešení.

Zde máme výsledky nejúspěšnějších řešitelů.

Matematika

1. — 2. Petr Firbas, 3. c G Brno	70 bodů
1. — 2. Karel Šafařík, 3. b SVŠ Bratislava	70 bodů
3. Petr Hejl, 2.c G Praha.	69 bodů
4. Imrich Vrto, 2.a G Rimavská Sobota	64 body

5. Zdeněk Choleva, 2.c G Praha	62 body
6. Jiří Ivánek, SVVŠ Nový Bohumín	61 bod
7. Jaroslav Švrček, 3.c G Přerov	57 bodů
8. Slavomír Kolčava, 3.s SVVŠ Brno	56 bodů

Fyzika

1. Luboš Pospíšil, 3.s SVVŠ Brno	33 bodů
2. Karel Šafařík, 3.b SVŠ Bratislava	32 bodů
3. Jiří Jelínek, 3.b SVVŠ Olomouc.	31 bod
4. Petr Firbas, 3.c G Brno	30 bodů
5. Jaroslav Švrček, 3.c G Přerov	29 bodů

Konstruktivní geometrie

1. Karel Šafařík, 3.b SVŠ Bratislava	24 body
2. Petr Firbas, 3.c G Brno . .	22 bodů
3. Bořivoj Klečka, 3.c SVVŠ Olomouc	21 bod
4. Jiří Jelínek, 3.b SVVŠ Olomouc	19 bodů
5. Václav Tomášek, 3.b G Klatovy	18 bodů

Vítězové

V celkové soutěži je toto pořadí:

1. Karel Šafařík, 3.b SVŠ Bratislava	126 bodů
2. Petr Firbas, 3.c G Brno	122 bodů
3. Jiří Jelínek, 3.b SVVŠ Olomouc	93 bodů
4. Jaroslav Švrček, 3.c G Přerov	86 bodů
5. Zdeněk Choleva, 2.c G Praha	84 body
6. Václav Tomášek, 3.b G Klatovy	83 body

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za projevený zájem a blahopřeje všem vítězům (budou odměněni z dotace MŠ ČSR, MŠ SSR a SPN). Všem čtenářům přeje hodně úspěchů při řešení příkladů letošního ročníku.

Na konec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Čísla uvedená v závorkách jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

Zdeněk Beran, SPŠE Stará Turá, M 3, 4, 5, 6, Jiří Binder, G Moravské Budějovice, M 1, 7, 10, 12 (5), F 1, 2, 3, 6 (4, 5); Pavel Brado, G Jihlava, F 1, 2, 3, (4); Jiří Dolejší, G Praha, F 1, 2, 3, 4, (6); Daniel Dvorský, G Vysoké Mýto, M 1, 2, 4, 5, 6, 7, (3), F 1, 2, 3, (4); Petr Firbas, G Brno.

M 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 (9), F 1, 2, 3, 6, (4, 5), G 2, 3, 4, (1); Jiří Frýda, G Kladno, M 1, 3, 4, 5, 6, F 1, 2, 3, 4; Petr Hejl, G Praha, M 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, (11); Zdeněk Hejmalíček, SVVŠ Třebíč M 1, 4, 5, 6, 8, 9, (3); Zdeněk Hvězda, G, Brno, M (4, 5); Zdeněk Choleva, G Praha, M 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, (1, 4), F 1, 3, (2, 4, 6); Anton Chomič, SPŠE Košice, M 6, 10, (8), F 1, 3, 4, (2, 6); Jiří Ivánek, SVVŠ Nový Bohumín, M 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, (3, 12); Milan Jelen, G Brno, M 5, 10, (4), F 3, 4; Jiří Jelínek, SVVŠ Olomouc, M 1, 3, 6, 9, (2, 4, 8, 12), F 1, 2, 3, 4, 6, G 1, 2, 3, (4); Tibor Kántor, maď. SVŠ Komárno, M 5, (3, 4); Pavel Kindlmann, G České Budějovice, M 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, (5, 10, 12); Bořivoj Klečka, SVVŠ Olomouc, G 1, 2, 3, 4; Slavomír Kolčava, SVVŠ Brno, M 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, (4, 8), F 3, (1, 2, 4); Petr Málek, G Jihlava, F 1, 2, (4); Josef Neuman, G Jičín, M 1, 4, (5, 12); Luboš Pospíšil, SVVŠ Brno, F 1, 2, 4, 5, 6, (3); Jan Rajlich, G Milevsko, M 5, 6; Ján Slabeycius, SVŠ Banská Bystrica, M 1, 4, 6, 7, 8, 10, 12, (3, 5), F 2, 3, 4, 6, (1); Karel Šafařík, SVŠ Bratislava, M 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, (9), F 1, 3, 4, 6, (2, 5), G 1, 2, 3, 4; Pavel Šandera, G Brno, M 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, F 2, 3, 4, (1); Jaroslav Švrček, G Přerov, M 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, (3), F 1, 2, 3, 6, (4); Štefan Takács, maď. G Dunajská Streda, M 6, (3, 5), F 3, 4, (1); Václav Tomášek, G Klatovy, M 4, 6, 9, 10, (1, 2, 5, 8), F 1, 2, (3, 4), G 3, (1, 2, 4); Josef Vermach, SPŠ Kutná Hora, F 2, 3, (1, 4); Ivan Vlček, SVŠ Brezno, M (1, 6), F 1, 3, (6); Imrich Vrto, G Rimavská Sobota, M 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, (10); Vladimír Zikmunda, G Praha, M 4, 5, 6, 8, 9, (3, 10), F 3, (4).

FO

Třetí kolo kat. A XII. roč. FO

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Třetí kolo kat. A XII. roč. FO se konalo od 28. do 30. dubna 1971 v Banské Bystrici.

Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola kat. A, a to všichni až po klasifikaci 1, 1, 3, 3 a s klasifikací 1, 2, 3, 3 jen někteří do celkového počtu 80 účastníků. Aby byl každý kraj, který měl úspěšného řešitele

Přehled výsledků podle krajů je tento:

Kraj	Účastníků	Úspěšných	Vítězů	Neúspěš.
Praha	10*)	8 z toho	4	2
StČ	3	—	—	3
JČ	—	—	—	—
ZČ	5	3	1	2
SČ	3	1	1	2
VČ	8	4	2	4
Brno	9	6	4	3
JM	5	3	—	2
SM	14	2	—	12
Bratislava	11	4	2	7
ZSl	5	1	1	4
StSl	2	1	1	1
VSl	4	—	—	4
celkem	79	33 z toho	16	46

*) 1 pozvaný se 3. kola nezúčastnil

Vítězové byli tito:

Jméno	Třída	Spec.	Škola
1. Pavel Dušek	3	S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
2. Ivan Gabaš	3	S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
3. Karel Šafařík	3	S	SVŠ Bratislava, Novohr.
4. Andrej Kugler	3	S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
5. Štefan Sakáloš	3	P	SVŠ Prievidza
6. Václav Holý	3	S	SVVŠ Brno, Křenová
7. — 11.			
Jiří Němec	3	S	SVVŠ Brno, Křenová
Zdeněk Maláč	3	S	SVVŠ Brno, Křenová
Jan Helešic	3	S	SVVŠ Brno, Křenová
Vlad. Šimkovič	3	S	SVŠ Bratislava, Novohr.
Jiří Benda	4		SPŠ el. Plzeň
12. — 14.			
Anna Žilinská	3	P	SVŠ Piešťany
Igor Koropecský	3	S	SVVŠ Pardubice
Richard Nykl	3	S	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
15. — 16.			
Jiří Horák	3	P	SVVŠ Děčín
František Fendrych	3	S	SVVŠ Hradec Králové

Vítězové dostali odměnu ve výši od 1 300,— Kčs do 400,— Kčs. SSM věnoval každému účastníku soutěže aktovku a psací bloky.

(úspěšného řešitele v 2. kole neměl jen Jihočeský kraj) zastoupen alespoň dvěma soutěžícími, byl přibrán ještě jeden účastník s klasifikací 2, 2, 3, 3 ze Středoslovenského kraje. Jeden z pozvaných řešitelů se nedostavil.

Slavnostní zahájení bylo provedeno ve velké zasedací síni KNV v Banské Bystrici za přítomnosti zástupců úřadů a SSM. Teoretické úlohy se řešily 29. dubna v budově KNV a laboratorní úloha 30. dubna v laboratorních SPŠ elektrotechnické. Při řešení teoretických úloh byl jeden účastník vyloučen.

Účastníci byli ubytováni na Tajově u Banské Bystrice. Prvý den navštívili Památník SNP, druhý den byl zájezd do Nízkých Tater na Srdiečko.

Celkem bylo 33 úspěšných řešitelů a 46 neúspěšných. Z úspěšných bylo 16 vítězů, tj. těch, kteří z maximálního počtu 20 nejlepších měli nanejvýš jednu úlohu hodnocenou známkou nevyhovující.

Pátá mezinárodní fyzikální olympiáda v Sofii

Prof. RNDr. ROSTISLAV KOŠTÁL, Brno

Organizaci 5. mezinárodní fyzikální olympiády (5. MFO) převzalo letos Bulharsko. Proběhla od 2. do 11. července 1971 v Sofii. Pozvány byly všechny státy, které se zúčastnily dřívějších MFO. Zúčastnily se jí letos tyto státy: Bulharsko, Československo, Maďarsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Jugoslávie se letos nedostavila. Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících. Naše družstvo tvořili nejlepší řešitelé 3. kola kat. A:

1. Dušek Pavel, 3S SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
2. Gabaš Karel, 3S SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
3. Šafařík Karel, 3S SVŠ Bratislava, Novohradská,
4. Kugler Andrej, 3S SVVŠ Praha 2, W. Piecka,
5. Holý Václav, 3S SVVŠ Brno, Křenová.

Vedoucím družstva byl předseda ÚV FO prof. dr. Rostislav Košťál a pedagogickým instruktorem místopředseda ÚV FO doc. dr. Ivan Náter.

Družstvo prošlo soustředěním v době od 11. do 20. června 1971 v Rajnochovicích, okr. Kroměříž, kam bylo pozváno prvních 11 vítězů 3. kola kat. A FO.

Předsedou mezinárodní komise byl akademik Asen Dacev. Zahájení mezinárodní fyzikální olympiády bylo 3. července za přítomnosti náměstkyně ministerstva osvěty.

Dne 4. července řešili soutěžící v době pěti hodin 4 teoretické úlohy a 5. července laboratorní úlohu. Doba k tomu vymezená byla rovněž 5 hodin. První úloha byla z mechaniky, druhá z termiky, třetí z elektřiny a čtvrtá z optiky. Laboratorní úloha byla z elektřiny.

Každý řešitel měl své pracoviště odděleno vysokými stěnami, takže ze svého pracoviště nikoho neviděl.

Klasifikace úloh byla prováděna bodováním, a to u každé teoretické úlohy 0 — 10 body, u laboratorní úlohy 0 — 10 body za teoretické zpracování a 0 — 10 body za experimentální provedení. Mohl tedy každý soutěžící dosáhnout maximálně 60 bodů.

Všechna družstva však neměla letos stejný počet soutěžících. Polákům onemocněl jeden soutěžící před odjezdem, proto se dostavili čtyři, a při zahájení soutěže onemocněl náš absolutní vítěz 3. kola kat. A P. Dušek a nemohl se zúčastnit soutěže ani druhý den; proto naše družstvo pracovalo též o čtyřech členech.

Poněvadž letošní úlohy byly velmi náročné jak po stránce odborné, tak i časové, byly hranice na udělení cen sníženy.

Z našich účastníků získal 1. cenu Šafařík a Gabaš, 2. cenu Kugler, pochvalné uznání Holý.

I. cenu (60 — 45 bodů) získalo 5 řešitelů:

2 z ČSSR, 1 z MLR, 1 z NDR a 1 z SSSR,

II. cenu (44 — 40 bodů) získalo 6 řešitelů:

1 z ČSSR, 1 z MLR, 1 ze SSSR, 2 z PLR a 1 z RSR,

III. cenu (39 — 35 bodů) získalo 12 řešitelů:

2 z MLR, 3 z NDR, 1 ze SSSR, 2 z PLR, 3 z RSR a 1 z BLR,

pochvalné uznání (34 — 30 bodů) získalo 7 řešitelů:

1 z ČSSR, 1 z MLR, 1 z NDR, 2 ze SSSR, 1 z RSR a 1 z BLR.

Poněvadž dvě družstva měla jen po čtyřech soutěžících, lze srovnávat jen počet bodů získaných průměrně na jednoho soutěžícího z družstva. Pak pořadí družstev je toto:

1. ČSSR	42,25 bodů
2. MLR	39,4 body
3. PLR	39,25 bodů
4. SSSR	38,4 bodů
5. RSR	36,8 bodů
6. NDR	36,6 bodů
7. BLR	25,6 bodů

Velký skok je jen mezi prvním a druhým družstvem a pak mezi šestým a sedmým družstvem. Naše družstvo získalo nejlepší umístění jak v počtu cen, tak i v počtu bodů získaných jedním účastníkem družstva.

Soutěž byla slavnostně zakončena 11. července ve sportovním paláci ve Varně.

Hostitelé uspořádali prohlídku význačných míst v Bulharsku a pobyt na Černomořském pobřeží.



RECENZE

KEPLER, JOHANNES: SELBSTZEUGNISSE (Vlastní vysvědčení). Friedrich Fromman Verlag (Günther Holzboog), Stuttgart — Bad Cannstatt, 1971; stran 97, cena neudána.

Ke 400letému výročí narození byl vydán výběr z Keplerových vlastních dokumentů, tj. vlastní charakteristiky a 12 dopisů, které z latiny a staré němčiny do moderní pěkně přeložila Esther Hammerová; výběr provedl a životopisný úvod napsal Franz Hammer a podrobné vysvětlivky podal Friedrich Seck. Kartografická úprava a tisk jsou bezvadné.

Již podrobný a objektivní životopis Keplerův (*27. XII. 1571 v městečku Weil der Stadt, západně od Stuttgartu, † 15. XI. 1630 v Regensburgu) vzbuzuje soucit nad jeho strastiplným životem, jaký neměl snad žádný z geniů. Určitě ne ostatní tři spolutvůrci vědeckého světového názoru — Koperník, Galileo a Tycho Brahe. Velmi smutné dětství, nepřátelství vlivných osob, ustavičný finanční nedostatek, rodinné trampoty, pronásledování náboženských fanatiků, nesplněné sliby vladařů a časté stěhování před hrůzami třicetileté války byly jeho údělem.

Obsáhlá „Vlastní charakteristika“ (psaná v 26 letech věku) je tak sžíravou sebekritikou, že bezohledností předčí známou zpověď (Confessions) Rousseauovu, která ovšem byla určena pro veřejnost. Kepler zde píše o sobě v třetí osobě a zaznamenává své myšlenky, rozpory a plány v jinošství a básnické pokusy na latinské škole, kterou navštěvoval s výborným prospěchem po 3 roky. Pro každý předmět na škole jeví velký zájem, pořizuje si excerpty a v matematice se pokouší o vlastní výzkumy. Od r. 1589 až 1594 studuje na universitě v Tübingenu. Je mu nesnesitelné nevyužít každou chvíli,

dychtí po práci, ale nemá vytrvalosti. Jeho touha je živena vzorem jiných badatelů láskou k pravdě a kráse, ale též žádostivostí slávy a uznání. Záliba bát o obtížných problémech a tisíce nápadů, které se mu rojí v mysli, překáží správnému plnění jeho učitelských povinností (byl od 1594 do 1600 učitelem matematiky ve Št. Hradci). Přisuzuje si mnoho nectností: nerozvážnost, prudkost, nesnášenlivou a vysměvačnou povahu a zálibu kdekoho kritizovat a nenechat na pokoji. — Vše odůvodňuje astrologickými horoskopy, z nichž — jak se domnívá — lze posoudit povahu i skutky, minulé i budoucí, a vyšetřit příčiny nezdarů. (Později ovšem pro své chleboďárce zjišťuje jen polohu hvězd; prorokování nechává jiným.)

Dopis astronomu Tycho Brahe (17. X. 1600) je prosebný: fanatiky byl donucen opustit Štýrsko, rodinu zanechal v Linci, ale císařský dvůr je liknav vyplácet mu mzdu. Prosí o přímluvu u císaře Rudolfa, neboť ač měl naději dostat místo na universitě v Tübingenu, „kvůli Tobě a astronomii“ se rozhodl jet do Prahy.

V dopise nemocnému prelátu Janu Pistoriusovi (Praha 15. 6. 1607) referuje o svých chronologických a historických pracích.

Stať „Rozmluva s Hvězdným poslem“ vyžaduje vysvětlení (viz str. 91): Galileo r. 1610 v malé knížečce nazvané „Sidereus Nuncius“ (Hvězdný posel) oznámil stručně, že dalekohledem zjistil hornatou strukturu povrchu Měsíce, že mléčná dráha se v dalekohledu rozplývá ve spoustu hvězd a — což bylo největším překvapením — že okolo Jupitera obíhají 4 měsíčky. Knížka způsobila poprask mezi přívrženci země — a člověkostředního světového názoru, kteří rozvířili prudkou nepřátelskou kampaň. Kepler, který v té době byl považován za prvního astronoma v Evropě — ovšem ne proto, že již objevil své první dva zákony, nýbrž jako císařský matematikus a Tychonův nástupce —, požádán Galileem o dobrozdání, neváhá přispěchat mu na pomoc „v této bitvě proti uštěpačným reakcionářům, kteří vše dosud neznámé odmítají a považují za znesvěcení, co se odchyluje od cesty ražené Aristotelem“, A skutečně Keplerova podpora Galileova názoru způsobila obrát v názírání římských astronomů, kteří předtím odmítali i jen podívat se do dalekohledu na Jupiterovy satelity.

Z dopisu „Neznámé paní“ (Praha, duben 1612) se dovídáme o Keplerových minulých nesnázích v domácnosti, kde při svém počítání neměl klidu, vyrušován manželčinými výklady o věcech jej vůbec nezajímajících.

Po dopise „Neznámému šlechtici“ (Eferding dne 23. X. 1613) se zmínkou, jak Kepler v Kunštátě na Moravě se ucházel o nevěstu, následuje hrůzný doklad bigotní pověrčivosti, se kterou musel osudem stíhaný Kepler bojovat. Je to třetí z jeho mnoha písemných žádostí podávaných würtemberskému vévodovi: Keplerova matka Kateřina je obžalována z čarodějství (!). Kepler, jediný z dětí, nešetří námahy ani peněz (proces stál 1000 zlatých) a spěchá ku pomoci, až se podaří docílit osvobození dlouho vězněné obžalované.

Následující „Poznámky k dopisu Matyáše Haffenreffera“ (1625 a dopis Pavlu Guldinovi, jsou krásným svědectvím Keplerovy neúnavnosti v hájení svobody náboženského přesvědčení, ač poslední je psán z Prahy v dubnu 1628.

Jediným radostnějším dokumentem z celé korespondence je „Odpověď na dopis Jakoba Bartsche (astronoma, jenž se později oženil s Keplerovou dcerou), psaná 6. XI. 1629. Tehdy byl Kepler ve službách Albrechta z Valdštejna, měl slušný plat a v Ulmu se mu konečně podařilo vytisknout své Rudolfinské tabulky astronomické. Blahopřeje učencům, užívajícím jeho tabulek, že studiem matematiky, která jediná svou neuvěřitelnou jistotou podporuje souhlas rozumu, prokázali schopnost zdolat námahu, které se dříve právě nejlepší talenty vyhýbaly; blahopřeje státům a národům, které vy-

pěstovaly takové lidi, takže je odůvodněná naděje, že ochabnou ty svárlivé, škodlivé a bezcenné disputace: a blahopřeje též sobě, že pomáhal znovu oživit opravdovou vědeckou práci. Děkuje Bartschovi, že svými odbornými znalostmi prokázal, že různé početní metody dají souhlasný výsledek. (Tycho Brahe počítal efemeridy pomocí epicyklů, kdežto Kepler a následovníci již v heliocentrické soustavě).

Poslední jeho dopis, Matyáši Berneggerovi, je adresován příteli, který byl profesorem dějin ve Štrasburku, obstaral svatbu Keplerovy dcery s Jakobem Bartschem a snažil se pomoci Keplerovi k profesorskému místu na universitě ve Štrasburku, což se však nepodařilo. Dopis je psán v Lipsku v polovici října 1630, kde se Kepler zastavil na cestě do Řezna, kde potom zemřel. Kepler se tu zmiňuje o svém připraveném díle „Synopsis mathematices“, obsahující schematický výklad tehdejší matematiky, které však nebylo vytištěno a rukopis je dnes ztracen. Sděluje cíle, svého dalšího putování: Řezno, Linec a odsud k vévodovi. Avšak dojel jen do Řezna, kde zemřel po krátké nemoci.

Posledním dokumentem v uvedené knize je dopis Štefana Lansia, starého Keplerova známého, psaný neznámé osobě v Tübingenu. Je hlavním pramenem zpráv o Keplerově skonu: Zemřel 15. XI. 1630 a byl pohřben na hřbitově mimo zdi města (luterán!). Hřbitov byl za třicetileté války zničen, Keplerovy kosti rozptýleny a zbyl jen náhrobní nápis ve formě elegického dysticha, které si sám pro sebe napsal:

Men sus eram coelos, nunc terrae metior umbras.

Mens coelestis erat; corporis umbra iacet.

„Nebesa měřil jsem kdysi, teď pozemské měřím jen stíny.

Ke hvězdám toužil můj duch; tělo mé kryje teď zem.“

Kniha je zajímavá v mnohých směrech: Značnou část své gigantické práce vykonal Kepler na území ČSR. Učitelé všech stupňů a pracovníků výzkumných ústavů a závodů s úžasem se přesvědčují, jak značně se od dob Keplerových zlepšily podmínky výchovného působení a vědecké práce: klid, hmotná zajištěnost, literatura a pomůcky všeho druhu.

Jak veliká musela být vytrvalost a zanícení tohoto geniálního předchůdce Newtonova, jestliže za tak nepříznivých podmínek a v tragických poměrech, přes veškerá trápení a omyly se vítězně dopracoval výsledků, které navždy zůstanou v paměti myslícího lidstva!

Evžen Říman.

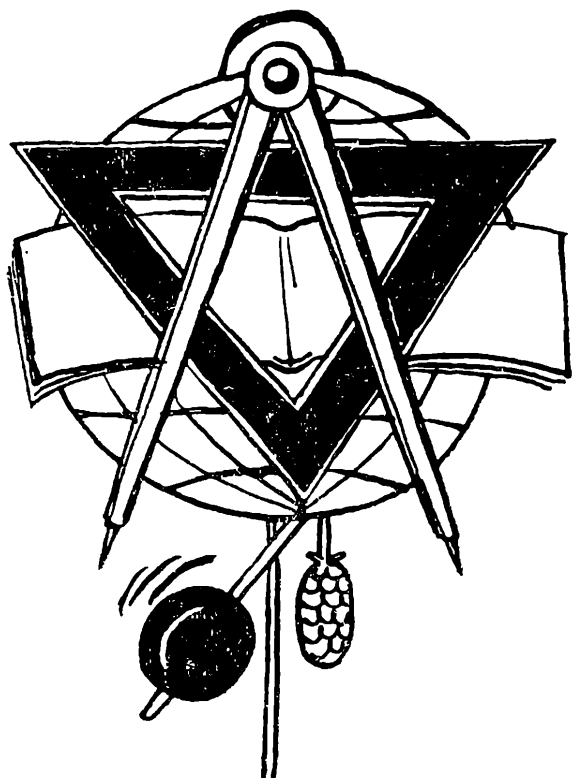
Kdo má asi pravdu?

O jednoho matematika více, o jednoho člověka méně.

Dupanloup

Naučte hoča důkladně aritmetice a uděláte z něho člověka.

Bright



- RŮZNÉ
- RŮZNÉ
- RŮZNÉ

0 objevu rentgenových paprsků

PAVEL BARTUŠKA, Praha

V 90. letech minulého století zabýval se profesor fyziky na würzburgské universitě Konrád W. Röntgen studiem elektrických výbojů ve zředěných plynech, speciálně katodových paprsků, které již v roce 1869 objevil německý fyzik W. Hittorf. Jestliže je silný zdroj stejnosměrného proudu připojen na Hittorfovu trubici, ve které je tlak zbylých plynů spoň 0,02 torru, pak v místě proti katodě počne sklo silně fluoreskovat — v trubici vznikají katodové paprsky, což jsou vlastně prudce letící elektrony.

I onoho památného večera — 8. listopadu 1895 — pracoval Roentgen v zatemněné místnosti s trubicí zabalenou do neprůhledného papíru, aby při studiu vlastností katodových paprsků nebyl rušen fluorescencí lampy. K identifikaci vznikajících paprsků měl opodál experimentálního zařízení připravenou destičku s fluorescenční vrstvou. Při jednom z pokusů si náhodně povšiml, že destička slabě září, i když neleží ve směru, kudy mají paprsky procházet a je od trubice poměrně značně vzdálena. Přímo šokován však byl, když při přiblížení destičky k lampě na ní uviděl stínový obraz kostí své vlastní ruky. Začal horečně prosvěcovat vše,

co mu přišlo do ruky — od klíčů až po ruku své ženy. Teď již věděl naprosto jistě, že nepracuje s paprsky katodovými, ale něčím úplně novým a neznámým. Sám je nazval paprsky X a až později byly na jeho počest nazvány rentgenovými. Nejdříve se snažil jejich podstatu vysvětlit příčným vlněním éteru, ale Stokes a Thomson záhy zjistili, že je to elektromagnetické záření s vlnovou délkou asi $1000\times$ kratší, než má viditelné světlo.

Původně bylo zdrojem rentgenova záření sklo naproti katodě. Teprve později byl proud elektronů z katody soustředěn na kovovou, obvykle wolframovou destičku, antikatodu. Od té doby bylo provedeno tisíce studií s lampami nejrůznějších konstrukcí, které dokázaly zákonitosti vzniku a fyzikální vlastnosti těchto paprsků.

Je skutečně obtížné srovnat význam tohoto objevu s jiným objevem v přírodních vědách. Všeobecně je znám hlavně jejich obrovský význam v medicíně, kde se využívá jejich *absorpčních* vlastností. Čím větší je atomové číslo prvku, který je obsažen v prosvěcované látce, tím méně záření předmětem projde. Dnes již neexistuje odvětví lékařství, kde by se nevyužívalo rentgenu.

Obdobné použití má i v nedestruktivní defektoskopii, kde se využívá této vlastnosti pro odhalování vnitřních vad (trhlin, dutin, nehomogenit) uvnitř materiálu (např. ocel je možno prosvěcovat až do tloušťky 12 cm).

Největší význam měl však tento objev pro fyziku samu. Až do počátku 20. století byla stavba látek předmětem spekulativních úvah, bez možnosti exaktního experimentálního ověření. Max von Laue usoudil, že jestliže je látka utvořena pravidelně se střídajícími atomy v krystalografické mřížce, pak po dopadu rentgenova záření musí docházet k *difrakci* stejně jako u viditelného světla na ryté mřížce. V roce 1912 tento pokus provedl na sfaleritu (blejno zinkové, ZnS) a úspěch byl dokonalý. Po průchodu krystalem fotografický film zachytil zákonitě uspořádané difrakční skvrny. O rok později W. H. Bragg a W. L. Bragg (otec a syn, tehdy student university v Cambridge) vypracovali na stejném principu jednodušší metodu, při které se zachycuje difraktované záření odražené krystalem.

V roce 1913 Moseley využil faktu, že nanese-li se malé množství určité látky na antikatodu, získá se charakteristické záření, skládající se ze spektrálních čar přesné vlnové délky, charakteristické pro danou látku. Proměřil rentgenová spektra všech tehdy známých prvků a odhalil zákonitosti rentgenové spektroskopie, čímž bylo možno přesně určit stavbu atomů jednotlivých prvků i předpověď, které prvky v periodické soustavě ještě chybějí (dosud se tyto předpovědi opíraly pouze o periodicitu chemických vlastností prvků).

Objevem X paprsků byla dovršena jedna etapa ve vývoji fyziky. Eta-

pa, jejíž počátky sahají až někam do 16. a 17. století, kdy se počaly formovat vědecké základy exaktních věd. Tento objev, kromě bezprostředního praktického použití, znamenal vytvoření solidních základů, na kterých vyrostla současná fyzika i chemie. Znamenal však také nastolení nové etapy ve vývoji poznání — atomové hmoty, která ve 30. letech vedla k objevení radioaktivity, transmutace prvků i uvolnění atomové energie se všemi pozitivními i negativními důsledky.

Konrad Roentgen obdržel plným právem z rukou švédského krále roku 1901 první Nobelovu cenu, udělenou za fyziku. Zemřel roku 1923, takže mohl vidět triumfální cestu, kterou nastoupil jeho objev v praktickém životě, i v řadě vědních oborů.

M. V. Lomonosov - osobnost ruské vědy

PAVEL BARTUŠKA, Praha

Letos uplyne 260 let od narození největšího vědce ruského baroka a jednoho z největších ruských vědců vůbec, Michaila Vasilieviče Lomonosova (1711 až 1765). Podmínky, za nichž žil a pracoval, byly pro vědeckou práci neobyčejně nepříznivé. Rusko 18. století bylo proti zemím západní Evropy nesmírně zaostalé. Trpělo feudální roztržitostí, tatarskými, švédskými a tureckými nájezdy, nemělo námořních cest a prakticky žádný průmysl. S tím souvisel i citelný nedostatek obecného a absolutní nedostatek vyššího, zvláště technického školství. V tomto směru byl učiněn obrovský pokrok za Petra Velikého (1689 až 1725), prvního vládce na ruském trůnu, který svůj cíl — poevropštění ruské společnosti a posílení politické a hospodářské moci Ruska, uskutečňoval skutečně s rozmyslem, důsledně a energicky. Vybudoval základní školství, založil první noviny, nechal pořizovat překlady západních spisů atd. Podporoval místní a zahraniční obchod, stavbu loďstva, upevnění pravidelné armády.

Po celé 18. století probíhal boj mezi představiteli různých tříd a sociálních skupin v oblasti správní, hospodářské i vojenské. V ideologické oblasti šlo o boj mezi reakční klerikální ideologií a nastupujícím materialismem, který přišel ze západní Evropy.

V západní Evropě dochází v té době k energickému prosazování vědeckých názorů na svět a rodí se nové filosoficko-politické směry, vedoucí o generaci později k francouzské revoluci. Vždyť za Lomonosova života žila již řada vědců, z nichž někteří položili základy celých vědních oborů. Byli to např. v Anglii Isaac Newton (†1727), astronom Herschel (*1738),

James Watt (*1736). Ve Francii Papin (†1712), Coulomb (*1736) a Lavoisier (*1743), ve Švédsku Celsius (*1701), v Itálii Volta (*1745) a ve Švýcarsku Berthollet (*1748).

Lomonosova znala většina jeho současníků jako básníka, organisátora vědeckého života a nanejvýš jako vědce zabývajícího se ryze praktickými otázkami. Sám mnohokrát mluvil o tom, že věda je pro něho odpočinkem, bez kterého si neumí představit život. My ho dnes naopak hodnotíme jako jednoho z největších ruských materialistických vědců. Vědecká zaostalost a izolovanost tehdejšího Ruska způsobily, že mnohé jeho myšlenky, roztríštěně zveřejňované v různých disertacích, nebo řečech na shromážděních Akademie, zůstaly nepovšimnuty. Některá jeho díla vyšla až na počátku 20. století, hlavně zásluhou historika chemie Menšutkina.

Lomonosov byl skvělým básníkem a ve svých oblíbených ódách se vždy skrytou formou obracel na carevnu a dvořanstvo, aby jim vnukl nějakou myšlenku, která by pomohla rozvoji vědy, průmyslu, nebo obchodu. Je rovněž autorem několika filosofických spisů a jeho učebnice gramatiky se používalo celé jedno století.

Zúčastnil se aktivně politického života. Jeho myšlenky jsou nejlépe vyjádřeny ve známém dopise Šuvalovovi r. 1761. Požadoval boj proti mastičkářům a organizování rozsáhlé lékařské pomoci, zřízení dětských domovů pro nemanželské děti, přístup širokých lidových mas ke vzdělání bez ohledu na původ a majetkové poměry atd. Zvláště dbal na všeobecný rozkvět školství; věřil, že pouze politická, vědecká, ekonomická a kulturní nezávislost mohou zlepšit středověkou zaostalost Ruska. Sám pro to udělal nesmírně mnoho — jeho zásluhou byla založena první ruská universita.

Byl si dobře vědom postavení širokých lidových mas, zvláště šlechty, nadvlády duchovenstva. Nebyl však pro revoluční změny v politickém životě. Zlepšení ekonomického postavení rolnických mas chtěl uskutečnit při zachování nevolnického systému. Cestou k tomu byly reformy, uskutečňované osvíceným monarchou. Doba ještě nedozrála a ekonomické vztahy se nevyhrotily tak, jak se později stalo v druhé polovině 18. století, kdy se svými revolučními myšlenkami vystoupili revoluční demokraté. Jeho víru v osvíceného panovníka nejlépe vidíme v tom, jak pohlížel na osobnost Petra Velikého. V jeho politických řečech, ódách i mosaikových obrazech se často vyskytuje Petr jako vrchol občanské a státnické dokonalosti, aniž by docenil úlohu širokých lidových mas, které záměry Petra Velikého uskutečňovaly, mnohdy za velkých útrap. Proto byl často kritisován revolučními demokraty.

Význam Michaila Vasilieviče Lomonosova pro vývoj ruské a světové vědy byl ohromný. Můžeme jej považovat za prvního ruského vědce, který v přírodovědě důsledně uplatňoval materialismus, evoluční princip vývoje a pro kterého nejvyšším kritériem byl pokus. Na jeho materialis-

mus později navázali Radiščev, Gercen a ostatní revoluční demokraté. Ve většině oborů, ve kterých pracoval, předběhl svou dobu o padesát, sto i více let a teprve rozvíjející se věda 19. století uznala a dále prohloubila jeho myšlenky. Největším Lomonosovovým objevem (kromě formulování zákona zachování hmoty a energie) byla materialistická korpuskulární teorie a z ní vyplývající kinetická teorie tepla a kinetická teorie plynů, které podstatnou měrou přispěly k vybojování revolučních myšlenek, na jejichž základě nastal kvantitativní zlom ve vývoji přírodních věd na konci 18. a na začátku 19. století.

Jeho význam pro Rusko krásně vyjádřil Puškin: „Lomonosov byl veliký člověk. Byl v době mezi Petrem Velikým a Kateřinou jediným bojovníkem za rozšíření vědy. Vytvořil prvou ruskou universitu, lépe řečeno byl sám naší prvou universitou.“



NEJMLADŠÍM
ČTENÁŘŮM

Pravidelné mnohostěny

V obr. 2 je osm shodných rovnostranných trojúhelníků. Překreslete je (délku strany volte asi 6,5 cm), vystřihněte (záložky) a složte. Dostanete pravidelný osmistěn.

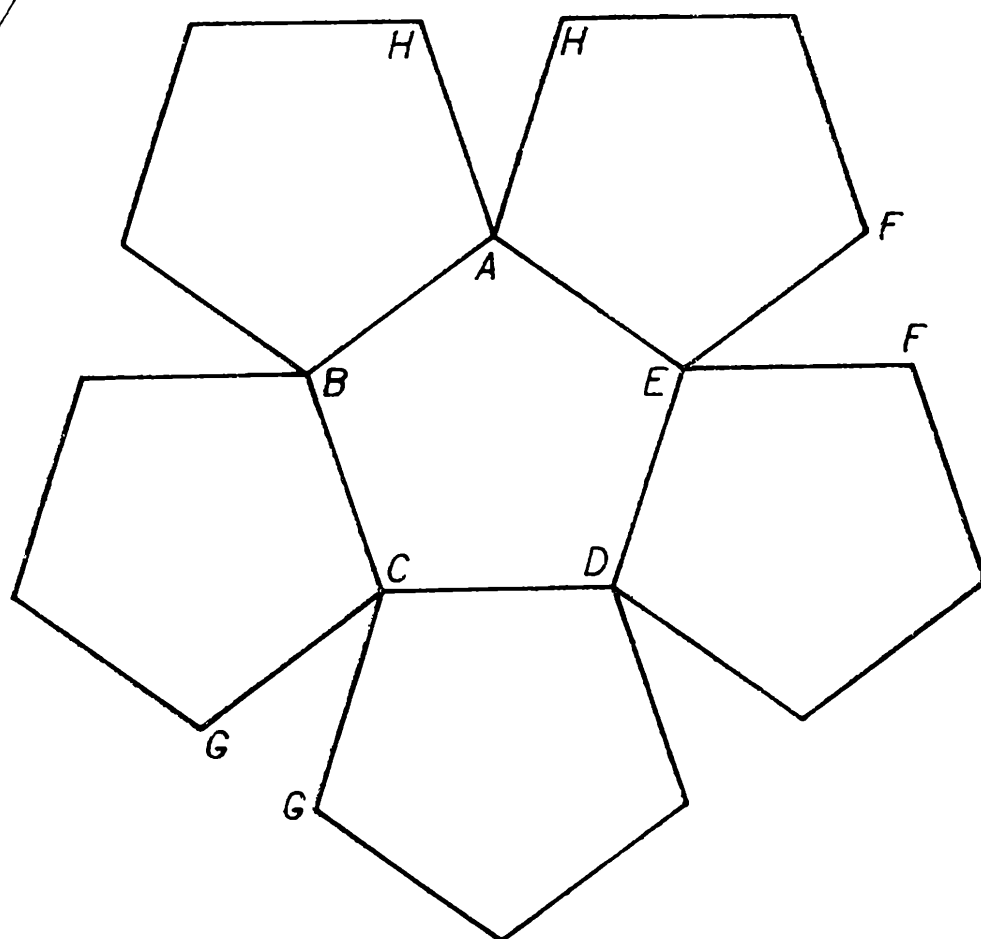
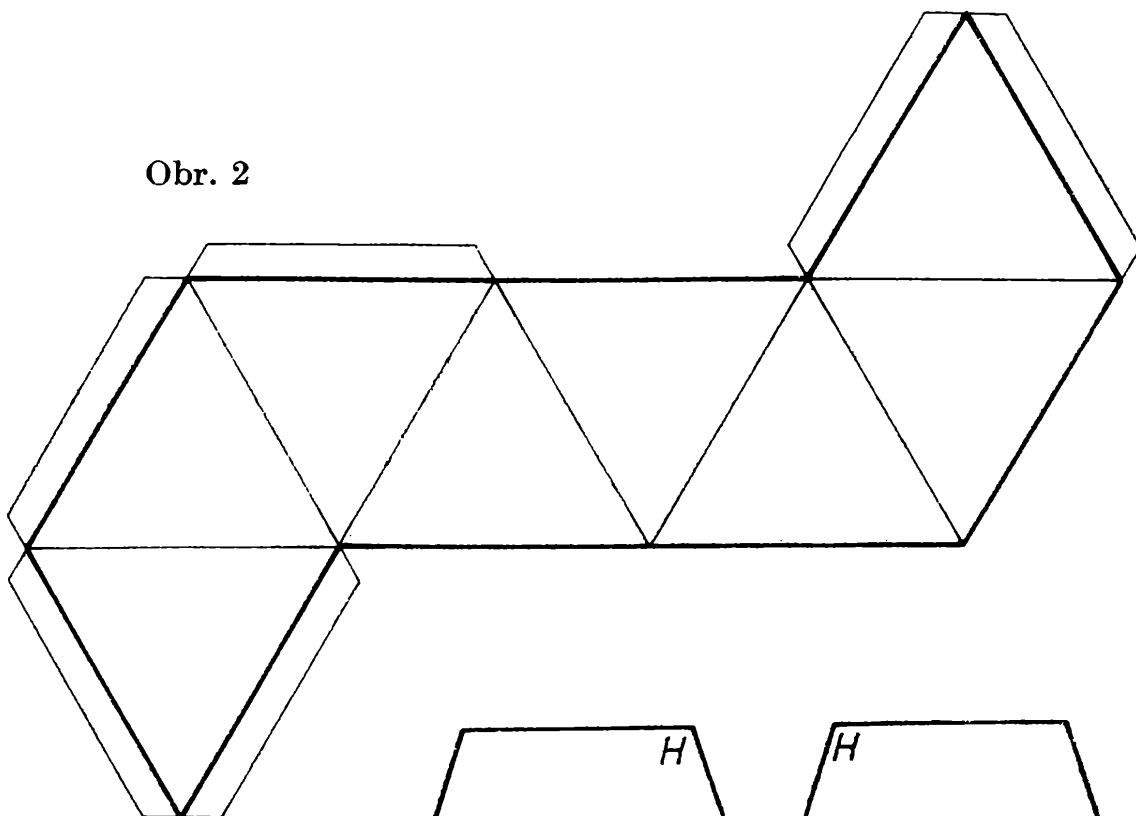
Krychle je omezena šesti shodnými čtverci. To už dovedete jistě sami sestavit bez návodu. A tak máte první tři pravidelné mnohostěny.

Nyní sestrojíme síť pravidelného dvanáctistěnu. Ten je omezen dvanácti shodnými pravidelnými pětiúhelníky. Na přiloženém obrázku je narysován pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Nad každou jeho stranou je sestrojen pravidelný pětiúhelník s ním shodný.

Narýsujte co nejpřesněji obr. 3 (poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ zvolte asi 3 cm nebo délku strany AB asi 4 cm), vystřihněte a slepte tak, aby vrcholy označené týmiž písmeny, přišly k sobě. To budete mít polovinu dvanáctistěnu. Pak totéž narýsujete ještě jednou a snad už vám nemusím říkat, jak obě části slepíte dohromady.

Poslední pravidelný mnohostěn je pravidelný dvacetistěn. Je omezen dvaceti shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Na vedlejším obrázku je narysována jeho síť. Až budete lepit, přijdou k sobě opět vrcholy označené týmiž písmeny (volte $AB = 4$).

Obr. 2



Obr. 3

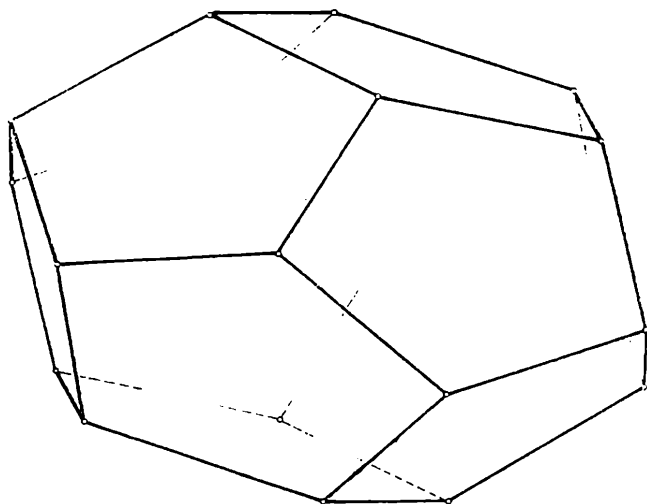
Poznali jsme tak pět pravidelných mnohostěnů. Více jich není. To se dá taky dokázat. Zatím tomu budeme věřit bez důkazu a raději si řekneme ty vlastnosti mnohostěnů, které si můžete na svých modelech ověřit.

Především, každý pravidelný mnohostěn je omezen shodnými pravidelnými mnohoúhelníky téhož druhu. Např. pravidelný čtyřstěn je omezen shodnými rovnostrannými trojúhelníky, krychle je omezena shodnými čtverci, pravidelný dvanáctistěn je omezen shodnými pravidelnými pětiúhelníky atd.

Dále v každém vrcholu pravidelného mnohostěnu se sbíhá stejný počet hran. Na příklad, v každém vrcholu krychle se sbíhají tři hrany, v každém vrcholu pravidelného osmistěnu se sbíhají čtyři hrany atd. U zbývajících mnohostěnů vyslovte příslušnou větu sami.

Jiná a velmi pěkná vlastnost je tato: Jestliže existuje pravidelný mnohostěn, který má s stěn a v vrcholů, pak nutně existuje pravidelný mnohostěn, který má s vrcholů a v stěn. Např. krychle má 6 stěn a 8 vrcholů a pravidelný osmistěn

má 8 stěn a 6 vrcholů. Pravidelný dvanáctistěn má 12 stěn a 20 vrcholů a pravidelný dvacetistěn má 12 vrcholů a 20 stěn. Tato vlastnost ztrácí na svém původu u pravidelného čtyřstěnu, kde počet stěn a vrcholů je týž.



Obr. 4

Označme s , v , h po řadě počet stěn, vrcholů a hran pravidelného mnohostěnu. Potom platí

$$s + v = h + 2$$

Presvědčte se o tom sami. Napsaná nerovnost neplatí však jen pro pravidelné mnohostěny, nýbrž pro všechny mnohostěny, které znáte a o nichž se ve škole učíte.

Snad vás bude zajímat, kdo objevil pravidelné mnohostěny. Tři z nich znal (pravidelný čtyřstěn, krychli a pravidelný dvanáctistěn) Pythagoras (6. stol. př. n. l.). Zbývajících dva objevil Theaitetos, který žil v první polovině 4. stol. př. n. l. Byl to jeden z nejnadanějších matematiků starého Řecka. Sokrates o něm prohlásil, že se stane slavným, dožije-li se mužného věku. Theaitetos však zemřel poměrně mlád.

Z technických důvodů budou obrázky týkající se pravidelného dvacetistěnu otištěny v příštím čísle.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

dráha	trajectoire <i>ž</i>
druh	genre <i>m</i> ; espèce <i>ž</i>
druhý	second, <i>e</i>
druhá odmocnina	racine <i>ž</i> carrée
umocnit na druhou	élever au carré <i>m</i>
důkaz	démonstration <i>ž</i>
důkaz matematickou indukcí	démonstration par récurrence <i>ž</i>
nepřímý důkaz	démonstration apagogique; démonstration par l'absurde
důsledek	conséquence <i>ž</i>
dutý	concave
dvacátý	vingtième
dvacet	vingt
dvacetina	vingtième <i>m</i>
dvacetistěn	icosaèdre <i>m</i>
dvakrát	deux fois
dvanáct	douze
dvanáctina	douzième <i>m</i>
dvanáctý	douzième
dvojice	couple <i>m</i>
dvojčlen	binôme <i>m</i>
dvojmoc	carré <i>m</i>
dvojnásobný	doubo
dvojný	double
dvojpoměr	rapport <i>m</i> anharmonique; birapport <i>m</i>
dvojúhelník sférický	fuseau <i>m</i> sphérique
dvojznačný	ambigu, <i>e</i>
dualita	dualité <i>ž</i>
duální	dual, <i>e</i>

E

ekvidistantní
ekviskalární plocha
ekvivalence
ekvivalentní
elementární
eliminovat
elipsa
elipsoid
 elipsoid rotační
 (protáhlý, zploštělý)
 elipsoid trojosý
eliptický
epicykloida
euklidovský
evidentní
evolventa
exaktní
extremita
exces
existence
existovat
explicitní
exponenciální
exponent
 extrém
extrémní hodnota funkce

équidistant, e
surface *ž* de niveau *m*
équivalence *ž*
équivalent, e
élémentaire
éliminer
ellipse *ž*
ellipsoïde *ž*
 ellipsoïde de révolution
 (allongé, aplati)
 ellipsoïde scaléne
elliptique
épicycloïde *ž*
eulidien, enne
évident, e
développante *ž*
exact, e
excentricité *ž*
excès *m*
existence *ž*
exister
explicite
exponentiel, elle
exposant *m*
extrême *m*
extrémé *m*

F

faktor
faktoriál
fokální
forma (homogenní mnohočlen)
formule
fotogrammetrie
funkce
 spojitá funkce
 výroková funkce

facteur *m*
factorielle *ž*
focal, e, aux
forme *ž*
formule *ž*
photogrammétrie *ž*
fonction *ž*
 fonction continue
 fonction propositionnelle;
 forme *ž* propositionnelle

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

5

ROČNÍK 50, 1971-1972, LEDEN

**15
mlt**

**ROČNÍK 50
LEDEN 1972**

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
a zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellrová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

J. S.: Tři malé rozhovory	193
Ing. J. Hroník: Zajímavá „dualita“	195
Dr. O. Řiha: Sčítání matic a násobení matice reálným číslem	198
Ing. M. Geryk: Iterační hledání kořene a minima funkce (Dokončení)	203
Dr. O. Houdek: O rychlostech molekul	213
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Odvozené jednotky SI se samostatným názvem	219
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Odvozené jednotky SI	220
Naše soutěž	221
MMO	229
J. Mikulčák: Nicolas Bourbaki	231
J. Kotyk: Z dějin astrologie	234
S. Horák: Ze zahraničních časopisů	239
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky



Tři malé rozhovory

Běží nám jubilejní, padesátý ročník *Rozhledů* a tak se často vzpomíná. Vybrali jsme si dnes tři známé matematiky, kteří byli kdysi pilnými čtenáři našeho časopisu a také úspěšně řešili úlohy o ceny. Vyhledali jsme je v Matematickém ústavu ČSAV v Praze, abychom se jich zeptali, jak to tehdy bylo. Poslyšte nejprve, co nám řekl *prof. dr. Vladimír Knichal*, člen korespondent ČSAV:

Rozhledy matematicko-fyzikální jsem odebíral od jejich 1. ročníku, tj. od r. 1921. *Rozhledy* byly v té době hodně zaměřeny k doplnění středoškolského učiva z matematiky, z fyziky a z deskriptivní geometrie. Články, které tam byly uveřejněny, byly velmi přístupné žákům středních škol, tj. žákům tehdejších gymnasií, reálných gymnasií, reformních reálných gymnasií a reálék. Pokud si vzpomínám, většina mých spolužáků ráda četla tyto články, každý ovšem si vybíral tematiku, která mu nejlépe vyhovovala.

Velmi krásným doplňkem těchto *Rozhledů* byly těžší úlohy, které byly v každém 1. čísle publikovány a za jejichž řešení byla vždy koncem školního roku udělována knižní od-

měna. Sám jsem se s úspěchem od kvarty účastnil řešení těchto příkladů jak z matematiky, tak z fyziky a z deskriptivní geometrie. Uznání, které mi bylo vysloveno, bylo mi velkou pobídkou k dalšímu studiu, ba dokonce mohu říci, že do značné míry ovlivnilo mé rozhodnutí studovat tyto předměty na Karlově universitě.

O jednu generaci mladší je *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.* Zde je jeho vzpomínka:

I mě vlastně přivedly *Rozhledy* ke studiu matematiky. Setkal jsem se s nimi začátkem čtyřicátých let. Studoval jsem na smíchovském Vančurově gymnasiu a na popud prof. Ladislava Klíra, který v *Rozhledech* často publikoval, jsem se stal jejich odběratelem. Docela se mi líbily — nejvíce ovšem úlohy o ceny. Pamatuji se však, že číslo s první částí textů úloh se dostávalo na školu až po termínu odevzdání řešení a také se mi zdálo dlouho, než řešení byla zveřejněna. Při čtení *Rozhledů* jsem se rovněž seznámil s činností Jednoty českých matematiků a fyziků, do níž jsem pak ještě za studentských let vstoupil.

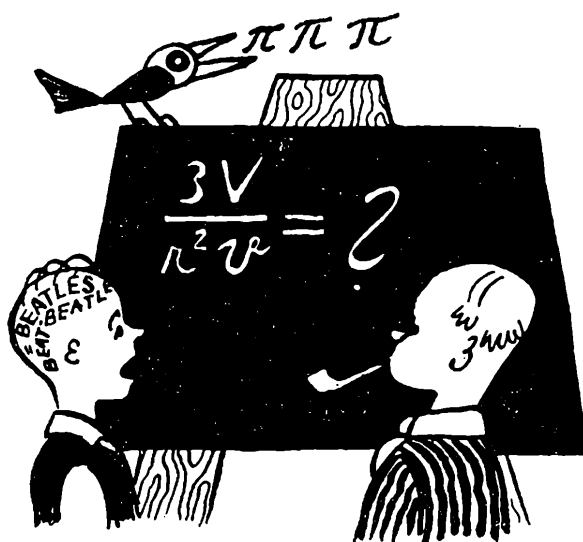
Také *prof. dr. Jaroslav Kurzweil, člen korespondent ČSAV a laureát státní ceny* studoval střední školu za druhé světové války a maturoval krátce po ní. Zde je, co nám řekl:

Když jsem byl v kvartě reálného gymnasia, pokoušel jsem se řešit výpočtem úlohy z geometrie, které se na tomto stupni řešily konstruktivně. O mých pokusech se dozvěděl jeden z profesorů — byl to, myslím, prof. Peterka a neučil v naší třídě. Upozornil mě na časopis *Rozhledy* a zvláště na rubriku „Úlohy o ceny“. Příklady v *Rozhledech* mě zajímaly a rád jsem je řešil.

Končí naše návštěva v Matematickém ústavu ČSAV a nám nezbývá než poděkovat za přátelský rozhovor.

J. S.

Ptali se Galilea, k čemu slouží geometrie. Odpověděl: „K vážení, k měření a k počítání; k vážení ignorantů, k měření hlupáků a k počítání jedněch i druhých.“



Zajímavá „dualita“ ■

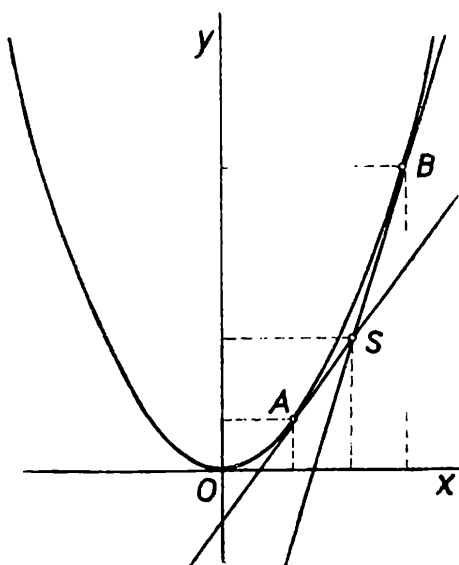
ING. JAROMÍR HRONÍK, Brno

Dána je parabola $y = ax^2$ a její dvě tečny v různých bodech A a B . Pro souřadnice průsečíku S těchto tečen pak platí (obr. 1)

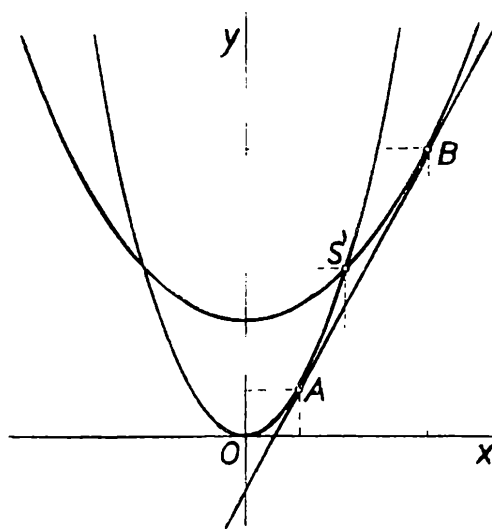
$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$|y_S| = \sqrt{y_A \cdot y_B}.$$

Jako jakýsi „duální“ případ k této úloze uvažujeme nyní dvě paraboly o rovnicích $y = ax^2$ a $y = bx^2 + c$, které mají společnou tečnu



Obr. 1



Obr. 2

(viz obr. 2). V tomto případě pak platí pro souřadnice průsečíku těchto parabol S' tyto vztahy:

$$|x_{S'}| = \sqrt{x_A \cdot x_B} \qquad y_{S'} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Důkaz:

Část první. Tečna k parabole $y = ax^2$ v bodě A je dána rovnicí

$$\frac{y + y_A}{2} = ax x_A$$

a obdobně v bodě B rovnicí

$$\frac{y + y_B}{2} = ax x_B.$$

Jelikož body A i B jsou na parabole, musí jejich souřadnice vyhovovat rovnici dané paraboly. Platí tudíž

$$y_A = ax_A^2 \qquad y_B = ax_B^2$$

Dostáváme tedy pro tečny soustavu dvou rovnic

$$y_A + ax_A^2 = 2ax x_A \tag{1}$$

$$y + ax_B^2 = 2ax x_B, \tag{2}$$

jejichž řešením podle x a y obdržíme souřadnice průsečíku obou těchto tečen. Odečtením rovnice (2) od (1) dostaneme

$$a(x_A^2 - x_B^2) = 2ax(x_A - x_B)$$

čili po zkrácení

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \tag{3}$$

Dosadíme-li za x např. do rovnice (1) vztah (3), určíme druhou souřadnici průsečíku S .

$$y_S = 2ax_A \frac{x_A + x_B}{2} - ax_A^2$$

čili

$$y_S = ax_A x_B$$

neboli

$$y_S = a \sqrt{\frac{y_A}{a}} \sqrt{\frac{y_B}{a}}$$

tedy

$$|y_S| = \sqrt{y_A \cdot y_B}.$$

Poznámka. Nastane-li za předpokladu $a > 0$ případ, že $x_A > 0$ avšak $x_B < 0$ (případně naopak), pak souřadnice y_S je záporná.

Část druhá. Rovnice tečen k sousým parabolám $y = ax^2$, $y = bx^2 + c$ jsou:

$$y + y_A = 2axx_A$$

$$y + y_B = 2(bxx_B + c).$$

Jelikož $y_A = ax_A^2$ podobně $y_B = bx_B^2 + c$ vychází po dosazení do rovnic tečen

$$y = 2axx_A - ax_A^2$$

$$y = 2bxx_B - bx_B^2 + c.$$

Poněvadž tyto tečny mají tvořit jedinou přímku, musí se sobě rovnat příslušné koeficienty u proměnných, jakož i absolutní členy. Tedy

$$2ax_A = 2bx_B \quad \text{podobně} \quad ax_A^2 = bx_B^2 - c$$

a z toho

$$b = a \frac{x_A}{x_B} \quad (4)$$

$$c = ax_A(x_B - x_A) \quad (5)$$

Dále odečtením rovnic parabol obdržíme

$$x_{S'}^2(a - b) = c$$

Po dosazení za konstanty b , c výrazy (4) a (5) obdržíme po úpravě

$$x_{S'}^2 = x_A \cdot x_B$$

čili

$$|x_{S'}| = \sqrt{x_A \cdot x_B}.$$

Poznámka. Je-li $x_A < 0$ musí být též $x_B < 0$ a pak rovněž $x_{S'}$ je záporné číslo.

Pro druhou souřadnici průsečíku parabol vychází

$$y_{S'}(a - b) = ac.$$

Z rovnic tečen k parabolám $y = ax^2$, $y = bx^2 + c$

$$y = 2axx_A - y_A$$

$$y = 2bxx_B - y_B + 2c$$

vychází porovnáním absolutních členů

$$y_A = y_B - 2c$$

čili

$$c = \frac{y_B - y_A}{2} \quad (6)$$

a porovnáním koeficientů

$$ax_A = bx_B$$

$$a^2 \cdot x_A^2 = b^2 \cdot x_B^2$$

neboli

$$ay_A = b(y_B - c)$$

čili

$$b = \frac{ay_A}{y_B - c}$$

a po dosazení výrazu (6) za konstantu c obdržíme

$$b = \frac{2ay_A}{y_A + y_B} \quad (7)$$

Dosazením výrazů (6) a (7) do vztahu $y_{S'}(a - b) = ac$ vychází druhá souřadnice průsečíku parabol

$$y_{S'} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Závěrem třeba připomenout, že v této úvaze se nedá mluvit o dualitě povídá bodu přímka a přímce bod.

Literatura: Ernst-Otto Busolt: „Eine merkwürdige ‚Dualität‘“ v časopise „Praxis der Mathematik“ (sešit 11, 1967).

Sčítání matic a násobení matice reálným číslem

RNDr. OTTA ŘÍHA, Ped. f. Brno

Sčítání matic

Příznivcům sportu jistě není nutno vysvětlovat co rozumíme výhodou domácího prostředí a jakou cenu mají v kolektivních sportech body přivezené z cizího hřiště. Z tohoto důvodu uvádějí některé časopisy (Gól, Československý sport) tabulky fotbalové ligy tak, že kromě normální tabulky uvádějí zvlášť tabulku pro utkání hraná doma a zvlášť pro utkání hraná venku. Po skončení I. fotbalové ligy ročníku 1970/71 vy-
padaly tyto tabulky tak, jak je znázorněno na str. 199.

Čtenář, kterému je znám pojem matice (viz články v předchozím ročníku Rozhledů, zejména články „O jednom způsobu kódování“ z 1. čísla

	Doma					Venku					Celkem										
1. Trnava	15	14	1	0	43	7	29	15	3	5	7	9	20	11	30	17	6	7	52	27	40
2. VSS	15	13	1	1	31	7	27	15	3	3	9	15	23	9	30	16	4	10	46	30	36
3. Teplice	15	12	3	0	30	5	27	15	2	4	9	8	21	8	30	14	7	9	38	26	35
4. Sparta	15	9	3	3	23	14	21	15	5	4	6	15	18	14	30	14	7	9	38	32	35
5. Ostrava	15	8	6	1	26	13	22	15	3	6	6	13	19	12	30	11	12	7	39	32	34
6. Slovan	15	8	4	3	25	13	20	15	3	6	6	9	15	12	30	11	10	9	34	28	32
7. Inter	15	10	4	1	27	8	24	15	1	4	10	8	26	6	30	11	8	11	35	34	30
8. Prešov	15	11	4	0	24	3	26	15	0	4	11	4	29	4	30	11	8	11	28	32	30
9. Žilina	15	8	5	2	29	14	21	15	1	6	8	10	26	8	30	9	11	10	39	40	29
10. Trinec	15	10	4	1	23	9	24	15	2	1	12	9	27	5	30	12	5	13	32	36	29
11. Trenčín	15	11	2	2	27	12	24	15	1	3	11	11	32	5	30	12	5	13	38	44	29
12. Slavia	15	8	3	4	17	12	19	15	3	4	8	10	21	10	30	11	7	12	27	33	29
13. Dukla	15	7	4	4	28	14	18	15	3	4	8	14	27	10	30	10	8	12	42	41	28
14. Lokomotiva	15	8	5	2	19	4	21	15	1	3	11	8	26	5	30	9	8	13	27	30	26
15. Plzeň	15	6	4	5	19	19	16	15	2	2	11	11	35	6	30	8	6	16	30	54	22
16. Gottwaldov	15	4	6	5	15	15	14	15	1	0	14	16	41	2	30	5	6	19	30	56	16

a „Tabulky informací“ ze 4. čísla) si jistě uvědomil, že na tabulky fotbalové ligy můžeme pohlížet jako na matice typu $(16; 7)$, přičemž čísla v jednotlivých sloupcích pro každé mužstvo pořadě udávají počet sehraných utkání, počet utkání vítězných, prohraných, nerozhodných, počet branek vstřelených, obdržených a získané body.

Operaci, která maticím **D** (doma), **V** (venku) přiřazuje matici **C** (celkem) budeme nazývat *sčítání matic* a budeme pro ně používat zápisu $\mathbf{D} + \mathbf{V} = \mathbf{C}$.

Uvedený příklad nás vede k následující definici:

Součet matice **A** typu $(m; n)$ s maticí **B** typu $(m; n)$ je matice **C** typu $(m; n)$. Prvek v *i*-tém řádku *j*-tého sloupce matice **C** je součtem prvků v *i*-tém řádku *j*-tého sloupce matic **A** a **B**.

Příklady:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 12 & -13 & 8 & -59 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 12 & 0 & -6 \\ -11 & 4 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 1 & -6 \\ 1 & -9 & 11 & -66 \end{pmatrix}$$

Z definice součtu matic plyne, že sčítat můžeme pouze matice stejných typů.

Úloha 1. Rozhodněte, zda je sčítání matic asociativní, tj. zda pro všechny matice **A**, **B**, **C** téhož typu platí $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$. Správnost závěru dokažte!

Úloha 2. Rozhodněte, zda je sčítání matic komutativní, tj. zda pro všechny matice **A**, **B** téhož typu platí $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Správnost závěru dokažte!

Úloha 3. V článku „Dělitelé nulové matice“ v 8. čísle předchozího ročníku Rozhledů jsme se dozvěděli, že matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule se nazývá *matice nulová* a přesvědčili jsme se, že nulová matice **O** má při násobení matic stejnou vlastnost jako číslo nula při násobení čísel, tj. $\mathbf{OA} = \mathbf{AO} = \mathbf{O}$ pro všechny matice **A** za předpokladu, že **O**, **A** jsou násobitelné. Při sčítání čísel pro každé číslo *a* platí: $0 + a = a + 0 = a$. Zjistěte, jestli nulová matice má obdobnou vlastnost při sčítání matic.

Úloha 4. Povšimněte si, jak můžeme v příkladě uvedeném na začátku článku určit matici **V**, jestliže jsou dány matice **C** a **D** a definujte *rozdíl matic* téhož typu.

Úloha 5. Čísla *a*, *b*, pro která platí $a + b = 0$ nazýváme čísla navzájem opačnými. Opačným číslem k číslu *a* je číslo $-a$. a naopak. Obdobně definujte matici $-\mathbf{A}$ opačnou k matici **A**. Uvědomte si, že pro reálná čísla platí: odčítání je totožné s přičítáním čísla opačného, tj.

$a - b = a + (-b)$ a zamyslete se, jestli obdobná věta platí i pro odčítání matic.

Se sčítáním matic se setkáváme například při řešení úloh o směsi.

Příklad 1. Určete cenu 1 kg bylinkového čaje, který vznikne smícháním čtyř druhů sušených bylin v poměru 5 : 3 : 2 : 1 jejichž cena v Kčs za 1 kg je pořadě 10, 40, 55 a 120.

Řešení: Jestliže budeme uvažovat, že výsledná směs bude obsahovat 1 kg bylin čtvrtého, nejdražšího druhu, jsou daným poměrem určena i množství ostatních druhů. Každé bylině i vzniklé směsi přiřadíme matici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde x je váha uvažovaného množství a y je jeho cena. Smísení uvedených čtyř druhů bylin je pak charakterizováno maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \cdot 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \cdot 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot 55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \cdot 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

která vyjadřuje, že dostaneme 11 kg čaje, jehož cena je 400 Kčs, takže cena 1 kg čaje je po zaokrouhlení 36,40 Kčs.

Příklad 2. Kolikaprocentní líh dostaneme, jestliže smísíme 0,4 l lihu 90‰ s 0,6 l lihu 60‰? Jaká bude cena 1 l výsledného roztoku, jestliže 1 l 90‰ lihu stojí 120 Kčs?

Řešení: Směšovaným roztokům i výslednému roztoku přiřadíme matici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tak, že x je celkový objem roztoku, y objem v něm obsaženého čistého lihu a z cena roztoku. Smísení je charakterizováno maticovou rovnicí

$$\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \cdot 0,9 \\ 0,4 \cdot 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,6 \cdot 0,6 \\ 0,6 \cdot 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0,72 \\ 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

z které vyplývá, že smísením dostaneme 1 l roztoku, obsahujícího 72 lihu; cena 1 l tohoto roztoku je 92 Kčs.

	EF80	PCL85	PCF82		EF80	PCL85	PCF82
Oliver	240	120	240	Oliver	480	240	480
Dajana	400	200	400	Dajana	800	400	800
Karolína	200	100	200	Karolína	400	200	400

První matice obsahuje údaje o potřebě elektronek pro výrobu uvedených typů televizorů v jednom závodě n. p. Tesla za jeden týden. Druhá matice udává potřebu jednotlivých typů elektronek pro výrobu uvedených typů televizorů v následujícím týdnu, ve kterém po dovolené nastoupila do práce i druhá směna, takže se výroba každého typu televizoru zdvojnásobila.

Druhou matici můžeme dostat tak, že každý prvek první matice násobíme číslem 2.

Provedená úvaha naznačuje, že bude účelné *definovat násobení matice reálným číslem* takto:

Součin reálného čísla k s maticí $\mathbf{A}$ typu $(m; n)$ je matice $\mathbf{B}$ typu $(m; n)$. Prvek v i -tém řádku j -tého sloupce matice $\mathbf{B}$ je k -násobek prvku v i -tém řádku j -tého sloupce matice $\mathbf{A}$.

Například:

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Úloha 6. Dokažte, že pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a reálná čísla k, l platí:

- $k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B}$,
- $(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$,
- $(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$,
- $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$,
- $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
- $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$,
- $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

Poznámky: Z definice součtu matic je zřejmé, že součet matic typu $(1; 2)$ (totéž platí pro typ $[2; 1]$) je definován stejně jako součet vektorů, jejichž souřadnice se rovnají prvkům matice (viz Matematika pro II. roč. SVVŠ, str. 119).

Také násobení matic typu $(2; 1)$ a $(1; 2)$ reálným číslem je definováno stejně jako násobení vektoru, jehož souřadnice jsou rovny prvkům matice (viz Matematika pro II. roč. SVVŠ, str. 119).

V úloze 6 jsme se přesvědčili, že sčítání matic typu $(2; 1)$ a $(1; 2)$ a násobení těchto matic reálným číslem má všechny vlastnosti, které má sčítání vektorů a jejich násobení reálným číslem. Je tomu tak proto, že jak matice téhož typu vzhledem k operacím sčítání a násobení reálným číslem, tak vektory jsou modelem téže algebraické struktury, kterou nazýváme *vektorový prostor*.

Iterační hledání kořene a minima funkce

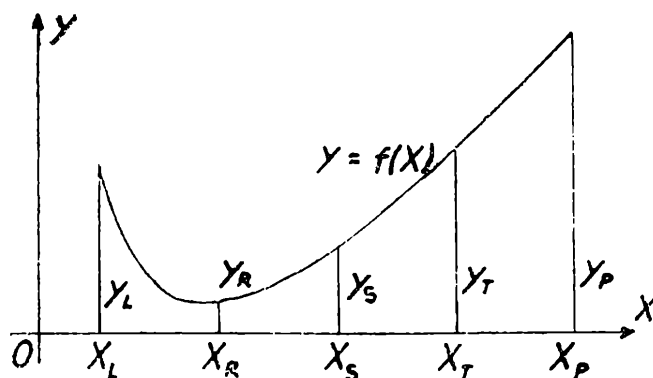
MILAN GERYK, Přerov

(Dokončení)

Hledání minima funkce.

Nechť je dána spojitá funkce $y = f(x)$ v definičním oboru $I = \langle x_I, x_{II} \rangle$, která nabývá právě v jednom bodě $x_{kr} \in I$ hodnoty nejmenší ze všech funkčních hodnot; tuto hodnotu nazveme *absolutním minimem* funkce $f(x)$ v intervalu I a bod x_{kr} *kritickým bodem*. Předpokládáme dále, že pro $x < x_{kr}$ funkce klesá (pokud x_{kr} není rovno x_I), tj. její funkční hodnoty s rostoucím x se zmenšují, pro $x > x_{kr}$ funkce roste (pokud x_{kr} není rovno x_{II}), tj. funkční hodnoty se s rostoucím x zvětšují. U speciálních funkcí lze hledat minimum přímými metodami. Budeme se však zabývat iteračními postupy a vyloučíme i případ, kdy lze nalézt kritický bod z rovnice, že první derivace $f'(x) = 0$, např. metodami předešlého odstavce.

1. Metoda půlení intervalu. Jako v předešlém odstavci kritický bod bude sevřen tentokrát v uzavřeném intervalu $\langle x_L, x_P \rangle$. Pro první krok dosadíme $x_L = x_I, x_P = x_{II}$. Zvolíme x_S dle (3). Podle předpokladu nemůže být $f(x_S)$ větší než větší z hodnot $f(x_L), f(x_P)$. Platí-li $f(x_L) \leq$



Obr. 6

$\leq f(x_S) < f(x_P)$, pak x_S dosadí se za x_P (při opačném smyslu obou nerovností analogicky dosadí se x_S za x_L). Tím se interval pro x_{kr} zmenšil na polovinu a krok se ukončil. Je-li $f(x_S)$ menší než menší z hodnot $f(x_L), f(x_P)$, je třeba najít

$$x_R = \frac{x_L + x_P}{2} \quad (11)$$

a pak při $f(x_R) \leq f(x_S) < f(x_P)$ posunout pravou mez, tj. x_S dosadit za x_P , x_R za x_S (tím se interval zkrátil na polovinu a krok se ukončil),

nebo při $f(x_L) > f(x_R) > f(x_S)$ posunout levou mez, tj. x_R dosadit za x_L a dále najít

$$x_T = \frac{x_P + x_S}{2} \quad (12)$$

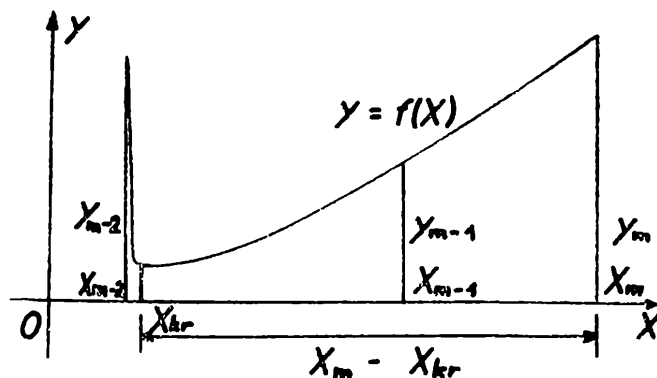
za účelem posunutí buď meze x_L do bodu x_S a x_S do x_T při $f(x_L) > f(x_S) \geq f(x_T)$, nebo meze x_P do bodu x_T v opačném případě $f(x_S) < f(x_T) < f(x_P)$, čímž je krok opět uzavřen a interval pro x_{kr} zkrácen na polovinu. Pro zkrácení intervalu na polovinu je třeba najít jednu až dvě funkční hodnoty (případná třetí hodnota slouží již i pro další krok). Výpočet se ukončí, jakmile interval $\langle x_L, x_P \rangle$ se zmenší pod požadovanou hodnotu přesnosti x nebo jakmile funkční hodnoty ve třech bodech se vzájemně liší méně, než je požadovaná přesnost y .

2. Metoda geometrického zmenšování přírůstku. Přírůstek hodnoty x bude se krok po kroku zmenšovat podle zásady pro geometrickou posloupnost s kladným kvocientem q , znaménko přírůstku však závisí na předcházejících dvou funkčních hodnotách:

$$x_n = x_{n-1} + \Delta \cdot q^n \cdot \text{sgn} [f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})], \quad (13)$$

$$n = 2, 3, 4, \dots,$$

$$x_1 = x_0 + \Delta \cdot q \quad (14)$$



Obr. 7

Prakticky to znamená: vyjde se z hodnot x_0 a x_1 . Je-li $f(x_1) \geq f(x_0)$, leží minimum nalevo od x_1 a znaménko přírůstku se zvolí záporné. V opačném případě leží minimum napravo od x_0 a znaménko přírůstku $\Delta \cdot q^2$ k hodnotě x_1 zvolí se kladné. Z hodnot x_1 a x_0 získá se x_2 dle (13), stejným způsobem pak x_3 atd. Ve vzorcích figurují dosud blíže neurčené veličiny x_0 , Δ , q . Tyto hodnoty vybereme jednak z podmínky, aby každý bod x intervalu I byl dosažitelný řadou

$$x = x_0 + \Delta(q \pm q^2 \pm q^3 \pm \dots), \quad (15)$$

při čemž nesmí existovat taková volba znamének, aby tato řada poskytla bod mimo interval I , jednak z podmínky, aby bod x_{kr} byl dosažen s požadovanou přesností na nejmenší možný počet kroků. Víme, že u konvergentní geometrické řady je $q < 1$. K bližšímu určení pomůže tato úvaha. Nechť leží kritický bod těsně napravo od bodu x_{m-2} , ale přitom platí $x_{m-1} > x_{m-2}$, $f(x_{m-1}) < f(x_{m-2})$ (nejnepříznivější případ). Pak přírůstek $\Delta \cdot q^m \cdot \operatorname{sgn} [f(x_{m-2}) - f(x_{m-1})]$ je kladný a od kritického bodu dělí nás vzdálenost

$$x_m - x_{kr} = x_m - x_{m-2} = \Delta \cdot q^{m-1}(1 + q) \quad (16)$$

Zbývající členy nekonečné geometrické řady (při stejných znaménkách všech členů) dávají součet

$$\Delta(q^{m+1} + q^{m+2} + \dots) = \Delta \cdot q^{m+1}/(1 - q), \quad (17)$$

který nemá být menší než uvedená vzdálenost (16). Řešením nerovnosti dostaneme $q \geq \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Čím menší je q , tím rychleji se interval pro x_{kr} zmenšuje. Zvolíme proto

$$q = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \quad (18)$$

Součet geometrické řady (s kladnými členy) počínající druhým členem je $\Delta \cdot q^2/(1 - q)$ a udává vzdálenost bodu x_1 od každého z okrajů intervalu I , neboť jinak by buď zůstaly některé body z I nedosažitelné řadou, nebo by byly dosažitelné i body mimo I . Proto

$$x_1 = \frac{x_I + x_{II}}{2} \quad (19)$$

$$\Delta = (x_{II} - x_I) \left(1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) \quad (20)$$

$$x_0 = x_{II} - (x_{II} - x_I) \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \quad (21)$$

Je zřejmé, že počet kroků se shoduje s počtem vypočtených funkčních hodnot a po n -tém kroku známe maximální velikost intervalu, v němž leží x_{kr} :

$$\left[x_n - \frac{x_{II} - x_I}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^{n-1} \quad x_n + \frac{x_{II} - x_I}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^{n-1} \right] \quad (22)$$

o délce

$$\frac{2\Delta \cdot q^{n+1}}{1 - q} = (x_{II} - x_I) \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^{n-1} \quad (23)$$

Výpočet se ukončí stejnými kritérii jako v předešlé metodě. Kritérium přesnosti hodnoty x lze nahradit předem určeným počtem kroků n , po jejichž absolvování vzdálenost (23) není větší než požadovaná přesnost

10^{-k}. Odtud plyne

$$n \geq 1 + \frac{k + \log(x_{II} - x_I)}{\log 2} \cdot 2 > n - 1 \quad (24)$$

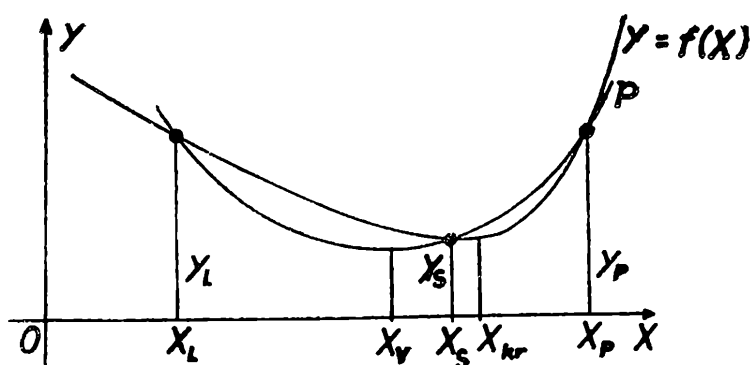
Teoreticky tato metoda spotřebuje více funkčních hodnot k dosažení stejné přesnosti než metoda předešlá, algoritmus je však jednodušší.

3. Analogicky k třetí metodě hledání kořene lze hledat minimum skokovou změnou přírůstku souřadnice x . Skok by nastal v okamžiku, kdy nová funkční hodnota je větší než předcházející. Při $a = 2$ k dosažení přesnosti $(x_{II} - x_I) \cdot 2^{-n}$ pro hodnotu x_{kr} je třeba n až $4n$ kroků a stejný počet funkčních hodnot, takže výhoda jednoduššího algoritmu je tím zcela smazána.

4. Je-li výpočet funkční hodnoty pracný, pak je třeba vybrat raději složitější algoritmus, který však najde minimum na pokud možno malý počet vypočtených funkčních hodnot. Jednou z nich je prokládání paraboly

$$y = ax^2 + bx + c \quad (25)$$

třemi body dané funkce a položení souřadnice x vrcholu této paraboly za přibližnou hodnotu kritického bodu funkce. Nechť jsou dány tři navzájem různé body $[x_L, f(x_L)]$, $[x_S, f(x_S)]$, $[x_P, f(x_P)]$, přičemž platí



Obr. 8

$x_L < x_S < x_P$. Před prvním krokem klademe $x_L = x_I$, $x_P = x_{II}$, x_S libovolný vnitřní bod intervalu I , např. ve třetině intervalu I blíže tomu krajnímu bodu, jehož funkční hodnota je menší (tuto mez označíme x_Z a její funkční hodnotu $f(x_Z)$).

Jestliže platí $f(x_S) > f(x_Z)$, pak kritický bod je v intervalu $(x_S, x_Z > \text{reps. } < x_Z, x_S)$, dosadíme tedy x_S za x_L resp. za x_P a znovu volíme x_S uvnitř (x_L, x_P) — vzhledem k podezření, že kritický bod je x_Z , x_S volíme dosti těsně u x_Z . Znovu najdeme $f(x_S)$ a zkusíme $f(x_S) > f(x_Z)$. Je-li nerovnost splněna, opakujeme postup buď do okamžiku, kdy přestane být splněna, nebo do dosažení přesnosti, tj. když $x_P - x_L$ klesne pod požadovanou přesnost hodnoty x nebo $|f(x_S) - f(x_Z)|$ pod požadovanou přesnost hodnoty y ve dvou po sobě jdoucích krocích.

Tabulka III. $y = (x - 5)x + 4$, $x \in (0; 3)$

Půlení intervalu						
P	x_L	x_S	x_P	$f(x_L)$	$f(x_S)$	$f(x_P)$
1	0	1,5	3	4	-1,25	-2
2	1,5	2,25	3	-1,25	-2,1875	-2
3	2,25	2,625	3	-2,1875	-2,234375	-2
4	2,25	2,4375	2,625	-2,1875	-2,2460938	-2,234375
5	2,4375	2,531225	2,625	-2,2460938	-2,2490234	-2,234375
6	2,4375	2,484375	2,53125	-2,2460938	-2,2497559	-2,2490234
7	2,484375	2,5078125	2,53125	-2,2497559	-2,2499390	-2,2490234
8	2,484375	2,4960938	2,5078125	-2,2497559	-2,2499847	-2,2499390
9	2,4960938	2,5019531	2,5078125	-2,2499847	-2,2499962	-2,2499390
10	2,4960938	2,4990234	2,5119531	-2,2499847	-2,2499990	-2,2499962
14	2,4997559	2,4999390	2,5001221	-2,2499999	-2,25	-2,2499999

Tabulka III. pokračování

Geometrické zmenšování přírůstku						
P	x_n	$f(x_n)$	Δx_n	x_L	x_P	F
1	0,8786797	0,3786796	0,62132035	0	3	1
2	1,5	-1,25	0,43933983	0,87867966	3	2
3	1,9393398	-1,9356602	0,31066018	1,5	3	3
4	2,25	-2,1875	0,21966992	1,93933985	3	4
5	2,4696699	-2,24908009	0,15533009	2,25	3	5
6	2,625	-2,234375	-0,10983496	2,25	2,625	6
7	2,5151651	-2,24977002	-0,07766504	2,46966994	2,625	7
8	2,4375	-2,24977002	0,05491748	2,46966994	2,625	8
9	2,4924175	-2,24994252	0,03883252	2,46966994	2,51516508	9
10	2,5312500	-2,24902344	-0,02745874	2,46966994	2,51516508	10
15	2,5037913	-2,24998564	-0,01941626	2,49241752	2,51516508	11
20	2,4960938	-2,24998474	0,00343234	2,49810440	2,50781254	16
25	2,4998816	-2,24999999	0,00060676	2,49952613	2,50023699	21
	2,5001221	-2,25	-0,00010726	2,49988156	2,50005928	26

Tabulka III. pokračování 2

Prokládání paraboly							
P	x_L	x_S	x_P	$f(x_L)$	$f(x_S)$	$f(x_P)$	F
1	0	2	3	-4	-2	-2	3
2	2,4833333	2,5	3	-2	-2,25	-2	4
3	2,4833333	2,5	3	2,2497222	-2,25	-2	5
4	2,4833333	2,5	2,5000003	2,2497222	-2,25	-2,2499999	6

Tabulka IV. $y = -\log x - 2 + x$, $x \in (0,1;3)$

Půlení intervalu							
P	x_L	x_S	x_P	$f(x_L)$	$f(x_S)$	$f(x_P)$	F
1	0,1	1,55	3,	-0,9	-0,64033170	0,52287874	3
2	0,1	0,825	1,55	-0,9	-1,09145394	-0,6403317	4
3	0,1	0,4625	0,825	-0,9	-1,20261175	-1,0914539	5
4	0,28125	0,4625	0,64375	-1,16784254	-1,20261175	-1,1649672	7
5	0,371875	0,4625	0,553125	-1,19852199	-1,20261175	-1,1896983	9
6	0,371875	0,4171875	0,4625	-1,19852199	-1,20314379	-1,2026118	10
7	0,4171875	0,43984375	0,4625	-1,20314379	-1,20345468	-1,2026118	12
8	0,42851563	0,43984375	0,45117188	-1,20345104	-1,20345468	-1,2031702	14
9	0,42851563	0,43417969	0,43984375	-1,20345104	-1,20348982	-1,2034547	15
10	0,43134766	0,43417969	0,43701172	-1,20347979	-1,20348982	-1,2034814	17
13	0,43382569	0,43417969	0,43453370	-1,20348958	-1,20348982	-1,2034898	23

Tabulka IV. pokračování

Geometrické zmenšování přírůstku						
P	x_n	$f(x_n)$	Δx_n	x_L	x_P	F
1	0,94939034	-1,0280545	0,60060967	0,1	3	1
2	1,55	-0,6403317	-0,42469517	0,1	1,55	2
3	1,12530484	-0,9259653	-0,30030484	0,1	1,12530844	3
4	0,825	-1,0914539	-0,21234759	0,1	0,94939034	4
5	0,61265242	-1,1745617	-0,15015242	0,1	0,825	5
6	0,4625	-1,2026117	-0,10617379	0,1	0,61265242	6
10	0,35632621	-1,1955216	0,07507621	0,35632621	0,61265242	7
15	0,42040777	-1,2032630	0,01876905	0,42040777	0,44695121	11
20	0,43173589	-1,2034823	0,00331793	0,43173589	0,43917682	16
25	0,43373844	-1,2034895	0,00058653	0,43373844	0,43456792	21
	0,43409245	-1,20344898	0,00410368	0,43409245	0,43432497	26

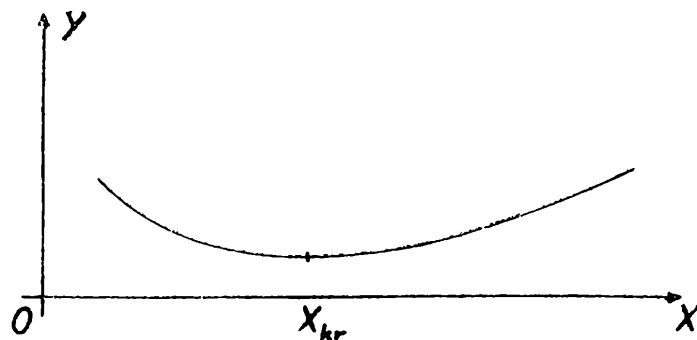
Tabulka IV. pokračování 2

Prokládání paraboly								
P	x_L	x_S	x_P	$f(x_L)$	$f(x_S)$	$f(x_P)$	x_v	F
1	0,1	1,06666666	3	-0,9	-0,96136206	0,5228787	0,69407001	3
2	0,1	0,69407001	1,06666666	-0,9	-1,1473333	-0,9613621	0,61684770	4
3	0,1	0,61684770	0,69407001	-0,9	-1,1733303	-1,1473333	0,53992091	5
4	0,1	0,53992091	0,61684770	-0,9	-1,1924092	-1,1733303	0,50816090	6
5	0,1	0,50816090	0,53992091	-0,9	-1,1978404	-1,1924092	0,48228059	7
6	0,1	0,48228059	0,50816090	-0,9	-1,2010192	-1,1978404	0,46768246	8
10	0,1	0,44519247	0,45007138	-0,9	-1,2033553	-1,2032100	0,44189376	12
13	0,1	0,43798641	0,43958184	-0,9	-1,2034742	-1,2034579	0,43687107	15
18	0,1	0,43491206	0,43517464	-0,9	-1,2034894	-1,2034889	0,43436583	20
23	0,1	0,43440421	0,43443077	-0,9	-1,2034898	-1,2034889	0,43472385	25

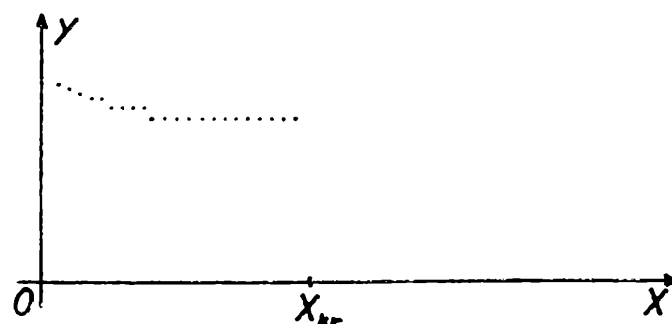
Jestliže v prvním nebo některém dalším kroku vyjde $f(x_S) \leq f(x_Z)$, kritický bod leží v intervalu (x_L, x_P) . Uvedenými třemi body proložíme parabolou (25) ve tvaru

$$y = \frac{(x - x_S)(x - x_P)}{(x_L - x_S)(x_L - x_P)} \cdot f(x_L) + \frac{(x - x_L)(x - x_P)}{(x_S - x_L)(x_S - x_P)} \cdot f(x_S) + \\ + \frac{(x - x_L)(x - x_S)}{(x_P - x_L)(x_P - x_S)} \cdot f(x_P), \quad (26)$$

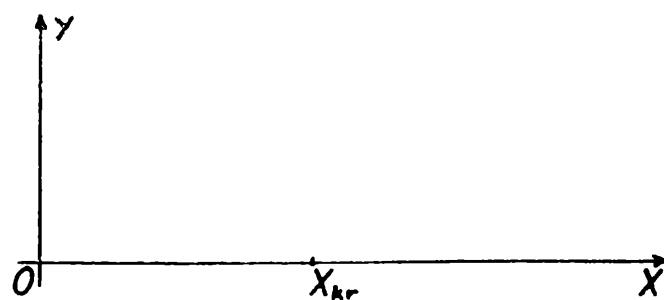
Obr. 9a



Obr. 9b



Obr. 9c



jak se lze přesvědčit dosazením těchto bodů. Souřadnice x vrcholu je:

$$x_v = x_S + \frac{1}{2} \frac{[f(x_L) - f(x_S)](x_P - x_S)^2 - [f(x_P) - f(x_S)](x_S - x_L)^2}{[f(x_L) - f(x_S)](x_P - x_S) + [f(x_P) - f(x_S)](x_S - x_L)} \quad (27)$$

kde ve jmenovateli jsou pouze nezáporní činitele.

Vzhledem k předpokladům bod x_v leží uvnitř intervalu (x_L, x_P) . Vyšlo-li $x_v = x_S$, dosadíme za x_v libovolné číslo z intervalu (x_L, x_P) různé od x_S ,

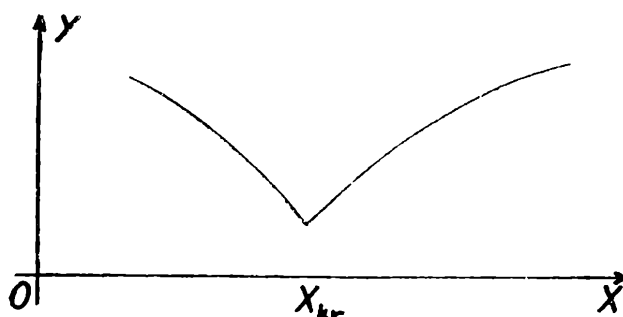
ale pokud možno těsně u x_S . Nyní najdeme $f(x_v)$ (dané funkce, ne pomocné paraboly) a na základě čtyř funkčních hodnot rozhodneme o zkrácení intervalu (x_L, x_P) pro další krok. Platí-li současně obě nerovnosti

$$x_v < x_S . \quad f(x_v) \leq f(x_S)$$

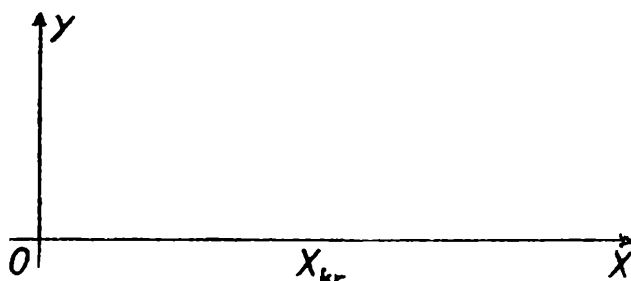
dosadíme x_S za x_P , pak x_v za x_S , platí-li pouze druhá, dosadíme x_S za x_L , pak x_v za x_S , platí-li pouze první, dosadíme x_v za x_L , neplatí-li žádná, dosadíme x_v za x_P . Tím krok skončil a výpočet opakujeme od (27) tak dlouho, dokud $x_P - x_L$ neklesne pod požadovanou přesnost hodnoty x nebo $|f(x_v) - f(x_S)|$ pod požadovanou přesnost hodnoty y ve dvou po sobě jdoucích krocích.

Tato metoda je rychlejší pro funkce, jejichž charakter v okolí kritického bodu připomíná parabolu druhého stupně; u ostatních funkcí nemá výhodu oproti metodě půlení intervalu.

Obr. 10a



Obr. 10b

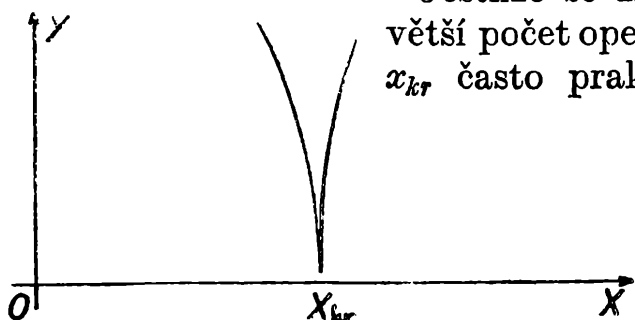


V tabulce III. jsou vypočteny minimum a kritický bod funkce $y = x^2 - 5x + 4$ v intervalu $<0; 3>$. Je předvedena metoda půlení intervalu, metoda geometrického zdrobňování přírůstku a metoda prokládání paraboly. Přesné hodnoty jsou $x_{kr} = 2,5$; $f(x_{kg}) = 2,25$. Význam p a F je stejný jako u předešlých tabulek. U druhé metody $\Delta = x_0 = 0,8786797$ $x_1 = 1,5$; Δx_n je označení pro přírůstek $x_{n+1} - x_n$. V tabulce IV. je totéž pro funkci $y = -\log x - 2 + x$ v intervalu $<0,1; 3>$. Přesné hodnoty jsou $x_{kr} = 0,43429448$; $f(x_{kr}) = -1,20348982$.

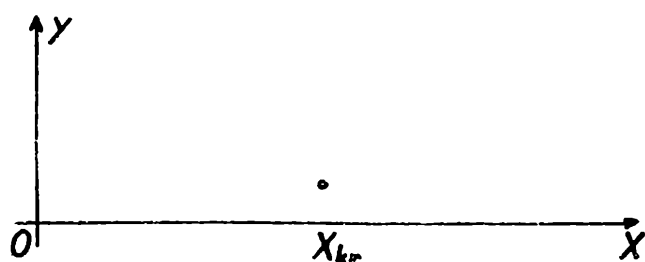
U uvedených příkladů je nápadné, že hodnota minima je nalezena s větší přesností než x_{kr} . Je to způsobeno charakterem obou funkcí v okolí kritického bodu. Viz obr. 9a. Vzhledem k zaokrouhlovacím chybám při provádění aritmetických operací vychází funkční hodnota v jistém okolí bodu x_{kr} stejná. Kdyby charakter funkce byl dle obr. 10a, pak přesnost

hodnoty funkční a x_{kr} vyšla by řádově stejná. Kdyby charakter funkce byl dle obr. 11a, pak x_{kr} by bylo vypočteno s větší přesností než $f(x_{kr})$. Každé číslicové výpočtové zařízení používá jen omezeného počtu desetinných míst, potlačená místa se projeví jen na zaokrouhlení poslední platné číslice. Při „mikroskopickém“ pohledu na okolí kritického bodu dostaneme nespojitý průběh dle obr. 9b, 10b, 11b. „Krok“ mezi sousedními hodnotami x a nejmenší vzdálenost mezi funkčními hodnotami je dána jednotkou poslední platné číslice použitého výpočtového zařízení. Např. při šestimístním zařízení mezi 2,5 a 2,50001 neexistuje mezilehlá hodnota. Snadno lze ukázat, že u prvního příkladu (tab. III.) pro všechna $x \in <2,49978; 2,50022>$ plynou výpočtem stejné funkční hodnoty na 8 desetinných míst.

Jestliže se získá funkční hodnota na podstatně větší počet operací než u příkladu 1., průběh v okolí x_{kr} často prakticky vypadá dle obr. 9c, což je



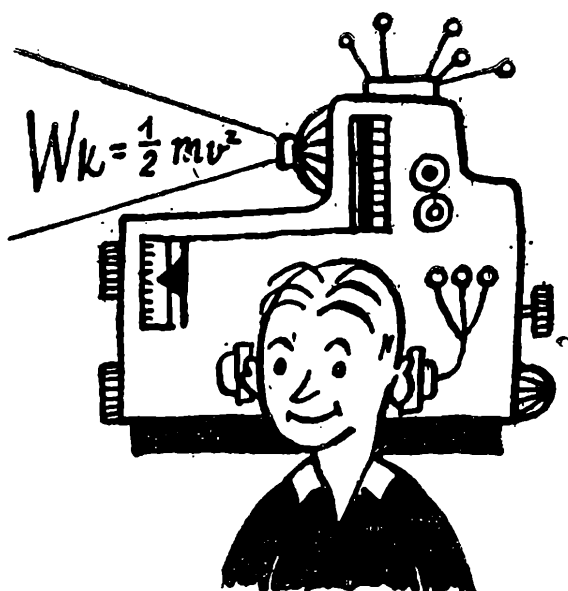
Obr. 11a



Obr. 11b

způsobeno mnohonásobným zaokrouhlováním. Odtud plynou dvě poučky. 1. Požadované přesnosti pro funkční hodnoty i pro x_{kr} stanovujeme s ohledem na charakter minima a s ohledem na docílitelnou přesnost použitého výpočtového zařízení tj. tak, aby malé kolísání hodnoty $f(x)$ dle obr. 9c nebylo považováno kritériem za průběh funkce. 2. Algoritmus volíme takový, aby kolísání bylo co nejmenší. Např. algoritmus $y = x^2 - 5x + 4$ (rozumíme $z_1 = x \cdot x$; $z_2 = 5 \cdot x$; $y = (z_1 - z_2) + 4$) (není totožný s algoritmem $y = [(x - 5)x] + 4$). Liší se počtem operací a tím, že pro $x > 2,5$ poskytuje druhý přesnější hodnoty. Při numerických výpočtech není tedy rozumné ponechávat jakoukoliv volnost v postupu, i když se jedná jen o zákony komutativní, asociativní a distributivní. Tím se osvětluje, v jakém smyslu v definici algoritmu bylo užito fráze „jednoznačný postup“.

Analogickým způsobem by bylo možno hledat též maximum funkce. Spokojíme se však relací, že $f(x)$ má maximum v bodě, v němž $-f(x)$ má minimum.



FYZIKA

0 rychlostech molekul

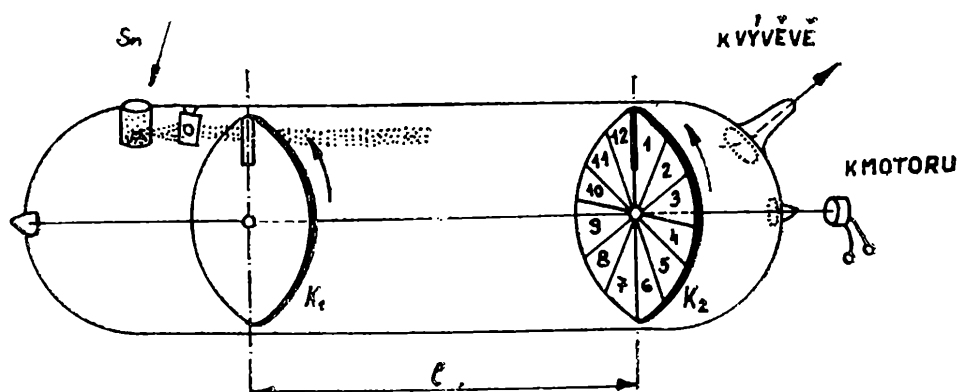
Dr. OLDŘICH HOUDEK, SPŠ Jičín

Mnohé jevy a děje v plynech jsou z hlediska molekulové fyziky závislé na rychlostech molekul. Z tohoto důvodu se stalo žádoucím vypracování experimentálních metod, které by umožnily měřit rychlost molekul a tím, mimo jiné stimulovaly rozvoj molekulové kinetických představ. Na tomto úkolu se podílelo během dvacátých a třicátých let celá řada vědců, jako např. Dunoyer, O. Stern a jeho škola, Lammert, Estermann, Compton, Edridge a další. Z experimentálního hlediska bylo zřejmé, že pro ohromné množství molekul a jejich vzájemných srážek, není možno změřit rychlost jednotlivých molekul přímo. Čím však bude plyn zředěnější, tím bude větší průměrná vzdálenost mezi dvěma po sobě následujícími srážkami molekul, tzv. střední volná dráha. Její velikost při vysokých zředěních dosahuje takové hodnoty, že možno právem mluvit o molekulových (atomových) paprscích, jejichž rychlost je již při vhodném experimentálním uspořádání měřitelná.

V původních experimentálních zařízeních byly zdrojem molekul tenké vrstvy kovu (např. Ag) naneseného na platinovém drátku žhaveném elektrickým proudem. Později, především Sternova škola vypracovala techniku získávání a detekce molekulových paprsků tvořených jednoatomovými molekulami kovových par. Jejich zdrojem je elektrická pícka, která je součástí přístroje a umožňuje získat kovové páry např. Hg, Sn, Cd apod. při měřitelné a kontrolovatelné teplotě. Malý otvor v keramické destičce před píckou vymezí z kovových par úzký paprsek, který pro-

chází prostorem s vysokým vakuem a dopadá na desku nebo film, jež jsou vhodným způsobem chlazené. Zde kondenzuje a vytváří nálet, jehož intenzitu lze různými způsoby měřit.

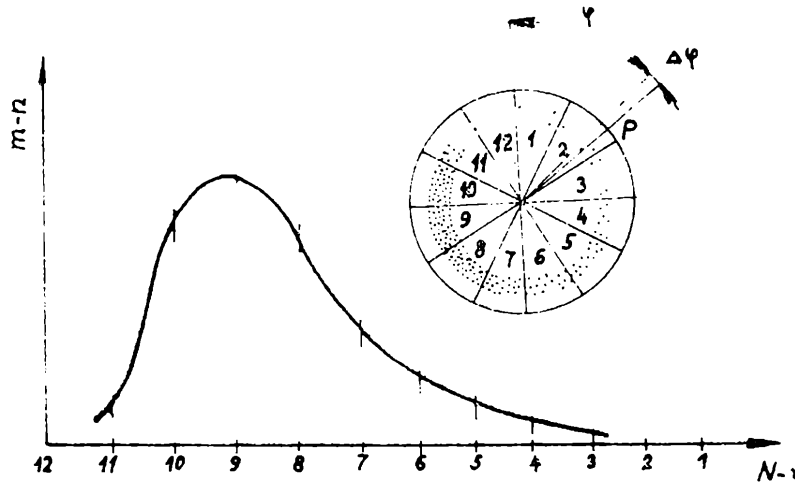
V tomto článku bude uvedena jedna z modifikací těchto experimentálních zařízení, které svou názorností umožňuje se seznámit blíže s metodikou měření a aplikací získaných výsledků především v kinetické teorii ideálního plynu.



Obr. 1

Schema přístroje je na obr. 1. Skládá se ze dvou kotoučů K_1 a K_2 rotujících na společné ose. Kotouče se otáčejí ve vakuové komoře a před prvním z nich je upevněna elektrická pícka s roztopeným cínem. Kovové páry procházejí malým otvorem v pícce a keramickou clonou, takže paprsek cínových par potom naráží na kotouč K_1 s radiální štěrbinou. V okamžiku, kdy otvory clony a kotouče se nacházejí proti sobě (obr. 1) prochází molekulový paprsek vakuovou komorou směrem k druhému (chlazenému) kotouči K_2 , který je rozdělen na řadu výsečí (segmentů), kde vytváří nálet. Kdyby rychlost všech molekul v paprsku byla stejná, došlo by ke kondenzaci jen na jednom místě kotouče K_2 . Z rozložení kondenzátu je však patrné, že rychlosti molekul jsou nejen různé, ale jsou i určitým způsobem rozloženy. Nejrychlejší molekuly kondenzovaly na nejbližších segmentech, pomalejší na segmentech postupně vzdálenějších. Struktura náletu je tak podmíněna rozložením rychlostí jednoatomových molekul cínu v paprsku vycházejícím z pícky při zcela určité teplotě T . Na obr. 2 je zakreslen kotouč K_2 po proběhnutí experimentu. Je z něho patrné, že nejrychlejší molekuly kondenzovaly na výsečích 3, 4 a 5 — nejpomalejší na segmentech 10 a 11. Poté byl kotouč rozřezán na jednotlivé výseče, které byly zváženy. Tím se určila hmotnost náletu na jednotlivých segmentech. Je zřejmé, že tyto hmotnosti jsou úměrné počtu zkondenzovaných molekul. Graf (obr. 2) znázorňující závislost hmotnosti náletu na vzdálenosti jednotlivých segmentů (tj. rychlostních intervalech) určuje tak rozložení molekul cínu v paprsku podle jejich rychlostí.

Nyní je již možno přikročit ke kvantitativnímu vyhodnocení experimentu, tj. k výpočtu rychlostí, jakými molekuly na kotouč K_2 dopadají. Jestliže se kotouče otáčejí s úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi n$ (n je frekvence otáčení), potom místu dopadu P (obr. 2) bude odpovídat úhel φ pro jehož



Obr. 2

velikost bude platit: $\varphi = \omega t = 2\pi n t$. Uvážíme-li, že doba za kterou urazí molekuly vzdálenost l mezi oběma kotouči bude rovna $t = l/v$, potom po dosazení do předchozího vztahu obdržíme pro rychlost v výraz:

$$v = \frac{2\pi n l}{\varphi}.$$

Při znalosti vzdálenosti mezi kotouči a počtu jejich otáček lze tedy vypočítat rychlost molekul dopadajících na uvažované místo kotouče K_2 .

Je-li např.: $l = 0,4$ m, $\varphi = 48^\circ = 48 \cdot \frac{\pi}{180}$ rad a $n = 3000/\text{min}$,

bude rychlost v uvažovaném místě rovna 150 m s^{-1} . V důsledku konečné šířky části segmentu kam molekuly dopadaly, bude určení rychlosti zatíženo určitou nepřesností, neboť na uvažovanou plošku dopadnou nejen

molekuly pohybující se rychlostí $v = \frac{\varphi}{2\pi n l}$, ale i o něco pomalejší

molekuly s rychlostí $v_1 = \frac{2\pi n l}{\varphi + \Delta\varphi}$ (obr. 2). Nepřesnost v určení rychlosti bude rovna:

$$\Delta v = v - v_1 = \frac{2\pi n l}{\varphi} - \frac{2\pi n l}{\varphi + \Delta\varphi} = \frac{2\pi n l \Delta\varphi}{\varphi(\varphi + \Delta\varphi)} = \frac{v \Delta\varphi}{\varphi + \Delta\varphi}.$$

Jestliže $\varphi = 2^\circ$, potom v našem případě bude $v = 6 \text{ ms}^{-1}$. Z toho plyne závěr, že rychlost molekul dopadajících na uvažované místo kotouče má velikost nacházející se mezi hodnotami 150 m s^{-1} a 144 m s^{-1} . Je možno

šířku segmentu ještě zmenšit, ale z praktického hlediska vždy bude mít konečnou šířku a bude tedy vždy existovat určitá nepřesnost v určení rychlosti molekul v paprsku.

Nejobtížnějším problémem je určení počtu molekul, pohybujících se určitou rychlostí. Experiment umožnil vyřešit tuto komplikaci zavedením tzv. relativního počtu molekul $\Delta N/N \cdot \Delta v$, kde N značí celkový počet molekul, ΔN počet molekul, jejich okamžitá rychlost má hodnotu v intervalu $v, v + \Delta v$.

Ze struktury náletu lze dále vyvodit, že existuje rychlost, kterou se pohybuje největší počet molekul a která se nazývá nejpravděpodobnější rychlost v_p . Většina molekul se pohybuje rychlostí blízkou v_p . Pouze poměrně malá část molekul se pohybuje rychlostmi, jejichž velikost se od velikosti nejpravděpodobnější rychlosti silně liší.

Rozložení rychlostí molekul získané experimentálně je v dobrém soulase s teoretickým výpočtem, který provedl J. C. Maxwell již v roce 1806. Maxwell vyšel z modelu ideálního plynu reprezentovaného sou-

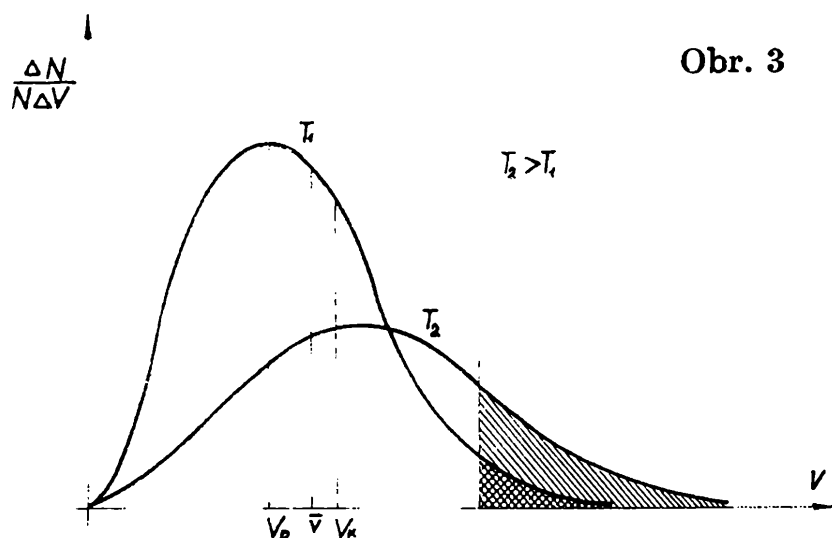
Tabulka 1

H	1510	1765	1	1
O	378	442	16	4
Sn	194	226	60	78
Hg	151	176,5	100	10

stavou kulových molekul stejné hmotnosti, jejichž objem lze zanedbat vzhledem k velikosti celkového objemu plynu. Přitom se molekuly chovají jako dokonale pružné koule, pohybující se zcela neuspořádaným (chaotickým pohybem). V kinetickém modelu prvotní teorie byla neuspořádanost fyzikálně vyjádřena podmínkou, že vzhledem k libovolnému pevnému systému souřadnic je rychlost molekul vždy stejná. Ve skutečnosti již ze samé existence chaotického pohybu plyne poznání, že

všechny molekuly nemohou mít stejnou rychlost, neboť tyto se ustavičnými srážkami musí stále měnit. Jak velké jsou okamžité rychlosti jednotlivých molekul v plynu nelze tedy přesně zjistit. Lze však očekávat, že bude možno určit jejich rozložení při použití počtu pravděpodobnosti, jak to právě učinil J. C. Maxwell. Maxwellův zákon rozložení rychlostí molekul v ideálním plynu, jehož grafickým zobrazením je tzv. distribuční křivka (obr. 3), je analogické rozložení jak je vyjadřuje křivka rozložení rychlostí, získaná experimentálně (obr. 2).

Je-li potřeba určit, např. procentuálně, počet molekul, jejichž rychlost spadá do uvažovaného rychlostního intervalu, potom celá plocha ome-



zená křivkou a osou úseček je rovna 100 % a uvažovaná část (vyčárkovaná na obr. 3) svou velikostí určuje číselně hledanou hodnotu.

Jak z experimentu, tak i z Maxwellova zákona možno určit nejpravděpodobnější rychlost v_p (obr. 3). V tabulce čís. 1 jsou uvedeny hodnoty těchto rychlostí v případě vodíku, kyslíku, par rtuti a cínu při teplotách 0° C a 100 °C. Zároveň zde jsou uvedeny poměry jejich hmotností vzhledem k hmotnosti vodíkové molekuly ($H_2 = 2$). K rychlosti této molekuly jsou vztaženy i rychlosti ostatních molekul. Číselné hodnoty těchto poměrů jsou v posledním sloupci tabulky.

Z experimentálních měření, jejichž výsledky obsahuje tabulka, plyne, že při dané teplotě jsou nejpravděpodobnější rychlosti molekul nepřímo úměrné druhým odmocninám z velikostí jejich hmotností, tj.

$$\frac{v_{1p}}{v_{2p}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Z tohoto vztahu lze soudit i na rovnost kinetických energií jejich translačního pohybu, neboť jednoduchou úpravou předchozího vztahu obdržíme: $\frac{m_1 v_{1p}^2}{2} = \frac{m_2 v_{2p}^2}{2} = \text{konst.}$

Tento pro kinetickou teorii ideálního plynu základní vztah je vyjádřením skutečnosti, že celkové energie posuvného pohybu molekul ideálního plynu je stálá a závisí pouze na jeho teplotě.

Vzhledem k platnosti tohoto zákona možno zavést velmi důležitý pojem střední kvadratické rychlosti v_k . K tomu je třeba vyjít z předpokladu, že v uvažované soustavě N molekul stejné hmotnosti m pohybujících se neuspořádaně je úhrnná energie táž, jako kdyby se tyto molekuly pohybovaly stejnou rychlostí v_k . Z experimentu (obr. 2) vyplynulo, že N_1 molekul má rychlost v_1 , N_2 molekul rychlost v_2 , N_i molekul rychlost v_i . Celková kinetická energie jejich neuspořádaného pohybu bude potom určena vztahem:

$$W = \frac{1}{2} m (N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2 + \dots + N_N v_N^2)$$

Za předpokladu, že rychlosti v_k všech molekul jsou co do velikosti stejné, bude nyní mít výraz pro celkovou kinetickou energii tvar:

$$W = \frac{1}{2} N m v_k^2$$

a z rovnosti:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{m v_i^2}{2} = \frac{N m v_k^2}{2}$$

obdržíme:

$$v_k = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}}.$$

Má tedy středně kvadratická rychlost v_k právě tu vlastnost, že celková energie soustavy se nezmění, jestliže se nahradí Maxwelllovo rozdělení takovým rozdělením, při němž se všechny molekuly pohybují touto rychlostí.

Konečně lze zjistit tzv. střední aritmetickou rychlost molekul $\bar{v}$, která je určena aritmetickým průměrem rychlostí všech molekul soustavy. Z Maxwellovy teorie je možno vypočítat, že mezi všemi uvedenými rychlostmi platí vztah:

$$v_k = 1,09 \bar{v} = 1,22 v_p.$$

Je tedy střední kvadratická rychlost o 9 % větší než střední aritmetická rychlost a o 22 % větší než rychlost nejpravděpodobnější.

Se stoupající teplotou se rychlosti molekul zvětšují, přičemž maximum distribuční křivky (křivky rozložení rychlostí) se posunuje směrem k větším hodnotám rychlostí, jak je znázorněno na obr. 3. Z rozložení distribučních křivek je též patrné, že se zvýšením teploty se nejen snižuje počet molekul s menší rychlostí, ale roste počet molekul s vysokými rychlostmi, jak se možno snadno přesvědčit porovnáním příslušných

ploch (na obr. 3 vyčárkovaných). Z této skutečnosti vycházejí teorie, které se zabývají studiem vypařování a to nejen kapalin, ale i látek tuhých, např. kovů, studiem adsorpce a absorpce, reakčních rychlostí apod.

Experimentálně zjištěná skutečnost, že kinetická energie posuvného pohybu molekul ideálního plynu je úměrná jeho teplotě, je vyjádřena v základní rovnici kinetické teorie plynů, která v tomto případě má tvar:

$$\frac{mv_k^2}{2} = \frac{3}{2} kT . \quad (1)$$

Známe-li při dané teplotě střední kvadratickou rychlost, můžeme určit konstantu úměrnosti k z rovnice (1):

$$k = \frac{mv_k^2}{3T} \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J deg}^{-1}$$

Tato tzv. Boltzmannova konstanta je jednou ze základních fyzikálních konstant a lze ji určit pouze experimentálně. To zvyšuje důležitost experimentálního měření rychlosti molekul, neboť je zřejmě jednou z metod umožňujících určení velikosti Boltzmannovy konstanty. V kinetické teorii umožňuje zavedení této konstanty především správnou fyzikální interpretaci mezi teplotou a energií.

Úkolem tohoto článku bylo, jak již bylo výše řečeno, pojednat o jednom způsobu měření rychlostí molekul v plynu, která svou názorností a důsledky umožňuje neformálně vysvětlit i základní postuláty kinetické teorie ideálních plynů.

Odvozené jednotky SI se samostatným názvem

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ CSc.

Druhou skupinu odvozených jednotek SI tvoří ony, které jsou natolik běžně používány, že byly pro ně vytvořeny samostatné názvy, jimž opět odpovídají samostatné značky. Zvláště výhodné je to u jednotek reciprokého charakteru (vzhledem k základním jednotkám) a dále u jednotek vázaných se základními jednotkami (zpravidla ve větším počtu) složitějšími vztahy. Samostatný název je výhodný při tvorbě násobných a dílčích jednotek a také při případném vytváření dalších odvozených jednotek. Jsou to následující hlavní jednotky SI:

Veličina	Název jednotky	Značka	Vztah k jiným jednotkám SI	Vztah k základním jednotkám SI
Kmitočet (frekvence)	hertz	Hz		s^{-1}
Síla	newton	N	—	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Tlak	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energie (práce, teplo)	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Výkon	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Elektrický náboj	coulomb	C	$A \cdot s$	$s \cdot A$
Elektrická kapacita	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Elektrické napětí (el. potenciál)	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Elektrický odpor	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Elektrická vodivost	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Magnetický indukční tok	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Indukčnost	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Magnetická indukce	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Světelný tok	lumen	lm		cd · sr
Osvětlení	lux	lx		$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$

V budoucnu lze očekávat, že se počet odvozených jednotek se samostatným názvem ještě rozmnoží. U některých veličin by to bylo jistě účelné, např. u plošného obsahu, objemu, hustoty apod.

Odvozené jednotky SI

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ CSc.

V předešlých informacích jsme hovořili o základních a doplňkových jednotkách SI. Nyní přikročíme k jednotkám odvozeným. Tyto jsou k základním (resp. doplňkovým) jednotkám vázány algebraickými vztahy, vycházejícími z definičních rovnic příslušných veličin. Některé odvozené jednotky dostaly samostatný název a značku, což zjednodušuje jejich používání. Podle toho lze odvozené jednotky rozdělit do tří skupin: první skupinu tvoří jednotky, bez samostatného názvu, odvozené přímo (svými názvy i značkami) od základních jednotek. Druhou skupinou jsou odvozené jednotky SI, které mají samostatné pojmenování a třetí skupinu pak jednotky, k jejichž názvům (a dále i značkám) využíváme odvozených jednotek se samostatnými názvy.

Nejprve si uveďme několik příkladů odvozených jednotek vyjadřovaných pomocí základních jednotek. Příště si pojednáme o dalších dvou skupinách. Ve zmíněné první skupině jsou například:

plošný obsah (velikost plochy)	metr čtverečný	m^2
objem	metr krychlový	m^3
rychlost	metr za sekundu	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
zrychlení	metr za sekundu na druhou	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
vlnočet	l na metr; reciproký metr	m^{-1}
hustota (měrná hmotnost)	kilogram na krychlový metr	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
molarita (molární koncentrace na objem)	mol na krychlový metr	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$
aktivita	l za sekundu; reciproká sekunda	s^{-1}
měrný objem	krychlový metr na kilogram	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
jas	kandela na čtverečný metr	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$

V uvedených příkladech jsou ovšem jen hlavní jednotky SI příslušných veličin.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

7. Mějme danu uspořádanou n -tici čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, v níž pro všechna čísla $i = 1, 2, \dots, n$ platí, že $a_i = 1$ nebo $a_i = -1$; přitom je $n \geq 1$. Písmeny A, C označme tato čísla

$$A = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n + \\ + a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_{n-1} a_n + \dots + a_2 a_3 \dots a_n, \\ C = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n.$$

Dokažte:

a) Jestliže $A = 0$, pak číslo n je sudé.

b) Jestliže $C = 0$, pak číslo n je mocninou některého přirozeného čísla.

(Došlo 14 řešení.)

Břetislav Novák

Řešili: P. Firbas, K. Šafařík, J. Ivánek, I. Vrto, J. Švrček.

a) Je $A = a_1 a_2 \cdot \cdot \cdot a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{a_n} \right) = \pm (a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n)$,

neboť pro $a = \pm 1$ je $\frac{1}{a} = a$. Je-li tedy k z čísel $a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot, a_n$ rovných $+1$ a ostatní jsou -1 a je-li $A = 0$, je nutně

$$0 = A = \pm(k - [n - k]),$$

tj. $n = 2k$. (Podle řešení P. Firbase, K. Šafaříka a dalších.)

b) Prvý způsob

Zřejmě je

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} [(a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 \cdot \cdot \cdot - a_n^2] = \\ &= \frac{1}{2} [(a_1 + \cdot \cdot \cdot + a_n)^2 - n] \end{aligned}$$

Je-li tedy $C = 0$, je nutně $n = (a_1 + a_2 + \cdot \cdot \cdot + a_n)^2$. (Podle řešení I. Vrta a J. Ivánka.)

Druhý způsob.

Jeli k z čísel $a_1, a_2, \cdot \cdot \cdot, a_n$ rovných $+1$ a ostatní -1 , je počet členů v součtu

$$C = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_1 a_n + a_1 a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1} a_n$$

rovných -1 zřejmě $k(n - k)$, všech je $\binom{n}{2}$. Je-li tedy $C = 0$, je nutně

$2k(n - k) = \binom{n}{2}$ a odtud úpravou $n = (n - 2k)^2$. (Podle řešení J. Švrčka a dalších.)

Poznámka. Snadno nahlédneme, že je-li $n > 1$ čtverec přirozeného čísla, je možné počet $a_i = -1$ volit právě dvěma různými způsoby tak, aby

$$C = 0, \left(\frac{n + \sqrt{n}}{2} \text{ a } \frac{n - \sqrt{n}}{2} \right).$$

8. Čtyři po sobě jdoucí lichá prvočísla

$$p_k < p_{k+1} < p_{k+2} < p_{k+3}$$

nazveme prvočíselná čtyřčata, když $p_{k+3} - p_k = 8$. Dokažte, že pro $p_k > 6$ platí:

- součet prvočíselných čtyřčat je dělitelný 60;
- součin prostředních dvou je o 12 větší než součin krajních dvou;
- součet čtverců krajních je o 24 větší než součet čtverců prostředních dvou;
- součet trojmocí prvočíselných čtyřčat je dělitelný 900;

e) součet pátých mocnin krajních dvou zmenšený o součet pátých mocnin prostředních dvou je dělitelný číslem 18 000;

f) součin druhých dvou zmenšený o součin prvních dvou čtyřčat je dělitelný číslem 180.

(Došlo 15 řešení)

Ota Setzer

Řešili: Pavel Kindlmann, IA gymn. České Budějovice a Imrich Vrfo, IIA gymn. Rimavská Sobota (upraveno):

V posloupnosti lichých čísel je vždy každý páté dělitelné pěti a každé třetí dělitelné třemi; mají-li být proto z pěti po sobě jdoucích lichých čísel l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 čtyři prvočísla, musí $l_1 = p_k, l_5 = p_{k+3}$ a l_3 být násobkem pěti a tří, tedy patnácti:

$p_k = 15k - 4, p_{k+1} = 15k - 2, p_{k+2} = 15k + 2, p_{k+3} = 15k + 4$, přičemž k je liché číslo $k = 2m + 1$, proto

$p_k = 30m + 11, p_{k+1} = 30m + 13, p_{k+2} = 30m + 17, p_{k+3} = 30m + 19$ (m celé nezáporné číslo); to jsou podmínky nutné, nikoli však dostačující pro prvočíselná čtyřčata.

Přistupme nyní k důkazu uvedených tvrzení:

$$a) p_k + p_{k+1} + p_{k+2} + p_{k+3} = 120m + 60 + 60(2m + 1) \quad \text{c . b . d}$$

$$b) p_{k+1} \cdot p_{k+2} - p_k \cdot p_{k+3} = 900m^2 + 900m + 221 - (900m^2 + 900m + 209) = 12 \quad \text{c . b . d}$$

$$c) p_k^2 + p_{k+3}^2 - (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2) = 1800m^2 + 1800m + 482 - (1800m^2 + 1008m + 458) = 24 \quad \text{c . b . d}$$

$$d) p_k^3 + p_{k+1}^3 + p_{k+2}^3 + p_{k+3}^3 = 4 \cdot 30^3 m^3 + 3 \cdot 30^2 m^2 \cdot 60 + 3 \cdot 30m \cdot 940 + 15 \cdot 300 = 900(120m^3 + 180m^2 + 94m + 17) \quad \text{c . b . d}$$

$$e) p_k^5 + p_{k+3}^5 - (p_{k+1}^5 + p_{k+2}^5) = 18\,000(360m^3 + 540m^2 + 274m + 47) \quad \text{c . b . d}$$

$$f) p_{k+2} \cdot p_{k+3} - p_k \cdot p_{k+1} = 180(2m + 1) \quad \text{c . b . d}$$

Poznámka: Vztahy a) až f) platí nejen pro prvočíselná čtyřčata, nýbrž pro všechny čtveřice čísel tvaru: $30m + 11, 30m + 13, 30m + 17, 30m + 19$. Tato čísla jsou prvočísla, např. pro $m = 0, m = 3, m = 6, m = 27$.

9. Dokažte správnost identity

$$\operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ.$$

(Došlo 12 řešení)

Ota Setzer

Řešil: Jaroslav Švrček, IIC gymn. v Přerově:

Pro důkaz uijeme známých vzorců:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \pm \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (2)$$

Vzhledem k vztahům (1) a (2) nabude levá strana identity tvaru $\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} (30 + 5)^\circ \cdot \operatorname{tg} (30 - 5^\circ) \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot 5^\circ =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\ &= \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5^\circ}{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \operatorname{tg} 5^\circ \end{aligned}$$

což je hodnota pravé strany, jak jsme měli dokázat.

10. Symbol (abc) představuje trojčíferné číslo napsané v desítkové soustavě, přičemž $a \cdot b \cdot c \neq 0$. Určete všechna taková čísla, aby o nich platilo

$$(abc) = \frac{1}{2}[(bca) + (cab)].$$

Podle rumunského časopisu Gazeta matematic

(Došlo 18 řešení)

Řešil Petr Firbas, 3b G Brno

Platí nerovnosti

$$\begin{aligned} 1 &\leq a \leq 9 \\ 1 &\leq b \leq 9 \\ 1 &\leq c \leq 9 \end{aligned} \quad (1)$$

Jestliže daný vztah rozepíšeme, dostaneme po kratší úpravě

$$7a - 3b - 4c = 0,$$

což je diofantická rovnice. Z ní

$$b = 2a - c + \frac{a - c}{3}$$

Položme

$$\frac{a - c}{3} = t$$

a z toho

$$a = 3t + c, \quad b = 7t + c,$$

kde t vzhledem k vztahům (1) splňuje nerovnost

$$-1 \leq t \leq 1.$$

Tak dostáváme tři případy:

a) $t = 1$, což nás vede k dvěma výsledkům:

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 8$$

a hledané číslo je 481.

$$a_2 = 5, \quad b_2 = 9$$

a hledané číslo je 592.

b) $t = 0$ a hledaná čísla jsou

$$111, 222, 333, \dots, 999.$$

c) $t = -1$ a hledaná čísla jsou

$$518, 629.$$

Závěr:

Dané úloze vyhovují čísla

$$481, 592, 518, 629 \text{ a triviální řešení } 111, 222, \dots, 999.$$

11. Body v rovině, které mají ve zvoleném kartézském systému souřadnic obě souřadnice celočíselné, nazveme mřížové body. Řešte postupně tyto dva úkoly:

a) Sestrojujte různé trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech tak, aby žádný další mřížový bod neležel na jejich obvodech ani v jejich vnitřcích. Zformulujte a dokažte vzorec pro obsah všech takových trojúhelníků.

b) Na základě řešení prvního úkolu zformulujte a dokažte vzorec pro obsah trojúhelníků, které mají vrcholy v mřížových bodech, na obvodech mají celkem h mřížových bodů a ve vnitřcích v mřížových bodů.

(Došlo 8 řešení)

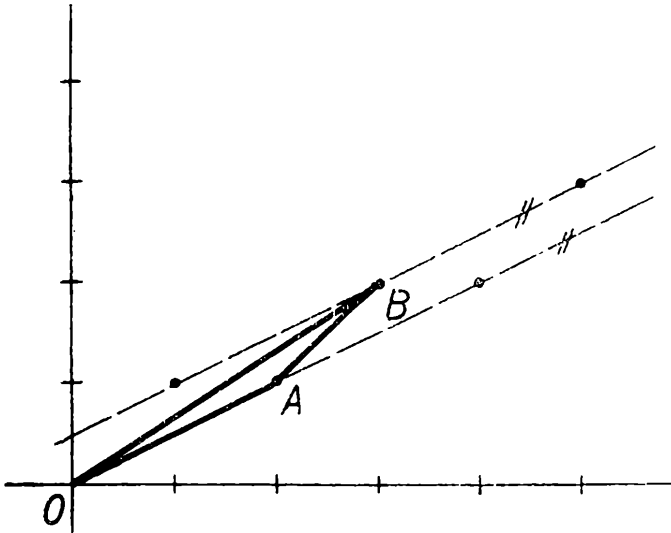
Jaroslav Šedivý

Řešil: Petr Firbas (G Brno) a Karel Šafařík (SVŠ, Bratislava):

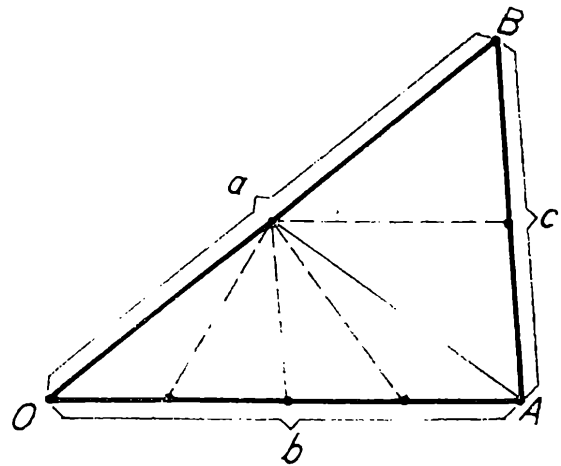
a) Souřadnicový systém lze zvolit tak, aby jeden z vrcholů ostrých úhlů trojúhelníka byl počátkem s. s. a aby vnitřek trojúhelníka ležel v 1. kvadrantu (obr. 1). Celočíselné souřadnice $[m, n]$, $[r, s]$ vrcholů A, B trojúhelníka OAB jsou dvojicemi nesoudělných čísel, nesoudělná jsou i čísla $r - m$, $s - n$; jedine v tom případě neleží na obvodu trojúhelníka (kromě vrcholů) žádný mřížový bod. Vnitřním bodem trojúhelníka není žádný mřížový bod právě tehdy, když žádný takový bod neleží ani ve třech pásech, z nichž každý je ohraničen prodlouženou stranou trojúhel-

níka a rovnoběžkou vedenou s ní protějším vrcholem. Pro pás s hraniční přímkou OA s rovnici $my = nx$ to znamená, že bod B leží na přímce s rovnici $my = nx + 1$. Obsah trojúhelníka OAB vypočítáme pomocí délky úsečky OA a vzdálenosti d uvedených přímek. Platí:

$$OA = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \text{tedy} \quad P = \frac{1}{2}OA \cdot d = \frac{1}{2}$$



Obr. 1



Obr. 2.

Všechny trojúhelníky charakterizované v odst. a) textu úlohy mají též obsah.

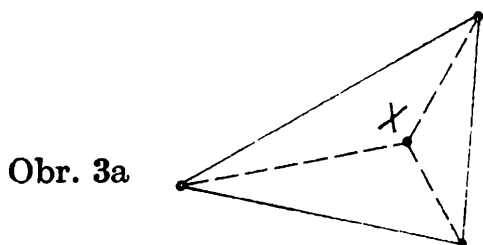
b) Obsah trojúhelníka s h mřížovými body na obvodu (včetně vrcholů) a s v mřížovými body uvnitř stanovíme tak, že provedeme jeho triangulaci, tj. rozklad na trojúhelníky, jejichž vrcholy budou mřížovými body.

Obsahuje-li obvod trojúhelníka OAB celkem h mřížových bodů, jsou rozděleny na jeho strany v počtech a, b, c , přitom $h = a + b + c - 3$ protože vrcholy A, B, O patří dvěma stranám. Spojme vrchol A se všemi mřížovými body na protější straně (obr. 2), získáme tak $a - 1$ trojúhelníků, z nichž dva „krajní“ můžeme dále dělit. Přerušovanými čarami jsou na obr. 2 vyznačeny spojnice mřížových bodů v této etapě, vzniká tak $(b - 1) + (c - 1)$ trojúhelníků. Spolu s $(a - 3)$ trojúhelníků z prvního dělení získáváme celkem

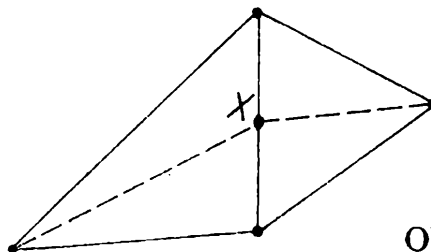
$$a + b + c - 5 = h - 2 \text{ trojúhelníků.}$$

Obsahuje-li trojúhelník OAB vnitřních mřížových bodů, musí každý z nich ležet buď uvnitř již sestavených trojúhelníků nebo na jejich stranách. V prvním případě (obr. 3a) spojíme mřížový bod X s vrcholy nejmenšího vyznačeného trojúhelníka, uvnitř kterého leží; získáme tak místo jednoho trojúhelníka tři, tj. počet trojúhelníků zvýšíme o dva.

V druhém případě (obr. 3b) spojíme bod X s vrcholy obou trojúhelníků, na jejich společné straně bod X leží. Místo dvou trojúhelníků získáme tak čtyři, tj. počet trojúhelníků zvýšíme o *dva*. Oba postupy uplatňujeme tak dlouho, až každý z v vnitřních mřížových bodů trojúhelníka



Obr. 3a



Obr. 3b

OAB je vrcholem některého trojúhelníka. Celkový počet trojúhelníků je zřejmě roven číslu $h - 2 + 2v$ a každý z nich má obsah rovný $\frac{1}{2}$. Tak docházíme ke vzorci

$$P = \frac{1}{2} (h - 2 + 2v) = v + \frac{1}{2}h - 1$$

pro obsah studovaných trojúhelníků.

12. Dvě posloupnosti celých čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dány rekurentně

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_k = 2a_{k-2} + a_{k-1},$$

$$b_1 = 1, b_2 = 0, b_k = 2b_{k-2} + b_{k-1},$$

kde $k = 3, 4, 5, \dots$. Najděte vztahy mezi členy posloupností obou a mezi součty příslušných řad.

(Došlo 16 řešení)

Václav Vilímek

Řešil: Imrich Vrto, G Rimavská Sobota.

Znáмым postupom vypočítáme k -té členy obidvoch postupností

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$$

$$\text{Z } q^k = q^{k-1} + 2q^{k-2} \text{ máme}$$

$$q^2 - q - 2 = 0$$

čiže $q_1 = 2, q_2 = -1$. Potom

$$a_k = \alpha 2^k + \beta (-1)^k.$$

Pre $a_1 = 0, a_2 = 1$ dostaneme sústavu rovníc s neznámými α, β :

$$2\alpha - \beta = 0, \quad 4\alpha + \beta = 1,$$

ktorá má riešenie

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

Vtedy

$$a_k = \frac{1}{6} 2^k + \frac{1}{3} (-1)^k \quad (1)$$

Podobne vypočítáme

$$b_k = \frac{1}{6} 2^k - \frac{2}{3} (-1)^k \quad (2)$$

Vztahy (1), (2) možno ľahko dokázať indukciou z rekurentných formúl. Z (1) a (2) máme

$$a_k - b_k = (-1)^k.$$

Pre súčty

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i, \quad s_k = \sum_{i=1}^k b_i$$

dostaneme

$$S_k = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^k 2^i + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (-1)^i = \frac{1}{3} (2^k - 1) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k (-1)^i$$
$$s_k = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^k 2^i - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k (-1)^i = \frac{1}{3} (2^k - 1) - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k (-1)^i$$

kde $\sum_{i=1}^k (-1)^i = 0$, ak je k párne a $\sum_{i=1}^k (-1)^i = -1$, ak je k nepárne.

Pre párne k je $S_k = s_k$ a pre nepárne k máme $S_k = s_k - 1$.

Poznámka autora príkladu. Nazveme-li posloupnosti vyhovující rovnici $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$ řešením této rovnice, dá se dokázat, že každé řešení lze vyjádřit jako lineární kombinaci libovolných dvou vzájemně nezávislých řešení (to jsou řešení, kde jedno není násobkem druhého). Těmito řešeními jsou zde geom. posloupnosti $\{2^n\}$ a $\{(-1)^n\}$.

Upozornění.

Řešení soutěžních příkladů letošního ročníku zašlete do 31. března 1972.

Redakce.

Život je dobrý jen ke dvěma věcem: k pěstování matematiky a k jejímu vyučování.

Poisson

1. obr. Naše delegace.



Ještě se několika málo řádky vracíme k MMO.

Junge Welt (Mladý svět) je deník, který v NDR je obdobou naší Mladé fronty. Na MMO vysílá pravidelně zvláštního zpravodaje (letos to byla paní Margit Stolzenburgová) a ten velmi pohotově informuje mladé lidi v NDR o průběhu MMO. Této mezinárodní akci mládeže věnoval letos Junge Welt 7 článků v různých číslech. Nás mimořádně zaujal roz-



2. obr. Jugoslávská delegace na nejvyšším místě skokanského můstku ve Vysokých Tatrách.



3. obr. Francouzská delegace se svou tlumočnicí.

hovor pí Stolzenburgové s vedoucím německé delegace prof. Dr. Helmutem Bauschem, který mimo jiné řekl:

„To byla až dosud nejtěžší olympiáda. Niveau olympiád trvale stoupalo, ale letos tu bylo zvlášť mnoho těžkostí. Charakter úloh se odklonil od charakteru úloh dosud obvyklých. U žádné úlohy se nevyskytl určitý algoritmus, podle něhož by se úloha dala řešit. Každá úloha kladla vysoké nároky na logické myšlení studentů, pro každou úlohu bylo potřebí najít jiný způsob řešení.“

Několika obrázky, které nám poslal člen naší delegace Franců (na obr. 1 je první zprava), si oživujeme vzpomínky na XIII. MMO v Žilině.



4. obr. Holandská delegace ve svých typických úborech na hradě Orava.

Nicolas Bourbaki ■

JIŘÍ MIKULČÁK, MFF UK Praha

Žil, byl a nepříliš úspěšně válčil v minulém století ve francouzské armádě generál Ch. D. Bourbaki (čti burbaki), po rodičích snad řeckého původu. Jeho pomník stojí v Nancy, ale o generálovi vůbec řeč nebude.

Žila, byla a studovala na pařížské École normale supérieure a pak na pařížské Sorbonně skupina chytrých a veselých mládenců. Aby se po-cvičili v objevování a důkazech matematických poznatků, scházeli se, radili se, o svých výplodech přednášeli ostatním, vzájemně si je posuzovali a také se bavili. Pozvali třeba své kolegy na přednášku vzácného hosta Nicolase Bourbakiho; představoval jej však jeden z nich a vážnosti mu přidával důstojný falešný plnovous. A jak už to bývá, že mnoho duchaplných matematických vět má jméno po svém objeviteli (třeba věta Pythagorova, Eukleidova, Thaletova aj.), pojmenovali i kterousi větu Bourbakiho větou; to jméno jim znělo zřejmě velmi exoticky, líbilo se jim a z legrace používané jméno se později stalo symbolem slavné kapitoly francouzské matematiky.

Když už mládenci rozum nabrali a dospěli v matematiky, zamýšleli se nad současným stavem své vědy. I viděli, že každý matematik si bádá jen na svém písečku, že zná jen svůj úzký obor a v něm pracuje nezávisle na jiných oborech matematiky a jiných matematicích. Že vychází z vlastních předpokladů, že si volí vlastní pojetí oboru, že užívá vlastní terminologie a symboliky. Že si matematikové proto už ani mezi sebou nerozumějí, že není jasné, jak spolu souvisejí různá odvětví matematiky, že se přitom málo dbá na to, aby samotné základy matematiky byly co nejpresněji zformulovány. I viděli matematikové francouzští, že to není dobré. Rozhodli se tedy, že věc napraví.

Začali psát soubor knih o matematice. Každá kniha je věnována některému oboru matematiky, avšak výklad všech knih je podán z jednotného hlediska. V knihách jsou přesně formulovány základní pojmy matematiky i jednotlivých jejích oborů, výstavba teorií je přísně deduk-

tivní, užívá se jednotné terminologie a symboliky. Základem, z něhož se vychází, je množinové a strukturní pojetí; množinových pojmů se užívá k výkladu jiných oborů matematiky, zdůrazňování matematických struktur umožňuje vyzdvihnout společné rysy různých odvětví matematiky, v celém souboru prací se důsledně uplatňuje matematická logika. Knihy systematicky zpracovávají množství látky roztroušené v mnoha odborných časopisech a knihách po celém světě.

Každou z knih psal některý ze skupiny oněch francouzských matematiků; jak už však byli zvyklí z mládí, navzájem si své rukopisy neúprosně posoudili, doporučili změny a úpravy tak, aby celé dílo bylo jednotné. Přepracovávali je třeba pětkrát a pokaždé se o zpracování pokusil jiný z nich. Pak ovšem chtěli, aby i titul zdůrazňoval společný podíl práce a jednotící hledisko uplatněné ve všech knihách, a proto si zvolili jednotný pseudonym, pod nímž všechny díly své práce vydávají. A tak od roku 1939 vyšlo na dvacet matematických monografií, které údajně napsal Nicolas Bourbaki.

Řadu let se nevědělo, kdo se za pseudonymem skrývá. Dnes víme, že mezi nejvýznačnější pracovníky z deseti až dvacetičlenné skupiny patří A. Weil, H. Cartan, C. Chevalley, J. Dieudonné, S. Eilenberg (jediný, který není rodilý Francouz, ale Polák) a další.

Postupně vzniklo dílo, které patří k vrcholům současné matematiky a překládá se proto do řady světových jazyků; u nás však zatím žádný svazek v českém překladu nevyšel. Jedním z důvodů je to, že toto vysoce abstraktní dílo je určeno jen úzkému okruhu špičkových matematiků, kteří si dílo již dávno opatřili v ruském překladu, ne-li ve francouzském originále, takže by se sotva prodalo tolik výtisků, aby se tisk vyplatil.

Názory v knihách obsažené velmi silně ovlivnily i snahy o modernizaci vyučování matematice a mnozí členové skupiny velmi intenzívně pracují v různých komisích, které se zabývají otázkami vyučování matematice.

Smysl pro humor neztratili však bourbakisté ani v dospělosti. Nicolase Bourbakiho představili jako bývalého člena Královské poldavské akademie věd (která však vůbec neexistuje), a jako jeho působiště uváděli Nancy a později Nancago (Nancy + Chicago, kam jeden z nich přesídlil). Jindy např. oznámili, že na kongresu amerických matematiků přednese referát N. Bourbaki. Přednáška byla zařazena do programu a v určenou dobu vystoupil jeden z bourbakistů s omluvou, že N. Bourbaki nemůže referát přednést osobně, protože jej americké úřady nevpustily do USA; nemohl prý v dotazníku uvést barvu své pleti. A protože ovšem všichni přítomní již v té době věděli, jak je to s N. Bourbakim, ohromně se vtipem pobavili.

V roce 1968 rozšířilo se mezi matematiky toto smuteční oznámení:

Rodiny Cantorova, Hilbertova, Noetherova;
Rodiny Cartanova, Chevalleyova, Dieudonnéova, Weilova;
Rodiny Bruhatova, Dixmierova, Godementova, Samuelova,
Schwartzova;
Rodiny Demazuerova, Douadyova, Giraudova, Verdierova;
Systémy filtrovatelné zprava a epimorfismů;
Slečny Adèle a Idèle
vám s bolestí oznamují, že skonál pan

Nicolas Bourbaki

jejich otec, bratr, syn, vnuk, pravnuke, bratranec.

Tiše zesnul 11. listopadu 1968 (výroční den vítězství) ve svém domově v Nancago.

Pohřeb se koná v neděli 23. listopadu 1968 v 15 hodin na hřbitově Náhodných funkcí (stanice metra Markovova a Gödelova).

Shromáždíme se před barem „U direktních součinů“ na křižovatce Projektivních řešení (dříve náměstí Konzulovo).

Mši bude podle přání zesnulého v chrámu Panny Marie Problémové sloužit Jeho Excelence kardinál Alef I. za přítomnosti reprezentantů všech tříd ekvivalence a těles (algebraicky uzavřených).

Minutu ticha budou držet žáci Écoles normales supérieures a tříd Chernových.

Žádné květiny ani věncové součiny.

„Neboť Bůh je kompaktnost Alexandrovova vesmíru“.

Groth. IV. 22

(V parte nacházíme jména předchůdců bourbakistů, bourbakistů samých i jejich stoupenců; hemží se vtipným užitím různých matematických termínů, z nichž mnohé zavedli právě bourbakisté).

A teď si matematikové na celém světě lámou hlavu, má-li to být vtipné oznámení, že další práce už pod pseudonymem N. Bourbaki nebudou vycházet, nebo je-li to vtipné vybídnutí od jiných matematiků, aby bourbakisté po delší přestávce v práci pokračovali. Neudiví nás proto, dočkáme-li se slavného zmrtvýchvstání N. Bourbakiho.

Literatura : RYCHLÍK, Karel: Nicolas Bourbaki = „Pokroky matematiky, fyziky a astronomie“ IV. (1959), str. 673—678.

Z dějin astrologie

JOSEF KOTYK, Pardubice

V podstatě lidského charakteru tkví neustálá obava z budoucnosti. Odtud pramení dávná tužba člověka seznat běh věcí budoucích, tužba, jež přetrvává tisíciletí, víra člověka v něco neznámého, co leží mimo oblast našeho chápání a může neočekávaně do našeho života zasáhnout. Určitá míra pohodlnosti v povaze jednotlivců dává jim pak možnost smířit se se vším. Je to podle nich předurčeno osudem.

Již v očích Sumerů, Akkadů a jiných národů dávného starověku byla velikou knihou tajemných předpovědí hvězdnatá obloha. Jejich písmem byly hvězdy; z nich mohli jejich učenci vyčíst osudy celé Země i každého jednotlivce. Do pozdního středověku obraceli se panovníci a vojevůdce o radu k astrologům (hvězdopřavcům), kteří jim vykládali konstelace hvězd a nebeská znamení; z pohybu hvězd předpovídali budoucí události.

„To je ve hvězdách,“ říkáme ostatně dodnes.

* *
*

Historie začíná v Sumeru...

Ve shodě se svým světovým názorem věřili sumerští myslitelé (nevytvořili však filosofický systém, abychom jim mohli snad říkat filosofové), že lidský život je pln nejistoty a stále je ohrožován nebezpečím, neboť člověk nezná předem svůj osud, který mu určili bohové. Nejvýše byly ceněny předpovědi z hvězd. Vyhledávali je především králové. Na vysokých věžích chrámových (tzv. zikkuratech) zřizovali proto pozorovací stanice, z nichž zvláštní druh kněží upínal za noci stále zrak k hvězdným výšinám, aby z pohybu i polohy planet a změn (fází) Měsíce vyšetřoval božská ustanovení.

Polohy nebeských těles byly nejen pečlivě pozorovány, ale i zaznamenávány. Velkolepým pomníkem této sběratelské činnosti jsou klínové tabulky Sumerů a Semitů mezopotámských. V nich doložen je astrální ráz tehdejšího náboženství i pevná víra, že bohové jsou tvůrci lidských osudů. Dotazy k bohům i příslušné odpovědi byly zprostředkovány kněžími a pečlivě jako zdroje poučení o věcech budoucích uchovávány. Zejména dotazy slavného Sargóna I. Akkadského,¹⁾ „krále čtyř stran

¹⁾ Sargón I. Akkadský, semitský vítěz nad Sumery, oznamuje na jednom z nápisů, že po mnohých bojích „ovládl všechny země mezi mořem Horním (= Středoziemím) a Dolním (= Perským zálivem) a vytvořil první světovou veleříši“. Jejím střediskem učinil město Akkad.

světa“, z druhé poloviny 24. století před n. l. byly ještě v pozdních dobách asyrských a babylónských velmi vyhledávány.

Přesná pravidla hvězdopraveckého umění tehdejšího obsahuje astrologické dílo Inuma ilu Anu ilu Bíl. Mnohé věštby dochovaly se až do naší doby v knihovnách, tj. sbírkách hliněných tabulek, zejména v rozsáhlé knihovně asyrské metropole Ninive. V jedné z nich praví se např.: „Jestliže Měsíc je obklopen dvorem a v něm stojí Nibiru (roz. oblouk, v němž hvězdy dostupují vrcholu zvířetníku), znamená to pád dobytka.“ Jiná věští takto: „Této noci byl Měsíc obklopen kruhem, v němž stáli Sagmígar (roz. Jupiter) a Štír; to znamená, že bude král akkadský obklíčen.“

„Co vás čeká a co vás nemine,“ navíc dodávají v našem století prodavači horoskopů, kartářky a jiní „odborníci na budoucnost“. Chtěl jsem vám, milí čtenáři, ve dvou krátkých ukázkách²⁾ jen přiblížit umění hvězdopraců dávného Orientu.

* *

*

Produktem hvězdopravectví — často však jen produktem vedlejším — byly tehdy také poznatky astronomické. Sumerové a Semité babylónští rozlišovali již např. stálice a oběžnice, znali souhvězdí zvířetníku a nazývali je jmény, kterých se dosud používá (Rak, Lev, Štír aj.), se značnou přesností dovedli stanovit periodu zv. saros, v níž se po řadě opakují úkazy zatmění Slunce a Měsíce, a předpovídat je.³⁾ Předpovědi tohoto druhu jsou ovšem na rozdíl od astrologie vědecké. Oslavným v dějinách starověku stalo se zejména proroctví, jímž řecký filosof Thales Milétský v 6. stol. př. n. l. předpověděl zatmění Slunce zvláště památné. Nastalo dne 28. května 585 před n. l.⁴⁾ a způsobilo takovou hrůzu, že přivodilo přerušení bojů Médů s Lýdy na řece Halys v Malé Asii. Událost přispěla k tomu, že králové Kyaxares a Alyattes uzavřeli pod přímou hrozbou nebeských těles mír...

„Království České žádnou silou ani moudrostí lidskou, jedinými jen tělesy nebeskými jest spravováno“, obdobně tvrdil ještě v 15. století náš učený Mistr Křišťan z Prachatic.⁵⁾

²⁾ V podrobnostech viz např. Virolleaud: „L'astrologie Chaldéenne“ (Paříž, 1910), knihu Dr. Justina V. Práška „Babylonie kolébku dějin“, (Ottova Světová knihovna, svazek čís. 1076÷1078) aj.

³⁾ Viz také autorův článek „Vědecké předpovědi“ v Rozhledech, roč. 48, čís. 4, str. 188 až 191.

⁴⁾ Přidržuji se knihy „ABC světových dějin“ (Praha, Orbis 1967), str. 46; starší Hýblový „Dějiny starého věku“ (Praha 1911) uvádějí na str. 31, den 6. května 585.

⁵⁾ Viz „Miscellanea historica regni Bohemiae“ Bohuslava Balbína.

Na dvorech šlechticů a panovníků zasahovali astrologové do osudů jednotlivců i národů často také neblaze. Výmluvným příkladem tohoto druhu může z našich dějin být pověstný Vlach Seni, démon Valdštejnův. Spisovatel vkládá mu před všemocným generalissimem a spoluvládcem císařovým do úst tato slova vlastní chvály: „Kdo může, Vostra Altezza, tak určitě čísti ve hvězdách jako Seni? Na kterém dvoře evropském mají lepšího astronoma i astrologa? Až, jasný pane, na Tvé vznešené hlavě zaleskne se diadém královský, a ta chvíle nedaleka, pak račiž uspořádati závodění astrologů celého světa! Králové a císařové pořádají turnaje a sedání; dvůr Tvé Výsosti začne nový zvyk a nové způsoby. Seni, jasný pane, musí první cenu získati.“⁶⁾

„Že těm hvězdářům vévoda tolik věří!“ právem naříká nejbližší důvěrník a švagr Valdštejnův, hrabě Adam Erdmann Trčka nad vévodovou vírou v závislost lidského osudu na věčném chodu hvězd. „Hvězdáři mu toho tolik předpovídají, jak velikým pánem má se státi,“ podle relace Rašínovy „velikým pánem a nejen Českým, ale i Římským králem...“⁷⁾

Potměšilý Vlach tedy věstil:⁸⁾

„Od dvou týdnů jeví se v okruží našich hvězd jedna, která hrozí zkažití všecku příznivou konstelaci. Světlo její přechází z modra v barvu skoro krvavou. Vostra Altezza se přesvědčí...“

Dnešní událost jsem předvídal! Nebyl-li přímo v této čáře — Smrtonoš (= Mars)?

Dům štěstí, Vostra Altezza, zachmuřen, zato jasnější Dům příbuzenství. Excellence musí býti nadmíru opatrná!“

Valdštejn dbal varovné mluvy nebes až příliš úzkostlivě. Odtud pramení také jeho pověstné „Všechno se stane, jen až přijde čas! Až bude čas, všechno chci učiniti...“ Tajemné a vždy znovu se opakující „Ještě není čas!“ je hlavní příčinou záhadnosti vévodovy povahy, nerozhodného a nečinného čekání, ústupy a proměnami pokřiveného chování. Jeho kroky určovaly jen konstelace nebeských těles, jejich tajemné pobídky nebo výstrahy. Rozum nebyl mu již vůdcem a velitelem. Zdravý úsudek pošetile obětoval pravdě domněle vyšší a zaručenější, pravdě nadpřirozeného původu...

⁶⁾ Viz dílo „Trnovou korunu“ V. B. Třebízského, díl 3., kap. II.

⁷⁾ Viz dílo Josefa Pekaře „Valdštejn“ 1630 ÷ 1634 (Dějiny valdštejnského spiknutí), Melantrich, Praha 1934. Cit. díl I., str. 312; díl II., str. 268.

⁸⁾ Viz „Trnovou korunu“ Václava Beneše Třebízského, díl třetí, kap. II. a IV.

Také vojenští odborníci právem naříkali: „Ó, jak jsme ubozí, závisí-li situace našeho vojenství na — dohadách astrologů!“⁹⁾

Jindy věstil Seni takto:¹⁰⁾

„Dobropán (= Merkur) mdlý, zkalený, s tmavými šmouhami. In anima mia — in conscienza mia! Neračiz se však lekati, Vostra Altezza! Kolem Krasopaní (= Venuše) obloha beze skvrny...“

Jindy opět nadějněji takto:

„Kralomoc (= Jupiter) se dnes leskne třpytem dýmantovým. Smrtonoš je zakryt průhledným obláčkem...“

„Merkurius dnes celičký jako z roztaveného stříbra. Kolem Kralomoc, Výsosti, dvojitý kruh jako zlatá obruč; toto znamení očekával jsem po celý rok.

„Blíží se, Vostra Altezza, chvíle rozhodná... Dnes či zítra musí se sblížit Hladolet (= Saturn) s Kralomocem.“

Tak bychom mohli pokračovat. Znepokojen horoskopem, který mu vypracoval Kepler (o jeho vztahu k astrologii pojednám v článku dalším), poslal Valdštejn, lekaje se závratných vlastních plánů a klesaje pod jejich tíhou, v průběhu roku 1633 svého astrologa Seniho k jinému proslulému hvězdáři ve Vratislavi (polsky Wrocław), aby vyzvěděl, může-li ještě důvěřovat, může-li doufat; čekal opět, až znamení hvězd dodá mu síly a odvahy. O setkání a jednání obou astrologů nemáme bližších zpráv. Starověký Cato¹¹⁾ se divil, že věstci Etrusků, haruspikové, kteří předpovídali budoucnost z vnitřností zvířat a úderu hromu, a augurové, kteří věstili z letu ptáků a zobání kuřat, se při setkání jeden druhému nesmáli.

V noci z 24. února na 25. únor 1634 byla prý seskupení hvězd pro Valdštejna nejprázlivější. Hvězdy leskly se podle líčení spisovatele všecy, „jako by každá byla jedním z drahokamů v koruně Českého království“, po níž mocný vévoda Frýdlantský, podle soudu vrstevníků „tak ctižádostivý, že by českou korunu den před smrtí přijal“,¹²⁾ po dlouholetém váhání, nyní již těžce nemocen, konečně zatoužil. Opatrný vypočítavec, mistr pletich, vychytralý spiklenec, jenž „chtěl vyvrátit dům Rakouský, ale nechtěl upadnout v podezření u císaře“,¹³⁾ při všem sebevědomém přecenění nepostřehl, že je soustavně klamán; zavražděn dne 25. února 1634 v Chebu, stal se obětí úskoku a vlastní pošetilosti.

⁹⁾ Viz dílo Josefa Pekaře „Valdštejn“, díl I., str. 336, pozn. 1, citace listu císař. říš. rady Heřmana z Questenberka ze dne 2. VII. 1633.

¹⁰⁾ Viz „Trnovou korunu“ Václava Beneše Třebízského, díl první, kap. IV.; díl druhý, kap. II.; díl třetí, kap. IV., kap. X. a j.

¹¹⁾ Marcus Porcius Cato (234 až 149 před n. l.), odpůrce Kartága, na nebezpečí Římu odtud hrozící upozorňoval klasickými slovy „Ceterum autem censeo Carthaginem esse delendam“.

¹²⁾ Viz dílo Josefa Pekaře „Valdštejn“, díl II., str. 360.

¹³⁾ Viz dílo Josefa Pekaře „Valdštejn“, díl II., str. 361.

„Astrologické vztahy, proroctví a diagnosy hvězdářů,“ napsal historik,¹⁴⁾ „měly na jeho chování značný vliv. Vskutku není ani vyloučeno, že hvězdný rádce a prorok jeho, Ital Senni, byl nakonec koupen Gallasem.“ Generál Jan Matyáš hrabě Gallas byl patentem císaře Ferdinanda II. již dne 24. ledna 1934 povýšen na vrchního velitele císařské armády a na místě Valdštejnově jmenován generalissimem s císařským zmocněním Valdštejna zajmouti nebo zabíti...

* *

*

Valdštejn se tedy králem Českým a mstitelem Bílé hory nestal. Do pobělohorské elegie našeho národa zaznívala však také slova věštby: „Nezahyne národ slovanský v Čechách...“ Jimi se v 16. století o osudech naší vlasti vyjádřil astrolog M. Petr Codicillus z Tulechova.¹⁵⁾ Na český lid působila v těžkých dobách tím mohutněji. Dodávala mu sílu a nových nadějí...

¹⁴⁾ Viz dílo Josefa Pekaře „Valdštejn“, díl II., str. 323.

¹⁵⁾ Viz „Miscellanea historica regni Bohemiae“ Bohuslava Balbína. Mistr Petr Codicillus z Tulechova (1533 až 1589) byl profesorem a několikrát rektorem university Karlovy.

Ze zahraničních časopisů

1. Jestliže

$$a + b + c = 0,$$

potom

$$a^3b + b^3c + c^3a = a^3c + b^3a + c^3b$$

a každý z těchto dvou výrazů je úplný čtverec. Dokažte.

2. Ověřte si správnost identit:

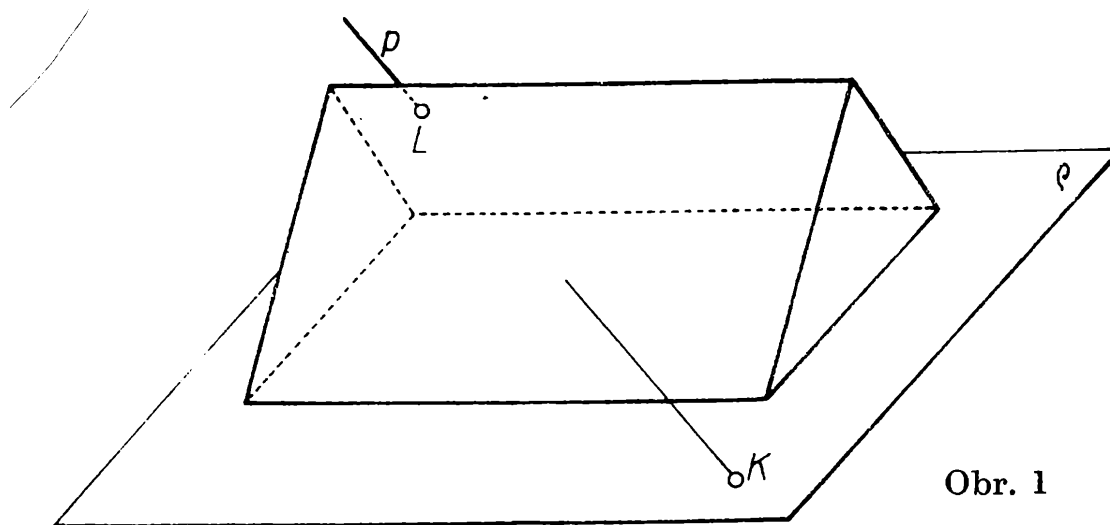
$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 - b^2 + c^2)^2 + (2ab)^2 + (2bc)^2;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + \\ + (2ab - 2cd)^2 + (2ad + 2bc)^2.$$

3. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán jeho vrchol A a průsečíky A_1 , B_1 výšek jdoucích vrcholy A , B s kružnicí opsanou hledanému trojúhelníku.

4. Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$, jejíž hrana má délku a . Vypočtete obsah trojúhelníku ABD'

5. V obr. 1 je zobrazen pravidelný hranol trojboký, který spočívá jednou pobočnou stěnou v rovině ρ . Přímka p protíná tuto rovinu v bodě K a jednu pobočnou stěnu v bodě L . Sestrojte druhý průsečík přímky p s povrchem hranolu.



Obr. 1

6. Ve třídě je 21 žáků. Z nich 12 hraje kopanou, 10 házenou a 10 tenis. Z toho právě 6 hraje kopanou a házenou, právě 6 kopanou a tenis a právě 3 hrají všechny tři hry. Rozhodněte, kolik žáků hraje jenom házenou a tenis.

7. Je dána posloupnost čísel

10, 20, 30, 40,

Kolik nejvýše prvočísel může být mezi dvěma sousedními členy posloupnosti?

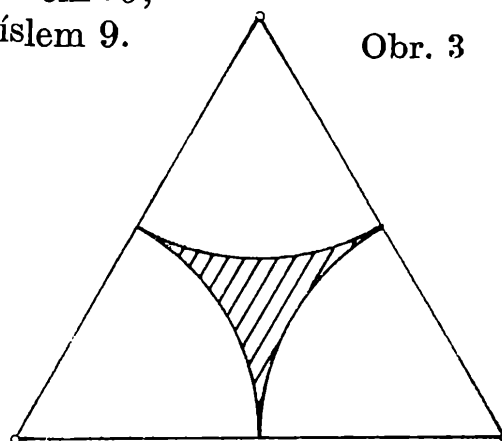
8. Kterou cifrou končí součet

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 ?$$

9. Mějme libovolné dvojciferné číslo. Výměnou obou jeho cifer utvoříme z něho nové číslo. Ukažte:

- Součet těchto dvou čísel je dělitelný číslem 99;
- rozdíl těchto dvou čísel je dělitelný číslem 9.

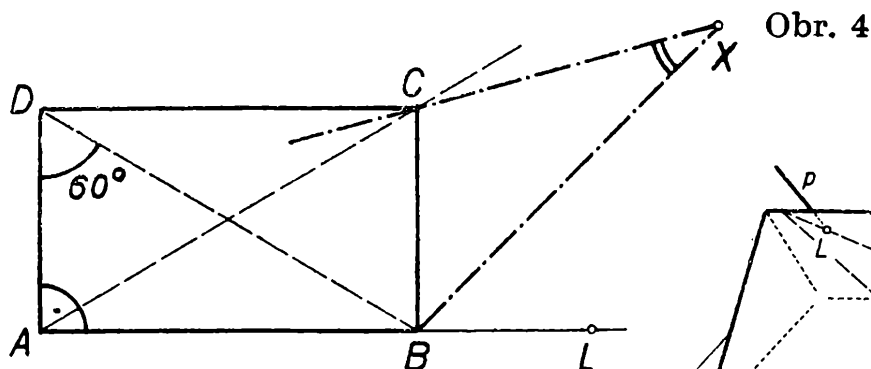
Obr. 2



Obr. 3

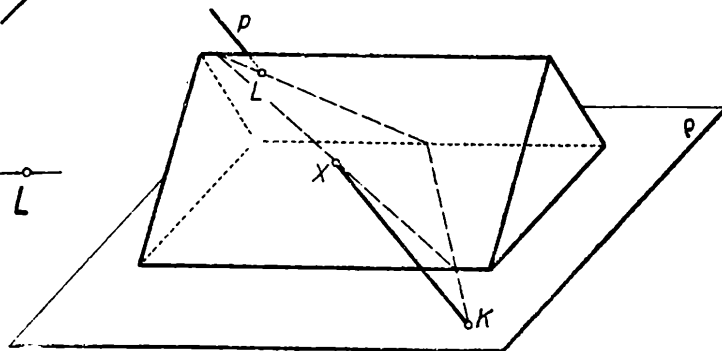
10. 15 bodů je srovnáno (obr. 2) tak, že leží na obvodě obdélníka a na jeho střední příčce. Vzdálenosti dvou sousedních bodů na stranách a na střední příčce jsou stejné. Kolik přímek určují tyto body?

11. V obr. 3 je dán rovnostranný trojúhelník ABC , jehož strana má délku l . Kolem jeho vrcholů uvnitř trojúhelníku jsou opsány kruhové oblouky poloměru $\frac{1}{2}l$. Vypočtete obsah vyšrafované plochy.



Obr. 4

Řešení příkladu 4 ►



Obr. 5

12. V obr. 4 je dán obdélník $ABCD$; body A, B, L leží v přímce. Přímka CX půlí úhel ACD , přímka BX půlí úhel CBL . Vypočtete velikost úhlu BXC .
S. H.

Řešení

1. Z 1. rovnice vyjádříme c a dosadíme do 2. Čtverec je $-(a^2 + b^2 - ab)^2 = -(c^2 - 3ab)^2$.
3. Kružnice opsaná trojúhelníku AA_1B_1 je současně opsána trojúhelníku ABC . $\sphericalangle B_1AC = \sphericalangle CAA_1 = 90^\circ - \gamma$.
 ABC . $\sphericalangle$ úhelník ABD' je pravoúhlý.
4. Trojúhelník ABD' je pravoúhlý.
5. Řešení poskytuje obr. 5.
6. Právě jeden žák hraje jenom házenou.
7. Nejvýše 3.
8. 1^2 končí cifrou 1, 2^2 končí cifrou 4, $3^2 \dots 9$, $4^2 \dots 6$ atd. Součet končí cifrou 5.
9. Čísla jsou: $10a + b$, $10b + a$. Jejich součet je $11(a + b)$, rozdíl je $9(a + b)$.
10. 38 přímek. 11. $\frac{1}{8}(2\sqrt{3} - \pi)$. 12. 30°

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

G

geometrický
geometrický
geometrická řada
geometrické místo
géométrie
goniometrický
goniometrická funkce
grad
graf
grafický
grafické znázornění
gravitace
grupa

géométriquement
géométrie
progresion *ž* géométrie;
série *ž* géométrie
lieu *m* géométrie
géométrie *ž*
goniométrie
fonction *ž* circulaire
grade *m*; degré *m* centigrade
graphe *m*
graphique
représentation *ž* graphique
gravitation *ž*
groupe *m*

H

harmonický
harmonicky sdružené body
hladina
hlavní
hlavní kružnice
hlavní normála
hlavní přímka
1. (vzhledem k půdorysně)
(vzhledem k nárysně)
hodina
hodiny
hodnota
absolutní hodnota
homogenní
homologie
homomorfismus
homotetie
horizont

harmonique
points *m* conjugués harmoniques
niveau *m*
principal, aux, cardinal, aux
grand cercle *m*
normale *ž* principale
horizontale
droite *ž* de front; frontale *ž*
heure
horloge *ž*
valeur *ž*
valeur absolue
homogène
homologie
homomorphisme *m*
homozthétie
horizont *m*

horizontální
horní
horní mez
horní podstata
hození hrací kostkou

hra
hrací kostka
hrana
hranice
hranol
hromadný bod
hustota
hustý
hvězdička
hyperbola
hyperboloid
hyperboloid dvoudílný
hyperboloid jednodílný
hypotéza

CH

chování
chyba

horizontal, e,
supérieur, e
borne *ž* supérieure
base *ž* supérieure
coup *m* de dé *m*
jeu *m*
dé *m*
arête *ž*
frontière *ž*
prisme *m*
point *m* limite
densité *ž*
dense
astérisque *ʔ*
hyperbole *ž*
hyperboloïde *m*
hyperboloïde à deux nappes
hyperboloïde à une nappe
hypothèse *ž*

comportement *m*
faute *ž*; erreur *ž*

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

6

ROČNÍK 50 1971-1972, ÚNOR



ROČNÍK 50
ÚNOR 1972

6

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
a zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellerová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

Akademik Š. Schwarz: Zamyslenie nad 50. ročníkom Rozhľadov . .	241
J. Daneš, J. Danešová: O Kakeyově úloze	246
Dr. O. Odvárko: Několik modelů Booleovy algebry	250
F. Hradecký: Geometrická místa .	253
Dr. Z. Horák, DrSc., ing. A. Štěpánek: Translačně rotační kyvadlo . .	260
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Odvozené jednotky SI třetí skupiny .	264
S. Baník: Niektoré problémy o elektrickom prúde II . .	266
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Pulsující proměnné hvězdy .	272
R. Kolomý: Uplynulo 75 let od objevu přirozené radioaktivity .	275
J. Kotyk: Z dějin astrologie (pokračování)	277
E. Říman, CSc.: Záhadné telefonné číslo	283
J. Kotyk: Zmatlíkova poučka	284
Nejmladším čtenářům	285
Recenze .	288
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský (pokračování) .	3. a 4. str. obálky



Zamyslenie nad 50. ročníkom Rozhledov

ŠTEFAN SCHWARZ, akademik ČSAV a SAV, laureát štátnej ceny
Kl. Gottwalda, nositeľ Radu Práce

50 rokov Rozhledov nie je pre mňa a pre viacerých mojich rovesníkov iba „guľatým“ jubileom. Nasledujúce riadky nemajú byť nostalgickou spomienkou na mladé roky, ale pravdivým vylíčením úlohy, ktorú zohrali Rozhledy pri formovaní môjho matematického vzdelania a nakoniec i môjho celého života.

I keď toto zamyslenie bude nevyhnutne ladené trochu osobne, som presvedčený, že mnohí z mojich rovesníkov by ju napísali asi obdobne.

Je tomu viac ako 40 rokov, keď sa mi Rozhledy dostali po prvý raz do rúk. Bol som žiakom štátného ref. reál. gymnázia v Novom Meste nad Váhom. Bola to na vtedajšie pomery relatívne veľká škola, ktorú navštevovali žiaci zo širokého okolia. Matematiku nás učil v kvinte prof. Ludevít Houška, mladý, nadšený profesor. Bolo to jeho prvé pôsobisko. Zoznámil mňa s Rozhledmi. Nabádal ma

k čítaniu a riešeniu úloh a bol mojim prvým matematickým poradcom. Pravda, už ako kvartán som riešil všelijaké „mne nepatriace“ úlohy a tajne som kradol matematické zošity staršej sestre, ktorá sa pripravovala na maturitu.

Už ako kvintánovi mi to nedalo, aby som sa nepokúsil riešiť súťažné úlohy. Bývalo ich každoročne 20 z matematiky, 10 z fyziky a 5 z deskriptívnej geometrie. Pravda, nie práve hneď s najväčším úspechom. Nemal som ešte dosť znalostí z trigonometrie a z analytickej geometrie, ktoré tvorili jadro úloh. Neváhal som zaslať i ten jediný príklad, ktorý som rozriešil a bol som pyšný, keď sa moje meno objavilo v zozname riešiteľov. Ako septimán a oktáván rozriešil som už prakticky všetky úlohy a to som už považoval akosi za prirodzené, že som získal aj prvú resp. druhú cenu.

Mal som šťastie, že aj moji ďalší učitelia matematiky, deskriptívnej geometrie a fyziky, v sexte prof. L. Hustý a jeho manželka A. Hustá-Čepeláková, v septíme a v oktáve prof. Vítězslav Forster, mali plné pochopenie pre môj záujem o matematiku a postarali sa o to, že sa na našom gymnáziu kolportovalo niekoľko čísel Rozhľadov.

Živo si pamätám, ako som netrpezlivo čakal na koniec októbra, kedy prichádzavalo prvé číslo Rozhľadov so súťažnými úlohami. Do marca som potom presedel desiatky hodín nad riešením príkladov. Nie, nebolo to púhé riešenie, bolo to romantické rozjímanie nad príkladmi. Bolo by veľmi ťažké popísať vnútorné pohnútky, ktoré mňa k tomu viedli. Nebola to určite nejaká vyhranená snaha „stať sa múdrejším“. Tým menej som mohol tušiť, že o 20 rokov neskôr zaujme matematika jedno z centrálnych postavení v systéme modernej vedy ako celku. Bola to jednoducho zábava.

Naučil som sa „hrabať sa v knihách“. Nemal som ich mnoho. Boli to vlastne iba učebnice, do ktorých sa v tomto čase (ani veľmi dobrí) žiaci za celý rok ani nepozreli. Naši profesori ich voľne používali, žiaci ich vlastne nepotrebovali. Tým skôr, že boli spoločné pre gymnázia, reálne gymnázia, ref. reál. gymnázia, a hádam, aj pre reálky. (Ale toto si uvedomujem až spätne. Vtedy mňa také veci nezaujímali). Jediná kniha, ktorú sme potrebovali, bola kniha B. Bydžovský – J. Vojtěch: Zbierka úloh z matematiky (pre 5.–8. triedu gymnázií).

Česká (alebo dokonca slovenská) populárna literatúra vhodná pre stredoškóľakov v tom čase neexistovala.

Možná, že existovali takéto cudzojazyčné knihy, ale na to som v tom čase ani nepomyslel. Keď na to spätne hľadím, čudujem sa tomu, lebo v tom čase som už vedel obstojne čítať francúzsky, nemecky a rozumel maďarsky, neskôr v oktáve som plynne čítal

aj rusky. Francúzštinu sme mali od druhej triedy gymnázia a naša škola bola jednou z niekoľko málo slovenských škôl, kde sme mali v septíme a oktáve štyri hodiny povinnej ruštiny.

Okrem stredoškolských učebníc existovalo v tom čase (t. j. okolo roku 1930) viac vysokoškolských učebníc, ktoré som si – pravda – nemohol dovoliť kúpiť a ktoré by mi pri riešení úloh z Rozhľadov aj tak neboli bývali mnohé platné. O týchto knihách som vedel z prospektov Jednoty. Tieto prospekty Jednoty boli prvým zdrojom mojich vedomostí o tom, že existuje niečo ako „matematická literatúra“. Niektoré z týchto kníh som dostal ako cenu za riešenie úloh. (Boli medzi nimi aj také, ktoré som už vtedy považoval za archaické.)

Články v Rozhľadoch som sa samozrejme pokúšal čítať a porozumieť. Nemôžem povedať, že som ich všetky aj naozaj dočítal. Získal som skôr iba predstavu o tom, o čo ide. Zdáli sa mi často príliš učené. V tom smere sa mi zdá, že dnešné Rozhľady sú primeranejšie úrovni stredoškôľakov. Niečo iného boli, pravda, súťažné úlohy.

Rád by som tu urobil malú vložku, aby som poopravil nesprávne, a často naivné predstavy o „zárodku mladého vedca“. Bol som považovaný za „zažraného matematika“, ale aj za spoľahlivého priateľa, od ktorého sa dala kedykoľvek odpísať domáca úloha z matematiky alebo fyziky. To mi ale nebránilo, aby som sa nepreháňal po futbalovom ihrisku, čo – ku podivu – riaditeľstvo školy jeden čas aj zakazovalo. Ako poslušný žiak mal som z toho vnútorné konflikty. Za to bol vo vysokom kurze volejbal. Ten sme smeli hrať aj na školskom dvore, a výdatne sme tak robili. A keď bolo 6 hodín večer, stretli sme sa na novomestskom „korze“, čo znamenalo hodinu až dve premeriavať statočne sto metrov hore-dole. Tomu musela aj matematika ustúpiť.

A pravda, museli sme sa učiť aj rad iných predmetov. Naším triednym profesorom (od 5. do 8. triedy) bol prof. Jaroslav Tupý, ktorý nás učil slovenčinu a nemčinu. Mladý český profesor nastúpil hneď po skončení vysokej školy na slovenskom gymnázium. Naučil nás milovať slovenskú a českú literatúru. Nielen tú povinnú, školskú, ale predovšetkým tú súčasnú. Bol to človek skromný, vysoko pokrokový, ktorý sa netajil obdivom k proletárskej poézii. Ešte i dnes, spomíname na neho s láskou a obdivom. Aj tých „neokrôchaných“ presvedčil nenúteným spôsobom o potrebe čítať a vychutnávať beletriu. Po rokoch, ako učiteľ a školiteľ mladších vedeckých pracovníkov, som plne pochopil, že kultúra štýlu vyjadrovania (ktorá sa získava čítaním kvalitnej beletrie) je pre matematika nevyhnutná.

Túto vložku som si nemohol odpustiť, lebo chcem zdôrazniť svoje hlboké presvedčenie, že aj úzký špecialista (akým je napr. budúci matematik) musí byť vo svojej školskej výchove vedený k harmonickému rozvíjaniu všetkých svojich schopností.

Na vysokej škole som sa od svojich učiteľov, prof. B. Bydžovského, prof. K. Petra, prof. V. Jarníka, Vl. Kořínka a iných, naučil mnoho. Ale bola to stredná škola a riešenie príkladov z Rozhľadov, ktoré vo mne vypestovali lásku k matematike a akýsi druh – myslím si, že zdravej – ambície.

Úlohy v Rozhledoch neriešilo príliš mnoho žiakov. Pri písaní týchto riadkov som si overil, že príklady z matematiky riešilo v rokoch 1930, 1931, 1932, postupne 23, 41 a 15 žiakov. Z fyziky a desk. geometrie ešte menej.

Nepoznal som svojich „konkurentov“, ktorí sa regrutovali zo všetkých kútov republiky. Neexistovalo nijaké „sústredenie“ súťažiacich. Každý si pomáhal ako vedel. Ale medzi nami vzniklo akési nedefinovateľne púto vzájomnej spolupatričnosti. S niekoľkými z nich som sa zoznámil na vysokej škole, s inými až o mnoho rokov neskôr. Skoro všetci sa stali veľmi platnými členmi našej spoločnosti. Asi polovina z nich sa neskôr špecializovala na matematiku, fyziku a technické vedy.

Analogické púto sa vyvinulo aj medzi autormi úloh a ich riešiteľmi. Roky zmazali vekový rozdiel. Spomínam si v tejto súvislosti menom nás všetkých na nezabudnuteľného druhu prof. Fr. Vyčichla, v ktorom sme my „vonkovskí“ prívrženci Rozhľadov našli v Prahe verného priateľa a pomocníka v núdzi.

Aj ja sám som so svojimi prvými samostatnými drobnými „objavmi“ začínal na stránkách Rozhľadov. Neskôr som písal aj menšie prehľadné články.

Prehnala sa strašná vojna, kedy aj Rozhledy nútene odpočívali. Prebudovali sme školský systém, zmenilo sa spoločenské vedomie, mnohonásobnil sa počet škôl i žiakov. Zvyšovanie matematickej úrovne stredných škôl si začalo vyžadovať ďaleko náročnejšie organizačné formy. Vznikla matematická Olympiáda, ktorá v tomto roku oslavila svoje 20. výročie. Mnoho sa zmenilo. Ambicióznejší žiaci majú dnes k dispozícii desiatky populárnych kníh a brožúr, Majú otvorenú cestu k širokej sieti knižníc na školách i mimo škôl, a to i na malých mestách. Teda veci, o ktorých sa nám ani nesnívalo.

Rozhledy nestratili vôbec na svojom význame. Zmenili rozsah. Vychádzajú 10 ráz do roka (pred vojnou iba 4 razy). Zmenila sa ich náplň. Dnešné potreby sú iné ako pred 40 rokmi, preto

i pestrosť a tématika sa značne zmenila. Môj dojem je, ako som už spomenul, že sú zaujímavejšie a prístupnejšie stredoškólakom.

Je dobré, že rubrika súťažných úloh zostala zachovaná. Priznávam sa k slabosti, že i dnes si neodpustím občas „tajne“ vyriešiť niektorú tú úlohu. Mám radosť, ak sa mi podarí jednoduché riešenie, nezaťažené balastom vedomostí, ktoré som medzitým predsa len získal. Čaro riešenia problémov nie je viazané na vek. Iba závažnosť problémov sa mení.

Prial by som Rozhľadom, ale predovšetkým ich mladej čitateľskej obci, aby sa im naskytla príležitosť vypestovať v sebe kus romantiky, a aby našli nenútenou cestou záľubu v riešení drobných problémov.

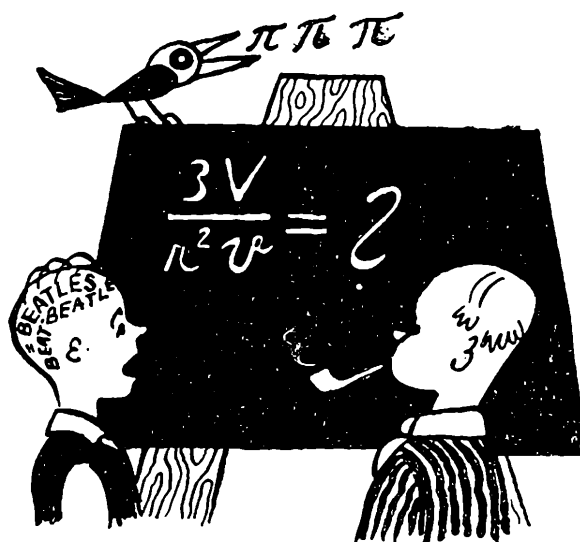
Za posledných desať rokov bol som členom radu vedeckých orgánov, ktoré majú za úlohu starať sa o rozvoj vedy v našom štáte ako celku. Dostal som sa do styku s vednými disciplínami na mile vzdialenými od matematiky, vednými disciplínami používajúcimi iné metódy ako matematika alebo fyzika. Mal som možnosť nahliadnúť trochu i do kuchyne a dielne týchto disciplín. Utvrdil som sa pritom v svojom presvedčení, že pestovanie matematiky (a každej vedy vôbec) nezačína tým, že si mladý človek v stredoškolskom veku uvedomí spoločenskú potrebu tohto vedného odboru. Začína sa skôr záujmom o drobné otázky, záľubou, ktorá sa časom premení na vášeň a pokračuje snahou združiť sa s ľuďmi rovnakých záujmov. Takýto kolektív vie nielen zdôvodniť spoločenský dosah svojho odboru, ale tento aj uplatniť.

Chceme vytvárať socialistickú spoločnosť, ktorej cieľom je všestranný spoločenský pokrok. V nijakom prípade sa nezaobídeme bez ľudí zapálených pre svoju prácu. Je dvojnásobne cenné, ak si takéto nadšenie osvojí človek už v relatívne veľmi mladom veku.

VAŠNIVÁ LÁSKA

Matematika je ta najpríjemnejšia veda; spolu s astronomií mi nahrazuje taneční večírky, koncerty a jiné takové zábavy, ktoré znám jen podle jména.

Bessel jako kupecký učeň 1802



0 Kakeyově úloze

JOSEF DANEŠ, MÚKU Praha, JANA DANEŠOVÁ, ČVUT Praha

Zavedme v rovině pravoúhlou soustavu souřadnic. Jehlou budeme rozumět úsečku velikosti 1. Otočit jehlu o 360° v kruhu o průměru 1 není nic neobvyklého. Ovšem otočit tuto jehlu na ploše $\frac{1}{100}$ o 360° se zdá být nemožné. Cílem našeho článku je ukázat, že to je možné!

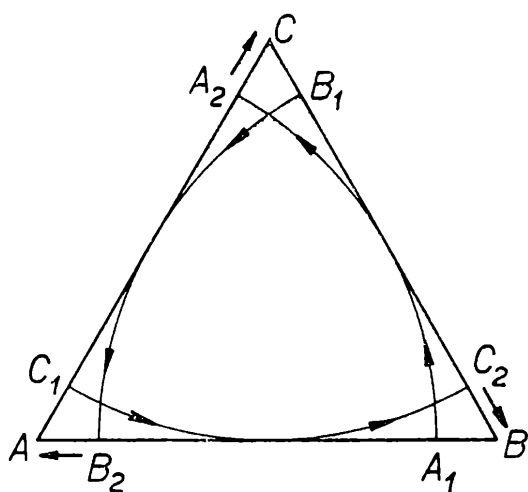
V roce 1917 japonský matematik S. Kakeya vyslovil následující úlohu: Najděte rovinný obrazec $\mathbf{O}$ takový, že jehlu lze otočit v obrazci $\mathbf{O}$ o 360° a přitom obrazec $\mathbf{O}$ má nejmenší možnou plochu. Kakeyovým obrazcem nazveme každý rovinný obrazec, ve kterém lze jehlu otočit o 360° . Obsah rovinného obrazce $\mathbf{O}$ budeme značit $P(\mathbf{O})$. Jak již bylo

řečeno, kruh $\mathbf{K}$ o průměru 1 je Kakeyovým obrazcem s $P(\mathbf{K}) = \frac{\pi}{4} \doteq 0,785$.

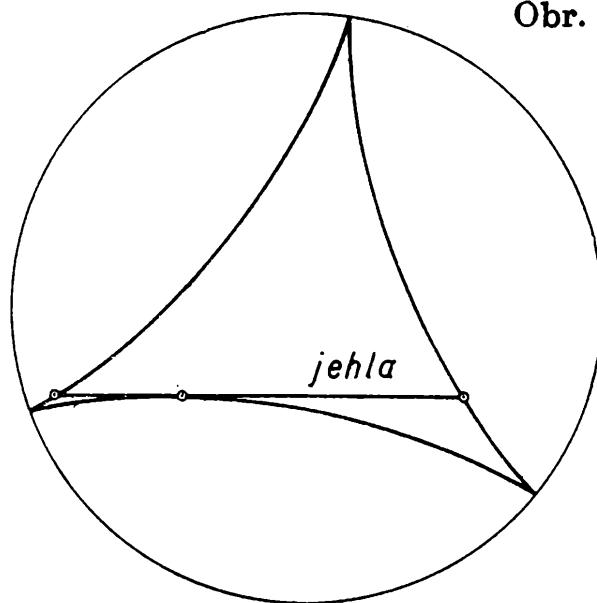
Rovnostranný trojúhelník $\mathbf{T}$ o výšce 1 je také Kakeyovým obrazcem. Otáčení jehly v $\mathbf{T}$ je znázorněno na obr. 1. Nejprve jehlu umístíme na stranu AB tak, aby její levý krajní bod splýval s A (úsečka AA_1). Úsečku AA_1 otočíme o 60° v kladném smyslu (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček) kolem bodu A ; přitom úsečka AA_1 přejde v úsečku AA_2 . Úsečku AA_2 posuneme po straně AC tak, aby bod A_2 přešel do bodu C ; přitom bod A přejde do bodu C_1 . Nyní otočíme úsečku CC_1 o 60° kolem bodu C v kladném smyslu atd. Obsah trojúhelníka $\mathbf{T}$ je $P(\mathbf{T}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,577$, tedy menší než plocha kruhu $\mathbf{K}$.

Hypocykloida o třech vrcholech vepsaná do kružnice o průměru $\frac{3}{2}$ je zhruba řečeno křivka, která vznikne kotálením kružnice o průměru $\frac{1}{2}$ po vnitřní straně kružnice o průměru $\frac{3}{2}$. Nechť **H** značí obrazec ohraničený touto hypocykloidou (obr. 2). Lze dokázat (což zde dělat nebudeme), že **H** je Kakeyovým obrazcem o obsahu $P(\mathbf{H}) = \frac{\pi}{8} \doteq 0,393$, tedy polovina obsahu kruhu **K**, a zároveň¹ menší než obsah trojúhelníka **T**. Byla vyslovena domněnka, že **H** je řešením Kakeyovy úlohy, tj. Kakeyovým obrazcem o nejmenším obsahu. Proto bylo překvapením,

Obr. 1



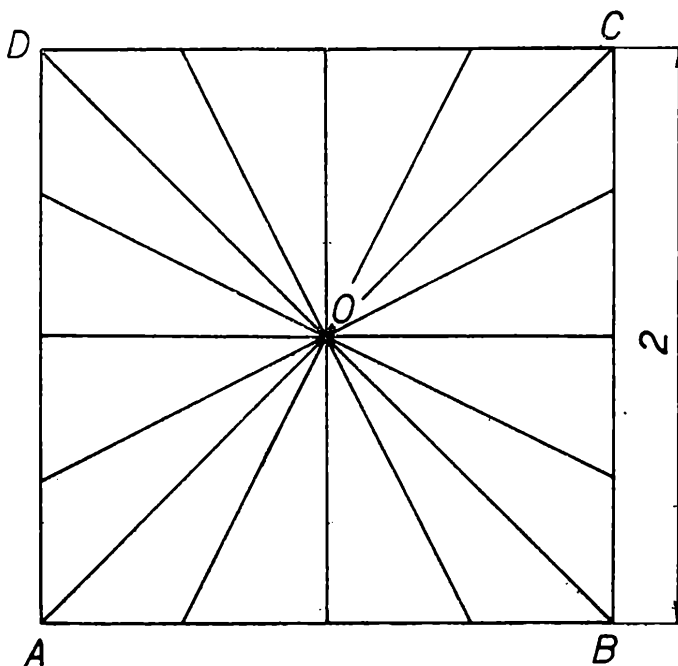
Obr. 2



když v roce 1928 A. S. Besicovitch zveřejnil práci, ve které dokázal, že existují Kakeyovy obrazce o libovolně malém obsahu! Besicovitch dokázal tuto větu:

Věta. Ke každému kladnému číslu ε existuje Kakeyův obrazec $\mathbf{O}_\varepsilon$ o obsahu $P(\mathbf{O}_\varepsilon) < \varepsilon$.

Besicovitch v r. 1920 řešil úlohu blízkou Kakeyově úloze. Teprve J. Pal

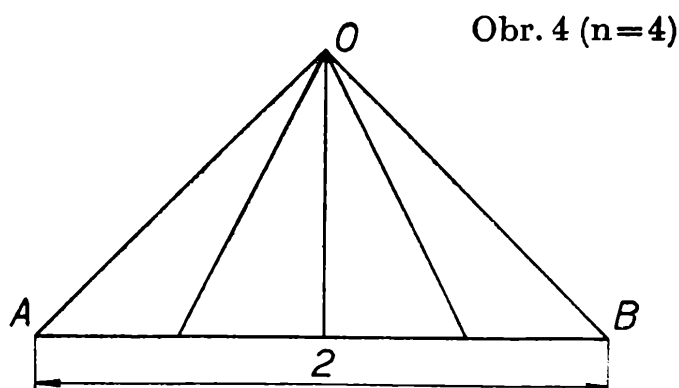


Obr. 3 ($n=4$)

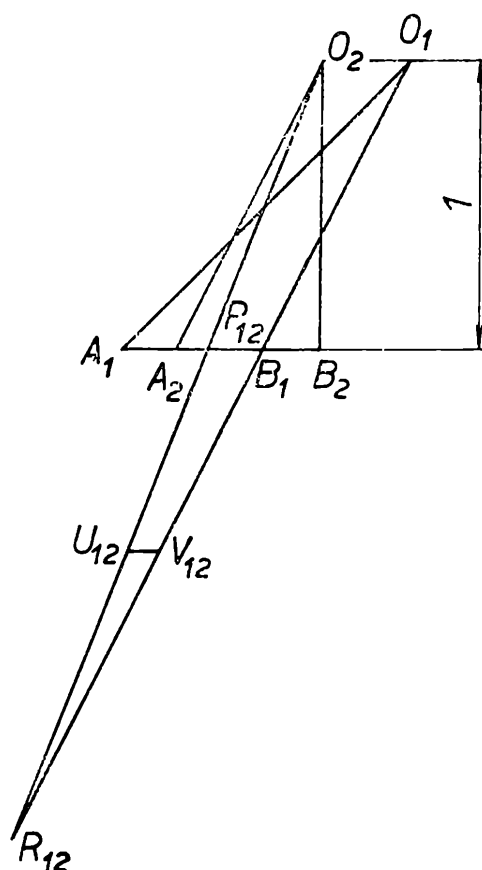
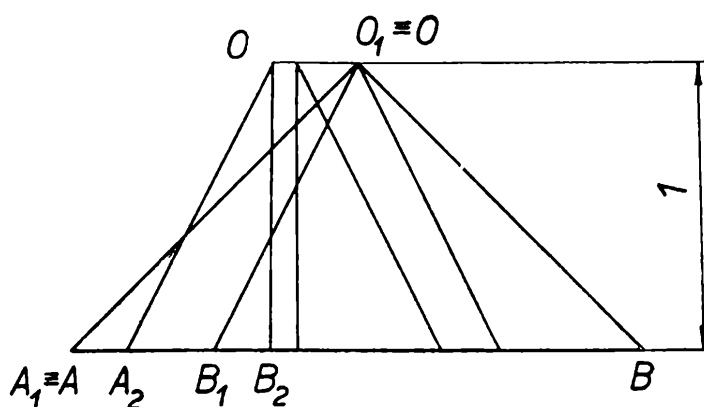
ho upozornil na blízkost obou úloh i na malou změnu v řešení původní úlohy, dávající pak řešení Kakeyovy úlohy.

Uvažujme čtverec $ABCD$ o straně 2 (obr. 3). Rozdělme každou jeho stranu na n stejných úsečků. Krajiní body všech úsečků spojíme úsečkami se středem O čtverce $ABCD$. Tím je čtverec rozdělen na $4n$ trojúhelníků. Trojúhelníky, mající základny na stejné straně čtverce $ABCD$, se budeme snažit posunout po této straně tak, aby se co nejvíce překrývaly. Dokážeme totiž, že vhodným posunutím těchto trojúhelníků a přidáním několika úsečků a úzkých trojúhelníků dostaneme Kakeyův obrazec, jehož obsah bude velmi malý, je-li n dosti velké přirozené číslo.

Bud' ε libovolné kladné číslo. Na chvíli se omezíme na rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník OAB o přeponě 2 (obr. 4). Jedno z možných po-



Obr. 5



Obr. 6

sunutí trojúhelníků ($n = 4$) je na obr. 5. Trojúhelníky $O_1A_1B_1$ a $O_2A_2B_2$ vznikly vodorovným posunutím dvou sousedních (dělicích) trojúhelníků trojúhelníka OAB . V trojúhelníku $O_1A_1B_1$ můžeme otočit jehlu o úhel $A_1O_1B_1$, v trojúhelníku $O_2A_2B_2$ o úhel $A_2O_2B_2$ atd. Ale přenesení jehly z trojúhelníka $O_1A_1B_1$ do $O_2A_2B_2$ není plynulé (je nespojitě). Abychom dosáhli plynulého přenesení jehly z trojúhelníka $O_1A_1B_1$ do trojúhelníka $O_2A_2B_2$, připojíme k nim tzv. Palovu spojku (obr. 6). Na úsečce

A_2B_2 zvolme bod P_{12} tak, že $\frac{A_2P_{12}}{A_2B_2} < \frac{\varepsilon}{8}$, tj. $A_2P_{12} < \frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{2}{n} = \frac{\varepsilon}{4n}$.

Polopřímky O_2P_{12} a O_1B_1 se protnou v bodě R_{12} (tyto polopřímky nejsou rovnoběžné, neboť $O_2A_2 \parallel O_1B_1$). Zvolme body U_{12} na úsečce O_2R_{12} a V_{12} na úsečce O_1R_{12} tak, aby $U_{12}R_{12} = O_2P_{12}$ a $V_{12}R_{12} = O_2A_2$. Pak trojúhelníky $O_2A_2P_{12}$ a $R_{12}V_{12}U_{12}$ jsou shodné. Palovou spojkou trojúhelníků $O_1A_1B_1$ a $O_2A_2B_2$ rozumíme obrazec, sestávající z trojúhelníku $R_{12}V_{12}U_{12}$ a úseček $P_{12}U_{12}$ a B_1V_{12} . Obsah Palovy spojky je roven

$$\begin{aligned} P(\Delta R_{12}V_{12}U_{12}) &= P(\Delta O_2A_2P_{12}) = \frac{1}{2} A_2P_{12} < \\ &< \frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_2B_2 = \frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} = \frac{\varepsilon}{8n}, \end{aligned}$$

neboť výška všech uvažovaných trojúhelníků je 1. Nyní ukážeme, jak lze jehlu přemístit pomocí Palovy spojky z trojúhelníku $O_1A_1B_1$ do trojúhelníku $O_2A_2B_2$, přesněji řečeno ze strany O_1A_1 na stranu O_2B_2 . Nechť jehla leží na straně O_1A_1 s jedním koncem v bodě O_1 . Otočíme ji kolem bodu O_1 v kladném smyslu o úhel $A_1O_1B_1$. Jehla leží na straně O_1B_1 s jedním koncem v bodě O_1 . Posuneme ji po úsečce O_1R_{12} až druhý konec jehly splyne s R_{12} , pak jehlu otočíme v kladném smyslu kolem bodu R_{12} o úhel $V_{12}R_{12}U_{12}$ a posuneme ji po úsečce $R_{12}O_2$ až jeden její konec splyne s bodem O_2 . Nakonec jehlu otočíme kolem bodu O_2 v kladném smyslu o úhel $A_2O_2B_2$. Celkem byla jehla v obrazci na obr. 6 otočena o úhel

$$\begin{aligned} \sphericalangle A_1O_1B_1 + \sphericalangle V_{12}R_{12}U_{12} + \sphericalangle P_{12}O_2B_2 &= \sphericalangle A_1O_1B_1 + \sphericalangle A_2O_2P_{12} + \\ &+ \sphericalangle P_{12}O_2B_2 = \sphericalangle A_1O_1B_1 + \sphericalangle A_2O_2B_2. \end{aligned}$$

Palovu spojkou sestrojíme pro každé dva trojúhelníky obrazce z obr. 5, který vznikly vodorovným posunutím dvou sousedních trojúhelníků trojúhelníku OAB . Těchto Palových spojek je $n-1$. Celkový obsah všech Palových spojek je tedy menší než $\frac{\varepsilon}{8n} (n-1) < \frac{\varepsilon}{8n} \cdot n = \frac{\varepsilon}{8}$.

Nyní dokážeme, že trojúhelníky lze při dostatečně velkém n vodorovně posunout tak, že výsledný obrazec bude mít obsah menší než $\frac{\varepsilon}{8}$. Pak obsah tohoto obrazce spolu s Palovými spojkami bude menší než $\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}$.

(Pokračování)

Několik modelů Booleovy algebry

RNDr. OLDŘICH ODVÁRKO, MFF UK Praha

Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s několika příklady Booleovy algebry.

Pro naše úvahy bude užitečné nejprve si stručně objasnit, co rozumíme pod pojmy „binární operace“ a „unární operace“.

Předpokládejme, že je dána neprázdná množina A . Volně řečeno, binární operací na A budeme nazývat zobrazení, které každé uspořádané dvojici prvků z A přiřazuje právě jeden prvek z A . Výstižněji můžeme říci: Binární operací na množině A nazýváme každé zobrazení kartézského součinu $A \times A$ do A . Obdobně unární operací na A budeme nazývat zobrazení, které každému prvku množiny A přiřazuje právě jeden prvek z A .

Pokud bude z kontextu jasné, zda jde o binární či unární operaci, budeme obvykle psát stručněji pouze „operace“.

1. Připomeňme si nyní, jak můžeme charakterizovat Booleovu algebru (viz článek „O základech Booleovy algebry“, č. 3):

Mějme danou neprázdnou množinu B , na které jsou definovány dvě binární operace sčítání a násobení, unární operace tvoření doplňku a v níž existují dva význačné prvky 0 a 1 . O Booleově algebře v B hovoříme právě tehdy, když pro všechny prvky x, y, z množiny B platí:

$$\begin{array}{llll} \text{I. } x + 0 = x & x \cdot 1 = x & \text{II.} & \\ \text{III. } x + x' = 1 & x \cdot x' = 0 & \text{IV.} & \\ \text{V. } x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x & \text{VI.} & \\ \text{VII. } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z & x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z) & \text{VIII.} & \end{array}$$

Takto definovanou Booleovu algebru budeme označovat $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

V číslech 9 a 10 minulého ročníku jsme se již seznámili se dvěma důležitými příklady, lépe řečeno modely Booleovy algebry — s algebrou pravdivostních hodnot výroků $(\{0,1\}, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ a s množinovou algebrou $(\hat{M}, \cup, \cap, ', 0, 1)$. Uveďme nyní některé její další modely.

2. Uvažujme množinu $P = \{1, 2, 3, 6\}$. Určeme ke každé uspořádané dvojici $[x, y]$ prvků z P jejich nejmenší společný násobek — v dalším jej označujme $n(x, y)$ — a jejich největší společný dělitel $D(x, y)$.

Zkontrolujte správnost následujících výpočtů:

$x \backslash y$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

tab. 1

$x \backslash y$	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

tab. 2

Ihned vidíme, že pro všechny dvojice $[x, y]$ prvků z množiny $\mathbf{P}$ je $n(x, y)$ i $D(x, y)$ opět prvek z $\mathbf{P}$. Tedy tabulkami 1 a 2 jsou na množině $\mathbf{P}$ definovány dvě binární operace.

Definujme dále na $\mathbf{P}$ unární operaci takto:

x		1	2	3	6
x^*		6	3	2	1

tab. 3

Poznámka: Všimněte si, že pro každé $x \in \mathbf{P}$ je $x^* = \frac{6}{x}$

Představme si nyní na místě množiny $\mathbf{B}$ z definice Booleovy algebry množinu $\mathbf{P}$, operace sčítání, násobení a doplněk konkretizujeme postupně jako operace definované tabulkami 1, 2, 3. Dokážeme, že množina $\mathbf{P}$ s příslušnými operacemi, tj. $(P, n, D, *)$, je modelem Booleovy algebry. Naším úkolem je tedy ověřit, že pro všechny prvky z množiny $\mathbf{P}$ platí věty I. – VIII.

Roli význačných prvků 0 a 1 hrají zřejmě čísla 1 a 6. Z tabulek 1 a 2 snadno zjistíte, že pro každé $x \in \mathbf{P}$ je $n(x, 1) = x$ a $D(x, 6) = x$. Je tedy splněno I. a II.

Dále ověříme, že pro každé $x \in \mathbf{P}$ platí III. i IV. Důkaz je proveden v tabulce 4.

x	x^*	$n(x, x^*)$	$D(x, x^*)$
1	6	6	1
2	3	6	1
3	2	6	1
6	1	6	1

tab. 4

Z tabulek 1 a 2 je vidět, že pro všechny prvky x, y množiny $\mathbf{P}$ platí $n(x, y) = n(y, x)$ a také $D(x, y) = D(y, x)$. Je tedy splněno V. a VI.

Zbývá ověřit, že platí VII. a VIII., tj., že pro všechny prvky x, y, z množiny $\mathbf{P}$ je

$$D(x, n(y, z)) = n(D(x, y), D(x, z))$$

a zároveň

$$n(x, D(y, z)) = D(n(x, y), n(x, z))$$

Postup důkazu VII. je naznačen v tabulce 5; prosím čtenáře, aby jej provedl detailně celý. Přenechávám mu také důkaz věty VIII.

x	y	z	$n(y, z)$	$D(x, n(y, z))$	$D(x, y)$	$D(x, z)$	$n(D(x, y), D(x, z))$
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	6	2	1	2	2
3	2	3	6	3	1	3	3
6	6	6	6	6	6	6	6

tab. 5

Dokázali jsme tedy, že $(P, n, D, *)$ je modelem Booleovy algebry. Při řešení úloh v množině P lze proto užívat všech vět platných pro prvky Booleovy algebry, mimo jiné například vět (0)–(20) z článku v čísle 3.

Poznámka 1.: Úvahy z tohoto odstavce lze ještě dále zobecnit. Zvolme množinu K všech prvočísel, jež jsou menší nebo rovna než jisté přirozené číslo $a > 1$. Uvažujme množinu S , jejímiž prvky jsou číslo 1, všechny prvky z K a všechny součiny vzájemně různých prvků z K . Na množině S definujeme binární operace stejně jako na P a unární operaci takto:

$$x^* = \frac{m}{x}, \text{ kde } m \text{ je součin všech prvočísel z } K. \text{ Lze dokázat, že } (S, n, D, *) \text{ je opět modelem Booleovy algebry. Důkaz ale předpokládá jisté hlubší znalosti z teorie dělitelnosti přirozených čísel.}$$

Poznámka 2.: Čtenář jistě vidí užitečnost snah redukovat systém vět v definici Booleovy algebry na co nejmenší počet. Ověřování, zda nějaká množina s dvěma binárními operacemi a jednou operací unární je modelem Booleovy algebry, je pak rychlejší a pohodlnější.

3. Dříve, než uvedeme další model Booleovy algebry, připomeňme dva pojmy, mnohým čtenářům jistě známé.

Jsou-li u, v libovolná reálná čísla, označujeme symbolem „ $\max(u, v)$ “ tzv. maximum čísel u, v a definujeme je takto:

1. $\max(u, v) = u$, právě když je $u \geq v$,
2. $\max(u, v) = v$, právě když je $u \leq v$.

Obdobně „ $\min(u, v)$ “ označuje minimum čísel u, v a je definováno takto:

1. $\min(u, v) = u$, právě když je $u \leq v$,
2. $\min(u, v) = v$, právě když je $u \geq v$.

Nechť je nyní n pevně zvolené, ale jinak libovolné přirozené číslo, c, d reálná čísla, pro něž je $c < d$.

Zabývejme se množinou U všech uspořádaných n -tic $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, pro jejichž každou složku x_i platí: $x_i = c$ nebo $x_i = d$.

Nechť jsou $[x_1, x_2, \dots, x_n], [y_1, y_2, \dots, y_n]$ dva libovolné prvky z U . Definujme v U rovnost jejich prvků takto:

$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ právě tehdy, když je zároveň $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Dále definujme na U dvě binární operace — „sčítání“ (znaménko operace „ $+$ “) a „násobení“ (znaménko „ $\cdot$ “):

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2), \dots, \max(x_n, y_n)]$$

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot [y_1, y_2, \dots, y_n] = [\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2), \dots, \min(x_n, y_n)]$$

Unární operaci „doplňek“ (znaménko „ $'$ “) zavedme takto:

Pro každé $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in U$ je $[x_1, x_2, \dots, x_n]' = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$, kde

pro $i = 1, 2, \dots, n$ je $\bar{x}_i = c$ právě tehdy, když je $x_i = d$ (a tedy $\bar{x}_i = d$, právě když $x_i = c$).

Dokažte sami, že $(U, +, \cdot, ')$ je modelem Booleovy algebry. Roli význačného prvku 0 hraje n -tice, jejíž každá složka je rovna c , roli prvku 1 n -tice, jejíž každá složka je rovna d . K ověření platnosti VII. stačí dokázat, že pro všechna x, y, z množiny $\{c, d\}$ je $\min(x \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))$.

Cvičení:

1. Nechtě jsou c, d pevně zvolená reálná čísla, $c < d$. Uvažujte množinu F všech funkcí (reálných funkcí jedné reálné proměnné), jejichž definiční obor je množina všech reálných čísel R a pro něž platí: Pro každé $f \in F$ a pro každé $x \in R$ je funkční hodnota $f(x)$ rovna c nebo d . Definujte na F operace tak, abyste dospěli k modelu Booleovy algebry. (Návod: Vyjděte z odstavce 3 tohoto článku.)
2. Uvažujte úsečku AB a množinu T , jejímiž prvky jsou: prázdná část úsečky — $\emptyset$, jednoprvkové množiny $\{A\}$, $\{B\}$, úsečka AB (chápejme ji jako množinu bodů). Definujte na T postupně tyto operace:
 - a) binární operaci průnik,
 - b) binární operaci „spojení“ (znaménko pro operaci „ $\cup$ “) tabulkou 6,
 - c) unární operaci tabulkou 7.

$X \backslash Y$	$\emptyset$	$\{A\}$	$\{B\}$	AB
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{A\}$	$\{B\}$	AB
$\{A\}$	$\{A\}$	$\{A\}$	AB	AB
$\{B\}$	$\{B\}$	AB	$\{B\}$	AB
AB	AB	AB	AB	AB

tab. 6

X	$\emptyset$	$\{A\}$	$\{B\}$	AB
$\bar{X}$	AB	$\{B\}$	$\{A\}$	$\emptyset$

tab. 7

Dokažte, že $(T, \cup, \cap, -)$ je modelem Booleovy algebry.

3. Pokuste se sami konstruovat další modely Booleovy algebry obdobně jako v předchozím příkladě. Vyjděte například z těchto geometrických útvarů: trojúhelník, čtverec, čtyřlístek, krychle. Volte příslušné množiny analogicky jako množinu T z příkladu 2.

Geometrická místa ■ FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

(Určeno žákům ZDŠ a žákům nižších tříd škol 2. cyklu.)

Ze školního vyučování je Vám znám pojem *geometrické místo bodů*, což je totéž jako *množina všech bodů dané vlastnosti*. V tomto článku se seznámíte s některými geometrickými místy, které pravděpodobně nebyly předmětem úvah ve školním vyučování.

Geometrické místo (zkr. g. m.) je název pro množinu G všech prvků (bodů, přímek, aj.), které splňují následující podmínky: 1. Každý prvek množiny G má žádanou vlastnost $V(x)$. 2. Žádný prvek, který nenáleží množině G , nemá vlastnosti $V(x)$. Obě uvedené podmínky můžeme zapsat

$$x \in G \Leftrightarrow V(x).$$

Tento zápis, který značí *logickou ekvivalenci* a znamená: Náleží-li prvek x do množiny G , tj. $x \in G$, pak má vlastnost $V(x)$; nenáleží-li prvek x do množiny G , nemá vlastnost $V(x)$. Má-li prvek x vlastnost $V(x)$, pak náleží do množiny G ; nemá-li prvek x vlastnost $V(x)$, nenáleží množině G .

Říkáme také, že příslušnost prvku do množiny G je *nutnou a postačující podmínkou* pro to, aby měl vlastnost $V(x)$; vlastnost $V(x)$ je *nutnou a postačující podmínkou*, aby prvek x náležel do množiny G .

Ze školního vyučování znáte celou řadu geometrických míst. Vzpomeňte si např., jak byla definována osa úsečky, osa úhlu, kružnice, kulová plocha aj.

Poznámka: Užíváte-li místo názvu g.m.b názvu *množina všech bodů dané vlastnosti*, pak nesmíte nikdy zapomenout na slovo *všech*, které v tomto spojení má velmi důležité místo. Stačí, když si uvědomíte obsah věty: Množina bodů v rovině, které mají od daného bodu S vzdálenost rovnou číslu $r > 0$. Touto množinou nemusí být kružnice, ale jen některé její body, její oblouk apod.

Ke geometrickým místům docházíme velmi často na základě provedených pokusů. A tu si musíme uvědomit, že touto cestou můžeme uplatněním dříve získaných vědomostí a zkušeností odhadnout, co by mohlo být hledaným geom. místem a tak dospět *jen k formulaci jisté domněnky (hypotézy)*, ale nikoliv k definitivnímu tvrzení. Musíme provést *důkaz* pravdivosti, spočívající na řadě na sebe navazujících správně provedených logických úsudků. Výsledkem je pak buď přijetí, nebo zamítnutí domněnky. Přitom postupujeme zpravidla tak, že *dokazujeme rovnost množiny M* , o níž se domníváme, že je hledaným geometrickým místem, *s některým známým geom. místem G* , např. osou úsečky apod. Z vlastností rovnosti dvou množin plyne, že každý prvek množiny M je zároveň prvkem množiny G a každý prvek množiny G musí být také prvkem množiny M . Poněvadž v geometrických úlohách jde zpravidla o množiny, které mají nekonečně mnoho prvků, musíme provést důkaz tak, aby zahrnoval všechny prvky množiny M . Prvkům, které mají zvláštní polohu, musíme věnovat zvláštní pozornost a musíme prověřit, zdali hledanému g.m. náleží. Např. hledáme-li v rovině g.m. vrcholů C všech rovnoramenných trojúhelníků o společné základně AB , zjistíme, když si narýsujeme několik trojúhelníků, že množina vrcholů C musí splňovat podmínku $AC = BC$. Vyslovíme tedy *domněnku*, že hledaným g.m. vrcholů C je osa úsečky AB . Podmínka $AC = BC$ je *nutnou podmínkou*, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný. Ale tato podmínka *není* pro naše g.m. *postačující*. Body A, B, C musí splňovat ještě další podmínku, tj. nesmí ležet v přímce. A tuto podmínku nesplňuje bod S , který je středem úsečky AB , a proto *hledanému g.m. nenáleží*. Docházíme pak k formulaci: *Hledaným g.m. vrcholů C je osa úsečky AB s vyloučením středu úsečky AB* . Důkaz, že každý bod $C \neq S$ této osy je vrcholem právě jednoho rovnoramenného

trojúhelníku, je evidentní a také je jasné, že uvedená věta vyjadřuje podmínku nutnou i postačující.

V další části budeme vyšetřovat geometrická místa, jimiž budou množiny izolovaných bodů, množiny bodů spojitých křivek, ploch i těles, uvedeme i příklady geometrických míst přímek, rovin apod. V 1. části budeme vyšetřovat geometrická místa bez použití souřadnic, v 2. části ve spojitosti se zavedením pravoúhlých souřadnic. V připojených cvičeních budete mít možnost si prověřit, jak jste vyloženou látku pochopili.

Část I.

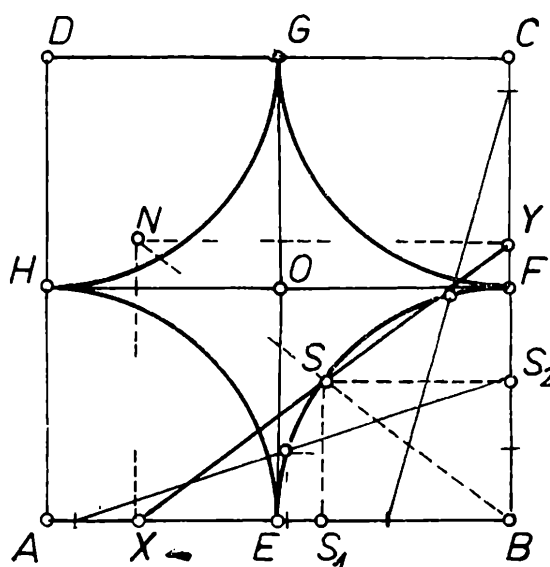
Příklad 1. Úsečka XY délky a má krajní body X, Y na obvodě čtverce $ABCD$, jehož strana $AB = a$. Máme určit g.m. středů všech úseček XY . (Obr.1)

a) Probíhají-li body X, Y po obvodě čtverce, pak bod S , který je středem úsečky XY , opíše jistou křivku k . Nakreslíme-li si několik poloh úsečky XY , dospějeme k domněnce, že křivka k se skládá, z oblouků kružnic, které mají středy ve vrcholech čtverce $ABCD$. Abychom se přesvědčili, že tomu skutečně tak je, musíme provést důkaz.

Sestrojíme obdélník $XBYN$ a jeho úhlopříčky. Průsečík úhlopříček XY . $BN \equiv S$. Poněvadž $XS = SY = SB = a/2$, dokázali jsme, že střed S má od bodu B konstantní vzdálenost a leží na kružnici o středu v bodě B . Oběhne-li bod X celý obvod čtverce, oběhne bod S křivku k složenou ze čtyř čtvrtkružnic se středy ve vrcholech čtverce a o poloměrech rovných číslu $a/2$.

Snadno dokážeme, že každý bod nalezeného g.m. je středem úsečky, mající krajní body na obvodě čtverce. Sestrojíme bod S_1 na AB , aby $SS_1 \perp AB$ a bod S_2 na BC , aby $SS_2 \perp BC$ a učiníme $S_1X = S_1B$, $S_2Y = S_1B$. Úsečka XY má střed v bodě S .

b) Je-li $XY = AB$, může se úsečka XY pohybovat tak, že $XY \parallel AB$, bod X se pohybuje po straně AD a bod Y po straně BC . Pak je množinou všech bodů S těchto úseček *střední příčka EG* čtverce; podobně střední příčka HF je g.m. středů úseček $XY \parallel BC$, jichž krajní body leží na stranách AB, CD .



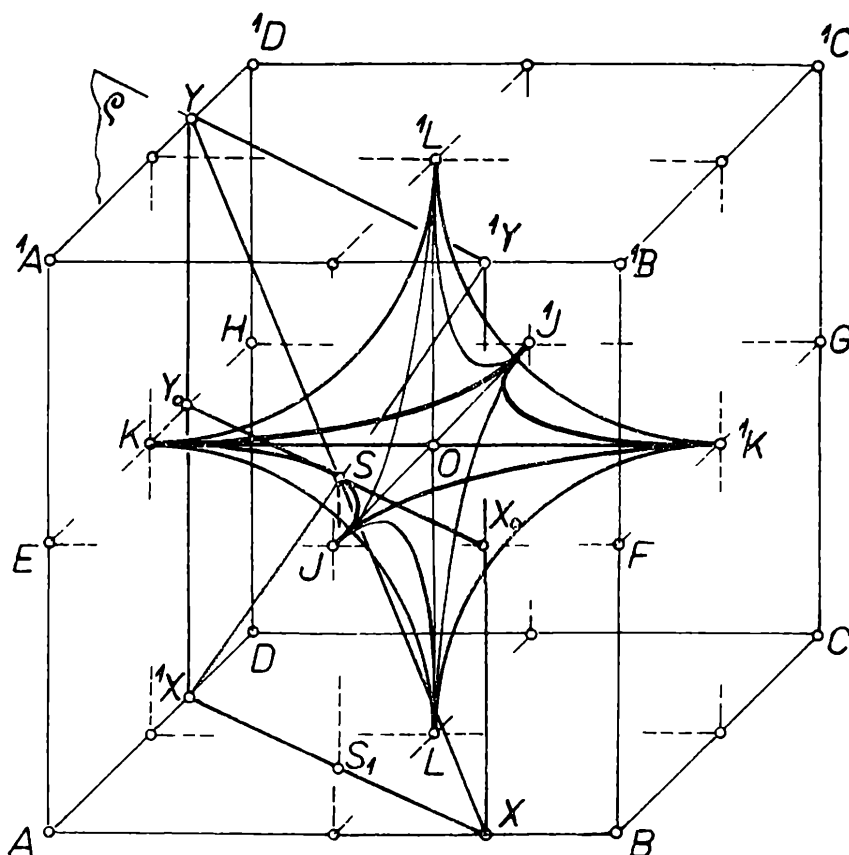
Obr. 1

Závěr : Hledaným g.m. středů S všech úseček XY délky a , jejichž krajní body leží na stranách čtverce $ABCD$, jsou jednak obě střední příčky čtverce a dále oblouky čtyř čtvrtkružnic uvnitř čtverce, které mají středy ve vrcholech daného čtverce a poloměry rovné číslu $a/2$.

Výsledku tohoto příkladu užijeme v dalším příkladě.

Příklad 2. Je dána krychle $ABCD^1A^1B^1C^1D$ a úsečka XY rovná délce stěnové úhlopříčky krychle. Máme určit g.m. středů všech úseček XY , jejichž krajní body leží na hranách krychle (Obr. 2)

Předpokládejme, že bod X oběhne obvod čtverce $ABCD$, pak bod Y oběhne obvod čtverce $^1A^1B^1C^1D$. Je-li např. XY jedna z možných poloh úsečky na obr. 2, sestrojíme X^1YY^1X tak, aby $Y^1X \parallel Y^1A$. Úhlopříčky



Obr. 2

XY , $^1X^1Y$ tohoto čtverce se protínají v bodě S , který je zároveň středem úsečky X_0Y_0 , v níž protíná tento čtverec rovina procházející středem krychle a rovnoběžná s rovinou ABC ; tato rovina protíná hrany krychle v bodech F, F', G, H . Podle výsledku příkladu 1, je g.m. středů S úseček X_0Y_0 křivka, ležící uvnitř čtverce $EFGH$ a složená ze čtyř čtvrtkružnic, majících středy v bodech E, F, G, H a poloměr rovný číslu $a/2$ ($AB = a$). Ke g.m. patří i body $J, ^1J, K, ^1K$, což jsou středy stěn krychle. Pohybují-li se body X a Y po protilehlých hranách BC a $^1A^1D$, nebo po hranách AB , $^1C^1D$, pak středy S úseček XY vyplní všechny body úseček J^1J a K^1K , které spojují středy protějších stěn krychle.

Abychom dokázali, že každý bod nalezeného g.m. je středem úsečky, mající krajní body na hranách krychle, sestrojíme kolmý průmět S_1 zvoleného bodu S na křivce k do roviny ABC a na hranách krychle určíme body X a 1X , aby $S_1X = S_1^1X = S_1A$ a pak sestrojíme obdélník X^1XY , v němž je $^1XY \parallel A^1A$. Úhlopříčky tohoto obdélníku XY , $^1X^1Y$, o němž snadno dokážeme, že je to čtverec, se protínají v bodě S ; jsou to hledané úsečky. Zvolíme-li bod S na některé z úseček J^1J , K^1K , je tento bod středem úsečky XY , mající krajní body na protilehlých hranách, které jsou podle přímk J^1J , K^1K souměrně položené; přitom je XY rovnoběžná se stěnovou úhlopříčkou krychle.

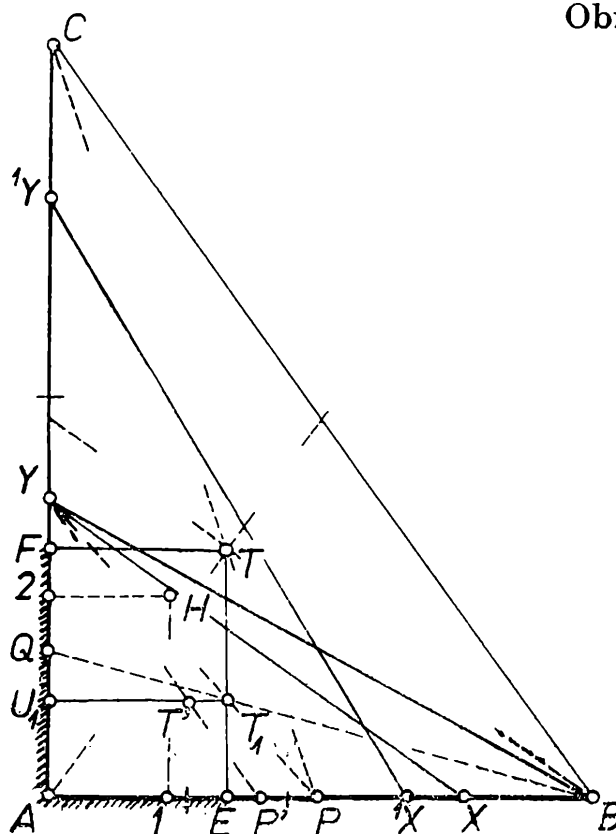
Pohybuje-li se bod po obvodu čtverce BC^1C^1B a bod Y po obvodě čtverce AD^1D^1A , anebo když se bod X pohybuje po obvodě čtverce AB^1B^1A a bod Y po obvodě čtverce C^1C^1DD , nebo když se body X a Y pohybují po zbývajících hranách krychle, dostaneme výsledky podobné.

Závěr : Geometrické místo středů všech úseček XY délky $a/\sqrt{2}$ jsou jednak tři úsečky spojující středy protějších stěn krychle a dále oblouky čtvrtkružnic o středech v bodech, v nichž protínají hrany krychle roviny souměrnosti rovnoběžné se stěnami krychle a v nichž tyto čtvrtkružnice leží. Jejich poloměry jsou rovné číslu $a/2$, kde a je délka hrany krychle.

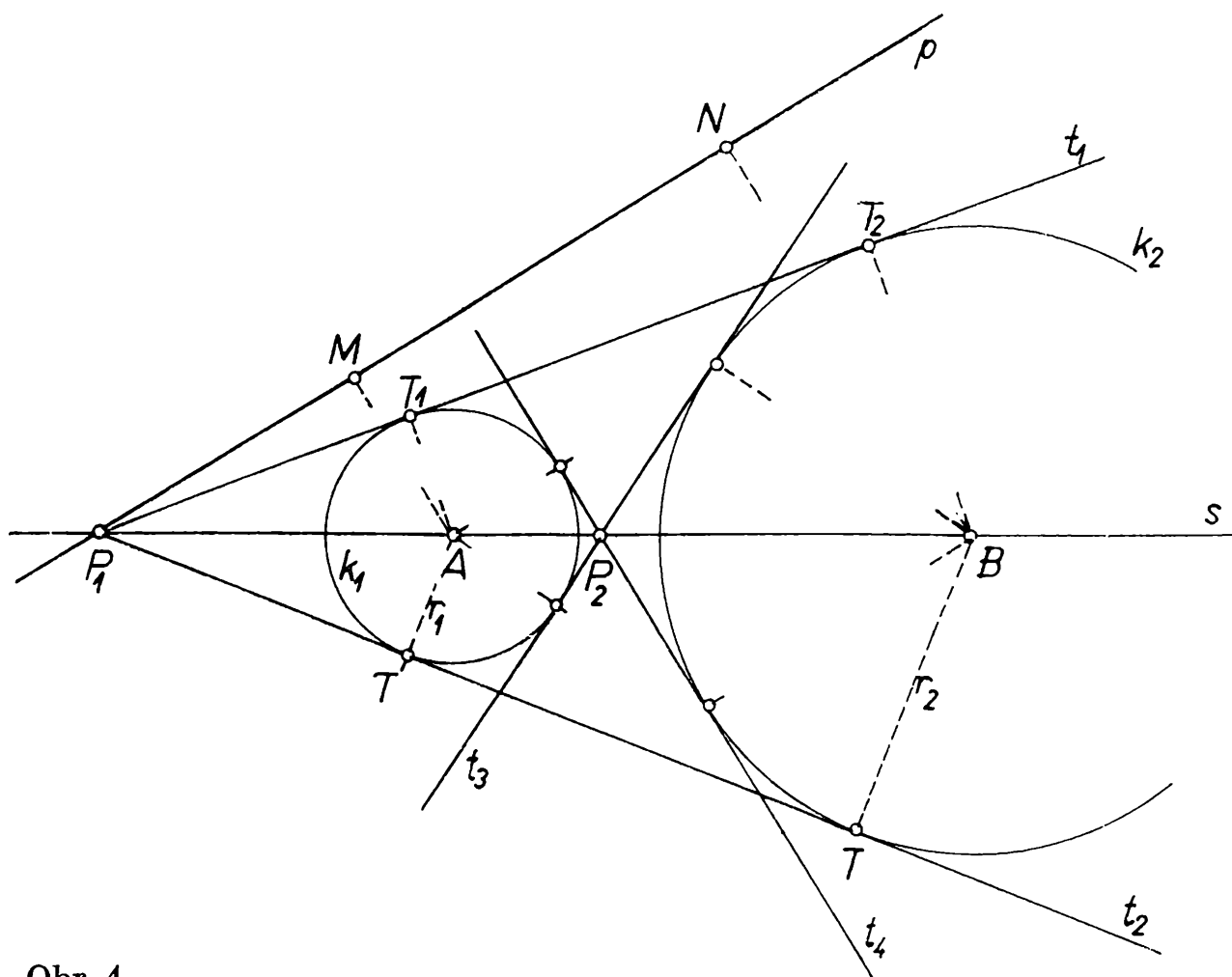
Příklad 3. Určete g.m. těžišť všech trojúhelníků AXY , je-li X bod úsečky AB , Y bod úsečky AC ; $AB \perp AC$. (Obr. 3).

Předpokládejme, že bod Y jsme zvolili pevně a bod X nechť nabývá všech poloh na úsečce AB . Pro trojúhelník $\triangle YAB$ je těžištěm bod T_1 , který leží v jedné třetině těžnice YP (P je střed úsečky AB), $PT_1 = 1/3 PY$.

Je-li X vnitřním bodem úsečky AB , je těžištěm $\triangle AXY$ bod T' , který je vnitřním bodem úsečky $U_1T_1 \parallel AB$; $U_1T_1 = 1/3 AB$, neboť bod T_1 leží také v jedné třetině těžnice BQ [$QT_1 : QB = U_1T_1 : AB = 1 : 3$]. Nabývá-li bod Y všech poloh na úsečce AC a bod X všech poloh na úsečce AB , bude se poloha úsečky U_1T_1 měnit; zůstane však stále rovnoběžná s úseč-



Obr. 3



Obr. 4

kou AB a její délka bude $1/3 AB$. Jestliže $Y \equiv C$, pak úsečka U_1T_1 přejde v úsečku FT . Na základě tohoto induktivního postupu docházíme k domněnce, že hledaným g.m. těžišť všech trojúhelníků AXY je plocha obdélníku $AETF$. Abychom mohli dokázat pravdivost této domněnky, musíme dokázat, že každý bod plochy obdélníku $AETF$ je těžištěm nějakého trojúhelníka, jehož vrcholy X, Y leží na úsečkách AB, AC . Za tím účelem zvolíme uvnitř obdélníku $AETF$ nebo na jeho stranách ET, FT bod H ($H \neq E, H \neq F$) a tímto bodem vedeme rovnoběžky s přímkami AB, AC , které pak na straně AB určí bod 1 a na straně AC bod 2. Sestrojíme-li body $^1X, ^1Y$, aby $A^1X = 3 \cdot A1, A^1Y = 3 \cdot A2$, pak trojúhelník A^1X^1Y má těžiště právě v době H . Body 1X a 1Y jsou přitom vždy body úseček AB, AC , neboť $AE = 1/3 AB, AF = 1/3 AC$.

Nalezenému g.m. však nepatří body úseček AE, AF , neboť nelze sestrojit trojúhelníky, které by měly tyto body za svá těžiště.

Závěr: Hledaným g.m. těžišť všech trojúhelníků AXY , které splňují podmínky úlohy, jsou všechny body plochy obdélníku $AETF$ s vyloučením těch bodů, které leží na stranách AE a AF .

Příklad 4. Určete množinu všech přímek v rovině, od nichž mají body A, B ($A \neq B$) stálý poměr vzdálenosti $d_1/d_2 = s$. (obr. 4).

Množinou všech přímek, od nichž má daný bod A vzdálenost $r > 0$, je množina všech tečen kružnice k o středu A a poloměru r .

Máme-li určit přímky, od nichž mají body A, B stálý poměr vzdálenosti $s = d_1/d_2$, sestrojíme libovolné kružnice k_1, k_2 o středech A, B tak, aby měly čtyři společné tečny, a aby jejich poloměry splňovaly rovnost $r_1/r_2 = d_1/d_2$. Tento požadavek můžeme, pokud $A \neq B$, vždy splnit.

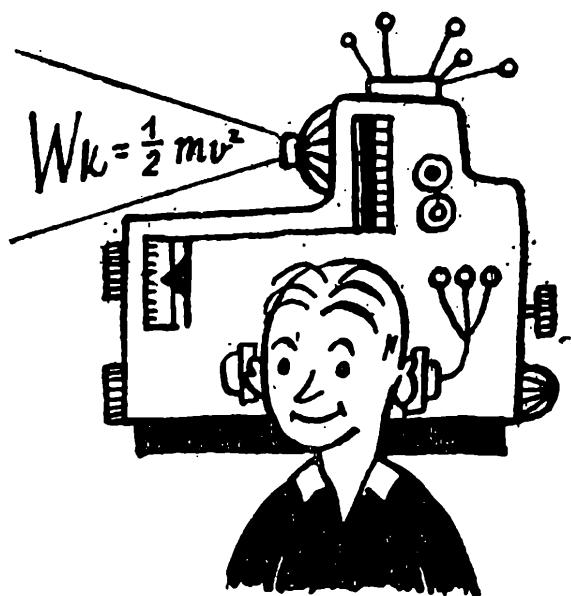
Vnější tečny kružnic k_1 a k_2 se protínají v bodě P_1 , vnitřní tečny v bodě P_2 . Body P_1, P_2 leží na přímce AB a platí $P_1A/P_1B = P_2A/P_2B$. Vede-me-li kterýmkoliv z těchto bodů libovolnou přímku $p \neq AB$, jsou vzdálenosti bodů A a B od této přímky v poměru d_1/d_2 . Tím jsme vedeni k domněnce, že všechny přímky procházející body P_1 a P_2 náleží hledanému geom. místu. Víme, že všechny přímky v rovině, které procházejí daným bodem, tvoří svazek přímek. Zvolme libovolnou přímku p svazku o středu v bodě P_1 , resp. P_2 a označme M, N paty kolmic bodů A, B na tuto přímku. Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle P_1AM \sim \triangle P_1BN$ plyne na základě stejnolehlosti (podobnosti): $AM : BN = P_1A : P_1B = d_1 : d_2$. Uvedená vlastnost však neplatí pro přímku AB , neboť v tomto případě poměr $d_1 : d_2$ ztrácí význam.

Závěr: Hledanou množinou všech přímek, od nichž mají body A, B stálý poměr vzdálenosti $d_1 : d_2$, jsou dva svazky přímek o středech v bodech P_1 a P_2 , které leží na přímce AB a platí pro ně $P_1A/P_1B = P_2A/P_2B = d_1/d_2$; z těchto svazků je však nutno vyloučit přímku AB , která spojuje jejich středy.

Cvičení k 1. části.

1. Určete v dané rovině g.m. vrcholů a) ostroúhlých, b) pravoúhlých, c) tupoúhlých rovnoramenných trojúhelníků o společné základně AB v dané rovině.
2. Určete g.m. středů všech úseček XY , leží-li jejich krajní body na stranách čtverce o straně a , je-li délka úsečky XY dána: a) $XY < a$, b) $a < XY < a\sqrt{2}$. Načrtněte obrázek.
3. Určete g.m. středů úseček XY , jejichž délka je a a body X, Y leží na stranách obdélníka o stranách a, b ; a) $a > b$; b) $a < b$. Načrtněte obrázek.
4. Určete g.m. středů úseček XY , jejichž krajní body X, Y leží na hranách krychle, je-li velikost úsečky XY dána: a) $XY < a$, b) $XY = a$, c) $a < XY < a\sqrt{2}$, d) $a\sqrt{2} < XY < a\sqrt{3}$, kde a je velikost hrany krychle.
5. Je dán trojúhelník ABC . Máme určit g.m. těžišť všech trojúhelníků AXZ, BXY, CYZ , kde X, Y, Z jsou body, které pořadě leží na stranách AB, BC, CA . V kterých částech trojúhelníka nemůže ležet těžiště žádného trojúhelníku?

6. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ (čtverec, rovnoběžník, lichoběžník, různoběžník). Určete g.m. těžišť všech trojúhelníků, které mají jeden vrchol ve vrcholu čtyřúhelníka a další dva vrcholy na stranách, které z tohoto vrcholu vycházejí.
7. Krychle o hraně a je protínána rovinami v trojúhelnících. Určete g.m. těžišť všech trojúhelníků. Proveďte totéž s kvádrem o hranách a, b, c .
8. Je dán kolmý jehlan, jehož podstavou je obdélník o stranách a, b a výšce v . Určete g.m. těžišť všech trojúhelníků, v nichž mohou roviny protínat tento jehlan.
9. Určete g.m. těžišť trojúhelníků, které mají společnou stranu AB , leží-li vrchol C na přímce p , a) různoběžné, b) mimoběžné s přímkou AB .
10. Množinou všech přímek, které procházejí daným bodem V a mají od roviny ρ odchylku α , je rotační kuželová plocha o ose kolmé k rovině ρ a její přímky svírají s osou úhel $90^\circ - \alpha$. Dokažte.
11. Určete množinu všech přímek v prostoru, od nichž mají body A, B , $A \neq B$ stálý poměr vzdáleností $d_1 : d_2 = s$. (Pokračování)



FYZIKA

Translačně rotační kyvadlo

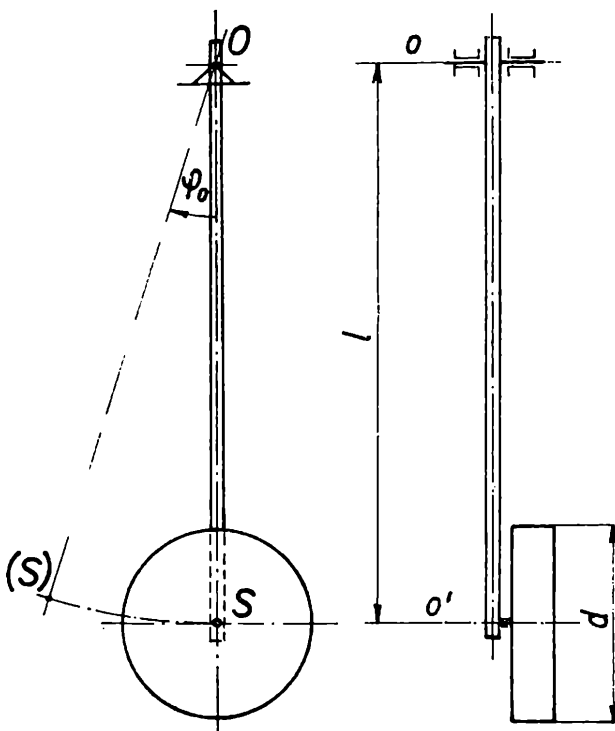
RNDr. ZDENĚK HORÁK, DrSc., ING. ANT. ŠTĚPÁNEK, ČVUT - Praha

Realizujme fyzikální kyvadlo kruhovou deskou, kterou upevníme otočně kolem její hlavní osy na konci tenké homogenní tyče délky l , jejíž druhý konec je uložen v otočném závěsu (bod O) tak, že kyvadlo může kývat ve vertikální rovině, kolem osy o (viz obr. 1).

Takovéto kyvadlo můžeme nyní nechat kývat dvojím způsobem. Jako celek — to zn., že vhodnou fixací zabráníme, aby se kruhová deska mohla otáčet kolem osy o' , takže kyvadlo jako celek koná rotační pohyb kolem závěsného bodu (osy o).

V druhém případě, kdy není kotouč nijak fixován, bude konat translační pohyb po kruhovém oblouku, který opisuje bod S kolem osy o , takže se nebude kolem osy o otáčet. Tento případ je poučnou realizací matematického kyvadla, které by při zanedbatelnosti hmoty závěsu bylo přesnější než kulička na nehmotné niti, protože takto zavěšená kulička se také otáčí, takže nekona vlastně translační pohyb.

Srovnáme-li oba případy, pak v případě druhém se kinetická energie neotáčejícího kotouče uplatní na urychlení celého kyvadla, čímž jeho pohyb bude rychlejší a tak za předpokladu, že v obou případech bude úhel rozkmitu φ_0 stejný, bude doba kmitu (kyvu) kratší oproti případu s kotoučem fixovaným.



Obr. 1

Zkusme nyní matematicky určit, jaký bude poměr dob kmitů pro tyto dva případy.

Řešme případ z principu energie, tzn. z rovnosti celkové energie (potenciální + kinetická) v bodě, jehož úhlové vychýlení je φ a v koncovém bodě daném maximálním úhlem vychýlení φ_0 .

Je-li $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ úhlová rychlost kyvadla

m hmotnost tyče

M hmotnost kotouče

J_s moment setrvačnosti kotouče k jeho hlavní ose o'

$J_s + Ml^2$ moment setrvačnosti kotouče k ose závěsu o (viz Steinerova věta)

J_0 moment setrvačnosti tyče k ose závěsu o

pak

$$Wk(\varphi) + Wp(\varphi) = Wk(\varphi) + Wp(\varphi_0)$$

Dosažením za jednotlivé energie dostáváme pro první případ, kdy je kotouč fixován:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (J_s + Ml^2 + J_0) \omega^2 + Mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} mgl(1 - \cos \varphi) = \\ = Mgl(1 - \cos \varphi_0) + \frac{1}{2} mgl(1 - \cos \varphi_0). \end{aligned}$$

Z toho

$$\frac{1}{2} (J_s + Ml^2 + J_0) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = (Mgl + \frac{1}{2} mgl) (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (1)$$

Zavedeme-li pro jednodušší zápis označení $J_1 = J_s + Ml^2 + J_0$ a $m = Mgl + \frac{1}{2} mgl$

dostáváme
$$\frac{1}{2} J_1 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = m (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

a z toho
$$dt = \sqrt{\frac{J_1}{m}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}.$$

Součet všech dt ze svislé rovnovážné polohy do krajní, určené úhlem φ_0 , je roven čtvrtině doby kmitu $T/4$.

Pro celou dobu kmitu pak tedy dostáváme

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{J_1}{m}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}.$$

Jak je vidět, bude hodnota integrálu záviset pouze na velikosti rozkmitu φ_0 , takže označíme-li pro zjednodušení, že $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} = F(\varphi_0)$

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{J_1}{m}} \cdot F(\varphi_0). \quad (2)$$

Pro případ druhý, kdy kotouč koná jen translační pohyb, odpadne jeho rotační energie $\frac{1}{2} J_s \omega^2$, takže v rovnici (1) nebude na levé straně v závorce člen J_s .

Dostáváme tak

$$\frac{1}{2} (Ml^2 + J_0) \omega^2 = (Mgl + \frac{1}{2} mgl) (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

nebo stejnou úpravou jako v předcházejícím případě

$$\frac{1}{2} J_2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = m (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Obdobným postupem jako v prvním případě plyne pro dobu kmitu T_2

$$T_2 = 4 \sqrt{\frac{J_2}{m}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}$$

nebo analogicky s rovnicí (2)

$$T_2 = 4 \sqrt{\frac{J_2}{m}} \cdot F_{(\varphi_0)} \quad (3)$$

Chceme-li však určit pouze poměr dob kmitů těchto dvou případů, není nutné řešit výše uvedený integrál, neboť za předpokladu, že při obou měřeních bude rozkmit kyvadla φ_0 stejný (tím i $F_{(\varphi_0)}$) dostáváme pro tento poměr

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4 \sqrt{\frac{J_1}{m}} \cdot F_{(\varphi_0)}}{4 \sqrt{\frac{J_2}{m}} \cdot F_{(\varphi_0)}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}$$

Dosazením za J_1 a J_2 dostáváme

$$\frac{T_1}{T_2} \sqrt{\frac{J_s + Ml^2 + J_0}{Ml^2 + J_0}} = \sqrt{1 + \frac{J_s}{Ml^2 + J_0}} \quad (4)$$

Poměr dob T_1/T_2 bude velmi blízký 1, neboť rozбором výrazů $\frac{J_s}{Ml^2 + J_0}$ zjistíme, že bude $\ll 1$.

Označíme-li v rovnici (4) výraz $\frac{J_s}{Ml^2 + J_0} = x$, pak podle binomického rozvoje (se zanedbáním členů vyšších řádů) platí $(1 + x)^{1/2} \doteq 1 + \frac{1}{2}x$. Použitím této úpravy dostáváme pro poměr dob kmitů:

$$\frac{T_1}{T_2} \doteq 1 + \frac{1}{2} \frac{J_s}{Ml^2 + J_0} \quad (5)$$

Dosazením do tohoto vzorce za $J_s = \frac{1}{8} Md^2$ a $J_0 = \frac{1}{3} ml$ dostáváme

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{Md^2}{16(Ml^2 + \frac{1}{3} ml^2)} = 1 + \frac{Md^2}{16Ml^2 \left(1 + \frac{m}{3M}\right)}$$

neboli

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{d^2}{16l^2 \left(1 + \frac{m}{3M}\right)} \quad (6)$$

Pro případ, že hmotnost kotouče bude velká oproti hmotnosti závažné tyčky, čímž výraz $m/3M \rightarrow 0$, pak vidíme, že poměr dob kmitů závisí již jen na geometrii kyvadla.

Vzorec (6) tím přejde na

$$\frac{T_1}{T_2} \doteq 1 + \frac{1}{16} \left(\frac{d}{l}\right)^2 \doteq 1 + \left(\frac{d}{4l}\right)^2 \quad (7)$$

Pro ověření konečného vzorce (7) bylo použito kyvadla, jehož poměr $d/l = 1$ a m ($3M = 0,01$ (lehká duralová tyčka a těžký kotouč)). Pak očekávaný efekt je $T_1/T_2 = 1 + 1/16 = 1 + 0,0625 = 1,0625$

neboli $6,25 \text{ ‰}$.

V laboratoři bylo postupnou metodou naměřeno:

$$T_1 = (1,3292 \pm 0,0008) \text{ s}$$

$$T_2 = (1,2536 \pm 0,0002) \text{ s}$$

pak poměr dob kmitů je

$$\frac{T_1}{T_2} = 1,0603 \pm 0,0007$$

což je v dobré shodě s teoretickým výpočtem.

Jednoduché ověření lze též provést i vizuálně a to tak, že do osy závěsu kyvadla připevníme matematické kyvadélko stejné délky (nit s malou kuličkou).

Je-li vypočtený poměr dob $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = 1,062$, pak se za 8 kyvů (8τ)

fyzikální kyvadlo opozdí za matematickým o $8 \cdot 0,062 = 0,496$ doby kyvu, což znamená, že vypustíme-li obě kyvadla současně, pak přibližně po 8 kyvech začnou kývat proti sobě a po 16 kyvech dojde opět k jejich koincidenci.

Odvozené jednotky SI třetí skupiny

ING. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., PRAHA

Odvozené jednotky SI, které přísluší do prvních dvou skupin, jsme již probrali. Nyní zbývá ještě třetí skupina odvozených jednotek, tj. takových, které nemají samostatný název a značku, které však jsou pomocí takových jednotek tvořeny. V následující tabulce jsou uvedeny příklady takových hlavních jednotek SI odvozených veličin. V tabulce jsou také uvedeny vztahy těchto jednotek k základním jednotkám SI.

Veličina	Název jednotky	Značka	Vztah k základním jednotkám SI
dynamická viskozita	pascalsekunda	Pa.s	$\text{m}^{-1}.\text{kg}.\text{s}^{-1}$
moment síly	newtonmetr (metrnewton)	N.m, (m.N)	$\text{m}^2.\text{kg}.\text{s}^{-2}$
povrchové napětí	newton na metr	$\text{N}.\text{m}^{-1}$	$\text{kg}.\text{s}^{-2}$
hustota tepelného toku, hustota zářivého toku	watt na čtverečný metr	$\text{W}.\text{m}^{-2}$	$\text{kg}.\text{s}^{-3}$
tepelná kapacita, entropie	joule na kelvin	$\text{J}.\text{K}^{-1}$	$\text{m}^2.\text{kg}.\text{s}^{-2}.\text{K}^{-1}$
měrná energie	joule na kilogram	$\text{J}.\text{kg}^{-1}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-2}$
měrná tepelná vodivost	watt na metr a kelvin	$\text{W}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{m}.\text{kg}.\text{s}^{-3}.\text{K}^{-1}$
hustota energie	joule na krychlový metr	$\text{J}.\text{m}^{-3}$	$\text{m}^{-1}.\text{kg}.\text{s}^{-2}$
intenzita elektrického pole	volt na metr	$\text{V}.\text{m}^{-1}$	$\text{m}.\text{kg}.\text{s}^{-3}.\text{A}^{-1}$
(objemová) hustota elektrického náboje	coulomb na krychlový metr	$\text{C}.\text{m}^{-3}$	$\text{m}^{-3}.\text{s}.\text{A}$
elektrická indukce	coulomb na čtverečný metr	$\text{C}.\text{m}^{-2}$	$\text{m}^{-2}.\text{s}.\text{A}$
permitivita	farad na metr	$\text{F}.\text{m}^{-1}$	$\text{m}^{-3}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^4.\text{A}^2$
(plošná) hustota elektrického proudu	ampér na čtverečný metr	$\text{A}.\text{m}^{-2}$	$\text{m}^{-2}.\text{A}$
intenzita magnetického pole	ampér na metr	$\text{A}.\text{m}^{-1}$	$\text{m}^{-1}.\text{A}$
permeabilita	henry na metr	$\text{H}.\text{m}^{-1}$	$\text{m}.\text{kg}.\text{s}^{-2}.\text{A}^{-2}$
molární energie	joule na mol	$\text{J}.\text{mol}^{-1}$	$\text{m}^2.\text{kg}.\text{s}^{-2}.\text{mol}^{-1}$
molární teplo, molární entropie	joule na mol a kelvin	$\text{J}.\text{mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{m}^2.\text{kg}.\text{s}^{-2}.\text{K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

V případě složených jednotek uvádí se zde úmyslně mezi jednotlivými jednotkami (resp. jejich mocninami) násobící tečka, i když to snad všeobecně používáno není. Důvodem je, že vynechání tečky může vést k omylu (např. $\text{m}.\text{N}$ = metrnewton, mN = milinewton, ms = milisekunda, $\text{m}.\text{s}$ = metr krát sekunda a mj.). Tento způsob také jako přednostní doporučuje Mezinárodní normalizační organizace (ISO). Toto doporučení připouští případné vynechání tečky jen tehdy, je-li omyl vyloučen. Vynechání násobící tečky (nebo jiného násobícího znaku) lze snad připustit u tištěného textu, kde je možné mezeru mezi značkami jednotlivých jednotek udělat náležitě patrnou, patrnější nežli u záznamů rukopisných.

Poznámka autora: Protože rozhodování o tom, kdy tečku udělat, či ji vynechat, je mnohdy časově náročnější nežli napsání (resp. vytištění) tečky, nepokládá autor vynechávání násobících teček za natolik ekonomické, aby se vyvážila možnost nežádoucího omylu.

Niektoré problémy o elektrickom prúde

RASTISLAV BANÍK, katedra fyziky PF, B. Bystrica

II. Efektívna hodnota elektrického prúdu

1. Jouleov zákon.

Ak vodičom prechádza konštantný elektrický prúd I , je medzi prierezmi vodiča stály rozdiel napätia U a za čas t prejde nimi elektrický náboj $Q = I t$. Prechodom z vyššieho napätia na nižšie vykoná sa práca

$$A = Q U = U I t \quad (1)$$

kde Q značí prešlý náboj. Ak napätie U vyjadríme Ohmovým zákonom $U = R I$ a predpokladáme, že celá práca sa zmenila*) v teplo Q_T , vyjde *Jouleov zákon*, určujúci množstvo tepla**) vyvinutého***) vo vodiči odporu R stálym prúdom I za čas t , tj.

$$Q_T = R I^2 t \quad (1a)$$

Príklad 1.: Vodičom odporu $R = 100 \Omega$ prechádza konštantný elektrický prúd $I = 4 \text{ A}$. Koľko tepla sa vyvinie v časovom intervale od $t_1 = 2 \text{ s}$ až $t_2 = 4 \text{ s}$?

Riešenie:

$$R = 100 \Omega$$

$$I = 4 \text{ A}$$

$$t = t_2 - t_1 = 2 \text{ s}$$

$$Q_T = ?$$

Podľa vzťahu (1a) je

$$\begin{aligned} Q_T &= R I^2 t = 100 \cdot 4^2 \cdot 2 \Omega \text{ A}^2 \text{ s} = \\ &= 3200 \text{ V A}^{-1} \text{ A}^2 \text{ s} = 3200 \text{ V A s} = 3200 \text{ J} \end{aligned}$$

(Užili sme vzťah $\Omega = \text{V/A}$.)

Na vodiči sa vyvinie 3200 joulov tepla.

Grafické znázornenie: Na obr. 1a sú grafy konštantných funkcií $y = R I^2$ a $y = I$, tj. priamky rovnobežné s osou času t . Obr. 1b ukazuje, že množstvo tepla Q_T , ktoré sa vytvorí konštantným prúdom za daný časový interval je číselne roven obsahu obdĺžnika o základni $(t_2 - t_1)$ a výške $R I^2$.

*) Elektrický prúd možno si predstaviť ako pohyb elektrónov, ktoré narážajúc na molekuly vodiča ich rozkmitávajú (neusporiadaný pohyb).

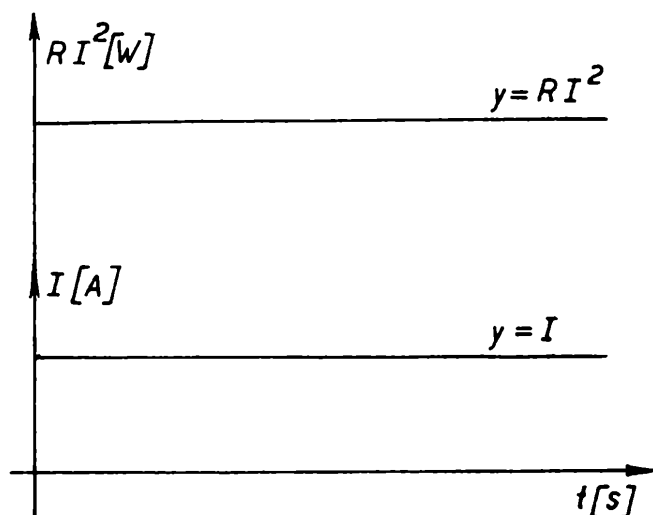
**) Pretože teplo je jedným z druhov energie a je dnes merané elektrickými prístrojmi a udávané vo wattsekundách ($\text{Ws} = \text{joule} = \text{J}$), je zbytočné premeňovať jouly na bývalú jednotku „kalória“.

***) Množstvo tepla budeme značiť Q_T ; index T preto, aby nenastala zámena s elektrickým množstvom (čiže nábojom) Q .

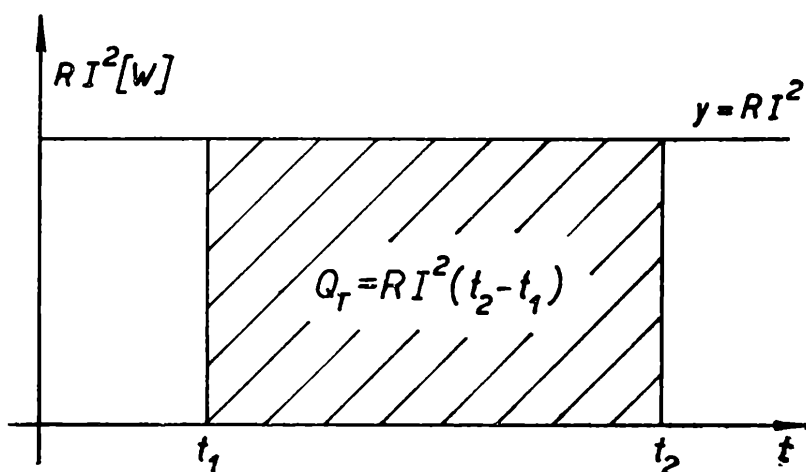
2. Ak vodičom prechádzajúci prúd nie je konštantný, ale sa časove mení, čiže

$$i = f(t)$$

nemôžeme vzniklé teplo počítať zo vzťahov hore spomenutých.



Obr. 1a



Obr. 1b

Počas nekonečne krátkeho časového intervalu dt , možno však prúd i považovať za konštantný a teda písať

$$dQ_T = R i^2 dt ,$$

kde dQ_T znamená teplo vzniklé počas nekonečne krátkeho intervalu dt .

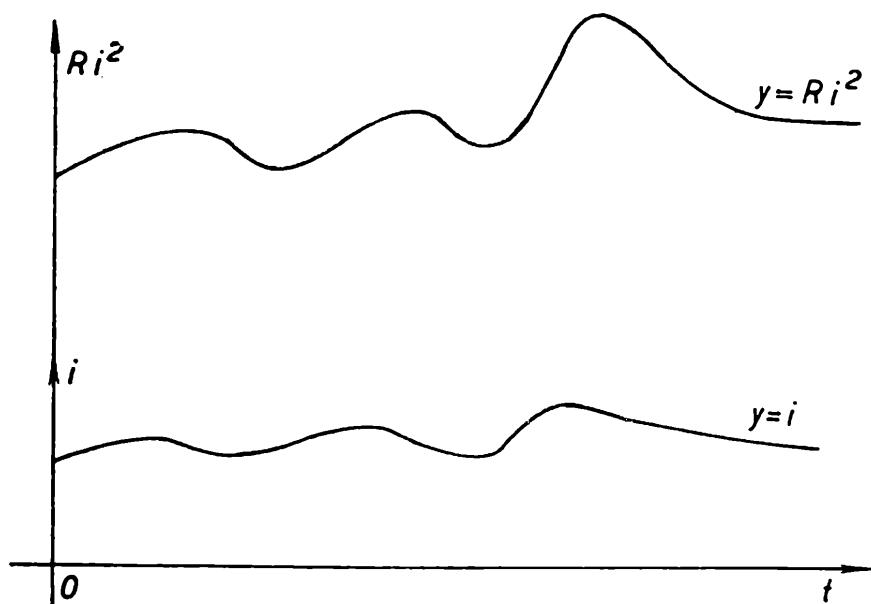
Teplo vzniklé počas konečného intervalu t_1 až t_2 potom vypočítame integrálom

$$Q_T = \int_{t_1}^{t_2} R i^2 dt , \quad \text{kde } i = f(t) \quad (2)$$

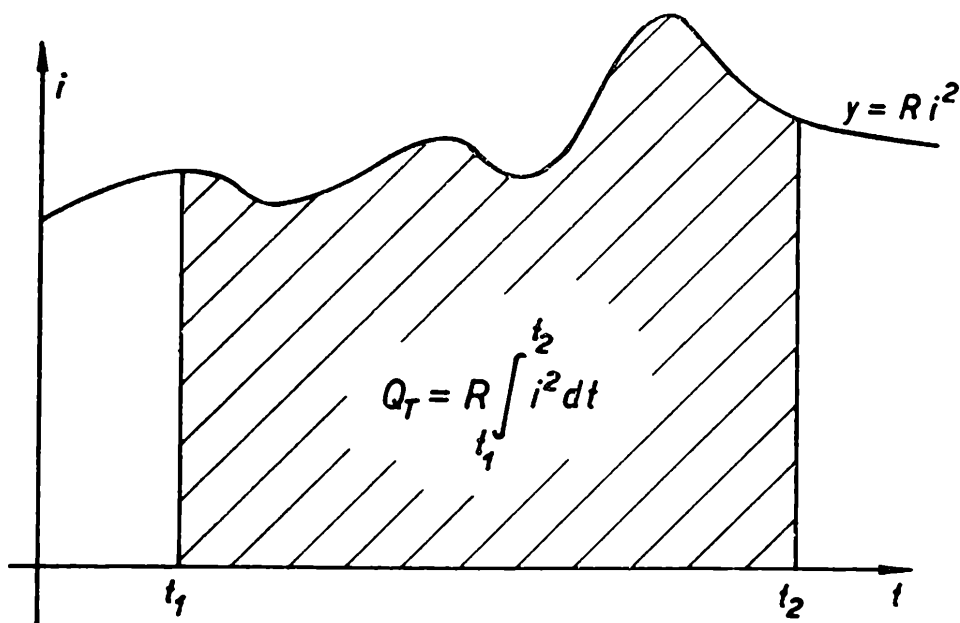
Grafické znázornenie. Krivky na obr. 2a sú grafy funkcií $y = R i^2$, resp. $y = i$, kde i je závislé od času t .

Vzniklé teplo Q_T je teda znázornené obsahom plošného útvaru znázorneného na obr. 2b medzi grafom krivky $R i^2$ a osou času od t_1 do t_2 .

3. Definujeme nový pojem: Efektívnou hodnotou premenlivého*) prúdu, ktorú označíme I_{ef} , resp. premenlivého napätia (značeného U_{ef}), rozumieme onu hodnotu konštantného jednosmerného prúdu, ktorý



Obr. 2a



Obr. 2b

v (ohmickom) odpore R vyvinie za rovnakú dobu $t_2 - t_1$ to isté množstvo tepla (Q_T), ako prúd premenlivý.

V časovom intervale $(t_2 - t_1)$ vytvorí premenlivý prúd $i = f(t)$ vo vodiči odporu R tepelné množstvo Q_T podľa vzťahu (2); stály prúd,

*) V elektrotechnike striedavých prúdov se efektívne hodnoty prúdu a napätia obvykle značia I , resp. U , tj. veľkými písmenami bez indexov; je to potom výhodné pre komplexné riešenie obvodov.

s konštantnou hodnotou I_{ef} , by vytvoril za ten istý čas rovnaké množstvo tepla

$$Q_T = R I_{ef}^2 t = R I_{ef}^2 (t_2 - t_1) \quad (3)$$

Zo vzťahu (3) a potom dosadením (2) dostaneme — po krátení konštantnou hodnotou odporu R — vzťah pre efektívnu hodnotu prúdu

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \frac{Q_T}{R}} \quad (3a)$$

resp.

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt} \quad (3b)$$

Efektívna hodnota napätia, tj. U_{ef} , sa určí*) analogickým vzťahom

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2 dt} \quad (4)$$

Príklad 2.: Vodičom odporu $R = 20 \Omega$ tečie el. prúd $i = (4t + 2) \cdot 10^{-2}$. Koľko tepla sa vyvinie v časovom intervale od $t_1 = 1$ s do $t_2 = 4$ s?

Aká veľká je efektívna hodnota (I_{ef}) tohoto prúdu v danom intervale?

Riešenie:

Potrebné prevodné vzťahy:

$$R = 20 \Omega$$

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = \text{V A s} = \text{W s};$$

$$i = (4t + 2) \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} (2t + 1)$$

$$1 \text{ ohm} = 1 \Omega = \text{V A}^{-1}$$

$$t_1 = 1 \text{ s}$$

$$t_2 = 4 \text{ s}$$

$$Q_T = ?; I_{ef} = ?$$

Integrácia: Užijme vzťah (2)

$$\begin{aligned} Q_T &= R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt = R \int_1^4 10^{-4} \cdot 4 \cdot (2t + 1)^2 dt = \\ &= R \cdot 10^{-4} \cdot 4 \int_1^4 (4t^2 + 4t + 1) dt = 20 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \left[\frac{4}{3} t^3 + \frac{4}{2} t^2 + t \right]_1^4 = \\ &= \frac{8}{3} 10^{-3} [t(4t^2 + 6t + 3)]_1^4 = \end{aligned}$$

*) Odvodí sa snadno: Podľa Ohmovho zákona platí $i = u/R$ a tiež $I_{ef} = U_{ef}/R$; dosadíme do (3b) a krátime odporom R .

$$= \frac{8}{3} 10^{-3} [4 (64 + 24 + 3) - 1 (4 + 6 + 3)] = \frac{8}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 351 =$$

$$= 936 \cdot 10^{-3} = \underline{0,936 \text{ jouľ.}}$$

Efektívna hodnota I_{ef} sa určí podľa (3a), takže

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{0,936}{20}} = \sqrt{\frac{1}{60} \cdot 0,936 \text{ J} \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{s}^{-1}} = \sqrt{0,0156 \frac{\text{VAs} \cdot \text{A}}{\text{s}}} =$$

$$\underline{= 0,125 \text{ A}}$$

4. Efektívne hodnoty sínusového $\sim$ prúdu sa obvykle určujú pre časový interval jednej periódy T .*)

Príklad 3.: Sínusový prúd $\sim$ je daný funkciou $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ vypočítajte jeho efektívnu hodnotu I_{ef} v intervale jednej periódy T . Hodnoty pre I_0 , ω , φ sú konštantné a značia:

I_0 = maximálna (čiže vrcholová) hodnota prúdu (v ampéroch);

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ = uhlová frekvencia (jednotka rad s^{-1});

$f = \frac{1}{T}$ = kmitočet (jednotka $\text{s}^{-1} = \text{Hz} = \text{hertz}$);

φ = fázový posuv (jednotka rad);

uhol $(\omega t + \varphi)$ sa nazýva fáza harmonického prúdu.

Ďalej stanovte efektívnu hodnotu U_{ef} napätia $\sim$ prúdu!

Riešenie: Následkom periodičnosti goniometrických funkcií možno voliť medze pre integrál (3b) všeobecne od t_1 po $t_1 + T$; pre zjednodušenie zápisu zvolme $t_1 = 0$, takže medze sú od 0 po T .

Potrebné matematické vzťahy:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha); \sin (4\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\int \cos (kx + c) dx = \frac{1}{k} \sin (kx + c)$$

Pre snadnejšie zapisovanie umocníme vzťah (3b), do ktorého dosadíme $t_1 = 0$, $t_2 = T$, tedy $t_2 - t_1 = T$:

* Dôvod: Striedavý prúd a jeho napätie možno merať len takými prístrojmi, pri ktorých orientácia výchylky nezávisí od smeru prúdu. Okamžitá výchylka pôsobiacej sily (momentu) je v prístrojoch tepelných, elektrodynamických a elektromagnetických závislá od druhej mocniny meranej veličiny, preto ich výchylka se ustáli na hodnote, ktorú voláme efektívnou. Stupnice meracích prístrojov na prúd $\sim$ sú kalibrované v hodnotách efektívnych.

$$\begin{aligned}
I_{ef}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \\
&= \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos(2\omega t + 2\varphi) \right\} dt = \\
&= \frac{I_0^2}{2T} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi) \right]_0^T = \\
&= \frac{I_0^2}{2T} \left\{ T - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + 2\varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin 2\varphi \right\} = \\
&= \frac{I_0^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega T} \sin(2 \cdot 2\pi + 2\varphi) + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega T} \sin 2\varphi \right\} = \frac{I_0^2}{2}
\end{aligned}$$

pretože sinové členy v zátvorke sa rušia. Je teda

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 I_0 \quad (5a)$$

Analogicky: Efektívna hodnota sínusového napätia je*)

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 U_0 \quad (5b)$$

Príklady na precvičovanie:

Úloha 1: Vypočítajte efektívnu hodnotu premenlivého prúdu $i = 10^{-2} \cdot (4t + 2)$ v intervale od $t_1 = 0$ po $t_2 = 2$ s! (Uvedomte si, že výsledok bude iný ako v riešenom príklade 2, veďže v inom intervale je tiež iná efektívna hodnota!

Úloha 2: Striedavý harmonický prúd $i = I_0 \sin \omega t$, kde I_0 a ω sú konštanty, prechádza vodičom odporu R . Koľko tepla sa vyvinie v časovom intervale od t_1 po t_2 ?

Aká veľká je efektívna hodnota tohoto prúdu v danom intervale? Rátajte najprv všeobecne a potom dosadte hodnoty $I_0 = 1$ A; $\omega = 0,1$ s⁻¹; $R = 10$ Ω; $t_1 = 1$ s; $t_2 = 4$ s.

$$(\text{Výsledok: } Q_T = \frac{1}{2} R I_0^2 (t_2 - t_1) - \frac{1}{4\omega} R I_0^2 \{ \sin 2\omega t_2 - \sin 2\omega t_1 \}.$$

$$.45,8 = 2,2 \text{ J; užili sme prevod } 0,8 \text{ rad} \doteq 45,8^\circ;$$

$$0,2 \text{ rad} \doteq 11,5^\circ, \quad I_{ef} \doteq 0,271 \text{ A})$$

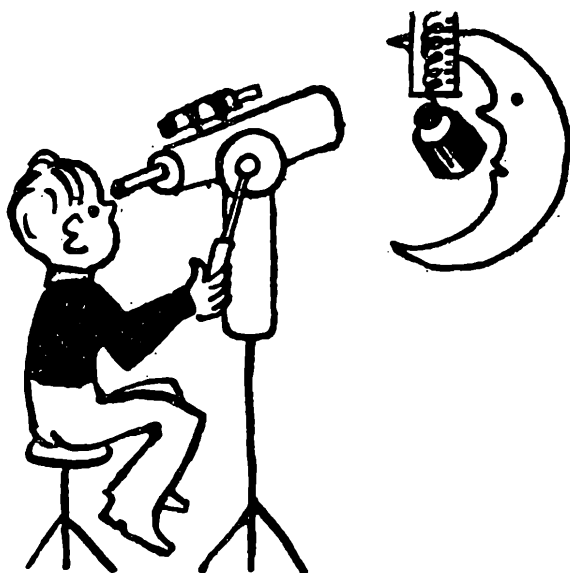
*) Vzťah (5b) odvodíme zo vzťahu (5a) zasa Ohmovým zákonom, tj. dosadením $U_{ef} = R I_{ef}$; $U_0 = R I_0$.

Úloha 3: Vypočítajte efektívnu hodnotu časove premenlivého napätia $u = 4t - 7$ v intervale od $t_1 = 0$ s po $t_2 = 5$ s.

(Výsledok: $U_{ef} \doteq 65$ V)

Úloha 4: Aká je efektívna hodnota konštantného napätia $U = 4$ V v intervale od $t_1 = 6$ s po $t_2 = 12$ s?

(Výsledok: $U_{ef} = 4$ V)



ASTRONOMIE

Pulsující proměnné hvězdy

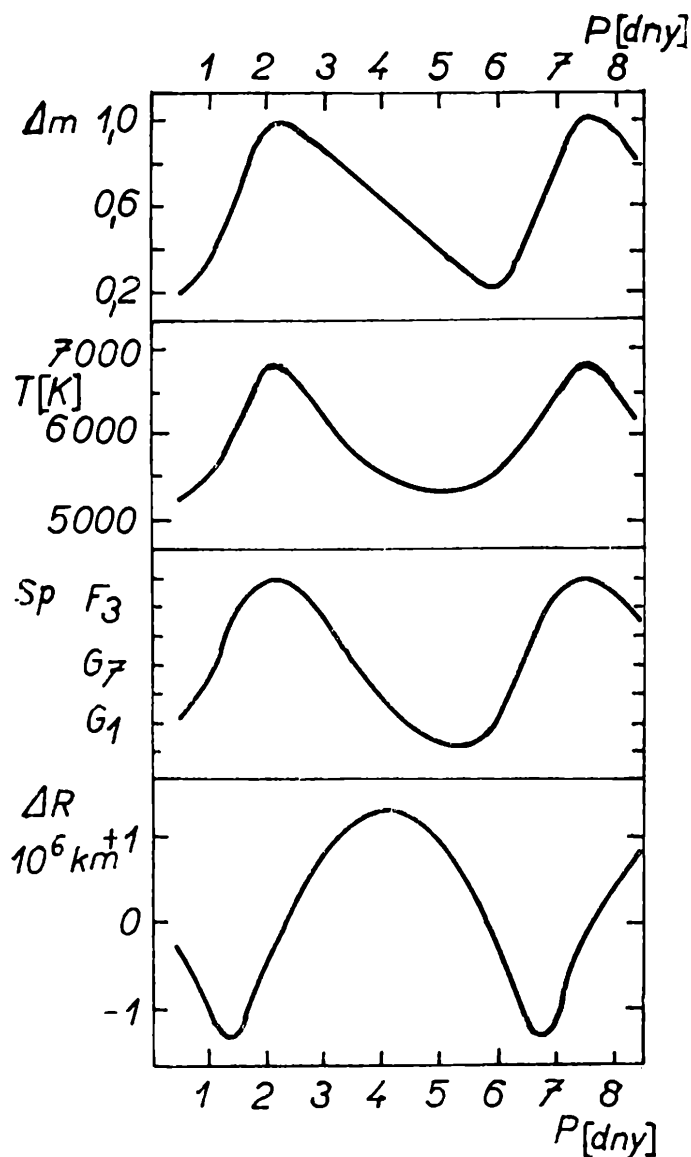
Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Velmi zajímavou a z astrofyzikálního hlediska významnou skupinu proměnných hvězd tvoří pulsující proměnné hvězdy. Na rozdíl od zákrytových proměnných hvězd, u nichž jsou změny v jasnosti způsobeny vzájemnými zákryty dvou hvězd, spočívají změny v jasnosti u pulsujících proměnných hvězd ve změnách poloměrů a teplot těchto hvězd. Nejdéle známé pulsující proměnné hvězdy jsou η Aquilae a δ Cephei, které objevili koncem 18. století dva angličtí astronomové amatéři J. Pigott a J. Goodricke. Obě hvězdy mají poměrně malou amplitudu změn jasnosti a jejich periody jsou: δ Cep 5,366 dní a η Aql 7,177 dní. Podle hvězdy δ Cephei byly pulsující proměnné hvězdy nazvány cefeidy.

Původně se názvem „cefeidy“ označovaly všechny proměnné hvězdy, které pulsatí měnily svou jasnost. Nyní však nazýváme takto jen ty hvězdy, které mění jasnost zcela pravidelně a mají periodu delší než 1 den. Tyto tzv. *klasické cefeidy* tvoří plochý subsystém v naší Galaxii a jejich typickou představitelkou je hvězda δ Cephei. Jsou to obří

a veleobří hvězdy spektrálních tříd F až G ; amplitudy změn jasnosti jsou od $0,1^m$ do 2^m a periody od 1 dne až do několika desítek dní. V průběhu jedné periody se mění poloměr cefeidy o 5 % až 20 % a povrchová teplota o 300 K až 2000 K. Periodicky se mění také spektrální třída hvězdy. Na obr. 1 jsou znázorněny změny hvězdné velikosti, povrchové teploty, spektra a poloměru v průběhu jedné periody u hvězdy δ Cephei.

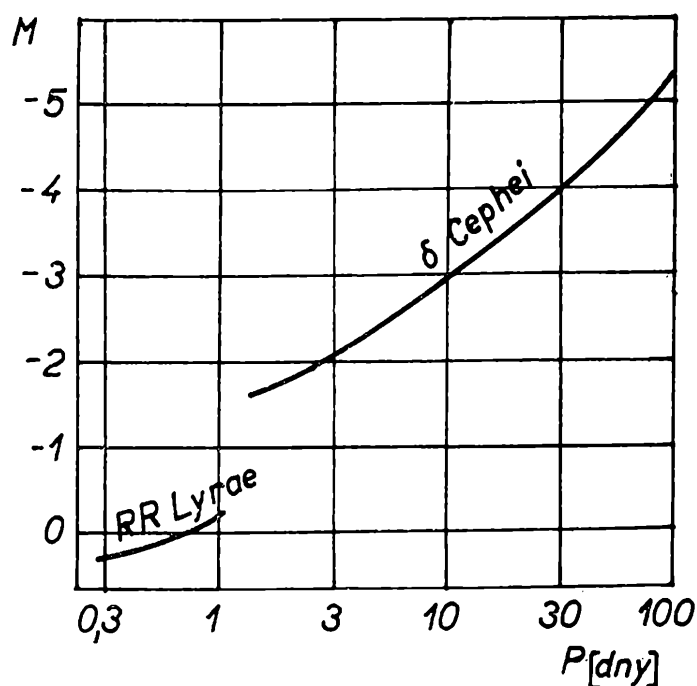
Teorií vzniku pulsací u cefeid se zabývala celá řada vědců; z nich jmenujme alespoň N. A. Uмова, A. S. Eddingtona, S. A. Ževakina a R. F. Christyho. Zatímco u stabilních hvězd je gravitační síla v rovnováze s tlakem plynů a s tlakem záření, je u pulsujících hvězd tato rovnováha porušena a hvězda se periodicky smršťuje a rozpíná — horní vrstvy hvězdy vykonávají kmity kolem rovnovážné polohy. Starší teorie kladly příčinu porušení rovnováhy do jádra hvězdy; podle současných názorů jsou pulsace buzeny v horních vrstvách hvězd, které obsahují poměrně vysoké procento hélia. Hélium pohlcuje energii vyzařovanou vnitřními vrstvami hvězdy, hromadí ji a přitom se ionizuje. Ionizované hélium propouští záření, hvězda ztrácí nahromaděnou energii, ochlazuje se a hélium se vrací do původního neionizovaného stavu a celý proces se pak znovu opakuje. Podle této teorie se vnitřní vrstvy hvězdy pulsací neúčastní. Z teorie pulsací vyplývá dále jedne velmi důležitý důsledek: perioda pulsací je nepřímo úměrná druhé odmocnině ze střední hustoty hvězdy. Protože při daných rozměrech závisí hustota hvězdy přímo na její hmotnosti a hmotnost souvisí známým vztahem se svítivostí, musí existovat souvislost mezi periodou cefeidy a její svítivostí. Při studiu



Obr. 1. Změny hvězdné velikosti Δm , povrchové teploty T , spektra Sp a poloměru ΔR v závislosti na čase u hvězdy δ Cephei.

perioda pulsací je nepřímo úměrná druhé odmocnině ze střední hustoty hvězdy. Protože při daných rozměrech závisí hustota hvězdy přímo na její hmotnosti a hmotnost souvisí známým vztahem se svítivostí, musí existovat souvislost mezi periodou cefeidy a její svítivostí. Při studiu

cefeid v Malém mračnu Magellanově bylo skutečně zjištěno, že čím menší je zdánlivá hvězdná velikost cefeidy, tj. čím je cefeida jasnější, tím delší má periodu změn jasnosti. Protože zkoumané hvězdy patřily k témuž hvězdnému systému, můžeme předpokládat, že jejich vzdálenosti od nás jsou prakticky stejné. Objevená závislost je tedy současně závislostí mezi periodou cefeidy a její absolutní hvězdnou velikostí (obr. 2).

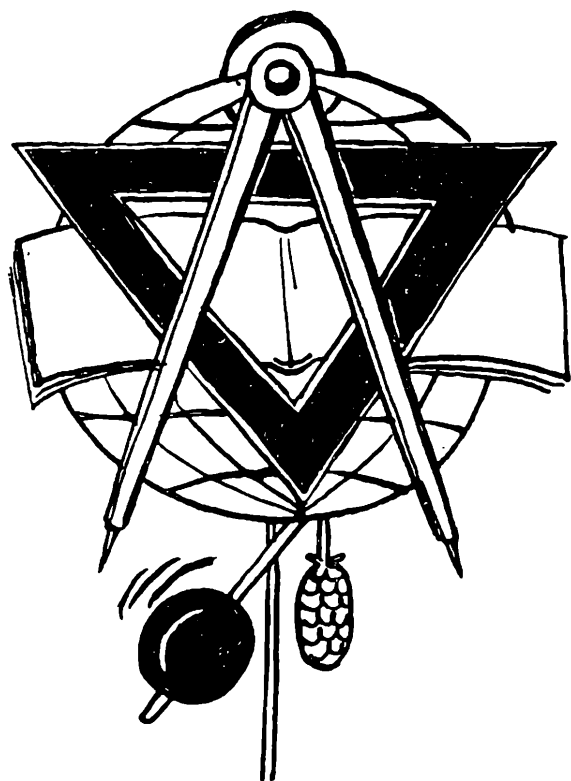


Obr. 2. Závislost absolutní hvězdné velikosti M a periodě P u pulsujících proměnných hvězd typu δ Cephei a RR Lyrae.

Závislost perioda — absolutní hvězdná velikost u cefeid má v astronomii neobyčejně významnou úlohu. Protože jsou to obří nebo veleobří hvězdy s velkou svítivostí, můžeme je pozorovat i ve velmi vzdálených objektech, jako jsou kulové hvězdokupy v naší Galaxii nebo i ostatní galaktické soustavy, tzv. vnější galaxie. Změříme-li periodu cefeidy, pak můžeme určit její absolutní hvězdnou velikost. Zdánlivou hvězdnou velikost hvězdy změříme přímo a z rozdílu mezi zdánlivou a absolutní hvězdnou velikostí (tzv. modul vzdálenosti) pak určíme i vzdálenost objektu, ve kterém je zkoumaná cefeida.

Zvláštní skupinu proměnných hvězd tvoří krátkoperiodické pulsující hvězdy, označované podle typické představitelky RR Lyrae jako hvězdy typu *RR Lyrae*. Jsou to pulsující obří s periodami od 0,05 dne do 1 dne. Spektrální třídy jsou obvykle *A*, amplitudy nepřevyšují 2^m . Rozdělení pulsujících hvězd na dvě skupiny podle délky periody je zdůvodněno i jejich prostorovým rozložením v Galaxii. Jak jsme již uvedli, tvoří cefeidy plochý subsystém, naproti tomu krátkoperiodické proměnné typu RR Lyrae tvoří kulový subsystém.

Z dalších typů pulsujících proměnných hvězd uveďme alespoň ještě hvězdy typu *W Virginis*, které se podobají cefeidám, jsou však asi o 2^m slabší; hvězdy typu *RV Tauri*, jejich doba pulsací není zcela pravidelná a světelná křivka vykazuje střídavě hlubší a mělčí minima a dlouhoperiodické proměnné typu *Mira Ceti*, jejichž periody jsou 80 až 1000 dní a amplitudy dosahují až několik hvězdných tříd. Početnou skupinu tvoří také polopravidelné a nepravidelné pulsující proměnné hvězdy.



- R Ů Z N Ě
- R Ů Z N Ě
- R Ů Z N Ě

Uplynulo 75 let od objevu přirozené radioaktivity

RUDOLF KOLOMÝ, Moravská Třebová

Koncem 19. století se někteří fyzikové domnívali, že vývoj jejich vědy je ukončen, že veškeré závažné objevy byly již pravděpodobně učiněny a že nové poznatky potvrdí dosavadní ucelené teorie, které uspokojivě vysvětlovaly všechny známé jevy. Ale stačily tři závažnější objevy, aby zmíněnou představu zcela narušily.

8. listopadu 1895 W. C. Röntgen, prof. fyziky na universitě ve Würzburgu, objevil při experimentování s katodovými paprsky nový druh

záření, které nazval paprsky X (později nazvány rentgenovými paprsky). Již při tomto objevu, který našel velmi rychlé uplatnění a vysoké ocenění, vědci pochopili, že vývoj ve fyzice zdaleka není ukončen, ale naopak, že se zdá být teprve na počátku. První desetiletí 20. stol. jim dala zcela za pravdu.

Mnozí vědci opakovali Röntgenův pokus a snažili se objasnit podstatu paprsků X. Povšimli si toho, že v Röntgenově trubici bez kovové antikatydy vycházely paprsky X z protilehlého místa katodě, na něž dopadal tok elektronů. Toto místo zároveň fluoreskovalo žlutozeleným světlem. Proto již 20. ledna 1896 matematik Henry Poincaré vyslovil na zasedání Francouzské akademie věd názor, zda luminiscence (společný název pro fluorescenci — světélkování látky po dobu ozařování a fosforescenci — světélkování látky delší dobu po přerušení ozařování) není vždy doprovázena vznikem paprsků X a vyzval badatele, aby se snažili prověřit tuto domněnku.

O uvedenou problematiku se začal zajímat i Henri Becquerel (15. XII. 1852 v Paříži až 25. VIII. 1908), který pocházel z rodiny slavných fyziků, v níž světově prosluli děd, otec a později i syn. V laboratoři svého otce, který byl uznávaným odborníkem v oboru luminiscence, podrobil usilovnému zkoumání velké množství látek, které vykazovaly fosforescenci a fluorescenci. Dlouho neměl úspěch, až připadl na uranovou sůl, která fluoreskovala. Právě při pokusech s uranovou solí dospěl během velmi krátké doby k zajímavému výsledku, který ukazoval na to, že snad bude potvrzena myšlenka o spojitosti pronikavého záření s fluorescencí. Becquerel položil uranovou sůl na fotografickou desku zabalenou do neprůsvitného černého papíru a vystavil ji na několik hodin na sluneční světlo. Po vyvolání zjistil na fotografické desce siluetu uranové soli. Becquerel neučinil unáhlený závěr, pokračoval dále v pokusech a již 2. března 1896 oznámil, že výše zmíněný efekt se pozoruje i tehdy, když uranová sůl není vystavena slunečnímu záření. Tento jev považoval za velmi důležitý, neboť zjištěné záření nemohlo být v žádné příčinné souvislosti s fluorescencí. Tak Becquerel krátce po Röntgenově objevu našel nový druh záření, které má ještě větší schopnost pronikat látkami než paprsky X. Zpočátku se toto záření nazývalo na počest objevitele Becquerelovým zářením. Později Marie Curie-Sklodovská dala novému jevu název radioaktivita. Tímto jevem se začala intenzivně zabývat od roku 1897 nejprve sama a později se svým manželem Pierrem Curie. Zjistili, že radioaktivita je vlastností uranu. V roce 1898 ji objevili současně s německým fyzikem G. C. Schmidtem (1865 až 1949) u thoria a ještě téhož roku v milionkrát větší míře u dvou nových prvků polonia a zejména radia obsažených v jáchymovském a příbramském smolinci. Pokusy s radiem přivedly manžele Curieovy (nezávisle na nich i E. Rutherforda) k objevu dvou složek radioaktivního záření a sice záření alfa

(proud heliových jader s kladným elektrickým nábojem) a beta (proud rychle letících elektronů).

Becquerel svým objevem přirozené radioaktivity otevřel éru atomového věku. Za své vědecké zásluhy byl jmenován členem mnoha proslulých vědeckých akademií. V roce 1903 udělila Švédská akademie věd H. Becquerelovi a manželům Curieovým Nobelovu cenu za objev a výzkum přirozené radioaktivity prvků.

Z dějin astrologie

■ JOSEF KOTYK, Pardubice

Část II. Johannes Kepler - astrolog

(Napsáno k 400. výročí Keplerova narození.)

Zájem o astronomicko-astrologické otázky měl v Čechách, zejména v 16. století, velkou odezvu. Mimo pranostiky a různé příležitostné tisky k výjimečným úkazům (např. kometám) těšily se oblibě širokého okruhu čtenářů kalendáře, které přinášely vedle základních informací astronomických také prognosy astrologické. Astrologická složka v jejich obsahu zpravidla převažovala. Podobné astronomicko-astrologické kalendáře vydával Tadeáš Hájek z Hájku (1525 až 1600), nejvýznamnější český přírodovědec 16. století, Johannes Kepler, a to již před svým příchodem do Prahy, za svého působení na gymnasiu ve Štýrském Hradci v letech 1596 až 1600, aj.

Málo se připomíná, že také první velký horoskop pro Valdštejna sestavil císařský dvorní mathematicus JOHANNES KEPLER.¹⁾ Bylo to v letech 1608 a 1609, kdy Keplerovo jméno mělo již svůj věhlas u dvora i v učeném světě.²⁾ K slušné obživě početné rodiny, s níž měl Kepler velké starosti až do smrti, dvorská penze nestačila; císařský matematik přivydělával si proto pranostikami a horoskopy pro své přátele a příznivce. Hořkostí jeho života jsou podbarvena jeho paměťihodná slova: „Astrologie je rozmarná dcera, bez níž by matka astrono-

¹⁾ Příjmení Kepler bývá někdy psáno také Keppler. Shledáváme tak zejména v literatuře německé, často však i v knihách českých, např. v Láskově Úvodu do kosmické fyziky a matematické geografie (Praha 1926), § 6 aj. Viz také připojený obrázek!

²⁾ JOHANNES KEPLER, od jehož narození dne 27. prosince 1571 uplynulo loni 400 let, je vedle Koperníka a Tychona Brahe členem slavného trojhvězdí, které v krátké době pouhých 150 let položilo základy vědecké astronomii. V podrobnostech viz mé články v „Rozhledech“: O Mikuláši Koperníkovi roč. 23, čís. 1, str. 7 až 10; o Tychonovi Brahe roč. 27, čís. 1, str. 1 až 4; o Joh. Keplerovi roč. 27, čís. 1, str. 97 až 103.



mie zemřela hlady.“ V dobách, o nichž píší, byla astrólogie, „královské umění“, velmi vhodným prostředkem k hmotnému zajištění, pro mnohého hvězdáře pak opravdu životní nutností. Jestliže Kepler se chtěl vědecky zabývat astronomií, musel před veřejností být především dvorním astrologem a věstit císaři z předpovědí hvězd. Nepříjemností se však nezbavil. Svůj plat 1500 zlatých musel neustále vymáhat a nikdy mu nebyl vyplacen celý. „Aby netrpěla čest císaře, při jehož rozkazech komornímu důchodu bych hladem umřel,“ stěžoval si trpce tajnému císařskému radovi Wackerovi z Wackerfelsu, „píšu ničemné kalendáře s pranostikami. Je to poněkud lepší než žebrota... Sílí mě však myšlenka, že nesloužím toliko císaři, nýbrž celému lidstvu, že nepracuji jen pro nynější pokolení, ale i pro potomstvo.“

Když na vlivnou přímluvu Tychona (Tyge) Brahe (1546 až 1601), věhlasného astronoma císaře Rudolfa II. a jednoho z nejlepších pozorovatelů všech dob, přesídlil Kepler roku 1600 do Prahy, mohl vydatně těžit z bohatého materiálu Braheových měření pro své teoretické úvahy. Jeho jedenáctiletý pohyb v Praze mu zajistil nesmrtelnost. Keplerovo dílo „*Astronomia nova*“, uveřejněné v Praze roku 1609, je nejslav-

nější knihou, která kdy v Praze byla tištěna. Jaký mohl tedy být Keplerův vztah k astrologii? Astronom tak vzácný byl si pošetilosti astrologie dobře vědom. Ve spise „*De fundamentis astrologiae certioribus*“, vydaném v Praze roku 1601, popřel Kepler možnost astrologických předpovědí v hrubém tradičním smyslu, obhajoval astrologii proti těm, kdo ji zcela popírali. Podkladem tohoto závěru bylo mu jeho přesvědčení o „harmonickém“ uspořádání světa a z něho vyplývající domněnky, že seskupení planet do specifických obrazců má pro světové dění svůj význam. Vědecké sebevědomí nedovolovalo mu, aby uspokojoval své klienty metodami, kterých používali obyčejní astrologové. I začal hledat vlastní astrologickou metodu a při sestavování horoskopů přihlížet i k jiným (zejména také psychologickým) kombinacím. Jakou měrou se mu to dařilo, ukazují v dalším.

Prostřednictvím pražského lékaře dr. Strosmayra vyžádal si od Keplerova horoskop i Valdštejn. Keplerův horoskop byl pro něho velmi optimistický. Předpovídal mladému, tehdy 25letému a málo významnému dvořanovi, že dosáhne velikého bohatství, vysokých hodností a slavné budoucnosti. Podivuhodná jistota, s kterou předvídal Valdštejnův vzestup, pramenila z Keplerova zjištění, že konstelace hvězd při Valdštejnově narození³⁾ (tzv. *nativita*) se domněle shodovala s jejich seskupením při narození anglické královny Alžběty (†1603), polského kancléře Jana Zamojského (†1605) a jiných významných osobností té doby. Astrologický amulet se stal pak Valdštejnovi životním průvodcem.⁴⁾ Valdštejn byl pevně přesvědčen, že ze všech astrologů, s nimiž se setkal, právě Kepler prohlédl jeho budoucí osudy nejlépe, k horoskopu, který mu Kepler vypracoval, vracíval se proto tím častěji, čím více se mu zdálo, že se jeho předpovědi splňují. Roku 1625, kdy Keplerův horoskop končil, byl Valdštejnův osud vskutku již zářící kometou.

V letech 1612 až 1626 žil Kepler v Linci, kde uveřejnil roku 1619 neméně slavné dílo „*Harmonices mundi libri quinque*“ (O harmonii světa knih patero), jímž dokončil kinematický popis pohybů planet naší soustavy. V něm shrnul všechny své astronomické práce tak, že tento spis zůstal dlouhou dobu nejlepší učebnicí astronomie. Valdštejn dal v roce 1625 tohoto astronoma, proslaveného již v celém světě, znovu vyhledat a vyžádal si pokračování původního horoskopu. Kepler neváhal, v novém horoskopu objevil však vážný stín. Upozornil Valdštejna, že „je Čech a že v tomto čase je ten národ, vinní i nevinní bez rozdílu, v opovržení, aby si dal proto dobrý pozor a nebyl snad z nějakého zlo-

³⁾ Je podle Keplerova horoskopu vyobrazeno na 25. straně knihy Josefa Janáčka: „Valdštejnova smrt“ (Mladá fronta, Praha 1970).

⁴⁾ Valdštejn jej nosil na prsou. Dnes je uložen v Uměl. histor. (dříve Dvorském) muzeu ve Vídni. Jeho snímek přináší rovněž kniha Josefa Janáčka: „Valdštejnova smrt“, str. 254.

činu udán u svého krále“.⁵⁾ Kepler věděl, že podle nativity císařovy a vévodovy budou se osudy Valdštejnovy již stále rozcházet s císařovými, a předpovídal Valdštejnovi zejména pro začátek roku 1634 věci velmi nemilé. Varoval proto Valdštejna, aby se vystříhal upadnout v podezření, jímž stížen je po nezdařeném povstání celý český národ, aby dbal dobré pověsti u císaře. Svou výstrahou chtěl prozíravý Kepler zajisté čelit úmyslům nebo předejít činům, jež se mu již tehdy zdály být v dosahu vévodových možností. Prognosa, že začátek roku 1634 bude obdobím plným obtíží, všemu Valdštejnovi počínání zcela nepříznivým, byla pro vévodu, jehož nesmírné sebevědomí bylo přesvědčeno, že jeho osudy jsou psány ve hvězdách, z úst tak vynikajícího astrologa, jakým byl Kepler, nejvážnějším varováním.

Také okolí vévodovo bylo mluvou hvězd, tajemného spolutvůrce Valdštejnova osudu, znepokojeno. Hrabě Adam Erdmann Trčka, nejbližší důvěrník a švagr Valdštejnův, dal si počátkem roku 1634 „skrze vévodu“ rovněž vyložit svou nativitu. Ta mu předpovídala, že „bude velikým a bohatým pánem, přečká-li tento rok; ale tento rok bude nebezpečný, nechť dá tedy pozor, aby nepřišel k úrazu nebo nebyl dokonce zavražděn...“⁶⁾

Vzniká pak otázka: Mohl Kepler již roku 1625 opravdu předvídat ortel nad Valdštejnem a chebské vraždění? Není přece možné, aby se proti člověku i hvězdy zatvrdily!

Posledním útočištěm před všemi starostmi zůstaly Valdštejnovi hvězdy. V kritickém období jeho života spojovaly ho s hr. Trčkou, mimo to však i s jiným mužem, jehož nativita byla stejná jako Valdštejnova, generálem Octaviem Piccolominim. Podobné shody, na něž upozornil rovněž již Kepler, byly pro Valdštejna velmi důležité. Valdštejn spolehl na ujištění svého astrologa, že nativita Piccolominiho mu zaručuje jeho věrnost až do smrti. Tak se vynořil z přitní muž, jenž vstoupil do valdštejnského dramatu s dokonalou virtuozitou intrikána a zločince: Důvěrník a oblíbenec Valdštejnův, velitel generalissimovy osobní stráže, jenž podpisem reverzu důstojníků v Plzni dne 12. ledna 1634 stvrdil mezi prvními přísahu „státi věrně a čestně při vévodovi do poslední kapky krve“,⁷⁾ vystupuje v několika dalších dnech jako zákeřný udavač, jenž odhaluje Vídní Valdštejna jako nebezpečného zrádce. Usiluje prý „vésti boj tak dlouho, dokud by se nezmocnil osoby císařovy a nevyvrátil z kořene dům Rakouský, kdekoli panuje...“⁸⁾ Tak se stalo, že osudného dne 25. února 1634 úkladnou vraždou v Chebu Valdštejn

⁵⁾ Viz Josef Pekař: „Valdštejn“, díl I., str. 34.

⁶⁾ Viz Josef Pekař: „Valdštejn“, díl II., str. 270.

⁷⁾ Viz Josef Pekař: „Valdštejn“, díl II., str. 225.

⁸⁾ Viz Josef Pekař: „Valdštejn“, díl II., str. 226.

podle slov historika⁹⁾ „umřel jako zrádce, jenž mohl zemřít jako král Český...“

Proroctví obou horoskopů, jež Kepler Valdštejnovi vypracoval, došla svého naplnění. Tragického konce vévody Frýdlantského, za jehož osobním dramatem zdvíhá se a roste mohutnější drama, tragédie poraženého národa, se Kepler však již nedožil. Ještě roku 1628 vymáhal ve Vídni vyplacení zadrženého služného, císař odkázal ho však na Valdštejna. Nezůstává ani na dvoře Valdštejnově v Zaháni ve Slezsku, ušetřen ran osudu, rozhodl se obhájit svých práv na říšském sněmu v Řezně. Útrapami daleké cesty zachvácen, po příjezdu do Řezna však onemocněl a dne 15. listopadu 1630 svůj život dokončil.

Neustále ve vědecké práci rušen, vykonal Kepler vzácné dílo. I na něho nechť jsou tedy tyto řádky u příležitosti 400. výročí jeho narození vděčnou vzpomínkou.

* *

*

Přímé působení planet i nepřímé vlivy z kosmu na jedince však věda odmítá. Není tedy s astrologií vše v pořádku. Nechme ji proto podle slov Keplerových nadále být „rozsmarnou“ dcerkou matky astronomie, dcerkou, která — napsal dr. Boris Valníček¹⁰⁾ — „si zaslouží občas nové šaty, občas však i vyhubovat a někdy i výprask“.

Příklad, vztahující se k volbám (viz č. 3)

Řešení soustavy

$$29z - 8y = 1971, \quad (1)$$

$$x^2 - 53x + 12y + 8z < 0 \quad (2)$$

přirozenými čísly dají datum našich voleb.

Doc. J. Chudý

Řešení. Řešení neurčité rovnice (1) je

$$y = 29t - 250, \quad (a)$$

$$z = 8t - 1.$$

Ale y, z jsou přirozená čísla, a proto

⁹⁾ Viz Josef Pekař: „Valdštejn“, díl I., předmluva str. IX.

¹⁰⁾ Cituji ze statí „Rudého práva“ ze dne 3. února 1971, str. 5: Dr. Boris Valníček: „Astrologie — věda, či nikoliv?“.

$$\left. \begin{array}{l} 29t - 250 > 0 \\ 8t - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t \geq 9 \quad (b)$$

Z rovnice (a) dosadíme do dané nerovnosti (2) a po kratší úpravě máme

$$x^2 - 53x + (412t - 3008) < 0. \quad (c)$$

Má-li existovat reálné řešení, pak diskriminant

$$D = 53^2 - 4(412t - 3008) > 0$$

$$D = 53^2 - 4(412t - 3008) > 0$$

$$t < 9,004 \dots$$

Porovnáme-li s rovnicí (b), dostáváme

$$t = 9.$$

Potom

$$y = 11, \quad z = 71.$$

Kvadratická nerovnost (c) je potom

$$x^2 - 53x + 700 < 0,$$

$$(x - 25)(x - 28) < 0.$$

Je nutné uvažovat dvě možnosti:

$$a) \left. \begin{array}{l} x - 25 > 0 \\ x - 28 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 25 < x < 28$$

a z toho vyplývá

$$x = 26, \quad x = 27$$

Tím jsme došli k výsledku: Volby jsou 26. a 27. 11. 71.

$$b) x - 25 < 0$$

$$x - 28 > 0$$

nevede k řešení.

Oprava k článku M. Geryka

Str. 512, 4. ř. zdola: Sečna se sestrojí spojením ...;

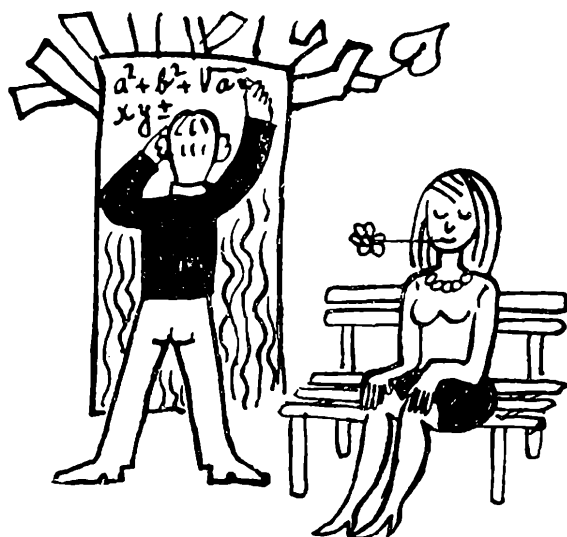
str. 154 ve sl. x_L místo 0,15/16 má být 15/16;

str. 155 ve sl. x_n má být: 2,378 2142 a 2,375 8121;

str. 205, 9. ř. shora: $x_m - x_{kr} - \dots$;

str. 205, 14. ř. shora místo $\sqrt{\frac{2}{2}}$ má být $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY



Záhadne telefónne číslo

EVŽEN ŘÍMAN, CSc Praha

Istý hudobník vyprával nám túto historku z koncertného zájazdu do Štokholmu: „Chcel som raz večer zavolať telefonicky svojho známeho, pana Absolóna. Keďže v telefónnej búdke nefungovalo osvetlenie, vytočil som jeho volacie číslo (označím ho A), s šiestimi rozličnými číslicami, podľa hmatu. Poznamenávam, že telefónne čísla v Štokholme môžu začínať nulou, ktorá sa musí vytočiť. Avšak miesto pana Absolóna sa ozval nejaký pan Berzelius a pýtal sa, ktoré telefónne číslo som volal. Prekvapil ma po chvíľke tvrdením, že jeho telefón má celkom iné volacie číslo (označím ho B), ktoré je celistvým násobkom mnou volaného čísla A , takže platí $B = KA$, pričom koeficient K je deliteľný štyrmi.

Príčinu svojho chybného spojenia som zistil až v ďalšej — osvetlenej búdke, kde som videl, že švédská telefónna číselnica sa líši od našej tým, že začína cifrou 9, po ktorej nasledujú (v smysle pohybu hodinových ručičiek) cifry 8, 7, 6, . . . 2, 1, 0. Ale číselnica u nás začína nulou a po nej idú cifry 9, 8, 7, . . . 2, 1. (Ináč povedané: tam, kde naša číselnica má číslicu 7, švédka má číslicu 6 atď., ale kde naša má číslicu 10, je na švédskej 9.)“

Vedeli by ste nájsť volacie čísla A , B pánov Absolóna resp. Berzelia?

(Pokyn: Uvážte aká je prvá číslica čísla B , keďže B má byť celistvým násobkom čísla A). Pošlite riešenie redakcii ROZHLADOV do 31. marca 1972.

Zmatlíkova poučka

JOSEF KOTYK, Pardubice

Žák Zmatlík se stal záhy populární osobností mládežnického kolektivu své školy. Nebylo žáka, který by ho neznal. Také zájem o „Rozhledy“ přičiněním Zmatlíkovým utěšeně vzrostl. Jejich rubrika ZZZ patřila na Zmatlíkově škole k nejoblíbenějším a nejčtenějším. Číslo časopisu, v nichž přemýšlivý žák Zmatlík vystupoval se svými svéráznými nápady, šla z ruky do ruky.

„Jedné výtky by si však mé dosud publikované úvahy zasloužily,“ doznal jednou Zmatlík sebekriticky v zájmovém kroužku. „Trpí újmou na obecnosti. Bylo by škoda, kdybyste podobnou újmou trpěli také vy,“ pravil, obraceje se k spolužákům.

Seděli v hlubokém pohnutí.

„Proto vám dnes odvodím v plné obecnosti jistou větu,“ pokračoval.

„Budeme jí říkat věta Zmatlíkova,“ navrhoval Zmatlíkův kamarád Šťoural.

Shromáždění tleskalo souhlasem.

„Dokážu,“ prohlásil Zmatlík, „že kterákoli dvě (i nestejná) čísla jsou —“

„Stejná“, odpověděl Šťoural.

Shromáždění zaburácelo. Žákyně a žáci slabších povah slzeli...

Ve chvílce se však všichni uklidnili, aby s pohnutím a zájmem, který nelze popsat, vyslechli důkaz „Zmatlíkovy poučky“:

Označme daná čísla m , n ($m \neq n$) a jejich aritmetický průměr p .

Je tedy $p = \frac{m + n}{2}$ neboli $m + n = 2p$.

Znásobme obě strany této rovnosti číslem $(m - n) \neq 0$ a provedme další jednoduché, oprávněné, zřejmě očividné úpravy:

$$(m + n) \cdot (m - n) = 2p \cdot (m - n)$$

$$m^2 - n^2 = 2pm - 2pn$$

$$m^2 - 2pm = n^2 - 2pn$$

$$m^2 - 2pm + p^2 = n^2 - 2pn + p^2$$

$$(m - p)^2 = (n - p)^2$$

Odmocněním obou stran dvěma vychází

$$m - p = n - p$$

neboli

$$m = n$$

Tak dospíváme k závěru, že každá dvě čísla jsou stejná.

„Neuvážil jsi však, že odmocňování dvěma je dvojznačné,“ poznamenal Štoural.

„Nic nového! Ani potom nedospějeme již k dalším výsledkům,“ hájil se neúnavný Zmatlík. „Vztah

$$m - p = p - n \text{ neboli } m + n = 2p\text{“},$$

pokračoval, „je nám totiž znám od počátku. To je neklamnou známkou, že že všechno je v pořádku.“

Milí čtenáři!

Tvrzení, že $3 = 2$, $1 = 0$, $2 = 0$ a j., jimiž jste se zabývali loni,¹⁾ představují skutečně jen zvláštní případy obecné věty Zmatlíkovy. Než se však odhodláte k tomu, abyste jí doplnili svůj arzenál vzorců a pouček z matematiky, napište nám, s jakými pocity jste stanuli na prahu nových Zmatlíkových objevů. Ani Zmatlíkův učitel to neutajil, když s úsměvem citoval slova nedávného proroctví: „Zdá se mi, že stojíme na prahu matematických objevů, před nimiž naše nejpyšnější historické vymoženosti zakrní...“²⁾

Nejmladším čtenářům

1. Vypočtete poměr výrazů V_1 , V_2 , jestliže

$$V_1 = (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ac)^2 + (c^2 - ab)^2 + (ab + bc + ac)^2,$$

$$V_2 = a^2b^2(a - b)^2 + b^2c^2(b - c)^2 + a^2c^2(c - a)^2 + (a^3 + b^3 + c^3)^2.$$

2. Zjednodušte:

$$\begin{aligned} V = & 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - d)^4 + (d - a)^4] - \\ & - [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2]^2 + \\ & + 8(a - b)(b - c)(c - d)(d - a). \end{aligned}$$

3. Je dán obdélník $ABCD$ a bod M , ležící uvnitř tohoto obdélníku. Dokažte, že platí: (O je střed obdélníka):

$$\text{a) } MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2,$$

$$\text{b) } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = AC^2 + 4 \cdot MO^2.$$

¹⁾ Viz Zmatlíkův výklad stupnice známek v Rozhledech roč. 49, čís. 3, str. 135 až 137.

²⁾ Marshall H. Stone: „The Future of Mathematics“ (Budoucnost matematiky), 1957.

4. Je dán čtverec $ABCD$. Uvnitř strany AB je zvolen bod K tak, aby $BK < \frac{1}{2} AB$ a uvnitř strany BC je bod L , pro nějž platí $BL = 2 \cdot BK$. Obsah trojúhelníku KBL je roven devítině obsahu daného čtverce.

Určete délky úseček BK , BL .

Řešení. 1. $V_1 \quad V_2 = (a^2 + b^2 + c^2) : (a^4 + b^4 + c^4)$. — 2. 0 — 3. Vzdálenosti bodu M od stran AB , CD označte x , y . — 4. $\frac{1}{3}a$, — 7. Trojúhelník ABC je pravoúhlý. — 8. Různoběžník $ABCD$ je složen ze dvou pravoúhlých trojúhelníků o společné přeponě. Obsah $P = 1428 \text{ mm}^2$.

S. H.

5. Do vzorců $x = a^3 - 3ab^2$, $y = 3a^2b - b^3$, $z = a^2 + b^2$

dosadte za a , b libovolná celá čísla a přesvědčte se, že tak získaná čísla x , y , z vyhovují rovnici

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

6. Číslo 135 je dělitelné číslem 27. Přesvědčte se, že i čísla 351, 513 jsou dělitelná číslem 27.

Podobně: Číslo 481 je dělitelné 37 a potom i čísla 814 a 148 jsou dělitelná 37.

7. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC . Základna AB je rozdělena na 8 shodných dílů, takže dělicí body po řadě jsou A , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, B . Jaký je daný trojúhelník ABC , jestliže trojúhelník $1C6$ je rovnoramenný ($1C = 16$).

8. V různoběžníku $ABCD$ je dáno $AB = 63 \text{ mm}$, $BC = 56 \text{ mm}$, $AD = 16 \text{ mm}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Sestrojte jej a vypočtete jeho obsah.

9. Najděte největší pěticiferné číslo, které má tyto tři vlastnosti:

a) Končí cifrou 4.

b) Je dělitelné čtyřmi.

c) Počet stovek je dvakrát větší než počet desetitisíců.

10. V napsaném součinu nahraďte otazníky vhodnými ciframi.

$$\begin{array}{r} 7 \ ? \ \times \ ? \ ? \ ? \\ \hline \ ? \ ? \\ \quad \ ? \ ? \\ \qquad \ ? \ ? \\ \hline \ ? \ ? \ ? \ 6 \end{array}$$

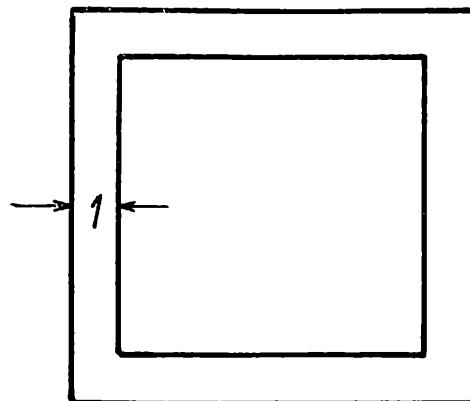
11. Máme pět sáčků a v každém z nich je 10 zlaťáků. Ve čtyřech sáčcích jsou zlaťáky dobré, ale v pátém sáčku jsou mince falešné. Víme, že falešná mince váží o 0,1 g méně než pravá. Jak se jediným zvážením zjistí, v kterém sáčku jsou falešné zlaťáky?

12. Kdosi si najal dělníka na 1 rok s tím, že mu po roce dá 12 rublů a kaftan. Dělník však po 7 měsících odešel a dostal 5 rublů a kaftan. Jakou cenu měl kaftan? (Ze staré ruské Aritmetiky z roku 1703.)

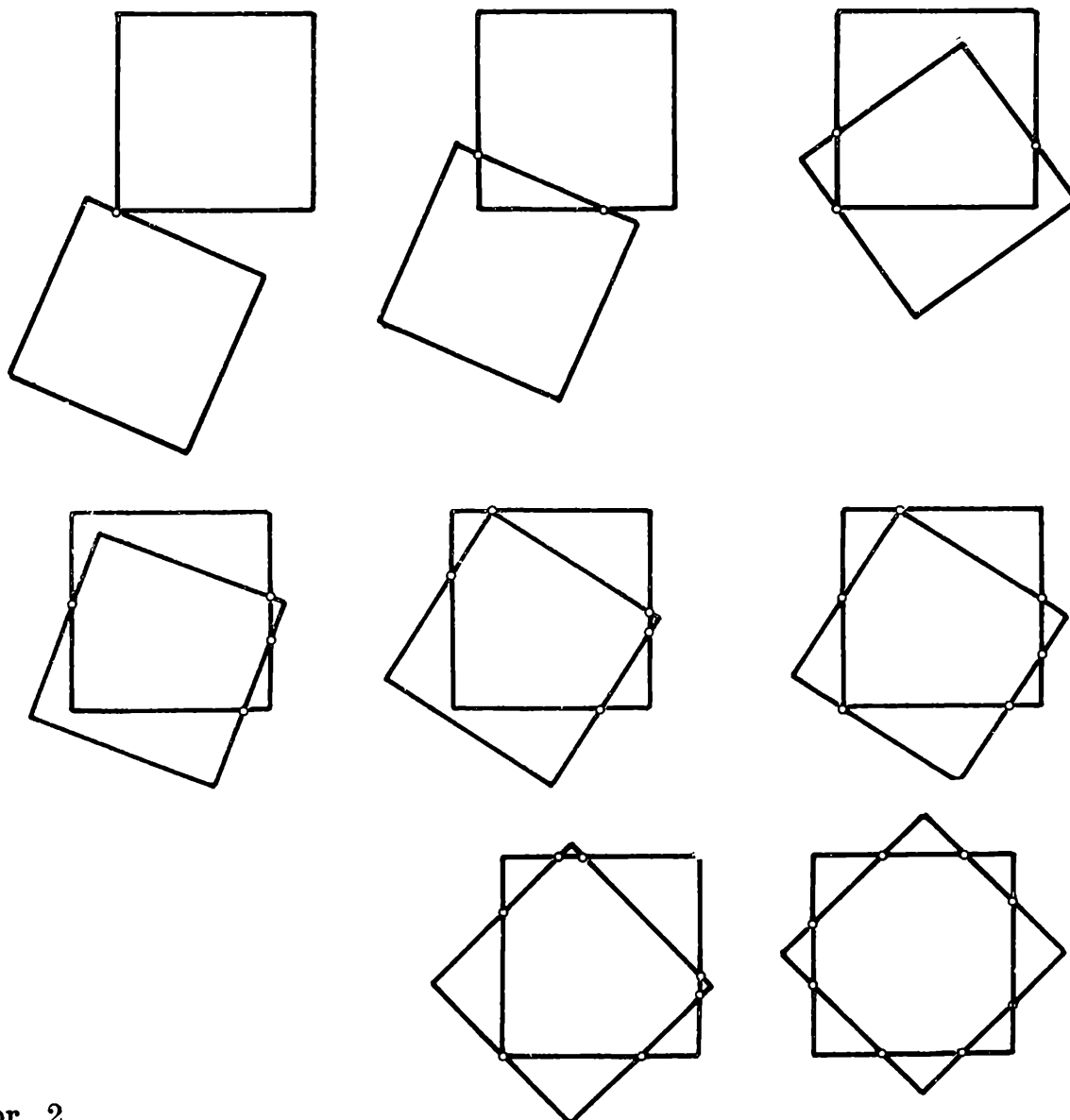
13. Jsou dány dva shodné čtverce, které nemají žádný společný bod. Jak musíme jeden z nich přemístit, aby měly společný právě jeden bod, právě dva body, právě tři body atd. až právě osm bodů?

14. V obr. 1 jsou dva čtverce, které mají společný střed a úhlopříčky. Rozdíl jejich obsahů je 80 cm^2 . Vypočítejte délky stran obou čtverců.

Řešení. 9. 49 884 — 10. 76×111 —
— 11. Sáčky libovolně očíslováme.
Z prvního dáme na misku vah 1 zlaták,
z druhého 2 zlatáky, z třetího 3 zlatáky
atd. až z pátého 5 zlatáků a zvážíme.
— 12. 4 ruble 80 kopějek.
— 13. Viz příložený obr. 2 — 14.
21, 19.



Obr. 1



Obr. 2



RECENZE

Nový svazek edice ŠMM

Edici Škola mladých matematiků, která vychází v Mladé frontě, nemusíme čtenářům jistě příliš představovat. Existuje už řadu let a přináší útlé svazky s iniciálami MO na obálce. Je totiž určena převážně řešitelům matematické olympiády. Na sklonku roku 1971 vyšel zde svazek, který má už pořadové číslo 28. Knížku napsali Bruno Budínský a Stanislav Šmakal a dali jí název „Vektory v geometrii“.

Látka je rozvržena do čtyř kapitol, z nichž první má charakter úvodu a seznamuje nás s některými pojmy z logiky, z teorie množin a s euklidovským prostorem. V druhé kapitole se začíná s pojmem vektoru a seznámíme se se sčítáním vektorů a s násobením vektoru reálným číslem. Kapitola třetí počíná skalárním součinem dvou vektorů a později se součinem dvou vektorů a později se zavádí vektorový a smíšený součin vektorů. V závěru této kapitoly najdeme i malý výhled do sférické tri-

gonometrie. Poslední kapitola přináší axiomy vektorového, afinního a euklidovského prostoru, historické poznámky atd.

Z obsahu knížky jsme vybrali pro informaci jen několik bodů a mnoho paragrafů jsme opominuli. Během četby se totiž čtenář setká např. i s několika úlohami o trojúhelníku, najde tu větu o jediném ortocentru, větu o Eulerově přímce a řadu poznatků z analytické geometrie. Výklad je ilustrován na mnoha obrázcích a numerických příkladech a pro pilného čtenáře jsou tu i cvičení jejichž výsledky jsou vzadu připojeny.

Mnozí rozdělují edici ŠMM na knížky úzce tematicky spojené s matematickou olympiádou a na brožury tzv. výběrové řady, které se obracejí k mírně vyspělejšímu čtenáři. Do této druhé kategorie patří i další nová knížka Budínského a Šmakala. Zbývá dodat, že brožura má 160 stran, 63 obrázků a stojí 11 Kčs. Doporučujeme ji všem, kdož si chtějí rozšířit své matematické vzdělání.

J. S.

Oprava

Na str. 239, 2. ř. zdola má správně být:

a) Součet těchto dvou čísel je dělitelný číslem 11.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

I

identický	identiquement
identický	identique
identita	identité <i>ž</i>
ilustrace	illustration <i>ž</i>
ilustrovat	illustrer
imaginární	imaginaire
imaginární část	partie <i>ž</i> imaginaire
imaginární číslo	nombre <i>m</i> imaginaire
imaginární jednotka	unité <i>ž</i> imaginaire
ryze imaginární	imaginaire pur
implicitní	implicite
implikace	implication <i>ž</i>
implikovat	impliquer
incidence	incidence
incidentní	incident, <i>e</i>
index	indice <i>m</i> (ve smyslu symbolu), indéxe <i>m</i> (ve smyslu abecedního seznamu na konci knihy)
indukce	induction <i>ž</i>
důkaz matematickou indukcí	démonstration par récurrence
infimum	infimum <i>m</i> ; borne <i>ž</i> inférieure
infinitesimální	infinitésimal, <i>e</i> , aux
injektivní	injectif, ive
injektivní zobrazení	injection <i>ž</i> ; application <i>ž</i> injective
inkluze	inclusion <i>ž</i>
integrace	intégration
integrál	intégrale <i>ž</i>
integrální	intégral, <i>e</i> , aux
integrovat	intégrer
interpolace	interpolation <i>ž</i>
interpolovat	interpoler
interval	intervalle <i>m</i>
otevřený interval	intervalle ouvert
uzavřený interval	intervalle fermé

invariant
invariantní

číslo lájeinné
verzni útvarý

involute
involutorní
iracionální
izogonální
izolovaný
izometrický
izomorfismus
izomorfni
izotropní

J

jeden
jedenáct
jedenáctina
jedenáctý
jediný
jednočlen
jednoduchý
jedno-jednoznačný
jednotka
imaginární jednotka
jednotkový
jednotkový vektor
jednoznačně
jednoznačně určený

jednoznačnost
jednoznačný
jehlan
komolý jehlan
komolý jehlan
jestliže
jev
jev opač
jistota
jistý
jmenovatel
společný jmenova A

invariant m
invariant.
inversion $\times$
inverse
nombre inverses l'un de l'autre
figures m inverses
olution
involutif,
irrationnel, elle
isogone
isolé, e
isométrique
isomorphisme m
isomorphe
isotrope

onzième
onzième
unique
monôme
simple
biunivoque
unité
unité imaginaire
unitaire
vecteur m unitaire
univoquement
univoquement déterminé unique
ment déterminé bien déterminé; bien défini
unicité
univoque
pyramide
pyramide tronquée; tronc de pyramide
événement m
événement contraire
certitude ξ
certain
dénominateur
dénominate

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

7



ROČNÍK 50
BŘEZEN 1972

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

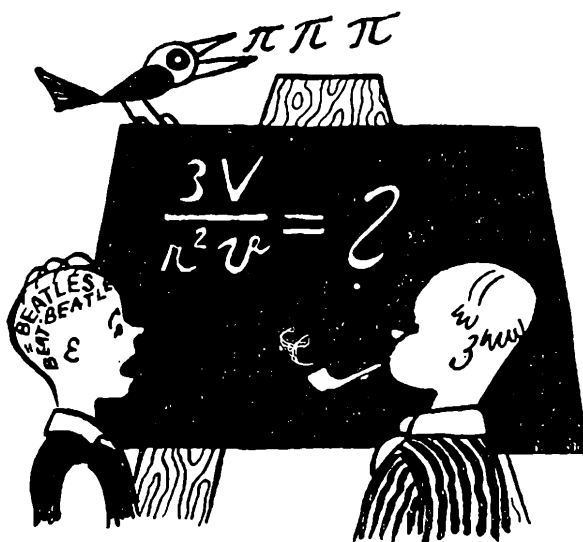
REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellarová, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

Dr. J. Šedivý: Grafy s uzly a hranami .	289
F. Kuřina: Přímkové kružnice	294
I. Baník: Ako náhoda pomáhá určovať obsah rovinných útvarov	297
J. Daneš, J. Danešová: O Kakeyově úloze (Dokončení)	299
I. Šolc: Přibližná konstrukce daného úhlu	305
Doc. ing. L. Drs: Automatické kreslení II.	308
M. Marčok: Existují tachyóny?	310
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Vedlejší jednotky	312
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Expandující proměnné hvězdy	314
Naše soutěž	318
K. Maleček: První způsoby měření Země	323
Dr. M. Široká: Vzpomínka na prof. dr. A. Seydlera	326
Doc. J. Chudý: Řešení volebního příkladu	328
E. Říman, Csc.: Záhadné telefonní číslo	329
S. Horák: Matematické zábavy .	330
Recenze	332
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	334
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky



Grafy s uzly a hranami

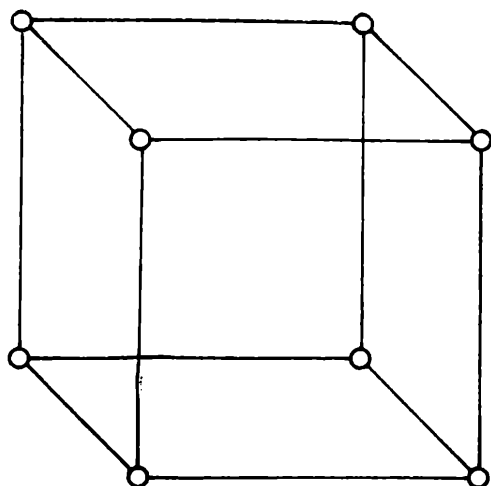
RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFFUK

Tento článek je úvodem k seriálu volně na sebe navazujících článků, které postupně ukáží celou řadu zajímavých poznatků o grafech a jejich aplikacích. (Poznámka redakce.)

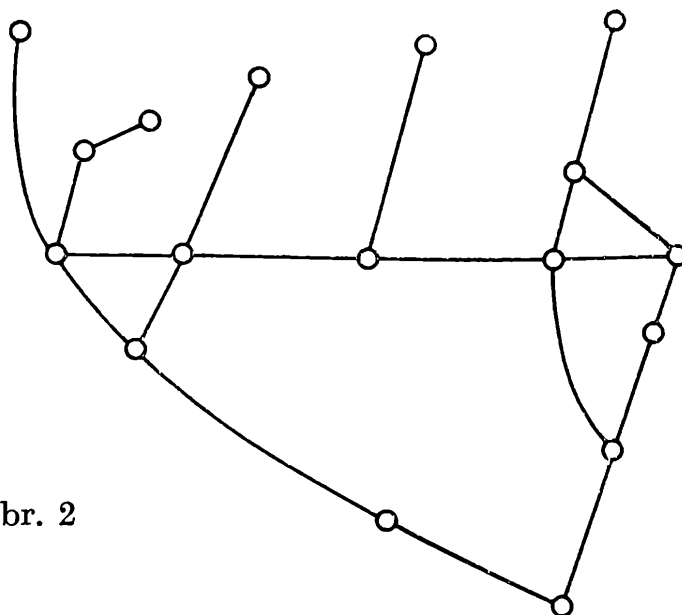
Všichni dobře znáte grafy funkcí lineárních, kvadratických, goniometrických a dalších. Přestože se tento druh grafů velmi často používá, nevznikla žádná teorie, která by jej studovala. Termín teorie grafů označuje teorii zabývající se objekty jiného druhu, jejichž ukázky vidíte na obrázcích 1—6 v tomto článku. Seznamme se blíže s jednotlivými obrázky.

Na první pohled je zřejmé, že obr. 1 znázorňuje model krychle složený z drátů a kuliček; kuličky zvýrazňují vrcholy tělesa a dráty jeho *hrany*. Obr. 2 je jakoby vystřižen z mapky železniční sítě otištěné v jízdním řádu ČSD, malé kroužky znázorňují železniční *uzly* a oblouky schematicky zachycují úseky železničních tratí mezi těmito uzly; přitom jsou čáry v grafu sestrojeny „velkoryse“ — nevystihují věrně tvar tratí, nerozlišují velikost železničních stanic apod. Tato schematizace je však užitečná, přehledně informuje o existenci přímého železničního spojení mezi vyznačenými dopravními uzly.

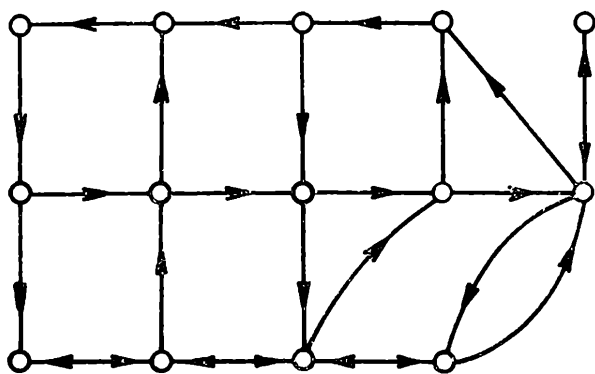
Dopravní situace ve městech často vyžaduje, aby některé ulice byly jednosměrné; takovou situaci výhodně znázorňujeme pomocí šipek. Na obr. 3 kroužky znázorňují křižovatky nebo náměstí, zatímco šipky vy-



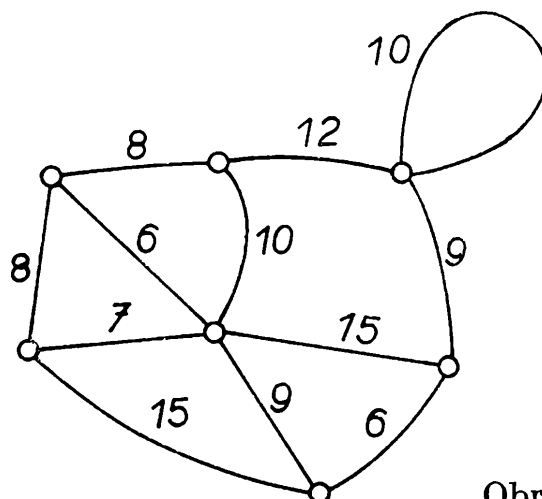
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

značují ulice a dovolený směr dopravy v nich. Je vcelku přirozené nazývat grafy tohoto druhu *orientované grafy*, naproti tomu grafy na obr. 1 a 2 jsou *neorientované grafy*.

Mapy dálkové dopravy většinou obsahují i údaje o vzdálenostech mezi jednotlivými místy, v automapách bývají takové číselné údaje připisovány k úsečkám či k obloukům znázorňujícím silnice (viz ukázkou na obr. 4). Tak získáme *ohodnocené grafy*, na obr. 4 jde o ohodnocený neorientovaný graf, existují ovšem i ohodnocené orientované grafy (můžete si jeden z nich poříditi připsáním čísel k šipkám na obr. 3). V grafu lze ohodnocovat jednotlivé oblouky i uspořádanými n -ticemi čísel, čísla mohou být připsána i ke kroužkům apod., tyto případy poznáte později.

Dosavadní ukázky umožňují názorně charakterizovat, co mají společného ty geometrické objekty, které jsme nazvali grafy: jde o systémy kroužků spojených oblouky nebo úsečkami, přitom každý

oblouk spojuje dva různé kroužky nebo se vrací do kroužku, ze kterého vyšel (obr. 4 vpravo). Zmíněné kroužky nazýváme uzly grafu (termín je vypůjčen z dopravní terminologie) a úsečky či oblouky nazýváme hrany grafu (termín je vypůjčen ze stereometrie — viz hrany krychle na obr. 1). Nyní již víte, proč je v názvu článku uveden termín „grafy s uzly a hranami“, snadno si domyslíte, co znamenají termíny orientovaná hrana (obr. 3), ohodnocená hrana (obr. 4).

Použijeme-li množinové terminologie, můžeme říci, že *každý neohodnocený graf je určen množinou všech svých uzlů a množinou všech svých hran*; přitom ovšem hrana je určena neuspořádanou dvojicí uzlů (je-li neorientovaná) nebo uspořádanou dvojicí uzlů (jde-li o orientovanou hranu).*) Z těchto poznámek vysvítá úzká souvislost grafů s množinami uspořádaných dvojic prvků jistých množin, tj. s binárními relacemi v množinách; také o těchto věcech pojednáme až v dalších článcích. Grafy s uzly a hranami budeme stručně nazývat *uzlové grafy* nebo jen *grafy*. Omezíme se sice na grafy s konečnými množinami uzlů, zato však jimi budeme znázorňovat nejrozmanitější objekty — lidi, věci, státy, města, výroky, čísla, stroje, kontakty, skupiny lidí, zvířata a věci, uspořádané n -tice čísel apod. Hrany grafu budou sloužit k znázornění těch vztahů mezi uvedenými objekty, které nás zajímají při řešení problémů.

Ukažme si příklady:

1. *Máme rozhodnout, zda lze uskutečnit cestu po všech státech evropského kontinentu tak, abychom vždy cestovali jen z hlavního města jednoho státu do hlavního města některého sousedního státu a abychom přitom navštívili každý stát právě jednou.*

Pomocí uzlů znázorníme jednotlivé státy evropského kontinentu; hranou spojíme právě tu dvojici uzlů, která znázorňuje dva sousední státy. Vzhledem k tomu, že státy sousedí navzájem, nemusíme uvažovat o uspořádané dvojici a spokojíme se neorientovanými hranami. Na obr. 5 je zachycen jen „výsek“ z celkového grafu, odborně řečeno *podgraf* takového grafu, máme zachyceny jen členské státy RVHP, každý uzel je označen iniciálou jména státu (B — Bulharsko, $\check{C}$ — Československo apod.).

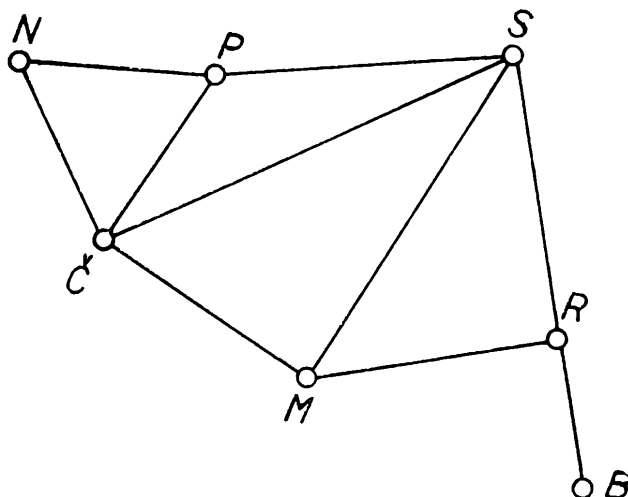
Je jistě patrné, že zamýšlenou cestu po členských státech RVHP můžeme charakterizovat jako cestu v grafu, přesněji jako posloupnost uzlů a hran. Neorientovanou hranu přitom zapisujeme dvojicí písmen označujících uzly, které hrana spojuje. Např. B , BR , R , RS , S , SP , P , PN , N , $N\check{C}$, $\check{C}$, $\check{C}M$, M je zápis jedné cesty v grafu na obr. 5.

*) Ohodnocené grafy jsou navíc určeny jistou funkcí definovanou na množině všech hran grafu.

Čtenář si jistě snadno nakreslí graf znázorňující situaci na celém evropském kontinentu a rozhodne o existenci cesty popsané v textu příkladu. Pro nás bude cenným poučením, zachytíme-li ve formě „slovníčku“, jak graf znázorňuje reálnou situaci:

stát X evropského kontinentu	uzel X grafu
stát X sousedí se státem Y	v grafu existuje hrana XY , tj. hrana spojující uzly X, Y
cesta po evropských státech = posloupnost států a přechodů z jednoho do sousedního	cesta v grafu = posloupnost uzlů a hran, v níž je vždy hrana uvedena mezi uzly, které spojuje
každý stát je v průběhu cesty navštíven právě jednou	každý uzel je prvkem cesty právě jednou

Obdobné slovníčky napomáhají k plnějšmu pochopení, jak pojmy teorie grafů odpovídají reálným situacím a jak umožňují řešení problémů; v řadě případů byly takovým způsobem získány definice důležitých pojmů teorie grafů.



Obr. 5

2. Na vědeckém symposiu bylo vysloveno devět hypotéz o různých stránkách jednoho problému, účastníci symposia si je stručně označili iniciálami autorů: $K, W, B, H, L, Z, T, M, E$. Ještě v průběhu jednání ukázali pohotiví vědci, že z platnosti hypotézy B plyne platnost L i K , obdobně ze Z plyne M , z E plyne L ; hypotézy H, T jsou dokonce ekvivalentní (platí buď obě nebo žádná z nich). Jiní účastníci symposia publikovali později v odborných časopisech své poznatky, že i hypotézy L, Z jsou ekvivalentní, že z T plyne M , z W plyne E , z W plyne B , z E plyne H , z M plyne E , z K plyne W . Z tak velkého množství poznatků usoudil jeden student, že všech devět hypotéz je ekvivalentních, tj., že z platnosti kterékoliv z nich vyplývá platnost všech ostatních. Usuzuje tento student správně?

K rozhodnutí o správnosti studentova úsudku nemusíme ani příliš znát logiku, postačí, když víme, že logické vyplývání není symetrické (plyne-li A z B , nemusí vyplývat B z A), ale je tranzitivní (jestliže

z A plyne B a z B plyne C , pak z A plyne C). Použijeme grafu, který sestojíme na základě tohoto „slovníčku“:

hypotéza X

z X vyplývá Y (podle údajů)

z kterékoliv hypotézy vyplývají všechny ostatní

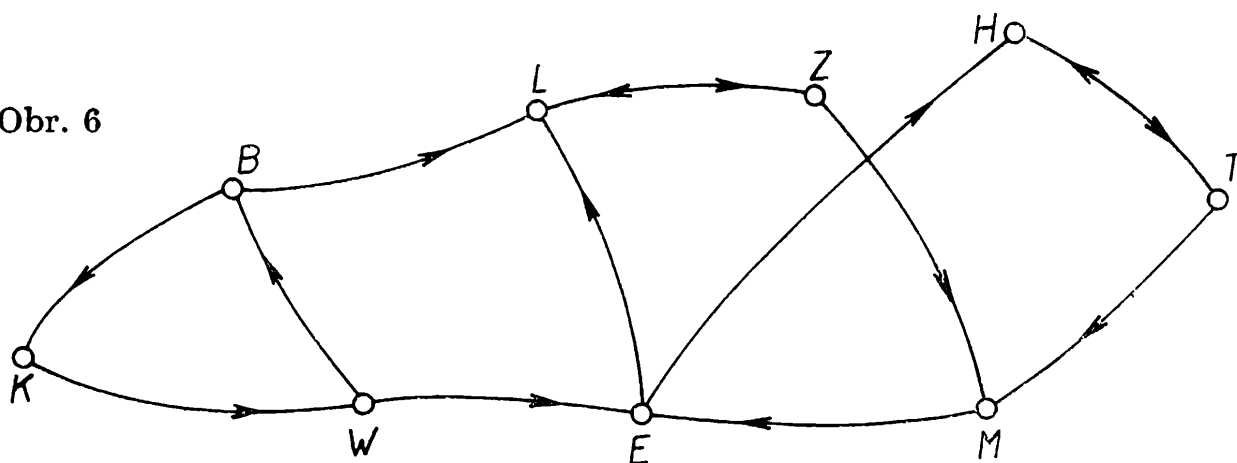
uzel X grafu

v grafu existuje orientovaná hrana XY (šipka směřující od X k Y)

z kteréhokoliv uzlu grafu lze najít cestu „po šípkách“ ke všem ostatním uzlům grafu

Načtneme-li si graf (obr. 6), získáme daleko lepší přehled o situaci než ze slovních formulací. Snadno se přesvědčíme, že student se unáhlil v úsudku, protože podle dosavadních výsledků jsou navzájem ekviva-

Obr. 6



lentní hypotézy ve skupině K, W, B a kromě toho jsou navzájem ekvivalentní hypotézy ve skupině L, E, Z, M, H, T . Z platnosti kterékoliv z hypotéz K, W, B sice vyplývá platnost všech osmi ostatních hypotéz, ale žádná z hypotéz druhé skupiny nestačí k odvození platnosti hypotéz první skupiny (šipky směřuje jen od B k L , od W k E). I tento negativní výsledek by však mohl mít pro studenta velký význam; z grafu by okamžitě poznal, že postačí podat důkaz o vyplývání hypotézy W z E nebo B z L a vzájemná ekvivalence všech devíti hypotéz by byla dokázána. Kdoví, zda by se tento objev nestal prvním významným krokem studenta do vědecké práce.

Přesvědčili jste se, že sestavení grafu může být užitečné tím, že nám poskytne přehledné znázornění problémové situace. Zatím jsme ovšem neodvodili ani jednu větu teorie grafů, k tomu přistoupíme později. Ve zbývajících číslech tohoto ročníku a v dalších ročnících získáte pestrý obraz o využití grafů k řešení úloh. Uzlové grafy slouží především k řešení problémů kombinatorické povahy, znázorňují se pomocí nich i harmonogramy výstavby velkých závodů nebo dopravních tepen (např. metra), slouží k operativnímu rozhodování o rozdělování přepravních kapacit, který zvyšuje celkový objem přepraveného zboží apod. V zá-

věrečném seznamu doporučené literatury najdete jen několik nedostupnějších titulů, další prameny budou citovány v jednotlivých člancích věnovaných problematice teorie grafů a jejich využití k řešení úloh.

Literatura

1. J. Sedláček: Nebojte se matematiky, SNTL, Praha
2. J. Sedláček: Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů), NČSAV, Praha 1964
3. K. Čulík, V. Doležal, M. Fiedler: Kombinatorická analýza v praxi, SNTL, Praha 1967

Přímkové kružnice

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

V prvním čísle tohoto ročníku Rozhledů jste se v článku o množinách přímek mohli seznámit s těmito pojmy:

osnova (a) — množina všech přímek dané roviny, které jsou rovnoběžné s danou přímkou a ,
svazek (A) — množina všech přímek dané roviny, které procházejí daným bodem A .

Nyní se budeme zabývat dalším typem množin přímek v rovině.

Úloha 1. V rovině ρ je dán bod S . Narýsujte několik přímek roviny ρ , které mají od bodu S vzdálenost 3 cm.

Řešení je znázorněno na obr. 1. Každá narýsovaná přímka se dotýká kružnice s o středu S a poloměru 3 cm.

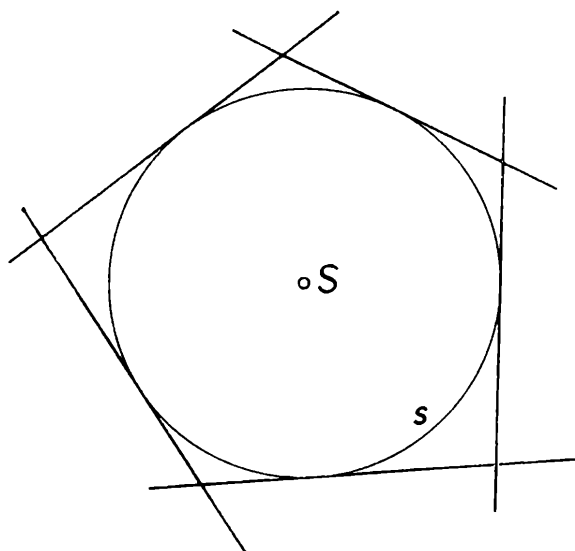
Množinu všech přímek dané roviny ρ , které mají od bodu S roviny ρ vzdálenost r , budeme nazývat množinou všech tečen kružnice s nebo stručněji přímkovou kružnicí (S, r) .*

Úloha 2. Je dána přímka p a bod S , který na ní neleží. Narýsujte obraz přímky p v několika různých rotacích se středem v bodě S .

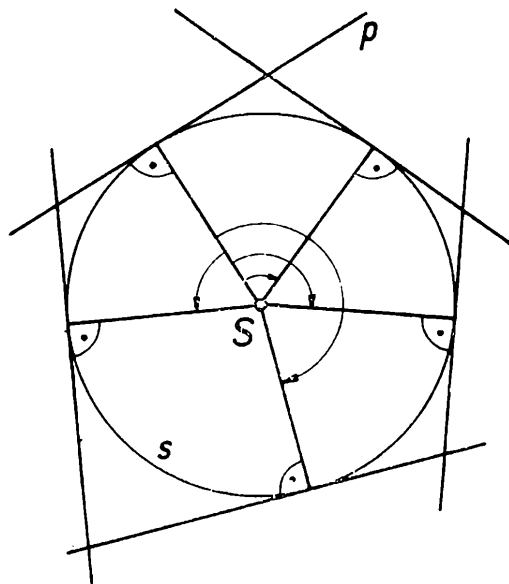
Řešení je znázorněno na obr. 2.

Označíme-li množinu obrazů dané přímky p ve všech možných rotacích kolem středu S symbolem (p, S) , vyvstává přirozeně otázka, jaká je souvislost mezi množinou (p, S) a přímkovou kružnicí (S, r) . Porovnáme-li obr. 1 a obr. 2, zdá se, že platí věta:

Je-li $p \in (S, r)$, pak množina obrazů přímky p ve všech možných rotacích kolem středu S je přímkovou kružnicí (S, r) .



Obr. 1



Obr. 2

Při důkazu rovnosti množin

$$(p, S) = (S, r) \quad (*)$$

potřebujeme dokázat platnost dvou množinových inkluzí:

$$(p, S) \subset (S, r) \quad \text{a} \quad (p, S) \supset (S, r).$$

Protože $p \in (S, r)$, je vzdálenost přímky p od bodu S rovna r . V libovolné rotaci kolem středu S přejde bod S do téhož bodu S a přímka p do jisté přímky p' . Protože rotace je shodnost, je vzdálenost bodu S od přímky p' rovna vzdálenosti bodu S od přímky p . Je tedy

$$(p, S) \subset (S, r).$$

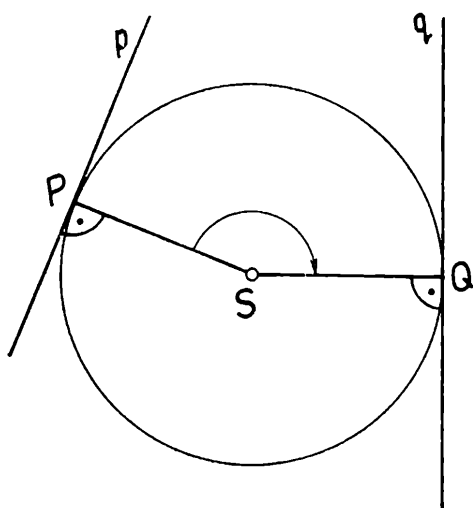
Ukažme nyní, že každá přímka množiny (S, r) je obrazem přímky $p \in (S, r)$ v jisté rotaci kolem středu S . Je-li $q \in (S, r)$, potom orientovaný úhel $\widehat{PSQ}$ (v označení podle obr. 3) určuje rotaci kolem středu S , která převádí bod P do bodu Q a tedy i přímku p do přímky q . Tím je dokázáno, že platí $(S, r) \subset (p, S)$.

Pro množinu (S, r) můžeme tedy užívat i označení (p, S) . Tyto dva symboly připomínají, že přímková kružnice je určena buď středem a poloměrem nebo středem a jedním prvkem.

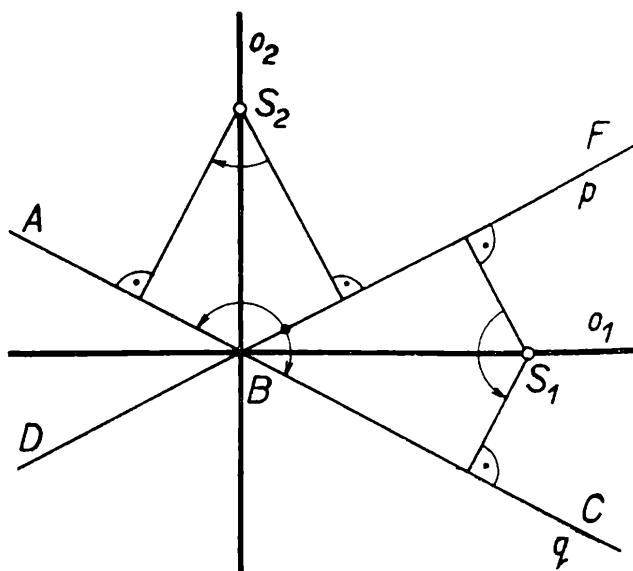
Řešme nyní pomocnou úlohu:

Úloha 3. Jsou dány dvě různoběžné přímky p, q . Vyšetřete všechny rotace jejich roviny, které převádějí přímku p v přímku q .

*) Ve škole se množiny přímek neprobírají, proto jistě chápete kružnici ve zúženém významu „bodová kružnice“, tj. množina bodů. Plným právem však lze nazvat kružnicí i uvedenou množinu přímek.



Obr. 3



Obr. 4

Protože v hledané rotaci má přejít přímka p v přímku q , musí být střed rotace — bod S — stejně vzdálen od obou přímek p, q . Bod S musí tedy náležet některé z os o_1, o_2 úhlů přímek p, q . V označení podle obr. 4 leží na přímce q body A, B, C tak, že bod B leží mezi body A, C a na přímce p leží body D, B, F tak, že bod B leží mezi body D, F . Libovolný bod S_1 osy úhlu $\sphericalangle FBC$ je středem rotace o úhel FBA , která převádí přímku p do přímky q . Libovolný bod S_2 osy úhlu $\sphericalangle FBA$ je středem rotace o úhel FBC , která převádí přímku p do přímky q . Analogické výsledky platí i pro body, které leží na osách úhlů $\sphericalangle ABD$ a $\sphericalangle DBC$.
(Pokračování)

UPOZORNĚNÍ

Krajský dům pionýrů a mládeže v Hradci Králové pořádá letos již 6. ročník celostátního matematického „Tábora mladých Pythagorců“. Přihlásit se mohou absolventi 7., 8. a 9. tříd ZDŠ a absolventi I., II., III. a IV. ročníku středních škol.

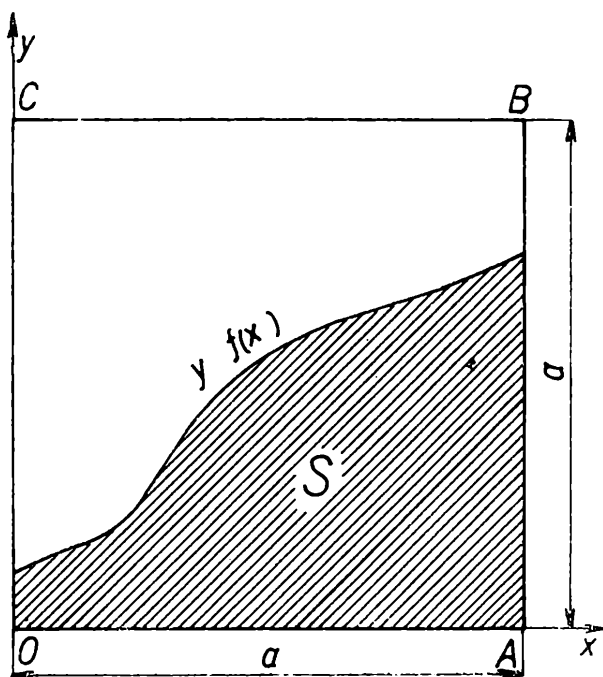
Poplatek je asi 350 Kčs za 14 dní. Program: Dopoledne přednášky a cvičení z matematiky, odpoledne sportovní a kulturní program, večer besedy. Informace a přihlášky na adresu M. Kadaníková, vedoucí oddělení věd, Krajský dům pionýrů a mládeže, Hradec Králové, Kozinova 9.

Ako náhoda pomáha určovať obsah rovinných útvarov

IVAN BANÍK, Bratislava

V numerickej matematike, vyzbrojenej rýchlymi počítačmi sa niekedy používa metóda (zvaná „metódou Monte Carlo“), ktorá využíva náhodu a pravdepodobnosť pri určovaní obsahov, resp. objemov zložitejších útvarov, kde presný výpočet nie je možný.

Predstavme si, že máme určiť plošný obsah S vyšfarovaného útvaru na obr. 1. Krivka, tvoriaca hornú hranicu útvaru má pritom známe funkčné vyjadrenie $y_k = f(x_k)$. Princíp metódy si najprv objasníme bez použitia počítača, hoci v takom prípade by metóda nemala význam.



Obr. 1

Vykonajme nasledovný pokus: Hádzme nejakou veľmi malou mincou do oblasti ohraničenej štvorcom $ABCD$, ktorého strana má dĺžku a . Predpokladajme pre jednoduchosť, že minca vždy padne do uvažovaného štvorca. Pri každom padnutí zaznačíme jej polohu. Ak ju považujeme za bod, dostaneme tak množinu bodov rozmiestnených náhodne po celom štvorci. Pri vykonaní n vrhov bude n_1 z nich ležať na ploche S , zbytok v oblasti ďalšej. Ak predpokladáme, že dopad mince na ľubovoľné miesto

je rovnako pravdepodobný, bude na základe počtu pravdepodobnosti, pri dostatočne veľkom n platiť približne

$$\frac{n_1}{n} \doteq \frac{S}{a^2} \quad (1)$$

Psoledný vzťah názorne znamená, že pri hádzaní sa celá plocha štvorca pokrýva prakticky rovnomerne. Čím väčší počet hodov vykonáme, tým bude vzťah (1) splnený presnejšie. Z neho možno potom určiť obsah plochy S , nakoľko strana a je známa a veličiny n , n_1 sa zistia meraním (experimentálne).

Uvedený postup bez použitia počítača by bol veľmi zdĺhavý, nepohodlný a prakticky bezcenný. Ako ho však upraviť, aby sa dal použiť počítač? Že by počítač hádzal mincou? To asi nie. To by nebolo ono. Pre počítač je vhodný postup, pri ktorom sa hádzanie mince nahradí nejakým matematickým figlom — vytváraním náhodných dvojíc čísel x , y . Stroj také niečo produkovať dokáže. Nech tieto náhodné čísla spĺňajú podmienky $0 < x < a$, $0 < y < a$. Každéj takej dvojici x , y možno však priradiť bod $B(x, y)$ zo štvorca $ABCD$. Či tento bod padne do oblasti S , či nie, rozhodne stroj sám. Stačí k tomu vyšetriť pre danú dvojicu x , y , ktorý z nasledovných vzťahov je splnený

$$y < f(x), \quad y > f(x), \quad y = f(x).$$

Ak platí prvý, leží bod zrejme pod krivkou a stroj zvýši počet zásahov o jeden.

Keďže stroj je veľmi rýchly a neúnavný, dokáže bez obtiaží vykonať a vyhodnotiť veľký počet „pokusov“, takže neznámu plochu S môže určiť s dostatočne veľkou presnosťou. Pokiaľ ide o body, ktoré padnú na krivku, bude ich počet — ako to možno očakávať aj na prvý dojem — vzhľadom na počty n a n_1 zanedbateľný. Hore popísaným postupom by sme mohli určiť aj obsah štvrtkruhu so stredom v počiatku O a polomerom $r = a$. Na základe výsledku, ktorý možno porovnať so známym vzorcom $S = 1/4\pi a^2$ pre plochu štvrtkruhu, sa dá dostatočne presne určiť aj hodnotu Ludolfovoho čísla π .

Záverom ešte pripomíname, že uvedená metóda približného určovania plovch je len jednou z mnohých ďalších. V každom prípade je to však metóda veľmi zaujímavá a originálna.

Prosíme všetky prispivatele (a tudiož i řešitele příkladů), aby každý list papíru čitelně podepsali na rubu.

0 Kakeově úloze

JOSEF DANEŠ, MÚKU Praha, JANA DANEŠOVÁ, VUT Praha

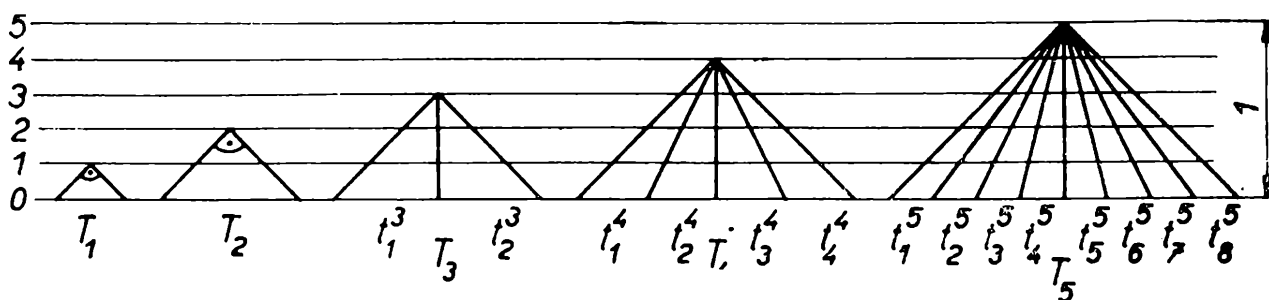
(Dokončení)

Další úvahy jsou Perronovo (1929) a Schoenbergovo (1962) zjednodušení původních Besicovitchových úvah. Buď $p \geq 2$ přirozené číslo a $\mathbf{T}_p = \triangle OAB$ rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s vodorovnou přeponou AB délky 2. Vrcholem O a přeponou AB trojúhelníka $\mathbf{T}_p$ vedme vodorovné přímky (tedy rovnoběžné s přeponou AB). Pás mezi těmito rovnoběžkami rozdělíme $p-1$ vodorovnými přímkami na $p-1$ stejných dílů, takže sousední rovnoběžky mají od sebe vzdálenost $\frac{1}{p}$.

Očíslujeme je zdola nahoru $0, 1, 2, \dots, p$. Přímku s číslem k ($0 \leq k \leq p$) nazveme k -tou úrovní. Například přepona AB leží na nulté úrovni a vrchol O na p -té úrovni. Dále sestrojme pro $1 \leq k \leq p-1$ rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník $\mathbf{T}_k$, který má přeponu na nulté úrovni a vrchol protilehlý k přeponě na k -té úrovni. Přeponu trojúhelníka $\mathbf{T}_k$ ($k \geq 2$) rozdělíme na $n_k = 2^{k-2}$ stejných úsečků. Krajiní body těchto úsečků spojíme úsečkami s vrcholem protilehlým k přeponě trojúhelníka $\mathbf{T}_k$. Tím je trojúhelník $\mathbf{T}_k$ rozdělen na $n_k = 2^{k-2}$ trojúhelníků o stejné ploše (všechny trojúhelníky mají stejnou svislou výšku $\frac{k}{p}$ a stejně

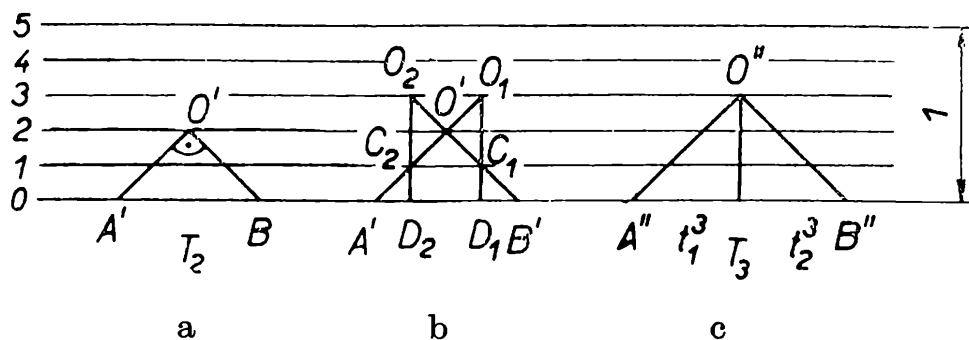
velkou vodorovnou stranu délky $2 \cdot \frac{k}{p} \cdot \frac{1}{n_k}$). Tyto trojúhelníky očíslujeme zleva doprava $\mathbf{t}_1^k, \mathbf{t}_2^k, \dots, \mathbf{t}_{n_k}^k$ (obr. 7). Trojúhelníky $\mathbf{t}_i^k$ ($1 \leq i \leq n_k$) budeme nazývat základními trojúhelníky trojúhelníka $\mathbf{T}_k$.

Nyní si všimneme vztahu mezi základními trojúhelníky trojúhelníků $\mathbf{T}_k$ a $\mathbf{T}_{k+1}$. Vezměme si například trojúhelník $\mathbf{T}_2 = O'A'B'$ (obr. 8a).



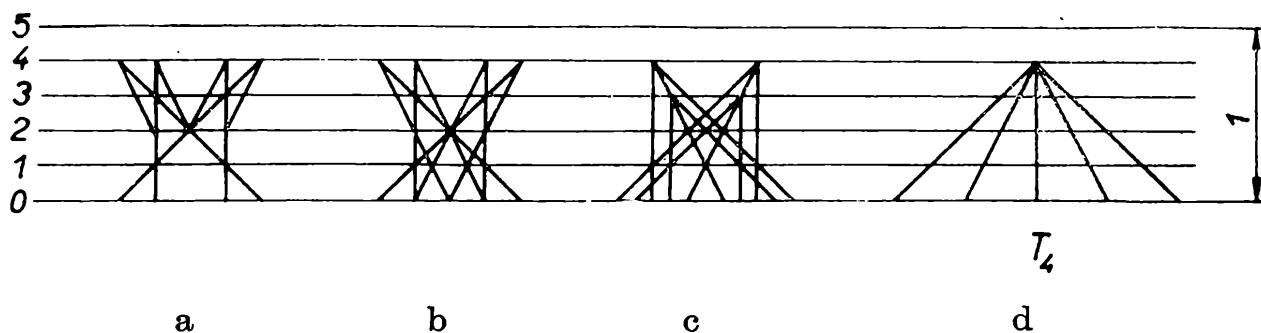
Obr. 7 ($p=5$)

Buď O_1 bod ležící na třetí úrovni a na přímce $O'A'$ a O_2 bod ležící na třetí úrovni a na přímce $O'B'$. Buď C_1 bod na první úrovni a na přímce $O'B'$ a C_2 bod na první úrovni a na přímce $O'A'$. Přímky O_1C_1 a O_2C_2 protnou nultou úroveň v bodech D_1 a D_2 (obr. 8b). Snadno je vidět, že výsledný obrazec na obr. 8b vznikne také vodorovným posunutím základních trojúhelníků t_1^3 a t_2^3 trojúhelníku T_3 (obr. 8c).



Obr. 8

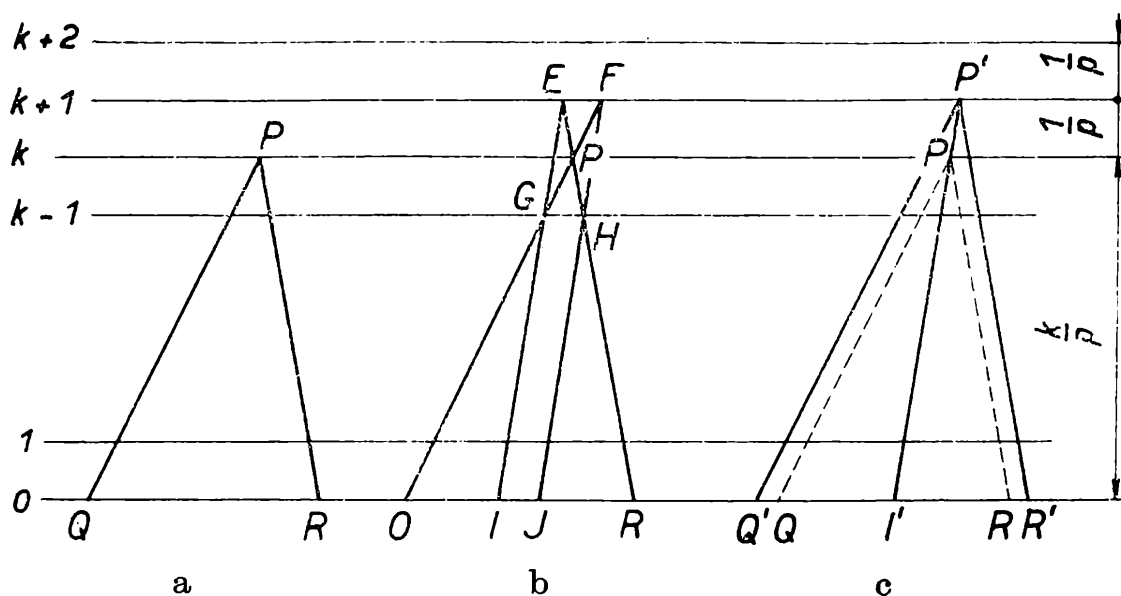
Díváme-li se na T_2 jako na strom, pak obrazec na obr. 8b vznikl ze stromu T_2 přírůstkem dvou větviček $\triangle O'O_2C_2$ a $\triangle O'O_1C_1$ za jeden rok. Trojúhelníky $\triangle O_2D_2B'$ a $\triangle O_1D_1A'$ nazveme větvemi stromu z obr. 8b. Z každé větve stromu na obr. 8b vyrostou za další rok dvě větvičky (celkem tedy čtyři větvičky) takto: stranu každé větve prodloužíme až do čtvrté úrovně a spojíme s bodem ležícím na druhé straně téže větve a zároveň na třetí úrovni (obr. 9a). Prodloužíme-li strany těchto větviček až do nulté úrovně, dostaneme strom o čtyřech větvích (obr. 9b). Každé



Obr. 9

dvě větve stromu na obr. 9b, jejichž větvičky vyrostly ze stejné větve stromu na obr. 8b, vodorovně posuneme tak, aby jejich rovnoběžné strany procházely vrcholem větve, ze které vyrostly jejich větvičky (obr. 9c). Snadno je vidět, že tímto posunutím vznikne obrazec, který je podobný stromu na obr. 8b s koeficientem podobnosti $\frac{4}{3}$. Protože jsme již viděli, že strom na obr. 8b vznikne také vodorovným posunutím základních trojúhelníků trojúhelníku T_3 , obrazec na obr. 9c a tedy i strom na obr. 9b lze dostat vodorovným posunutím základních trojúhelníků trojúhelníku T_4 (obr. 9d). Z větví stromu na obr. 9b za další rok vyroste celkem $2 \cdot 4 = 8$ větviček; jejich strany prodloužíme až do

nulté úrovně a vznikne tak strom o osmi větvích, který lze také dostat vodorovným posunutím základních trojúhelníků trojúhelníku T_5 atd. Pro každé přirozené číslo k , $2 \leq k \leq p-1$, umíme tedy sestavit strom o $n_k = 2^{k-2}$ o větvích a o výšce $\frac{k}{p}$ (každý rok strom vzroste o $\frac{1}{p}$). Tento strom nazveme k -letým stromem.

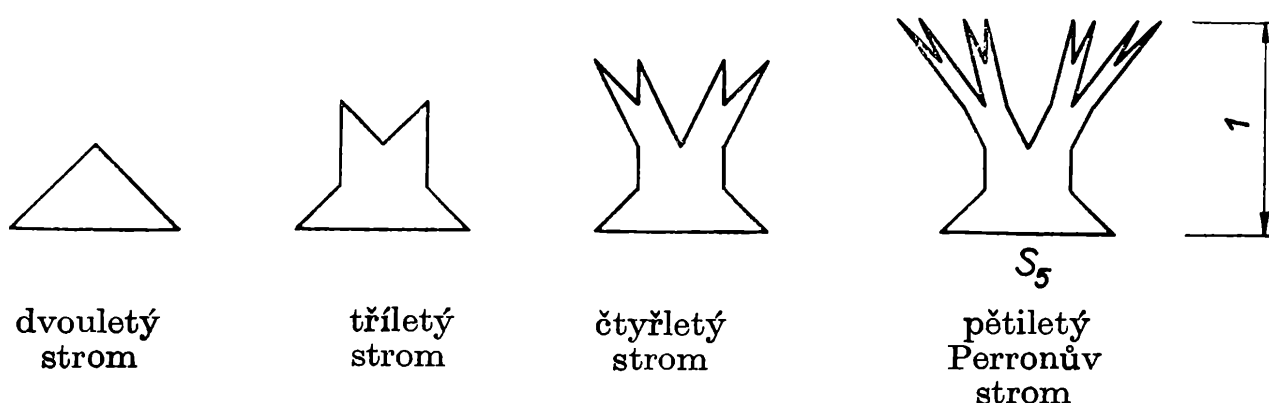


Obr. 10

Abychom vyloučili případné pochybnosti o tom, jak z k -letého stromu vyrůstá $(k+1)$ -letý strom, uvedme přesnou definici. Buď $\triangle PQR$ větev k -letého stromu (obr. 10a). Každou stranu větve prodloužíme až do $(k+1)$ -té úrovně a spojíme úsečkou s bodem ležícím na druhé straně větve a na $(k-1)$ -té úrovni. Tak vzniknou větvíčky $\triangle PEG$ a $\triangle PFH$ (obr. 10b). Prodloužíme-li úsečky EG a FH až do nulté úrovně, dostaneme dvě větve $\triangle FQJ$ a $\triangle EIR$ $(k+1)$ -letého stromu. Tuto úvahu provedeme pro každou větev k -letého stromu. Tím je dáno (přesné) pravidlo růstu k -letého stromu.

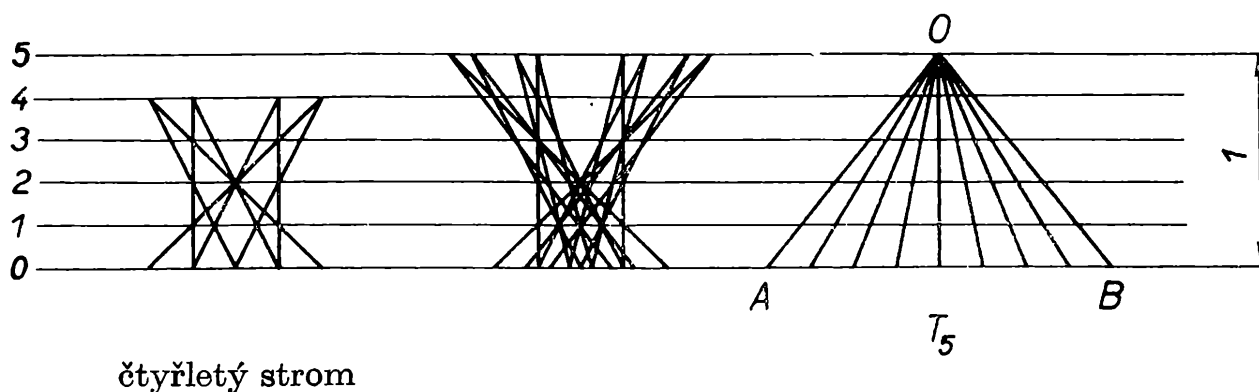
Dokážeme, že základní trojúhelníky trojúhelníku T_k lze vodorovně posunout tak, že vznikne k -letý strom. Pro $k = 2, 3, 4$ bylo toto tvrzení dokázáno výše. Předpokládejme, že toto tvrzení platí pro nějaké k , $2 \leq k < p$, a dokažme jej i pro $k+1$. Buďte $\triangle EIR$ a $\triangle FQJ$ větve $(k+1)$ -letého stromu, jejichž větvíčky $\triangle EGP$ a $\triangle FPH$ vyrostly ze stejné větve $\triangle PQR$ k -letého stromu (obr. 10a, b). Trojúhelníky EIR a FQJ vodorovně posuneme tak, aby jejich rovnoběžné strany EI a FJ procházely vrcholem P větve $\triangle PQR$. Dostaneme situaci znázorněnou na obr. 10c. Trojúhelníky $P'Q'R'$ a PQR jsou podobné s koeficientem

podobnosti $\frac{k+1}{k}$ Provedeme-li takové posunutí pro každé dvě větve $(k+1)$ -letého stromu, jejichž větvičky vyrostly ze stejné větve k -letého stromu, dostaneme obrazec, který je podobný k -letému stromu s koeficientem podobnosti $\frac{k+1}{k}$ Protože pro k platí naše tvrzení, je odtud vidět jeho platnost i pro $k+1$. Tím je naše tvrzení dokázáno (matematickou indukcí).



Obr. 11 ($p=5$)

p -letý strom ($k=p$) budeme nazývat p -letým Perronovým stromem a budeme ho značit S_p . Jeho výška je 1 a má $n = 2^{p-2}$ větví. p -letý Perronův strom S_p lze dostat vodorovným posunutím základních trojúhelníků trojúhelníku $T_p = \triangle OAB$. Růst stromu pro $p=5$ je znázorněn na obr. 11 a poloha základních trojúhelníků před a po posunutí na obr. 12.



Obr. 12

Nyní odhadneme plochu Perronových stromů. Buď $\triangle PQR$ větev k -letého stromu (obr. 10a). Za jeden rok vyrostou z větve dvě nové větvičky $\triangle PEG$ a $\triangle PFH$. Trojúhelníky FQJ a EIR tvoří dvě větve $(k+1)$ -letého stromu. Protože $PF = PG$ a trojúhelníky PEG , PHF a PGH mají stejné výšky kolmé na přímkou FG (a příslušné strany stejné velikosti), mají všechny tři trojúhelníky stejný obsah:

$$P(PEG) = P(PHF) = P(PGH)$$

Protože bod P leží na k -té úrovni, body G a H na $(k - 1)$ -té úrovni a body Q a R na nulté úrovni, jsou trojúhelníky PGH a PQR podobné s koeficientem podobnosti $\frac{1}{k}$. Je tedy

$$P(PGH) = \frac{1}{k^2} P(PQR)$$

Obsah dvou větviček vyrostlých mezi k -tým a $(k + 1)$ -tým rokem je

$$2 P(PGH) = \frac{2}{k^2} P(PQR).$$

Velikost základny trojúhelníka $\mathbf{T}_k$ je $\frac{2k}{p}$ a tedy $QR = \frac{2k}{p} \cdot \frac{1}{2^{k-2}}$

výška bodem P na stranu QR je $\frac{k}{p}$. Odtud dostaneme

$$P(PQR) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{p} \cdot \frac{1}{2^{k-2}} \cdot \frac{k}{p} = \frac{k^2}{2^{k-2} \cdot p^2}$$

Plocha všech větviček $(k + 1)$ -letého stromu vyrostlých z větví k -letého stromu mezi k -tým a $(k + 1)$ -tým rokem je

$$2^{k-2} \cdot 2 \cdot P(PGH) = 2^{k-2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k^2}{2^{k-2} \cdot p^2} = \frac{2}{p^2}.$$

Každým rokem tedy plocha stromu vzroste o $\frac{2}{p^2}$. Protože p -letý Perronův strom $\mathbf{S}_p$ vyroste z dvouletého stromu $\mathbf{T}_2$ za $p - 2$ let, je obsah stromu $\mathbf{S}_p$ nejvýše roven číslu

$$P(\mathbf{T}_2) + (p - 2) \cdot \frac{2}{p^2} = \frac{4}{p^2} + \frac{2(p - 2)}{p^2} = \frac{2}{p};$$

nejvýše proto, že některé větvičky by se mohly překrývat. Lze dokázat, že větvičky se překrývat nemohou, ale to zde dělat nebudeme, protože nám stačí horní odhad obsahu Perronových stromů.

Plocha p -letého Perronova stromu $\mathbf{S}_p$ je menší než $\frac{\varepsilon}{8}$, tj. $P(\mathbf{S}_p) < \frac{\varepsilon}{8}$,

když $\frac{2}{p} < \frac{\varepsilon}{8}$, tedy pro $p > \frac{16}{\varepsilon}$. Zvolme takové p . Strom $\mathbf{S}_p$ začal vyrůstat ze stromu $\mathbf{T}_2$. Buď O' vrchol stromu $\mathbf{T}_2$, tj. vrchol protilehlý k přepone trojúhelníka $\mathbf{T}_2$. Ke stromu $\mathbf{S}_p$ připojíme Palovy spojky, jak již bylo popsáno v první polovině článku. Vzniklý obrazec označme $\mathbf{O}_1$. Buďte $\mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3, \mathbf{O}_4$ obrazce, které vzniknou z obrazce $\mathbf{O}_1$ otočením v kladném smyslu kolem bodu O' po řadě o 90° , 180° a 270° . Označme $\mathbf{O}_e$

sjednocení obrazců $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3$ a $\mathbf{O}_4$. Protože v každém obrazci $\mathbf{O}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) lze jehlu otočit v kladném smyslu o 90° , přičemž konečná poloha jehly při těchto otáčeních v jednom obrazci $\mathbf{O}_i$ je počáteční polohou jehly v obrazci $\mathbf{O}_{i+1}$ (zde pokládáme $\mathbf{O}_5 = \mathbf{O}_1$), lze v obrazci $\mathbf{O}_\varepsilon$ jehlu otočit o 360° a $\mathbf{O}_\varepsilon$ je tedy Kakeyovým obrazcem. Protože obsah každého obrazce $\mathbf{O}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) je menší než $\frac{\varepsilon}{4}$, je obsah obrazce $\mathbf{O}_\varepsilon$ menší než ε . Tím je věta dokázána.

Dokázali jsme dokonce více: víme nejen o existenci Kakeyových obrazců o libovolně malé ploše, ale i jak je sestavit. Je-li například $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, pak musíme zvolit p tak, aby $p > \frac{16}{\frac{1}{1000}} = 16\,000$, tedy aspoň $p = 16\,001$. Trojúhelník OAB bychom museli rozdělit na $2^{16001-2} = 2^{15999}$ základních trojúhelníků. Číslo 2^{15999} je větší než $2^{15990} = (2^{10})^{1599} = (1024)^{1599} > 1000^{1599} = 10^{4797}$, tedy astronomicky velké a skutečná konstrukce příslušného 16001-letého Perrova stromu a tím i Kakeyova obrazce $\mathbf{O}_\varepsilon$ popsaného v důkazu věty je prakticky nemožná.

Nakonec ještě několik poznámek. Připojení Palových spojek způsobuje, že výsledný Kakeyův obrazec je značně „děravý“ a značně velký (pro malá ε jsou Palovy spojky velmi úzké a dlouhé). V roce 1971 F. Cunningham dokázal existenci „neděravých“ Kakeyových obrazců o libovolně malé ploše ležících v kruhu o poloměru 1. Množinu $\mathbf{M}$ v rovině nazveme hvězdovitou, jestliže existuje takový bod O v $\mathbf{M}$, že s každým bodem X z $\mathbf{M}$ leží úsečka OX v $\mathbf{M}$. Příkladem hvězdovité množiny je například n -cípá hvězda ($n \geq 2$). V témže roce Cunningham dokázal, že každý hvězdovitý Kakeyův obrazec má obsah aspoň $\frac{\pi}{108} \doteq 0,0291$. Můžeme tedy říci, že Besicovitchova věta platí nejen ve třídě všech Kakeyových obrazců, ale i v menší třídě „neděravých“ Kakeyových obrazců ležících v kruhu o poloměru 1, avšak neplatí ve třídě hvězdovitých Kakeyových obrazců.

O popularitě Kakeyovy úlohy svědčí to, že již 54 let se těší pozornosti matematiků a byl o ní natočen film. Čtenáře zajímajícího se blíže o Kakeyovu úlohu a příbuzné otázky odkazují na literaturu připojenou na konci tohoto článku.

Literatura

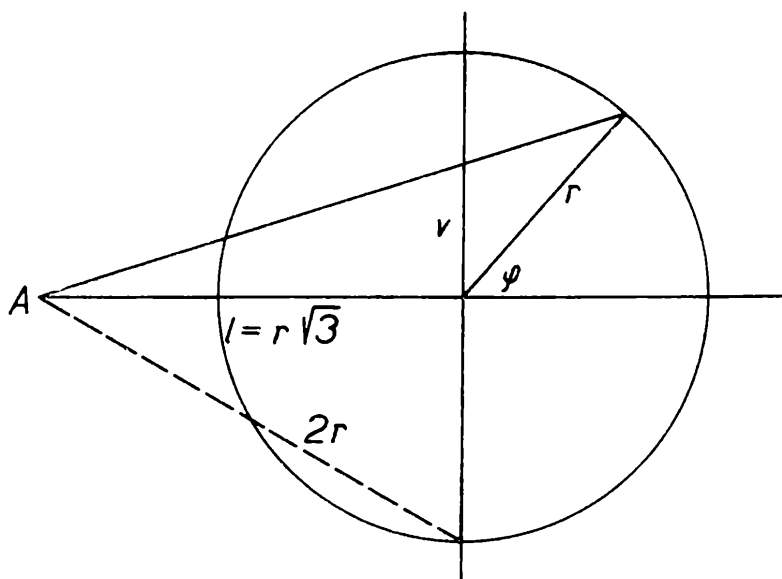
- [1] S. Kakeya, Some problems on maximum and minimum regarding ovals, Tohoku Sci. Rep. 6, 1917, 71—88.
- [2] A. S. Besicovitch, Sur deux questions de l'intégrabilité, Jour. Soc. Math. Phys. Univ. Perm 2, 1920.
- [3] A. S. Besicovitch, On Kakeya's problem and a similar one, Math. Z. 27, 1928, 312—320.

- [4] O. Perron, Über einen Satz von Besicovitch, Math. Z. 28, 1928, 383—386.
- [5] H. Rademacher, On a theorem of Besicovitch, Studies in Math. Analysis and Related Topics, Stanford Univ. Press, 1962, 294—296.
- [6] I. J. Schoenberg, On the Besicovitch-Perron solution of theakeya problem, tamtéž, 359—363.
- [7] A. S. Besicovitch, Theakeya problem, Amer. Math. Monthly 70, 1963, 697—706.
- [8] A. A. Blank, A remar on theakeya problem, tamtéž, 706—711.
- [9] F. Cunningham, jr., Theakeya problem for simply connected and for star-shaped sets, Amer. Math. Monthly 78, 1971, 114—129.
- [10] R. O. Davies, Some remarks on theakeya problem, Proc. Camb. Phil. Soc. 69, 1971, 417—421.

Přibližná konstrukce daného úhlu

IVAN ŠOLC, Malá Skála

Jedna z užitečných aproximací pro sestrojení libovolného úhlu vychází ze vztahu mezi délkou kruhového oblouku a délkou jeho středového průmětu na průměr kruhu z vhodně voleného středu promítání. Klasická



Obr. 1. Aproximace libovolného daného úhlu

konstrukce, která našla již své technické uplatnění při převádění kruhového pohybu v pohyb přímočarý [1] je uvedena na obr. 1, pro který platí přibližná úměrnost:

$$\frac{v}{\varphi} \doteq \frac{r}{90^\circ} \quad (1)$$

Přesný výpočet vede ke vztahu:

$$\sin \varphi = \frac{v}{r} \frac{l^2 + \sqrt{l^2 r^2 - v^2} (l^2 - r^2)}{l^2 + v^2} \quad (2)$$

Podle konstrukce na obr. 1 je $l = r \sqrt{3}$, kdy vzorec (2) přechází do tvaru:

$$\sin \varphi (l = r \sqrt{3}) = v \cdot \frac{3r + \sqrt{3r^2 - 2v^2}}{3r^2 + v^2} \quad (3)$$

Vyjádříme-li početně délku l , dospějeme k výrazu:

$$l = \frac{r \cdot v \cdot \cos \varphi}{r \sin \varphi - v} \quad (4)$$

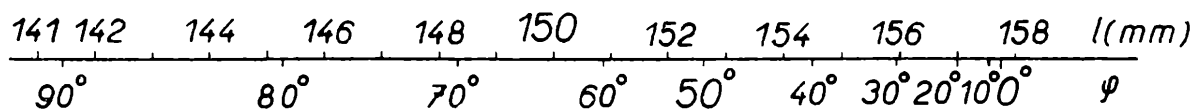
Zjistíme nyní rozsah platnosti přibližné úměrnosti (1), při čemž se omezíme na první a čtvrtý kvadrant kružnice, kde jediné má konstrukce své oprávnění. Pracujeme-li s klasickým dělením kruhu je vhodné volit poloměr kružnice $r = 90$ mm, kdy 1 mm má odpovídat 1° . Propočítejme nyní průběh funkce (4) za předpokladu, že volíme úhly φ a za v dosazujeme hodnoty v (mm) = $|\varphi^\circ|$ při $r = 90$ mm. Pro krajní případy dospějeme výpočtem příslušných limit k výsledkům:

$$l_{(\varphi=0^\circ)} = \frac{180}{\pi - 2} \text{ (mm)} \doteq 157,7 \text{ mm} \quad (5a)$$

$$l_{(\varphi=90^\circ)} = 45\pi \text{ (mm)} \doteq 131,4 \text{ mm} \quad (5b)$$

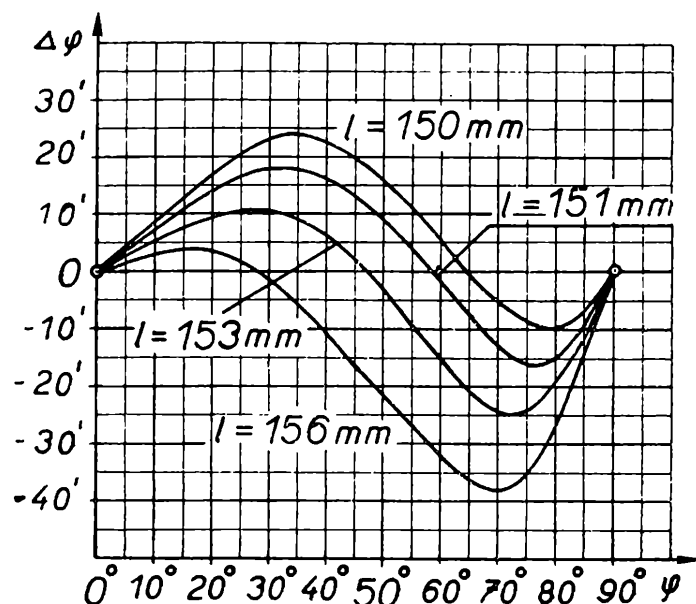
Celý průběh funkce (4) je uveden graficky na obr. 2. Pro konstrukci podle obr. 1 vychází $l = r \sqrt{3} = 90 \cdot \sqrt{3} = 155,9$ mm, což podle obr. 2 odpovídá úhlu $\varphi = 30^\circ$. Při tomto úhlu by tedy měla být konstrukce přesná. V obecném případě je konstrukce přesná vždy pro ten úhel, pro který platí vztah mezi l a φ podle rovnice (2) nebo (4), nebo jednodušeji pro každou dvojici hodnot l a φ podle obr. 2.

Pro posouzení užitečnosti konstrukce je nutné znát chybu, jíž se touto aproximací dopouštíme. Proto byly vypočítány rozdíly mezi přesným úhlem a úhlem sestrojeným touto konstrukcí pro různá l . Výsledky podle rovnice (2) jsou uvedeny na obr. 3, odkud vyplývá, že konstrukce podle obr. 1 má chybu do $5'$ asi do úhlu 36° a největší chyby $38'$ dosahuje při



Obr. 2. Optimální vzdálenost l v závislosti na žádaném úhlu (pro $r = 90$ mm)

úhlech v okolí 70° . Chceme-li tedy sestavit touto konstrukcí úhel např. 70° , je výhodné držet se oblasti malých chyb, čili např. volíme počáteční bod úsečky v nikoliv na ose x , ale přibližně v bodě odpovídajícím -35° . Potom je druhý bod rovněž v oblasti malých chyb, čímž přesnost kon-



Obr. 3. Závislost chyby řešení na úhlu φ a na vzdálenosti l (správná hodnota φ = hodnota zkonstruovaná $-\Delta\varphi$).

strukce stoupá. Chceme-li chybu rozložit symetricky v celém použitelném rozsahu, volíme $l \doteq 151$ mm. jak vyplývá z obr. 3. V tomto případě ovšem nelze užít elegantní konstrukce podle obr. 1, chyba však nedosahuje v žádném případě ani $20'$.

Odvoďte si sami uvedené vztahy a přemýšlejte o využití této aproximace pro konstrukci pravidelných mnohoúhelníků [2] i pro jiná užitečná přibližná řešení některých úloh.

Literatura :

- [1] V. Zajíc: Jemná mech. opt. 1959, č. 11, roč. 4
- [2] Macháček: Jemná mech. opt. 1958, č. 8, roč. 3

OPTIMISTICKÝ NÁZOR

Divit se nějakému jevu znamená často v matematice stejně jako v jiných oblastech již poloviční odhalení.

Dirichlet

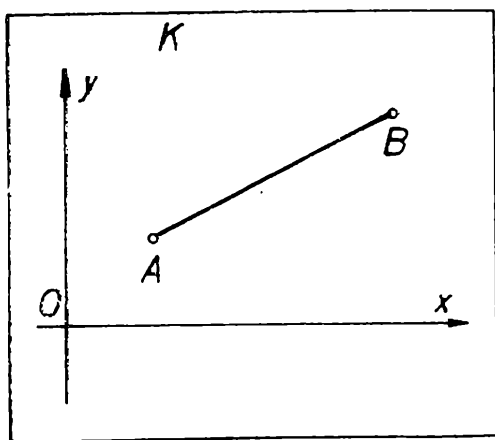
Automatické kreslení II

Docent ING. LADISLAV DRS, ČVUT Praha

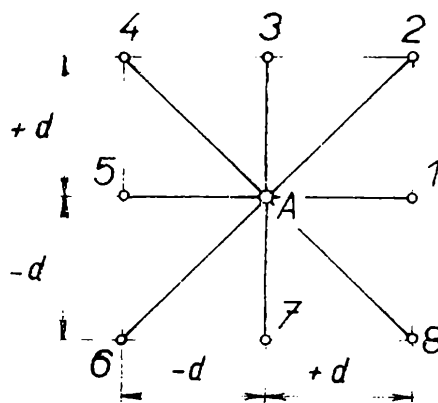
Činnost kreslicích automatů

V prvním článku o automatickém kreslení (Rozhledy 0) byla popsána konstrukce kreslicích automatů. Víme tedy, že pohyb pera automatu řídí počítač a že toto pero může vhodným skládáním dvou pohybů kreslit libovolnou čáru.

Nyní si vysvětlíme, jakým způsobem stroj pracuje. Pro jednoduchost předpokládejme, že pero se nachází v místě A kreslicí plochy K a že má nakreslit úsečku AB (obr. 1). Tento pohyb rozloží počítač do velmi

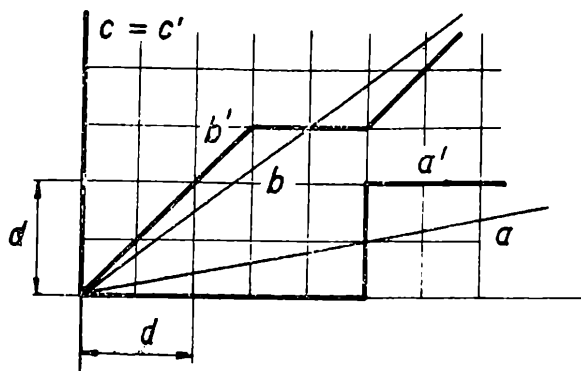


Obr. 1

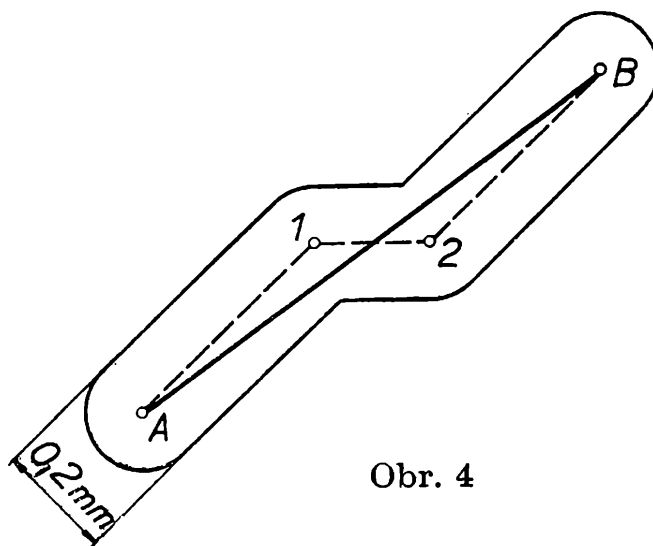


Obr. 2

malých úseků délky d ($d = 0,1$ mm i méně) ve směru podélném (osa x) a příčném (osa y). Pro každý úsek dá počítač kreslicímu stroji povel k pohybu v jednom z těchto dvou směrů nebo k současnému pohybu v obou těchto směrech. Pohyb ve směru osy x uskuteční bubnový typ otočením bubnu, stolový typ posunem mostu. Pohyb ve směru osy y se vykoná u obou typů posunem vozíku. Pero se tak přemístí z výchozí polohy A do jedné z osmi možných sousedních poloh 1–8 (obr. 2). Přitom počítač určí novou polohu tak, aby se od ideální tj. naprogramované polohy co nejméně lišila. V dalších úsecích vede počítač pero obdobným způsobem a z těchto nepatrných změn poloh se kreslí lomená čára nahrazující danou



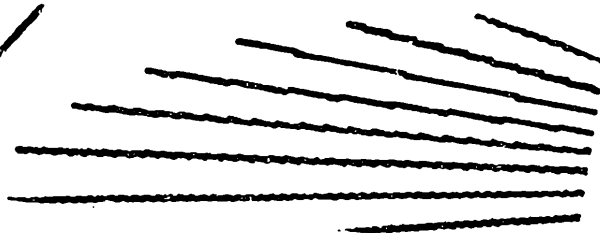
Obr. 3



Obr. 4

PRUMETY

Obr. 5

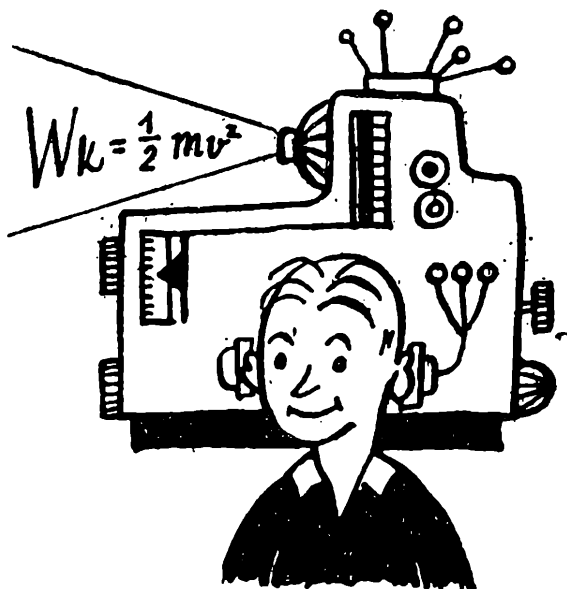


Obr. 6

úsečku. Pero tedy nakreslí přesně úsečku ve čtyřech základních směrech podle obr. 2, ale jakoukoli jinou úsečku nahradí lomenou čarou. Tak na příklad (obr. 3) přímky a , b budou nahrazeny lomenými čarami a' , b' , přímka c má základní směr a proto $c = c'$.

Celý tento proces je zdánlivě složitý a nepřesný. Ale musíme si uvědomit ohromnou rychlost počítače. Ten by byl schopen dodat stroji víc povelů k přemísťování, než by pero stačilo kreslit. Prakticky jich bývá tolik, že výsledná rychlost pera je 5–10 cm za vteřinu, takže pero kreslí rychleji, než zručný odborník. A ještě několik slov k přesnosti. Obr. 3 ukazuje teoretickou dráhu středu kreslicího zařízení. Bývá jím nejčastěji trubičkové pero. Uvažujme, že má na příklad průměr 0,2 mm. Pero kreslí místo teoretické lomené čáry její model (viz článek Modely geometrických útvarů, Rozhledy). Na obr. 4 je znázorněna úsečka AB , která se má nakreslit, lomená čára $A12B$, která je teoretickou drahou pera a její model, který je skutečně nakreslen. Konstrukce modelu je provedena podle již citovaného článku. Protože chyba nahrazení lomenou čarou není větší než desetina milimetru, neliší se při zběžném pozorování tento model od přesného modelu úsečky, který bychom narýsovali „ručně“. Obr. 5 ukazuje několik písmen nakreslených strojem. Teprve v pětinasobném zvětšení na obr. 6 vidíme „zubatost“ těch úseček, které nemají základní směry.

V příštím pokračování se dozvíte, co všechno stroj „umí“ nakreslit.



FYZIKA

Existujú tachyóny? • MILAN MARČOK, VŠLD Zvolen

Newtonova mechanika, nazývaná dnes klasickou, vznikla z pozorovaní pohybov telies (dopravných prostriedkov, pohybov telies v gravitačnom poli Zeme, nebeských telies atď.), ktoré sa pohybujú pomerne malými rýchlosťami, omnoho menšími, ako je rýchlosť svetla vo vákuu $c = 2,997\,925 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Zákony pohybu telies, ktoré sa pohybujú rýchlosťami ľubovoľne veľkými stanovuje teória relativity vybudovaná Albertom Einsteinom. Opodstatnenosť tejto teórie po experimentálnej stránke bola opísaná aj v časopise „Rozhledy matematicko-fyzikální“ [1].

Z teórie relativity vyplýva, že hmotnosť telesa alebo častice m , závisí od rýchlosti v podľa vzťahu:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Pre $v = 0$ je $m = m_0$ a preto nazývame m_0 pokojovou hmotnosťou telesa alebo častice (ďalej len častice) [2]. Pri malých rýchlostiach vzhľadom k rýchlosti svetla niet praktického rozdielu medzi hmotnosťou za pohybu — pohybovou hmotnosťou a pokojovou hmotnosťou. Keď častica nadobúda rýchlosť porovnateľnú s rýchlosťou svetla, jej hmotnosť rastie s rastúcou rýchlosťou, najprv veľmi pomaly, potom stále rýchlejšie a to tým viac, čím viac sa približne rýchlosť častice rýchlosti svetla. Ak hmotnosť vzrastá, pri pôsobení stálej sily klesá zrýchlenie častice, čiže

jej rýchlosť rastie stále pomalšie. Z toho vyplýva dôležitý dôsledok: žiadnej častici nemožno udeliť rýchlosť svetla a tým menej túto rýchlosť prekročiť. Pre $v = 0$ rastie hmotnosť častice nad všetky hranice a pre $v > c$ je imaginárna (ak je nie pokojová hmotnosť $m_0 = 0$, ako je tomu u fotónov) [3].

Podľa teórie relativity súvisí hmotnosť m častice s jej energiou W podľa vzťahu:

$$W = m c^2 \quad (2)$$

Vzhľadom k (1) možno energiu častice vyjadriť vzťahom:

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3)$$

z čoho vyplýva, že častici urýchlenej na rýchlosť svetla vo vákuu musíme dať nekonečne veľkú energiu a pri väčšej rýchlosti, ako rýchlosť svetla energia (podobne ako hmotnosť) sa javí imaginárnou veličinou. Prirodzene, že s časticami o „imaginárnej hmotnosti“ resp. „imaginárnej energii“ fyzika neráta.

Napriek tomu sa v posledných rokoch táto otázka stala predmetom záujmu a priťahuje stále väčšiu pozornosť niektorých teoretických fyzikov [4]. Pred r. 1967 bola táto otázka diskutovaná viacmenej akademicky. V tomto roku G. Feinberg z Roskefellerovej univerzity New York uverejňuje obsiahly článok o teórii a problematike častíc pohybujúcich sa nadsvetelnou rýchlosťou v časopise *Physical Review*.

Pokúsme sa vyložiť túto problematiku primeraným spôsobom, ako to robí A. Tichomirov [5].

Predstavme si časticu, ktorej rýchlosť by bola väčšia než rýchlosť svetla. V tomto prípade pod odmocninou (3) dostávame záporné číslo. Predpokladajme, že naša hypotetická častica má imaginárnu pokojovú hmotnosť. (Pojem imaginárna pokojová hmotnosť znie trochu paradoxne. Nie je tomu veľa rokov, keď takým istým dojmom pôsobil predpoklad, že existujú materiálne častice s nulovou pokojovou hmotnosťou. Potvrdilo sa, že takéto častice existujú: fotón, neutríno.) Z matematiky komplexných čísel, na základe definície podielu komplexných čísel, možno jednoduchým spôsobom dokázať, že podiel dvoch rýdzoimaginárnych čísel je reálne číslo. Potom energia (3) ako podiel dvoch rýdzoimaginárnych veličín bude reálnou a teda ako hovoria teoretickí fyzici „principiálne pozorovateľnou veličinou“. Horná hranica rýchlosti pre takúto časticu neexistuje, čiže taká častica môže byť nekonečne rýchla. Častica s imaginárnou pokojovou hmotnosťou s rýchlosťou väčšou ako rýchlosť svetla nazývame tachyónmi (z gréckeho tachys, čiže rýchly). Na rozdiel od bežných častíc je ich rýchlosť ohraničená zdola — nemôže

byť menšia nežrýchlosť svetla. Preto má tachyón konečnú a reálnu energiu (a takú istú hybnosť), ako aj reálnu pohybovú hmotnosť

Možnosť existencie častíc s nadsvetelnou rýchlosťou nie je v rozpore so špeciálnou teóriou relativity a táto ju v podstate ani nevylučuje. Je zaujímavé, že už bolo zahájené experimentálne hľadanie tachyónov, zatiaľ však s negatívnym výsledkom.

Feinbergova teória nie je prijatá s veľkým ohlasom a na jej adresu sa ozvali kritické hlasy, poukazujúce na jej potiaže (napr. potiaže filozofického rázu u kauzality — príčinnosti). Mnohí vedci tvrdia, že častice s imaginárnou hmotnosťou nie sú lokalizovateľné. Sú však vedci, ktorí tejto teórii pripisujú význam. Nemecký fyzik Koy dokonca robí tachyóny zodpovednými za príčinu gravitácie.

Rozhodnúť sa dnes o opodstatnenosti existencie tachyónov, to by bolo veľmi unáhlené. Korene pravdivosti o ich existencii alebo neexistencii ukáže budúcnosť.

Literatúra:

- [1] Kolesnikov V., Zahejský J.: „Jak je to s experimentálním ověřením teorie relativity?“ Rozhledy matem.-fyz. 4, roč. 47 (1968—69), 234, 289.
- [2] Fyzika pre III. ročník Stredných všeobecnovzdelávacích škôl, 250.
- [3] Horák Z., Krupka F., Šindelář V.: Technická fyzika, 1101.
- [4] Fischer J.: Problém existence tachyonů, aktuality Čs. čas. fys., A 19 (1969), 496.
- [5] Tichomirov V.: „Sú tachyóny príčinou gravitácie“?, ZNANIJE—SILA, Moskva. Preklad uverejnený v Technických novinách č. 51—52, 1969.

Vedlejší jednotky

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

Mezinárodní výbor vah a měr, který je stálým orgánem Mezinárodní organizace měr a vah a jehož členy jsou význační vědečtí pracovníci ze řady zemí, konstatoval po jednání s příslušnou komisí ISO, že se doposud používají rozličné jednotky, které nepatří do SI. Tyto lze nazvat *vedlejší jednotky* (případně *mimosoustavové jednotky*). Podle charakteru těchto jednotek a jejich významu, rozdělil je zmíněný výbor do tří skupin.

- a) Jednotky, které lze (zatím bez omezení) používat spolu s SI;
- b) Jednotky, které mají být používány dočasně spolu s SI;
- c) Jednotky, jejichž používání spolu s SI se nedoporučuje.

Dnes se zmíním o vedlejších jednotkách ad a), které jsou natolik rozšířené a hrají tak význačnou úlohu, že mezinárodní výbor souhlasil

v r. 1969 s tím, aby byly nadále používány vedle příslušných jednotek SI, některé v běžné praxi, jiné ve speciálních oborech.

První z nich jsou tyto:

minuta	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
hodina	h	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
den	d	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$
stupeň (úhlový)	$^{\circ}$ (1°)	$1^{\circ} = (\pi/180) \text{ rad}$
minuta (úhlová)	$'$ ($1'$)	$1' = (1/60)^{\circ} = (\pi/10\,800) \text{ rad}$
vteřina (úhlová)	$''$	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000) \text{ rad}$
litr	l	$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
tuna	t	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$

Druhé z nich, důležité pro některé speciální obory jsou:

elektronvolt	eV	$1 \text{ eV} \doteq 1,602\,19 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
atomová		
hmotnostní jednotka	u	$1 \text{ u} \doteq 1,660\,53 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
astronomická jednotka	UA	$1 \text{ UA} = 149\,600 \cdot 10^6 \text{ m}$
parsec	pc	$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ UA} = 30\,857 \cdot 10^{12} \text{ m}$

Z uvedených jednotek značí *elektronvolt* energii, kterou získá elektron, projde-li potenciálním rozdílem 1 V ve vakuu.

Atomová hmotnostní jednotka se rovná 1/12 hmotnosti atomu nuklidu ^{12}C .

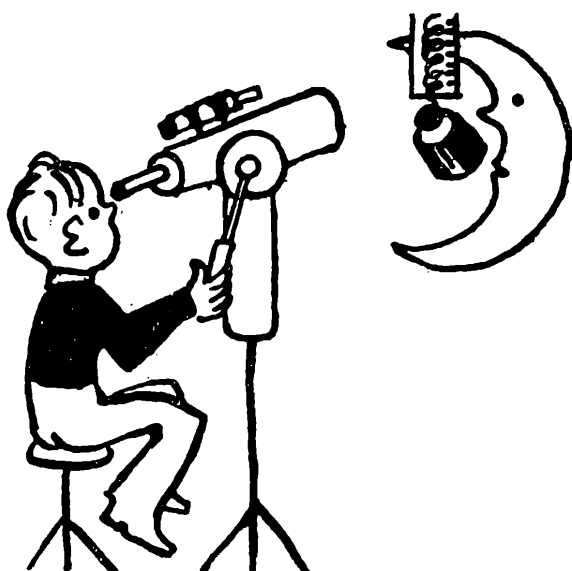
Astronomická jednotka vzdálenosti je délka poloměru nerušené oběžné kruhové dráhy nějakého tělesa se zanedbatelnou hmotností, pohybujícího se kolem Slunce úhlovou rychlostí 0,017 202 098 950 radiánu za den o 86 400 sekundách podle efemerid. V tabulce uvedená hodnota byla přijata Mezinárodní astronomickou unií. Někdy se používá též značky AU (např. v angličtině).

Jednotkou *parsec* rozumíme vzdálenost, ze které je astronomickou jednotku vidět v úhlu 1 vteřiny (název jednotky z „paralaxy sekundy“).

ŘEČENO JIŽ PŘED 2500 LETY

Ti, kdož mají vrozeno nadání pro matematiku, projevují obvykle vlohy ke všem vědám... Proto nesmí být tato věda omezována, nýbrž lidé i přirozenosti nejušlechtilejší musí se jí učit.

Platon



ASTRONOMIE

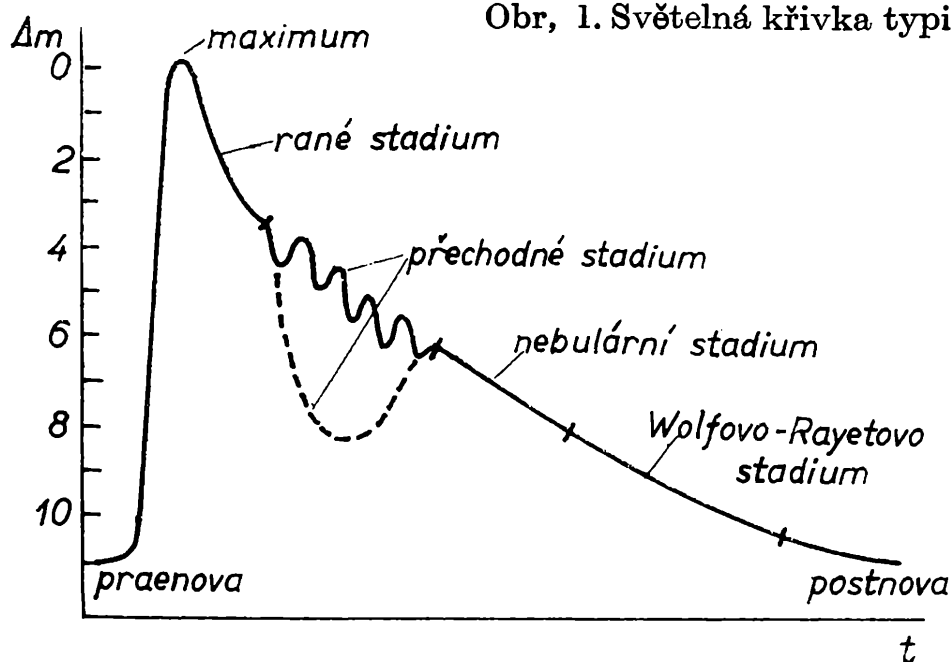
Expandující proměnné hvězdy

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ – RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Zvláštní skupinu proměnných hvězd tvoří hvězdy, jejichž jasnost náhle vzroste o deset i více hvězdných velikostí. Tyto hvězdy nazýváme expandující proměnné hvězdy a patří k nim *novy*, *rekurentní novy* a *supernovy*. Název „nova“ vznikl ve středověku; před vzplanutím byly tyto hvězdy tak slabé, že je nebylo možné pozorovat a v důsledku toho vznikla představa, že se na obloze neočekávaně objevila nová hvězda, která tam předtím neexistovala.

Před vzplanutím má nova prakticky konstantní hvězdnou velikost (v tomto stadiu se označuje jako *praenova*). Vzplanutí novy nelze předvídat, nastane zcela neočekávaně a probíhá velmi rychle: během jednoho až několika dní se jasnost novy zvýší v průměru o 10^m až 16^m , což znamená, že svítivost hvězdy vzroste 10 000krát až $2,5 \cdot 10^6$ krát. Pak se jasnost hvězdy opět snižuje, tento pokles je však mnohem pomalejší a do původní hvězdné velikosti se hvězda vrátí za několik let až desítek let (pak se označuje jako *postnova*). Podle toho, jak rychle probíhá pokles jasnosti po vzplanutí, dělíme novy na tři skupiny: rychlé, pomalé a velmi pomalé. U rychlých nov klesne po maximu jasnost o 3^m v době kratší než 100 dní, u pomalých v době delší než 150 dní a velmi pomalé novy setrvávají v jasnosti blízké maximu i po několik let. Na obr. 1 je nakreslena světelná křivka typické novy. Na svislé ose je vyznačena změna jasnosti Δm a na vodorovné ose čas t (protože časový průběh

Obr. 1. Světelná křivka typické novy.



není u všech nov stejný, je tato osa bez dělení). Na světelné křivce rozlišujeme tato stadia: rané — krátce po maximum, kdy ve spektru hvězdy pozorujeme široké emisní čáry s posunutými absorpčními složkami, což svědčí o velmi rychlé expanzi vnějších vrstev hvězdy, přechodné stadium — hvězdná velikost u některých nov kolísá v intervalu několika desetin hvězdné třídy, u jiných dochází k přechodnému hlubokému snížení jasnosti, nebulární stadium — spektrum novy připomíná spektrum plynných mlhovin a konečně stadium Wolfovo-Rayetovo — spektrum novy se podobá spektru velmi žhavých Wolfových-Rayetových hvězd. Před výbuchem i po něm se novy jeví jako trpasličí hvězdy, ale v maximum se podobají veleobrům spektrálních tříd A až F .

Během výbuchu se ve hvězdě uvolní nepředstavitelně velká energie, která se odhaduje na 10^{38} J až 10^{40} J, což odpovídá energii, kterou by Slunce vyzářilo za deset tisíc až milión roků. Při výbuchu prudce vzroste průměr novy, její vnější vrstvy se rozpínají a vzápětí po výbuchu se od novy oddělí část atmosféry (asi tisícina hmotnosti Slunce), která se rozšiřuje rychlostí dosahující až 2000 km s^{-1} a postupně vytváří kolem novy mlhovinu. Tyto mlhoviny byly kolem některých nov skutečně pozorovány, ovšem po určité době se následkem rychlého rozšiřování mlhovina rozplyne v okolním prostoru.

V naší Galaxii bylo dosud pozorováno asi 150 nov, některé údaje o sedmi z nich jsou v tab. I. Každoročně se pozorují průměrně 2 novy a odhaduje se, že v Galaxii vzplane asi 40 nov za rok. Protože průměrná absolutní hvězdná velikost nov v maximum je kolem -7^M , můžeme vzplanutí nov pozorovat i v sousedních galaxiích. V nejbližší spirální galaxii M 31 v souhvězdí Andromedy jich bylo pozorováno asi 100, v ostatních galaxiích celkem asi 50.

Tabulka I — Některé novy

Nova	Rok vzpla- nutí	Hvězdná velikost			Ampli- tuda
		prae- nova	v ma- ximu	post- nova	
N Persei (GK Per 2)	1901	13,5 ^m	0,2 ^m	13,3 ^m	13,3 ^m
N Aquilae (V 603 Aql 3)	1918	10,6	−1,1	10,6	11,7
N Cygni (V 476 Cyg 3)	1920	>15	2,0	16,1	14
N Pictoris (RR Pic)	1925	12,7	1,2	9	11,5
N Herculis (DQ Her)	1934	14,3	1,4	13,8	12,9
N Lacerta (CP Lac)	1936	15,3	2,1	14,9	13,2
N Puppis (CP Pup)	1942	17	0,2		16,8

Tabulka II — Rekurentní novy

Rekurentní nova	Vzplanutí v letech	Střední perioda [rok]	Hvězdná velikost		Ampli- tuda
			vmax.	v min.	
U Scorpii	1863, 1906, 1936	37	8,9 ^m	17,6 ^m	8,7 ^m
T Coronae Bor.	1866, 1946	79	1,9	10,6	8,7
T Pyxidis	1890, 1902, 1920, 1944	18	7,1	13,8	6,7
RS Ophiuchi	1898, 1933, 1958	35	4,3	11,6	7,3
WZ Sagittae	1913, 1946	32	7,3	15,8	8,5
V 1017 Sagittarii	1901 ?, 1919	17	7,2	14,2	7,0

Mezi objevitele nov se v říjnu 1968 zařadil i československý astronom dr. Luboš Kohoutek, který objevil novu v souhvězdí Lištičky (tato nova je označena jako N Vulpeculae 1968 — 2). V době objevu byla nova 13^u a dodatečně se zjistilo, že maxima 9^u dosáhla asi v polovině července 1968.

V souvislosti s pozorováním nov se naskytá otázka, zda hvězda vybuchne jen jednou, anebo zda se její vzplanutí opakují. Ve prospěch teorie o tom, že se výbuchy opakují, svědčí pozorování tzv. *rekurentních nov*. Označujeme tak hvězdy, u nichž byla pozorována již alespoň dvě vzplanutí a známe jich zatím šest (tab. II). Srovnáme-li údaje v tab. II s údaji v tab. I, vidíme, že všechny rekurentní novy mají mnohem menší amplitudu než normální novy. Někteří astronomové soudí, že všechny novy jsou rekurentní, avšak doba mezi dvěma po sobě následujícími vzplanutími je tím delší, čím je větší amplituda světelných změn a proto jsme opakovaná vzplanutí zajistili zatím jen u několik hvězd. U normálních nov s amplitudou 12^m se odhaduje doba mezi vzplanutími na 5000 roků.

Tabulka III — Supernovy v Galaxii

Supernova v souhvězdí	Rok vzplanutí	Galaktické souřadnice		Hvězdná velikost v maximu
		l^{II}	b^{II}	
Sn Taurus („Krabí mlhovina“)	1054	184°	−5°	−6 ^m
SN Cassiopeia (T. Brahe)	1572	120	+2	−4,1
SN Ophiuchus (J. Kepler)	1604	4	+6	−2,2

Supernovy se od nov liší především mnohem větší amplitudou a jasností v maximu. Jasnost supernovy vzroste při výbuchu o 19 i více hvězdných tříd a absolutní hvězdná velikost v maximu je kolem −15^M. Výskyt supernov je mnohem méně častý než výskyt normálních nov. V naší Galaxii byly dosud pozorovány pouze tři supernovy, všechny ještě před vynalezením dalekohledu: v r. 1054 v souhvězdí Býka, v r. 1572 v souhvězdí Kasiopeje a v r. 1604 v souhvězdí Hadonoše (tab. III).

O vzplanutí supernovy v r. 1054 v Býku svědčí zápisy v čínských a japonských kronikách; jako stopa po ní zůstala známá „Krabí mlhovina“, kterou dnes pozorujeme jako objekt 1 zdánlivé hvězdné velikosti 8,4^m. Nynější průměr Krabí mlhoviny je 150" a rozpíná se rychlostí asi 20" za století. Předpokládáme-li, že tato rychlost byla od začátku konstantní, můžeme z rozměrů a rychlosti vypočítat přibližně dobu, kdy došlo k výbuchu supernovy. Dostáváme tak asi rok 1100, což se vcelku dobře shoduje s údaji čínských a japonských análů.

Vzplanutí supernovy v souhvězdí Kasiopeje v r. 1572 podrobně popsal Tycho Brahe. V maximu dosáhla −4,1^m, takže zářila na obloze jako Venuše v největší jasnosti. Po 17 měsíců byla viditelná pouhým okem. Supernovu v souhvězdí Hadonoše pozoroval v r. 1604 Jan Kepler. V maximu dosáhla hvězdné velikosti −2,2^m, byla tedy jasnější než Sirius.

Od Keplerových dob v naší Galaxii supernova již nevzplanula, byly však pozorovány supernovy v jiných galaxiích. První supernova, pozorovaná moderními metodami, byla zjištěna v r. 1885 ve spirální galaxii M 31 v souhvězdí Andromedy. V maximu dosáhla zdánlivé hvězdné velikosti 6^m, přičemž celá galaxie M 31 má zdánlivou hvězdnou velikost 4,8^m. Supernova měla tedy jen asi třikrát menší svítivost než celá hvězdná soustava M 31.

Nejasnější dosud známá supernova byla pozorována v r. 1937 v galaxii označené IC 4182. Zdánlivá hvězdná velikost této supernovy byla v maximu 8,2^m, absolutní hvězdná velikost se odhaduje na −16,6^M.

V maximu zářila tato hvězda stokrát jasněji než celá galaxie, v níž vzplanula; za 25 dní vyzářila tolik energie, jako naše Slunce za milión let.

Při výbuchu vyzáří supernova energii asi 10^{43} J a odvrhne značnou část své látky, jejíž hmotnost je srovnatelná s hmotností Slunce. Po výbuchu se stává hvězda intenzivním zdrojem radiového i kosmického záření. Krabí mlhovina je jedním z nejmohutnějších zdrojů radiového záření v Galaxii.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Fyzika

1. Stanovte práci potřebnou k vyfouknutí mydlinové bubliny o průměru $d = 20$ cm. Povrchové napětí vody je $\sigma = 4,0 \cdot 10^{-2}$ N m⁻¹.

(Došlo 18 řešení.)

Jiří Machalický

Podle řešení Jaroslava Švrčka, 3. C G Přerov

V mýdlově bublině je akumulována povrchová energie rovná dvojnásobku povrchu bubliny (vnitřní a vnější blána) násobenému plošnou hustotou povrchové energie. Hledaná práce je tedy

$$A = 2 \cdot 4\pi r^2 \cdot \sigma = 8\pi r^2 \sigma = 2\pi d^2 \sigma.$$

K témuž výsledku dojdeme i jinou úvahou. Myslíme-li si bublinu vyfouknutou na libovolný poloměr $x < r$, je tlak p vzduchu, působícího uvnitř bubliny, rovný kapilárnímu tlaku p_k

$$p = p_k = \frac{4\sigma}{x}.$$

K zvětšení poloměru o nepatrnou hodnotu dx se spotřebuje práce

$$dA = F dx = 4\pi x^2 \frac{4\sigma}{x} dx,$$

takže k vyfouknutí bubliny průměru $d = 2r$ je třeba celkem práce

$$A = \int dA = 8\pi \sigma \int x dx = 8\pi \sigma r^2 = 2\pi d^2 \sigma$$

Číselný výpočet: $A = 2\pi \cdot 0,04 \cdot 0,2^2 \doteq 0,010$ J.

2. Stanovte zvýšení teploty kapky rtuti, která vznikla spojením dvou stejných kapek o poloměru $r = 1$ mm. Ztráty tepla zanedbejte.

(Došlo 16 řešení)

Jiří Machalický

Podle řešení Josefa Vermacha, SPŠ Kutná Hora

Ve volném povrchu kapaliny je akumulována energie, jejíž velikost můžeme určit jako součin plochy S povrchu a plošné hustoty energie (rovné číselně povrchovému napětí kapaliny vzhledem k prostředí, které je nad povrchem). Rozprášíme-li kapku kapaliny, o níž předpokládáme, že má tvar koule poloměru r na n stejných kapiček, zvětší se celkový povrch a tedy i povrchová energie rozprášených kapiček je větší než energie původní kapky. Zanedbáme-li veškeré ztráty energie, je zřejmé, že rozdíl energie vzniklých kapiček a energie původní kapky se projeví ochlazením kapaliny. Naopak spojením drobných kapiček v jednu větší se teplota kapaliny zvýší.

Poloměr R kapky určíme z rovnosti objemů

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n \frac{4}{3}\pi r^3$$

a odtud

$$R = r\sqrt[3]{n}$$

Hledané zvýšení Δt teploty kapaliny určíme podle výše uvedené úvahy z rovnice

$$4\pi (nr^2 - R^2) \sigma = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c \Delta t,$$

v níž σ je povrchové napětí, ρ hustota kapaliny a c její specifické teplo. Po dosazení za R a snadné úpravě

$$\Delta t = \frac{3}{n} (n - n^{\frac{2}{3}}) \frac{\sigma}{r \rho c}$$

Pro rtuť ($\sigma = 0,451$ N m⁻¹ = 0,451 J m⁻¹, $\rho = 13 \cdot 550$ kg m⁻³, $c = 140$ J . kg⁻¹ °C⁻¹) a $n = 2$, je

$$\Delta t \doteq 1,63 \cdot 10^{-4} \text{ °C}.$$

3. Motocyklista, jenž se rozjíždí z klidu s konstantním zrychlením, projel mezi místy, jejichž vzdálenost je $AB = s_0$, v době t_0 , při čemž v místě B nabyl rychlosti n -krát větší než měl v místě A . Dokažte, že jeho zrychlení je dáno vztahem

$$a = \frac{2 s_0 (n - 1)}{t_0 (n + 1)}.$$

Určete rychlosti (v_1 , v_2) a okamžiky (t_1 , t_2) průjezdu oběma místy a vzdálenost (s_1) místa A od startu. Řešte nejprve obecně a vyjádřete

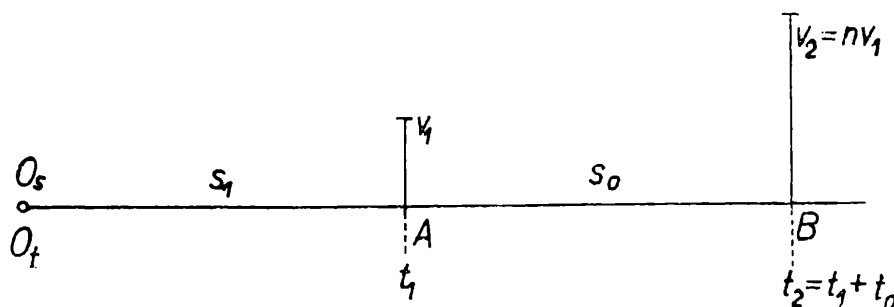
hledané veličiny ($a, v_1, v_2, t_1, t_2, s_1$) pomocí veličin daných (tj. s_0, t_0, n) a teprve potom vyčíslete pro dané zvláštní hodnoty $s_0 = AB = 125 \text{ m}$, $t_0 = 5 \text{ s}$, $n = 3$.

(Došlo 21 řešení)

Evžen Říman

Řešil Daniel Dvorský, 3a, G Vysoké Mýto

Důkaz: Zadání úlohy obsahuje vztahy (viz náčrt situace)



$$v_2 = n v_1 \quad (1)$$

$$t_2 = t_1 + t_0 \quad (2)$$

Vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb dají vztahy:

$$v_2 = v_1 + a t \quad (3a)$$

$$v_1 = a t_1 \quad (3b)$$

$$v_2 = a t_2 \quad (3c)$$

$$s_1 = OA = \frac{1}{2} a t_1^2 \quad (4)$$

$$s_0 = v_1 t_0 + \frac{1}{2} a t_0^2 \quad (5)$$

kde v_1 je dosažená rychlost v bodě A ; $t_0 = t_2 - t_1$ je doba pohybu po dráze $AB = s_0$.

Dosadíme (1) do (3a) a vyjádříme ze vzniklé rovnice veličinu v_1 :

$$v_1 = \frac{a t_0}{n - 1} \quad (3d)$$

Dosazením (3d) do (5) $\Rightarrow$

$$s_0 = \frac{a t_0}{n - 1} \cdot t_0 + \frac{1}{2} a t_0^2 = a t_0^2 \left(\frac{1}{n - 1} + \frac{1}{2} \right) = a t_0^2 \frac{n + 1}{2(n - 1)} \quad (5a)$$

Ze vztahu (5a) vyjde žádané zrychlení

$$a = \frac{2 s_0 (n - 1)}{t_0^2 (n + 1)} \quad (6)$$

což se mělo dokázat.

Určování ostatních žádaných veličin:

Dosazením (6) do (3a) $\Rightarrow$

$$v_1 = a \frac{t_0}{n-1} = \frac{2s_0(n-1)}{t_0^2(n+1)} \cdot \frac{t_0}{n-1} = \frac{2s_0}{t_0(n+1)} \quad (7)$$

(7) dosazeno do (1) dá

$$v_2 = \frac{2ns_0}{t_0(n+1)} \quad (8)$$

Vztah (6) dosazen do (3a) dá po úpravě

$$t_1 = v_1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{2s_0}{t_0(n+1)} \cdot \frac{t_0^2(n+1)}{2s_0(n-1)} = \frac{t_0}{n-1} \quad (9)$$

Dosazením vztahu (9) do (2) $\Rightarrow$

$$t_2 = t_1 + t_0 = \frac{t_0}{n-1} + t_0 = \frac{nt_0}{n-1} \quad (10)$$

Dosazením (6) do (4) obdržíme

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s_0(n-1)}{t_0^2(n+1)} \cdot \frac{t_0^2}{(n-1)^2} = \frac{s_0}{n^2-1} \quad (11)$$

Dimenzionální kontrola není potřebná, neboť všechny uvedené vztahy jsou zřejmě dimenzionálně správné.

4. Ťažké delo vrhá střely o hmotnosti $m = 636$ kg, které opouštějí hlaveň rychlostí $v = 950$ m s⁻¹. K tomuto urýchlňování je potřebný pracovní výkon $P = 10\,830$ miliónov wattov. (Trenie a odpor prostredia neuvažujeme.) Dokážte, že hlaveň má dĺžku (s), pre ktorú platí — ak predpokladáme pohyb rovnomerne zrýchlený — vzorec

$$s = \frac{m v^3}{4P}.$$

Určete zrýchlenie (a) v hlavni, čas (t) preletu hlavňou a dĺžku (s) hlavne. Počítajte najprv všeobecne tak, že všetky hľadané veličiny (tj. a , s , t) vyjadríte pomocou daných (tj. m , v , P) a až potom vyčísľíte dosadením zvláštnych hodnôt!

(Došlo 22 riešení)

Evžen Říman

Riešil Anton Chomič, 3. g SPŠ elektrotechnická v Košiciach

Dôkaz:

Výkon sa určí vzťahom

$$P = \frac{A}{t} \quad (1) \Rightarrow \quad t = \frac{A}{P} \quad (1a)$$

Práca zrychľujúcej sily, ktorá sa rovná kinetickej energii strely, je

$$A = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$$

Pohyb je rovnomerne zrýchlený, preto platia vzťahy

$$v = a t \quad (3) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v}{t} \quad (3a)$$

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (4)$$

Vzťah (4) upravíme pomocou (3) takto:

$$s = \frac{1}{2} a t \cdot t = \frac{1}{2} v t \quad (4a) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v} \quad (4b)$$

(4a) upravíme pomocou (1a) a (2) na

$$s = \frac{1}{2} v t = \frac{1}{2} v \cdot \frac{A}{P} = \frac{1}{2} \frac{v}{P} \cdot \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m v^3}{4 P} \quad (5)$$

čím je dôkaz prevedený.

Obečné riešenie. Čas t určíme dosadením (5) do (4b):

$$t = 2s \cdot \frac{1}{v} = 2 \cdot \frac{m v^3}{4 P} \cdot \frac{1}{v} = \frac{m v^2}{2 P} \quad (6)$$

Zrýchlenie a určíme dosadením (6) do (3a)

$$a = v \cdot \frac{1}{t} = v \cdot \frac{2 P}{m v^2} = \frac{2 P}{m v} \quad (7)$$

Dimenzionálnu skúšku urobíme súčasne s dosadzovaním zadaných hodnôt do vzťahov (5), (6) a (7), pričom užijeme identitu

$$W = \text{watt} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3} = \text{J s} = \text{N m s}$$

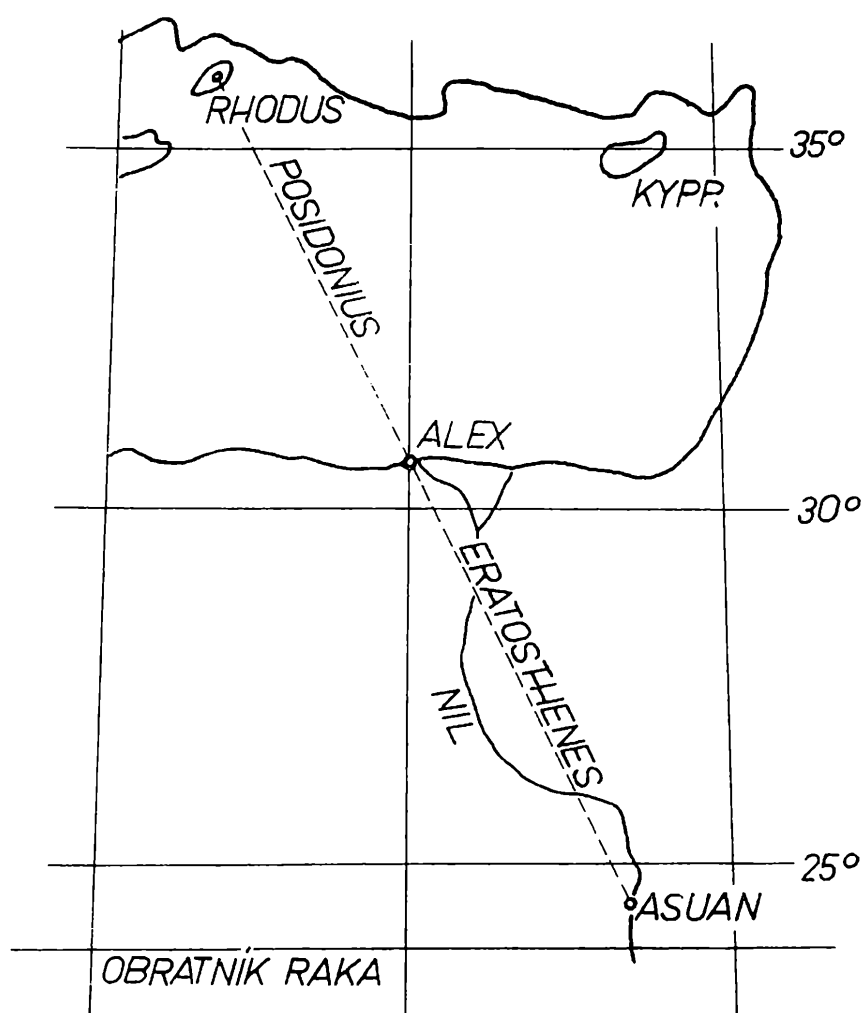
$$s = \frac{636 \text{ kg} \cdot 950^3 \text{ m}^3 \text{s}^{-3}}{4 \cdot 10,83 \cdot 10^9 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-3}} \doteq 12,6 \text{ m}$$

$$t = \frac{636 \text{ kg} \cdot 950^2 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}}{2 \cdot 10,83 \cdot 10^9 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-3}} \doteq 2,65 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

$$a = \frac{2 \cdot 10,83 \cdot 10^9 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-3}}{636 \text{ kg} \cdot 960 \text{ m s}^{-1}} \doteq 3,6 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-2}$$

První způsoby měření Země

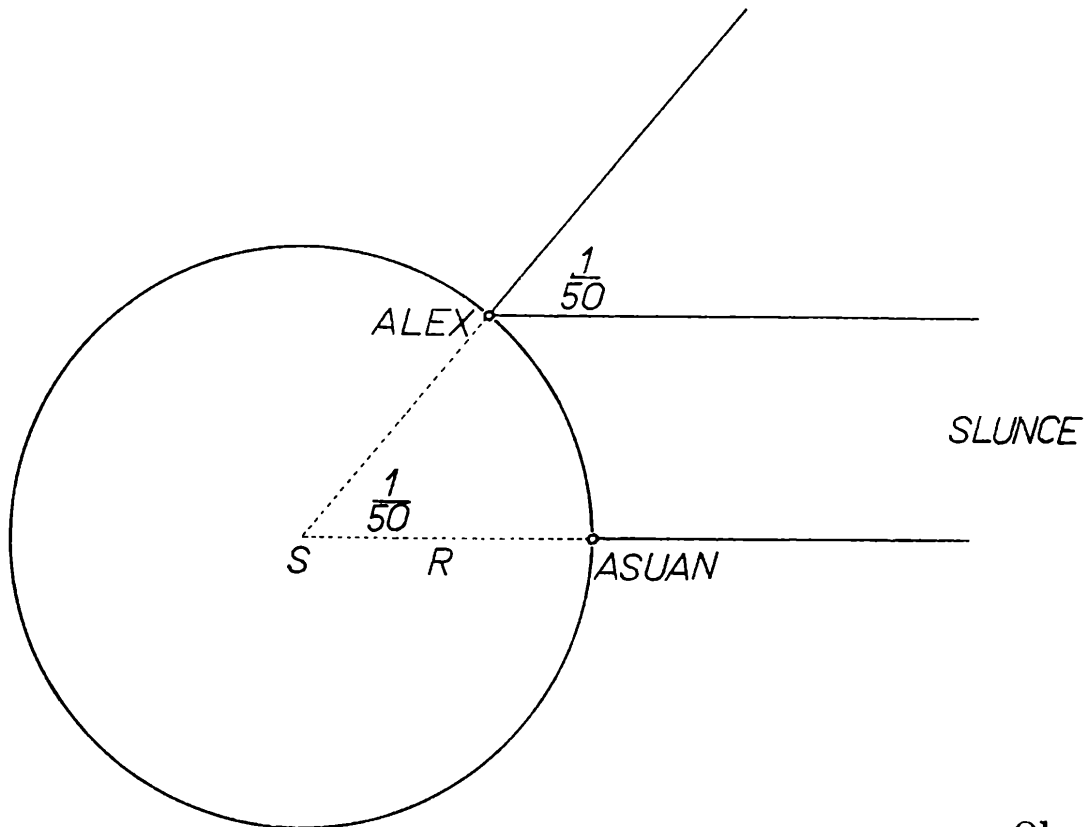
Jak známo, první názor na tvar naší Země byl, že Země je jakási placka obtékaná ze všech stran moři a oceány. Pythagoras (asi 580 až 500 př. Kr.) a po něm Aristoteles (384—322 př. Kr.) prohlásili, že Země má tvar koule. Vystoupila tedy přirozeně otázka, jak určit poloměr



Obr. 1

Zeměkoule. První, o němž je historicky známo, že se pokusil o určení rozměrů Zeměkoule je Eratosthenes z Kyreny (276—194 př. Kr.). Další, kdo určil rozměry Zeměkoule byl Posidonius (135—51 př. Kr.). Všimněme si v tomto článku blíže postupu obou matematiků.

Eratosthenes užil několika poznatků. Všiml si, že v horním Egyptě v Asuánu (leží v blízkosti obratníku Raka), v době letního slunovratu, svítí slunce až na dno hlubokých studní, což znamená, že jeho paprsky dopadají na Zemi kolmo. Dále zjistil, že v tutéž dobu se sluneční paprsky v Alexandrii podstatně odklánějí od svislice. Pomocí vrženého stínu svislé tyče změřil odklon na $\frac{1}{50}$ plného úhlu. Na základě délky denních pochodů, které konaly karavany směřující údolím řeky Nilu z Asuánu do Alexandrie, odhadl vzdálenost těchto míst na 5000 stadií. Stadion znamenal původně délku dráhy na olympijském závodišti, a stal se zá-



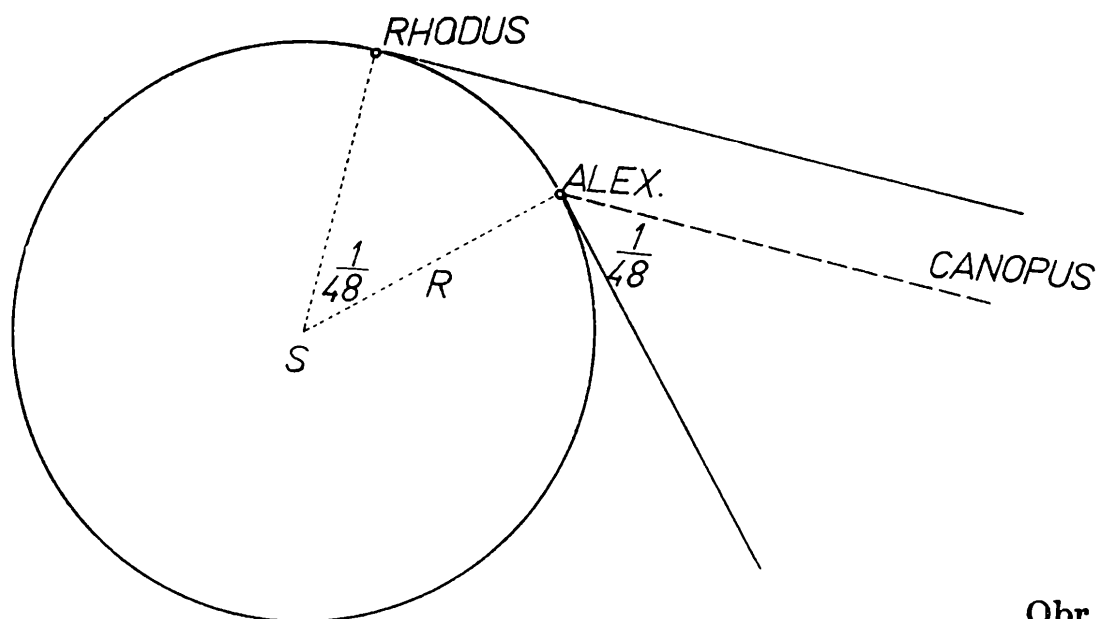
Obr. 2

kladní řeckou měrou. Stadion je přibližně 185 m. Vzdálenost Asuán—Alexandrie odhadl tedy Eratosthenes zhruba na 925 km.

Dále Eratosthenes uvažoval takto (obr. 2): Vzal hlavní kružnici Zeměkoule, která prochází Asuánem a Alexandrií. Vzhledem k velké vzdálenosti Země a Slunce je možno považovat sluneční paprsky, které dopadají na Zemi v Asuánu a v Alexandrii za rovnoběžné. Úhel mezi svislicí a slunečními paprsky v Alexandrii, který Eratosthenes určil na $\frac{1}{50}$ plného úhlu se objeví rovněž mezi zemskými poloměry Asuánu a Alexandrie. Nyní použil Eratosthenes známého vzorce pro výpočet obvodu kružnice: $O = 2\pi R$. Položí-li se $2\pi \doteq 6,3$ a uváží-li se, že délka oblouku Asuán, Alexandrie, který Eratosthenes odhadl na 5000 stadií, je roven $\frac{1}{50}$ obvodu celé kružnice, pak z rovnice $5000 = 6,3 R$ 50 vychází poloměr R zhruba 39 700 stadií, což je 7350 km. To je asi o 1000 km více

než ve skutečnosti. Chyba je způsobena pochopitelně odhadem vzdálenosti Asuán—Alexandrie, která je ve skutečnosti necelých 800 km a nikoliv 925 km, jak ji odhadl Eratosthenes. Přesto je Eratosthenův výpočet vynikající a jeho myšlenka zůstala základní myšlenkou geometrických metod pro určování rozměrů Země do dnešní doby.

O Eratosthenovi je možno říci, že byl velice všestranný učenec. Byl vynikajícím matematikem. Jeho jméno se dodnes v matematice zachovalo v pojmu Eratosthenovo síto, což je postup na určení prvočísel v řadě přirozených čísel. Byl znamenitý básník. Z jeho básní se uvádí



Obr. 3

epos Hermés a báseň Erigoné. Napsal celou řadu filosofických spisů. A ačkoliv byl v tolika směrech výborný, byl v každém oboru vždy na druhém místě za skutečným odborníkem. V matematice to bylo za Archimedelem. Proto mu bylo dáváno příjmení „beta“.

Eratosthenes prožil skoro celý život v Alexandrii, kde byl ředitelem výtečné alexandrijské knihovny. Později prý byl z knihovny vyhnán a zemřel v úplné chudobě.

Podobně jako Eratosthenes postupoval při určování rozměrů Země Posidonius. Pro svá měření použil hvězdy Canopus, který je po Siriu nejjasnější hvězdou, ovšem viditelnou pouze na jižní polokouli. Při kulminaci je z ostrova Rhodu Canopus vidět právě na horizontu, kdežto v jižněji položené Alexandrii se jeví o $\frac{1}{48}$ plného úhlu nad horizontem. Z obr. 3 se snadno nahlédne, že tentýž úhel svírají zemské poloměry Rhodu a Alexandrie. Z délky a rychlosti plavby odhadl Posidonius vzdálenost Rhodu a Alexandrie rovněž na 5000 stadií. Je tedy zřejmé, že výpočty obou matematiků se liší velice nepatrně.

Zpracováno na základě rukopisu Z. Nádeníka: „Geodezie a geometrie“

Kamil Maleček, Praha

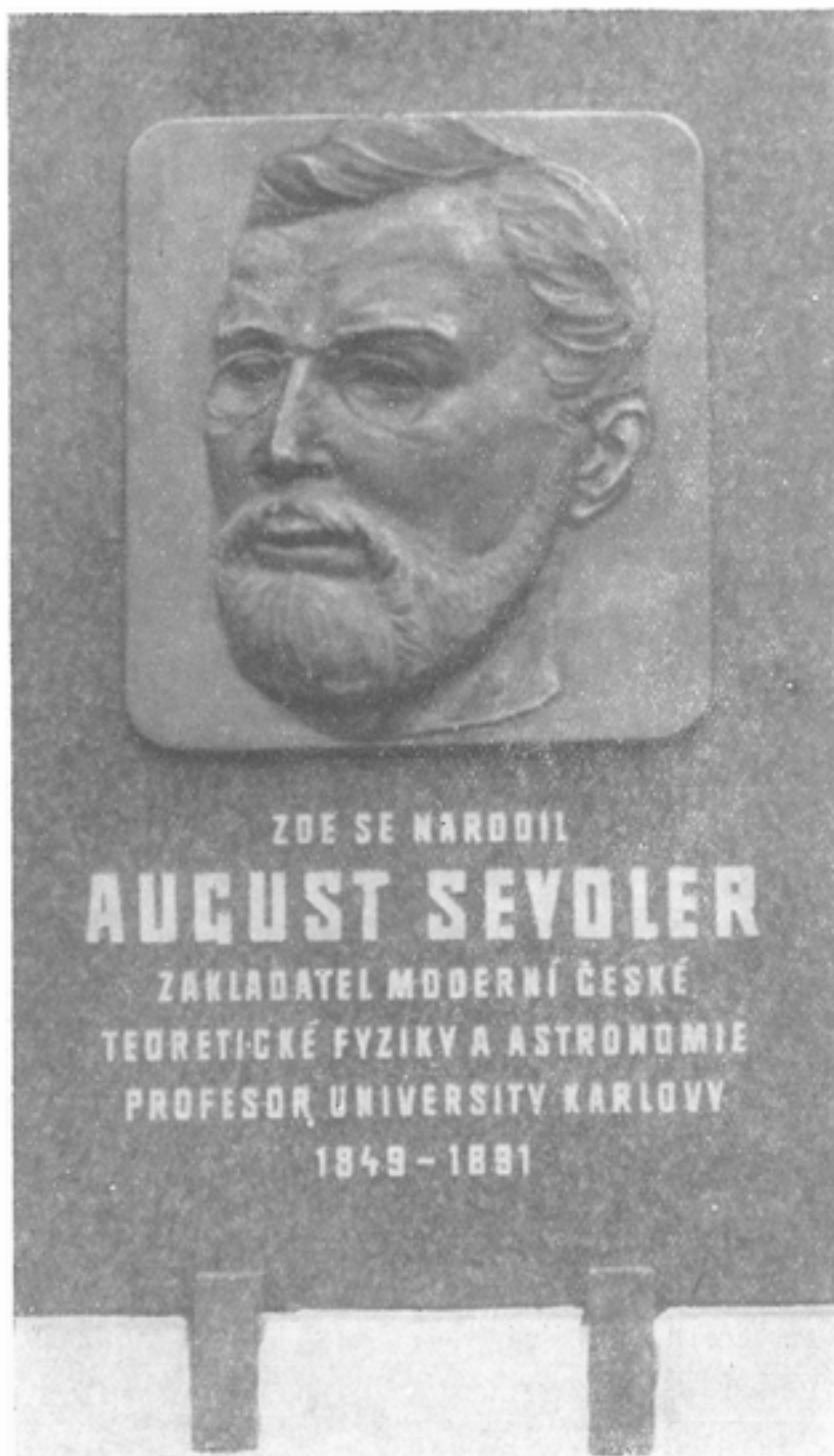
Vzpomínka na prof. dr. A. Seydlera

V roce 1891, 22. června, zemřel profesor teoretické fyziky a astronomie University Karlovy, dr. *August Jan Bedřich Seydler*. K uctění jeho památky byla na rodném domě prof. Seydlera v Žamberku odhalena 3. října 1971 pamětní deska, jejímiž autory jsou *F. Šašek* a *J. Merganc*. Na slavnostním shromáždění promluvili o životě a díle prof. Seydlera zástupci University Karlovy a Čs. akademie věd doc. dr. *Matyáš*, prof. dr. *Guth* a prof. dr. *Valenta*. Oslavy uspořádal Městský národní výbor v Žamberku ve spolupráci s orgány Národní fronty pod záštitou Jednoty československých matematiků a fyziků, Československé astronomické společnosti při ČSAV a Matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy v Praze.

Prof. dr. A. Seydler se narodil 1. června 1849 v Žamberku v domě na Mírovém náměstí č. 3. V roce 1867 složil s vyznamenáním maturitní zkoušku na piaristickém gymnasiu v Praze a začal studovat matematiku a fyziku, později ještě astronomii a filosofii na filosofické fakultě UK v Praze. O rok později byl zvolen jednatelem Jednoty českých matematiků a v r. 1871 promován na doktora filosofie. Docentem pro české přednášky z teoretické fyziky byl jmenován v r. 1872 a v r. 1885 řádným profesorem teoretické fyziky a astronomie na Universitě Karlově v Praze. V roce 1890 byla podle návrhů prof. Seydlera začata výstavba astronomického ústavu, ale o rok později, ve věku 42 let, prof. Seydler umírá 22. června 1891 v Praze.

Dílo prof. dr. A. Seydlera je obsáhlé; připomeňme zejména jeho trojdílný spis *Základové teoretické fyziky*, které bylo prvním českým spisem v tomto oboru (třetí díl vyšel až po Seydlerově smrti v úpravě prof. *Kolářka* a prof. *Strouhala*). Vědecké práce prof. Seydlera byly zaměřeny především na problémy kosmické mechaniky a byly uveřejněny v zahraničních i domácích vědeckých časopisech. Pro své zásluhy o rozvoj teoretické fyziky a astronomie byl prof. Seydler zvolen roku 1884 řádným členem Královské společnosti nauk a r. 1889 řádným členem České akademie pro vědu, slovesnost a umění. O tom, jak si Seydlera cenili jeho současníci, podávají nejlepší svědectví slova, která nad jeho rakví pronesl známý český lékař, prof. dr. E. Albert: „... Poznal jsem, že je Seydler jedním z nejhlubších duchů v Čechách a jedním ze srdcí nejšlechetnějších. Potomci naši budou dobře věděti, kdo jsi byl a kde jsi spatřil světlo světa tohoto...“

RNDr. Miroslava Široká



Obr. 1. Pamětní deska prof. dr. A. Seydlera v Žamberku. Autory desky jsou F. Šašek a J. Merganc. — Foto Jiří Merganc.

podle J. Stehna z II. F gymnasia W. Piecka v Praze. Došla 2 řešení.

Úloha nás přivádí k řešení soustavy

$$29z - 8y = 1971, \quad (1)$$

$$x^2 - 53x + 12y + 8z < 0, \quad (2)$$

kde x, y, z jsou přirozená čísla. Nejprve řešíme diofantickou rovnici (1). Jejím řešením je

$$y = 29t - 250, \quad z = 8t - 1.$$

Z první rovnice vyplývá

$$29t > 250, \text{ tj. } t > 8 \frac{18}{29} \quad (3)$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do rovnice

$$x^2 - 53x + 12y + 8z = 0$$

a dostaneme

$$x^2 - 53x + (412t - 3008) = 0 \quad (4)$$

Aby tato rovnice měla reálné řešení, musí být diskriminant D nezáporný, tj.

$$D = 14\,841 - 1648t \geq 0$$

z čehož

$$t \leq 9 \frac{9}{1648}$$

Porovnáním s (3) máme

$$t = 9$$

a potom

$$y = 11, \quad z = 71.$$

Rovnice (4) se dá pak psát

$$x^2 - 53x + 700 = 0$$

$$(x - 25)(x - 28) = 0$$

Nerovnice (2) se dá tudíž upravit na tvar

$$(x - 25)(x - 28) < 0$$

a odtud je patrné, že má dvě různá řešení

$$x_1 = 26, \quad x_2 = 27.$$

Řešením příkladu jsou data dnů voleb:

26. 11. 71; 27. 11. 71.

Záhadné telefonné číslo

(Riešenie)

α) Označenie: A , B sú telefonné čísla pánov Absolóna resp. Berzélie; K je prirodzené číslo (> 1) deliteľné 4-mi; platí teda

$$B = KA = 4kA \quad (1)$$

Poradie číslic (v matematicky zápornom smysle) je na číselnici

našej	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
švédskej	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	(2)

β) Snadnou úvahou zistíme, že prvá číslica čísla A musela byť 0, takže číslo B začína číslicou 9; len tak môže platiť podmienka (1).

γ) Preto bude číslo pana Absolóna

$$A = 10^5 \cdot 0 + 10^4 x_4 + 10^3 x_3 + 10^2 x_2 + 10^1 x_1 + x_0, \quad (3)$$

kde ktorákoľvek z číslic $x_4, x_3, x_2, x_1, 0$ sa smie vyskytnúť iba raz. Tomu odpovedá číslo pana Berzelia

$$B = 10^5 \cdot 9 + 10^4 (x_4 - 1) + 10^3 (x_3 - 1) + 10^2 (x_2 - 1) + 10^1 (x_1 - 1) + x_0 = A + 88889 \quad (4)$$

kde sme násobením odstránili zátvorky, slúčili a dosadili A .

Dosadením (4) do vzťahu (1) $\Rightarrow$

$$A + 88889 = 4kA \quad \text{takže} \quad A = \frac{88889}{4k - 1} \quad (5)$$

kde k je prirodzené číslo.

δ) Stanovme hornú medzu intervalu, v ktorom sa môže nachádzať číslo k . Najmenšie možné číslo A , ktoré začína nulou (viď odst. β) je $A_{\min} = 012345$, čomu odpovedá $B_{\max} = 987654$; ich podiel dá najvyššiu možnú hodnotu čísla K . V ďalšom označme celistvú hodnotu čísla pomocou hranatej zátvorky. Je teda

$$k_{\max} = \left[\frac{1}{4} K_{\max} \right] = \left[\frac{1}{4} \frac{B_{\max}}{A_{\min}} \right] = \left[\frac{987654}{4 \cdot 12345} \right] = 20.$$

Z toho $\Rightarrow$

$$1 \leq k \leq 20 \quad (6)$$

Preto menovateľ vzťahu (5) môže mať hodnoty

$$K = 4k - 1 = 3, 7, 11, 15, 19, \dots, 79 \quad (6a)$$

ε) Skúsajme tieto hodnoty; ak vyhovie len jediná, bude riešenie našej úlohy jednoznačné.

Čísla $K = 3, 5$ a 11 nevyhovujú podľa známych pravidiel deliteľnosti, pretože čitateľ zlomku (5) nie je deliteľný žiadnym z nich. Tým vypadávajú z množiny (6) tiež všetky ich celistvé násobky (podľa vety „Ak číslo a nie je deliteľné číslom b , nemôže byť deliteľné ani jeho celistvým násobkom bk , kde k je prirodzené číslo“).

Delením číslom 7 zistíme, že nevyhovuje a teda tiež jeho násobky nie. Zo zbývajúcich 10 čísiel, tj. $19, 23, 31, 39, 43, 47, 59, 67, 71, 79$ vyhovuje iba jediné $K = 4k - 1 = 67$, takže jednoznačné riešenie úlohy je: Volacie číslo p. Absolóna je

$$A = 888889 \quad 67 = 013267$$

(nulu treba „predraziť, veď A aj B sú 6-ciferné); podľa tabulky (1) sa ozvalo volacie číslo p. Berzelia

$$B = 902156$$

Kontrola: $902156 = 68 \cdot 13267$. Každá číslica v čísle A (a teda tiež v čísle B) sa vyskytuje len raz; tým splnená požiadavka zadania.

E. Říman

1. Číslo $34x91$, které je napsáno v desítkové soustavě, je dělitelné číslem 37 . Najděte neznámou cifru x .

2. Z Prahy do Kaira letí inženýr, montér a elektrikář. Jejich jména jsou Dubský, Linda a Kohout. Žádný z nich nemá současně dvě povolání. Z jejich hovoru vyjímáme:

- a) Inženýr a Linda letí do Bombaje.
- b) Kohout a elektrikář jsou z Berlína, zatímco třetí je z Drážďan.
- c) Dubský je mladší než montér.
- d) Kohout je starší než inženýr.

Jak se jmenují inženýr, montér a elektrikář?

Podle německého časopisu Alpha

3. ZDROJ, magazín Lidové Demokracie, uveřejnil tento pěkný hlavolam:

Tři manželské páry váží dohromady 438 kg. Shodou okolností má každý z mužů (jejichž jména jsou Karel, Jiří a Petr) manželky vždy o 6 kg lehčí. Jména manželek jsou Jana, Olga a Věra. Určete manželské páry a váhy všech šesti osob, jestliže víte: Jana váží o 9 kg méně než Jiří, který s Olgou váží dohromady 153 kg a Olga s Karlem dohromady 150 kg.

Je to pěkná úložka, v níž kromě logického usuzování je potřeba také počítat. Nejdříve váhu Věry.

4. Všimněme si, že $9^2 = (8 + 1)^2 = 81$. Je to jediné dvojciferné číslo této vlastnosti?

5. Lehko, třebaš užitím tabulek, zjistíte, že

$$\begin{aligned}\sqrt{8} - \sqrt{7} &< \sqrt{7} - \sqrt{6} \\ \sqrt{15} - \sqrt{14} &< \sqrt{14} - \sqrt{13} \quad \text{atd.}\end{aligned}$$

Dokažte, že platí obecně

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1},$$

kde $n > 1$.

Podle něm. časopisu Alpha

6. Je dán trojúhelník ABC , v němž $AC > BC$. Uvnitř strany AC určíme bod D tak, aby $CD = CB$. Jaké podmínky musí vyhovovat úhly daného trojúhelníka, aby trojúhelník ABD byl rovnoramenný?

Řešení.

1. 34 891. — 2. Dubský je inženýr, Kohout je montér, Linda je elektrikář. — 3. Věra váží 66 kg. Manželské páry: Jiří + Věra, Karel (69) + Jana, Petr (87) + Olga. — 4. Musí platit $(x + y)^2 = 10x + y$. Jediné řešení je $y = 1$, $x = 8$. — 5. Z nerovnosti $\sqrt{n-1} < \sqrt{n+1}$ plyne $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ potom

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

atd. — 6. Jestliže má $AD = BD$ (a jiné možnosti není), pak při obvyklém označení $\beta = 3\alpha$.



RECENZE

D. I. Blochincev: ZÁSADNÍ OTÁZKY KVANTOVÉ MECHANIKY. přeložil RNDr. Josef Čada, vydala Academia, Praha 1971. Str. 160, obr. 12, 1 příloha, cena brožovaného výtisku Kčs 10,—.

Recenzovaná kniha byla přeložena z ruského originálu *Principalnye voprosy kvantovej mechaniki*, který vydalo nakladatelství Nauka v Moskvě 1966. Knižka navazuje na autorovu vysokoškolskou učebnici „Základy kvantové mechaniky“, jejíž překlad u nás vyšel v roce 1956. V sedmnácti kapitolách shrnuje publikace základní problémy kvantové mechaniky s hlavním důrazem na ty body teorie, které až do nedávné doby nebyly dost dobře prozkoumány. To se týká zejména rozboru činnosti měřicího přístroje, jehož dvojí úloha analyzátoru kvantového souboru a zároveň detektoru jednotlivých událostí zůstala nedostatečně objasněna. Autor podrobně podává i rozvíjí svoji koncepci kvantové mechaniky, zejména pokud jde o interpretaci vlnové funkce a teorii měření a umožňuje tak čtenáři hlubší poznání kvantové mechaniky, jejíž základní znalost již předpokládá. Je třeba ovšem mít na paměti, že jde o jednu z několika existujících interpretací některých zásadních otázek

kvantové mechaniky, zdaleka ne bezvýhradně uznávanou a všeobecně přijímanou.

Principy kvantové mechaniky patří k oněm základům vědecké teorie, jež vyžadují širší, ve srovnání s klasickou fyzikou, mnohdy kvalitativně novou filosofickou interpretaci. Právě problematika tohoto druhu bývá v běžných učebnicích ve stínu kvantově-mechanického formalismu. Z tohoto hlediska je Blochincevova monografie vítaným doplňkem dodnes užívané učebnice téhož autora. Čtenář se snadno přesvědčí, že tato knížka je prací z teoretické fyziky, nikoli filosofickým pojednáním, i když je v monografii nemálo filosofie. Psal ji vědec, který nikdy neodděloval světový názor od vědy, zvláště od teoretické fyziky. Z tohoto důvodu vyšla původní ruská práce ve filosofické knihovně. V českém vydání nenajde čtenář humorné obrázky, kterými zpestřil autor svoji práci v přesvědčení, že špetka humoru neškodí ani v tom nejvážnějším díle. Podle názoru překladatele, či vydavatele, nebyly tyto obrázky technicky dokonalé ani příliš vtipné.

Autory českého vydání je nutno pochválit za odstranění nesčetných chyb ve vzorcích a nejednotnosti v notaci, které obsahoval originál

i za doplnění seznamu literatury a připojení novějších citací. Bohatý seznam literatury, připojený ke každé kapitole, dává zájemci o tuto moderní disciplínu fyziky možnost dalšího hlubšího studia. Vydavatelství slouží ke cti vkusná grafická úprava, dobrý tisk a celkově pěkné technické vybavení knihy.

Recenzovaná monografie se nepochybně stane cennou příručkou teoretických fyziků. Studenti fyziky, kterým je knížka určena především, musí si pospíšet s nákupem knihy, která má poměrně nízký náklad (1000 výtisků).

Rudolf Tulak

Recenze knihy RNDr. Erna Padelt: *Menschen messen Zeit und Raum* (Lidé měří čas a prostor). Vydal VEB Verlag Technik Berlin, 1971.

Autorka známá z řady odborných publikací, zabývajících se měřením, uveřejňuje svoji novou knížku sice téže problematiky, ale tentokrát určenou nejširší veřejnosti. Je nutno uvítat, že jde o příspěvek k popularizaci měření, které, ačkoliv se jím denně vícekrát (zpravidla podvědomě) zabýváme, bylo donedávna dosti opomíjenou oblastí.

Knížka s celkovým rozsahem 168 stran je (kromě vstupního, úvodního a konečného odstavce) volně rozdělena do 7 oddílů, s dalším účelovým, nedogmatickým podrozdělením. Autorka začíná vznikem čísel a číselných soustav, podrobněji se věnuje měření času od dosud známých prvopočátků (tedy měření časového intervalu i časové epochy, s níž souvisí kalendář), podobně zajímavým způsobem se dotýká měření délek a přechází v dalším z oddílů na měření

plošného obsahu (tj. velikosti plochy). Nato se dotýká měření objemu, objemového množství (se stavoznačky) a průtočného množství látek. Nezapomíná ani na obecně velmi důležitou veličinu, kterou je úhel a zmíní se o jeho měření v šestém oddílu. Poslední oddíl obsahuje problematiku měření rychlosti přímočarého a otáčivého pohybu. Zmíněná hlavní část knihy, s uvedenými oddíly je vhodně doplněna a přehledným vysvětlením používaných značek, doporučenou literaturou vhodnou pro hlubší studium a jmenným i věcným rejstříkem.

Jak již bylo na počátku řečeno, je obsah knihy podán velmi zajímavou formou, text je také doplněn množstvím vyobrazení celé řady (i historických) měřidel. Přesto, že námět knihy je vědně dosti náročný, podařilo se autorce zvládnout jej záživným a přístupným způsobem tak, že knihu lze doporučit k přečtení každému.

V. Š.

Knížka k jubileu MO

Naše matematická olympiáda dovršila nedávno už svůj dvacátý ročník a při té příležitosti vyšla i zajímavá publikace s názvem „20 let matematické olympiády v ČSSR“. Chcete-li se příjemně pobavit a zároveň se i poučit o historii naší soutěže, doporučujeme Vám knížku k přečtení. Její obsah je velmi pestrý.

Začíná to stručným přehledem historie, který podávají P. Benda a J. Mída. Další dva články napsali bývalí řešitelé a nyní už známí vědečtí pracovníci O. Kowalski a J. Bosák. L. Berger píše o matematické olympiádě ve středoslovenském kraji a M. Šmerda o soutěži na devítiletkách. B. Sivák podává ve svém článku elementární důkaz Richertovy věty, že každé přirozené číslo

větší než 6 je součtem navzájem různých prvočísel. Příjemně se čte B. Zelinka, když líčí svou cestu k matematice. Hlas nejmladší generace zaznívá z příspěvku J. Vinárka, F. Zítek přichází se svými matematickými klípkami a P. Liebl vypravuje, co se mu před léty stalo, když se

účastnil M.O. Sborníček zakončuje J. Vyšín, předseda Ústředního výboru MO. Publikace vyšla jako zájmový tisk a je neprodejná. Dostali ji všichni organizátoři a úspěšní řešitelé MO a další zájemci si ji mohou vypůjčit. Doporučujeme!

J. Sedláčková

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT Praha

1. V bedně jsou 4 druhy jablek, od každého druhu 25 kusů; kolik jablek musíme bez nahlížení do bedny vytáhnout, abychom měli jistotu, že mezi vytaženými bude alespoň 10 jablek téhož druhu?

2. V temné místnosti jsou tři páry různých druhů bot a 10 párů světlých a tmavých ponožek dohromady. Kolik bot a kolik kusů ponožek musíme odtud vzít, abychom měli pár bot téhož druhu a pár ponožek téže barvy?

Z východoněm. časopisu Alpha

3. Určete $2n + 1$ přirozených po sobě jdoucích čísel tak, aby součet čtverců prvních $n + 1$ čísel se rovnal součtu čtverců posledních n čísel.

4. V k domech byla prodávána jablka. V 1. domě polovina celkového množství a k tomu m jablek, v 2. domě polovina zbytku a opět m jablek... Nakonec zbylo p jablek. Kolik jablek bylo celkem? Obecně a potom pro $k = 7$, $m = 3$, $p = 11$.

Ze západoněm. časopisu Archimedes

5. Sečtěte

$$\operatorname{tg}^{25^\circ} + \operatorname{tg}^{210^\circ} + \operatorname{tg}^{215^\circ} + \quad + \operatorname{tg}^{285^\circ}$$

Z bulharského časopisu Matematika

6. Dokažte, že pro přirozené n je jedno z čísel

$$A_n = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1$$

$$B_n = 2^{n+1} + 2^{n+1} + 1$$

dělitelno pěti.

Z jugosl. časopisu Matematičko fizički list

7. Které n -násobky čísla 19 končí a) na 1; b) které na 11; c) lze některý násobek 19 napsat samými jednotkami?

8. Všimněte si, že

$$(8^3 + 11^3) - (8^3 - 3^3) = (8 + 11) (8 - 3);$$

odvodte obecně, pro která a, b, c platí

$$(a^3 + b^3) - (a^3 - c^3) = (a + b) - (a - c).$$

9. Celými čísly x a y řešte rovnici

$$xy - 3x + 4y - 5 = 0.$$

Upraveno podle holandského časopisu *Pythagoras*

10. Určete společné body grafů funkcí: $y = |x + 1|$ a $y = 1 - |x|$.

11. Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 vybereme libovolné tři různé a napíšeme z nich všechna možná trojčíselná čísla. Dokažte, že součet všech vzniklých čísel je dělitelný 37 i 6.

12. Jestliže mezi stranami trojúhelníka platí vztah $a^2 + b^2 = 5c^2$, jsou těžnice t_a a t_b navzájem kolmé. Dokažte!

Z jugosl. časopisu Obzornik za matematiko in fiziko

13. Určete hodnotu zlomku $\frac{a + 2b}{2a - b}$, jestliže $3a^2 + 3b^2 = 10ab$

a $a > b > 0$.

14. Řešte rovnici

$$x^2 + \log_3 x = 3^8$$

Z bulharského časopisu Matematika

15. Žák počítal výraz

$$(a^2b - b^2c - c^2a)^3 + (a^2c + b^2a - c^2b)^3$$

tak, že každého sčítance v obou závorkách ztrojnásobil i s příslušným znaménkem. Jak velké chyby se tím dopustil?

Ze západoněm. časopisu Archimedes

Některé výsledky: 1. 37 jablek; 2. 4 boty a 3 ponožky; 3. prostřední z hledaných čísel je buď 0 nebo $2n(n+1)$; 4. $S = 2^k(p+2m) - 2m$, spec. $S = 2170$; 5. $S = 198\frac{1}{3}$; 7. a) $n = 10k + 9$, b) $n = 100k + 69$, c) $n = 5847953216374269$; 8. $a = b - c$; 9. $(-11; 4)$, $(-5; 10)$, $(-3; -4)$, $(3; 2)$. 13. 1; 14. $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{81}$; 15. žádné.

110 LET JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYZIKŮ

110 let je dosti dlouhá doba pro vědeckou společnost. Naše Jednota vznikla v roce 1862, v období velkého kulturního oživení našeho národa. Vznikla ze zdánlivě nepatrného popudu. Několik studentů se domluvilo, že se budou scházet a přednášet si o matematice. A nyní je to společnost, která sdružuje několik tisíc matematiků a fyziků, vědeckých pracovníků i učitelů z různých typů škol.

Činnost Jednoty je velmi rozsáhlá. Pořádá každý rok několik konferencí, letních škol, seminářů a mnoho přednášek pro různé druhy specialistů. Činně se účastní modernizačních pokusů ve vyučování matematice a fyzice a je spolupředatelem matematické a fyzikální olympiády od jejich vzniku. Vydává členský časopis Pokroky matematiky, fyziky a astronomie a pečuje o odbornou stránku vašeho časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální, který Jednota právě před padesáti lety začala vydávat.

V tomto jubilejním roce uspořádá sjezd, kde se zhodnotí její dosavadní činnost a rozhodne se o činnosti Jednoty na další tříleté období.

Kromě toho Jednota uspořádá několik výstav. V březnu bude uspořádána spolu se Státním nakladatelstvím techn. literatury v Praze výstava matematických a fyzikálních knih, a to jak z produkce naší, tak z produkce zahraniční. Knihy bude možno kupovat a i později přijímá nakladatelství objednávky na knihy ze zahraničí.

Během května bude otevřena výstava matematických a fyzikálních pomůcek v Praze v Komeniu, Národní tř. 20. Výstava bude spojena s odbornými přednáškami o užití pomůcek a filmů při vyučování. Doporučujeme účast na této výstavě zájemcům jak z řad učitelů, tak studentů.

Doufáme, že mnozí z vás, čtenářů Rozhledů, se stanou v krátké době také aktivními členy Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Miloš Jelínek

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

K

kamenořez

kanonický

kardinální

kartézský

každý

kilogram

kilometr

kinematika

kladný

kladný smysl

klesající

klín

koeficient

koeficient stejnolehlosti

kolineace

kolineární zobrazení

kolmice

kolmice k přímce p

kolmice spuštěná z bodu na rovinu

pata kolmice

kolmý

kombinace

kombinace k -té třídy n prvků

kombinatorický

komolý

komolý kužel

komplement

komplexní

komplexní číslo

komplexně sdružená čísla

komplikovaný

komponenta

koncový bod

stéréotomie $ž$

canonique

cardinal, e

cartésien, enne

chaque

kilogramme m

kilomètre m

cinématique $ž$

positif, ive

sens m direct

décroissant, e

dièdre m

coefficient m

rapport m d'homothétie

collinéation $ž$

homographie; $ž$ déformation $ž$ homographique

perpendiculaire $ž$

perpendiculaire à la droite p

perpendiculaire abaissée d'un point sur le plan

piéd d'une perpendiculaire

perpendiculaire

combinaison $ž$

combinaison de n objets pris k à k

combinatoire

tronqué,

cone m tronqué; tronc m de cone

complément m

complexe

nombre m complexe

nombres complexes conjugués

compliqué, e

composante $ž$

extrémité $ž$

konečný
 konfokální
 kongruence
 kongruentní
 konkávní
 konkrétní
 konstanta
 konstantní
 konstrukce
 konvergence
 konvergovat
 konvergovat k a
 konvexní
 korolár
 kořen
 kosekans
 kosinus
 kosočtverec
 kosodélník
 kosoúhlý
 kostka (hrací)
 kota
 kotangens
 kotovaný
 kotované promítání
 kotovaný průmět
 koule
 krajní bod
 krát
 dvakrát
 krátit
 kreslit
 kritérium
 kruh
 bludný kruh
 kruhový
 kruhový bod
 kružítka
 kružnice
 hlavní kružnice
 opsaná kružnice
 oskulační kružnice
 připsaná kružnice
 vepsaná kružnice
 krychle
 krychlový
 křivítka

fini, e
 homofocal, e, aux
 congruence $\checkmark$
 congru, e
 concave
 concret, ète
 constante $\checkmark$
 constant, e
 construction $\checkmark$
 convergence $\checkmark$
 converger; tendre
 converger vers a ; tendre vers a
 convexe
 corollaire m
 racine $\checkmark$
 cosécante $\checkmark$
 cosinus m
 losange m ; rhombe m
 parallélogramme m
 oblique
 dé m
 cote $\checkmark$
 cotangente $\checkmark$
 coté, e
 géométrie $\checkmark$ cotée
 plan m coté
 sphère $\checkmark$
 extrémité $\checkmark$
 fois
 deux fois
 simplifier
 dessiner; tracer
 critère m
 cercle m
 cercle vicieux
 circulaire
 ombilic m
 compas m
 cercle m ; circonférence $\checkmark$
 grand cercle
 cercle circonscrit
 cercle osculateur
 cercle exinscrit
 cercle inscrit
 cube
 cubique
 pistolet m

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

8

ROČNÍK 50, 1971-1972, DUBEN



ROČNÍK 50
DUBEN 1972

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:
doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:
Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:
Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 g, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhnig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellero-
vá, Teplice.
Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

Prof. dr. J. Skotnický: Náš čitateř spomína	337
Dr. O. Odvárko: Řešení booleovských rovnic	338
F. Kuřina: Přímková kružnice (Dokončení)	343
F. Hradecký: Geometrická místa (Dokončení)	348
Doc. ing. L. Drs: Automatické kreslení III.	355
J. Tesař: Rozumíte Archimedovu zákonu?	357
Ing. dr. V. Šindeldř CSc.: Dočasné vedlejší jednotky	366
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Co jsou symbiotické hvězdy?	367
M. Grün: Vítr vane ze Slunce	369
Naše soutěž	376
Ze zahraničních časopisů	381
Matematické zábavy	383
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

Náš čitateľ spomína

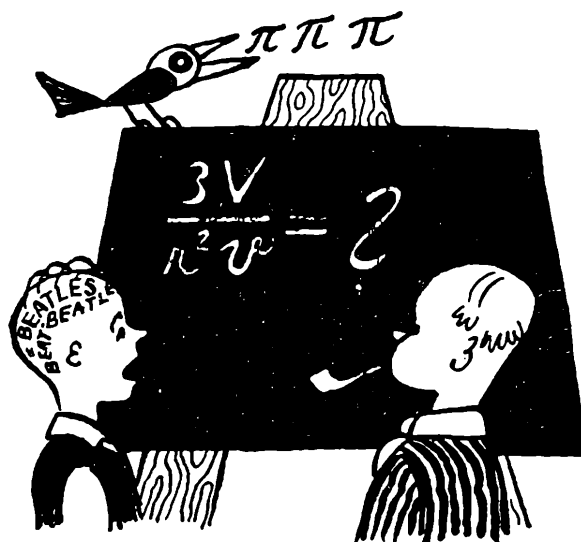
„Rozhledy matematicko-přírodovědecké“ som odoberal jako stredoškolač v Nitre v rokoch 1926 až 1928. Vtedy to bol jediný časopis prístupný stredoškolačom, ktorý rozvíjal naše prírodovedké myslenie a približoval nám matematickú a fyzikálnu tematiku. Každoročná súťaž v riešení matematických (počtom 20), fyzikálnych (10) a deskriptívne-geometrických (5) príkladov bola pre nás výdatným stimulom nášho štúdia a umožňovala tiež vzájomné porovnávanie didaktických výsledkov na jednotlivých gymnáziach v republike. Súťaže som sa zúčastnil dvakrát a roku 1928 som získal prvé ceny z M, F, i Dg. Aj táto okolnosť posílila moju záľubu v prírodných vedách a keď som aj potom študoval medicínu a 8 rokov prevádzal lekársku prax, nakoniec som sa predsa vrátil k „teorii“: od roku 1950 sa sústavne venujem pedagogike aj vedeckému rozvoju „lékarskej fyziky“ na Léarskej fakulte v Košiciach.

Rozhľadom matematicko-fyzikálnym srdečne blahoželám k ich polstoročnému jubileu a aj do ďalších rokov im prajem mnoho úspechov pri výchove a podpore matematicko-fyzikálnych talentov medzi našou mládežou. S vďačnosťou pritom spomínam na nášho učiteľa profesora Eugena Římana, ktorý v nás dokázal vzbudiť záujem pre krásu a exaktnosť prírodných vied.

Prof. MUDr. Jozef Skotnický

Lekárska fakulta

Košice



Řešení booleovských rovnic

RNDr OLDŘICH ODVÁRKO, Praha

Všichni jste se setkali s řadou typů rovnic, jejichž oborem řešení je číselná množina (například množina všech reálných čísel, množina všech přirozených čísel atd.). Umíte jistě řešit rovnice lineární a kvadratické, mnozí z vás také i rovnice exponenciální, logaritmické, goniometrické atd. V tomto článku si na jednom příkladě ukážeme, jak lze řešit rovnice v Booleově algebře, naučíme se řešit booleovské rovnice.

1. Uvažujme množinovou algebru $(\hat{\mathbf{M}}, \cup, \cap, ')$, kde $\hat{\mathbf{M}}$ je množina všech podmnožin množiny $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Stanovme si úkol určit všechny prvky $\mathbf{X}$ z množiny $\hat{\mathbf{M}}$ (tj. všechny podmnožiny $\mathbf{X}$ množiny $\mathbf{M}$), pro něž platí

$$\mathbf{X} \cap \{2, 6\} = (\mathbf{X}' \cup \{3, 4, 5\}) \cap \mathbf{X} \quad (1)$$

Jinak řečeno, naším úkolem je řešit rovnici (1) o jedné neznámé $\mathbf{X}$ v množině $\hat{\mathbf{M}}$.

Z úvah v článku „Booleovské výpočty v množinové algebře“ (č. 10, roč. 49) je zřejmé, že množinová algebra $(\hat{\mathbf{M}}, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry $(\mathbf{B}, +, \cdot, ')$. Můžeme tedy při řešení naší rovnice užít znalostí o Booleově algebře, mimo jiné například věty (0)–(20) — viz článek „O základech Booleovy algebry“ (č. 3, roč. 50).

Zápis rovnice (1) přepíšme do symboliky Booleovy algebry. Půjde o tyto záměny: $\mathbf{X} \rightarrow x$, $\mathbf{U} \rightarrow +$, $\cap \rightarrow \cdot$; dále „ $\{2, 6\}$ “, „ $\{3, 4, 5\}$ “ nahradíme postupně písmeny a , b . Dospějeme pak k rovnici

$$xa = (x' + b) \cdot x$$

o jedné neznámé $x \in \mathbf{B}$.

Užitím vět platných v Booleově algebře postupně dostaneme

$$ax = x' \cdot x + bx, \quad ax = bx \quad (2)$$

Jak však nyní postupovat dále? Vzpomeňme si, že při řešení „číselných“ rovnic používáme nejčastěji těchto dvou úprav:

- a) Obě strany dané rovnice vynásobíme stejným číslem různým od nuly.
- b) K oběma stranám rovnice přičteme stejné číslo.

Postupujme obdobně i při řešení naší booleovské rovnice. Vynásobíme obě strany rovnice (2) například prvkem a' ($\{2, 6\}' \neq \emptyset$, tedy $a' \neq 0$):

$$ax \cdot a' = bxa', \quad a'bx = 0$$

Přejdeme zpět k symbolice množinové algebry

$$\{2, 6\}' \cap \{3, 4, 5\} \cap \mathbf{X} = \emptyset$$

Po úpravách levé strany této rovnice dostáváme

$$\{3, 4, 5\} \cap \mathbf{X} = \emptyset \quad (3)$$

Přitom (3) platí, jak sami snadno ověříte, právě když je

$$\mathbf{X} \subset \{1, 2, 6\} \quad (4)$$

Množinu všech prvků z $\overset{\wedge}{\mathbf{M}}$, pro něž platí (4), označme $\mathbf{P}_1$. Pak je

$$\mathbf{P}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 6\}, \{2, 6\}, \{1, 2, 6\}\}.$$

Prověřme zkouškou dosazením do rovnice (1), které z prvků množiny $\mathbf{P}_1$ jsou skutečně jejími kořeny. Dosadíme nejprve za $\mathbf{X}$ do (1) množinu $\emptyset$. Dostaneme $\emptyset \cap \{2, 6\} = (\emptyset' \cup \{3, 4, 5\}) \cap \emptyset$, což je zřejmě výrok pravdivý. Prázdná množina tedy patří do množiny kořenů rovnice (1).

Obdobně už samostatně „prověřte“ všechny zbývající prvky množiny $\mathbf{P}_1$. Zjistíte nakonec, že pro množinu $\mathbf{P}$ všech kořenů rovnice (1) platí

$$\mathbf{P} = \{\emptyset, \{1\}\} \quad (5)$$

Tím je naše rovnice vyřešena.

2. Mnozí jste možná nespokojeni s tím, že zkouška dosazením do rovnice (1) byla poměrně zdlouhavá — museli jste prověřit osm podmnožin množiny $\overset{\wedge}{\mathbf{M}}$. Nemohli bychom nějak „zmenšit“ počet prvků množiny $\overset{\wedge}{\mathbf{M}}$, jež přicházejí v úvahu jako její kořeny?

To, že jsme se rozhodli násobit rovnici (2) v předešlém odstavci prvkem a' , bylo celkem náhodné. Předpokládejme, že jsme dospěli ke (4); vraťme se k rovnici (2) a vynásobme obě její strany prvkem b' . Postupně pak dostaneme

$$axb' = bxb', \quad ab'x = 0$$

Po přepisu do symboliky množinové algebry ($\hat{\mathbf{M}}, \cup, \cap, ')$ přecházíme k rovnici

$$\{2, 6\} \cap \{3, 4, 5\}' \cap \mathbf{X} = \emptyset$$

Po úpravách její levé strany dostáváme

$$\{2, 6\} \cap \mathbf{X} = \emptyset \quad (6)$$

Přitom (6) platí právě tehdy, když je

$$\mathbf{X} \subset \{1, 3, 4, 5\} \quad (7)$$

Je-li $\mathbf{X}$ kořenem rovnice (1), pak zřejmě platí (7) a zároveň také i (4). Odtud plyne, že je

$$\mathbf{X} \subset \{1, 2, 6\} \cap \{1, 3, 4, 5\}$$

čili

$$\mathbf{X} \subset \{1\} \quad (8)$$

Množina $\mathbf{P}_2$ všech prvků z $\hat{\mathbf{M}}$, pro něž platí (8), je rovna množině $\{\emptyset, \{1\}\}$.

Při zkoušce budeme tedy prověřovat už jenom dva prvky z $\hat{\mathbf{M}}$. Vzhledem k úvahám provedeným v odstavci 1 je ihned vidět, že $\mathbf{P}_2$ je rovna množině $\mathbf{P}$ všech kořenů rovnice (1).

3. Rovnici (1) jsme vyřešili zcela obdobně, jako jsme zvyklí řešit „číselné“ rovnice. Objevili jsme však přece jenom určitý, a to dosti podstatný rozdíl. Úpravy a) a b) z odstavce 1 používané při řešení „číselných“ rovnic, jsou ekvivalentní. Volně řečeno to znamená toto: Jestliže rovnici upravíme užitím a) nebo b), pak množiny všech kořenů původní rovnice a rovnice upravené jsou si rovny. Jestliže je zaručeno, že všechny úpravy prováděné při řešení nějaké „číselné“ rovnice jsou ekvivalentní, pak není třeba provádět zkoušku dosazováním (nejvýše jenom pro ověření správnosti výpočtů).

Úprava „násobení obou stran rovnice prvkem a' “ (respektive prvkem b') není ekvivalentní — uvažte rovnice (1) a (3), respektive (1) a (6). Snadno také zjistíte, že ani úprava „přičtení stejného prvku k oběma stranám rovnice“ není ekvivalentní. Jestliže například ke stranám

rovnice (2) přičtete prvek 1, dospějete nakonec k závěru $\mathbf{X} \subset \hat{\mathbf{M}}$. Je tedy nutno, užijeme-li takovýchto úprav při řešení booleovské rovnice, zkoušku dosazováním vždy provést.

Poznámka: V odstavci 2 jsme „šikovnou“ kombinací úprav „násobení prvkem a' “ a „násobení prvkem b' “ dospěli přímo k množině všech kořenů. To však nikterak nevylučuje nutnost provedení zkoušky. Nijak jinak než dosazením zde nezaručíme, že je $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$.

V čem tkví příčiny těchto odlišností? Pokusme se je odhalit. Při studiu Booleovy algebry $(\mathbf{B}, +, \cdot, ')$ a jejích modelů jsme zjišťovali, že řada vět o prvcích z $\mathbf{B}$ je analogická s větami o reálných číslech. Poznali jsme však také, že mezi Booleovou algebrou a „algebrou číselnou“ existuje mnoho podstatných rozdílů.

Připomeňme si nyní některé známé věty o reálných číslech a uvažme, zda analogické věty platí i v Booleově algebře.

Ke každému reálnému číslu c existuje právě jedno reálné číslo x , pro něž platí $c + x = 0$.

V Booleově algebře analogická věta neplatí. Názorně to lze ukázat například v modelu množinové algebry $(\hat{\mathbf{M}}, \cup, \cap, ')$ z našeho příkladu. V $\hat{\mathbf{M}}$ nelze třeba k prvku $\{1, 2\}$ nalézt žádný prvek $\mathbf{X} \in \hat{\mathbf{M}}$, pro nějž je $\{1, 2\} \cup \mathbf{X} = \emptyset$.

Pro všechna reálná čísla a, b platí: Je-li $ab = 0$, pak je $a = 0$, nebo $b = 0$.

V Booleově algebře (a tedy ani v jejích modelech) analogická věta neplatí. Průnik prvků $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ z množiny $\hat{\mathbf{M}}$ je množina prázdná a přitom ani jeden z nich není roven prázdné množině.

Pomocí shora uvedených vět o reálných číslech lze potom dokázat dvě další věty, jež zaručují, že obě úpravy a) i b) z odstavce 1, užívané při řešení „číselných“ rovnic, jsou ekvivalentní.

Pro všechna reálná čísla a, b, c platí:

Je-li $a + c = b + c$, pak je $a = b$.

Je-li $ac = bc$ a zároveň je $c \neq 0$, pak je $a = b$.

Ze shora provedených úvah už vysvítá, že analogické věty v Booleově algebře platit nebudou. V modelu množinové algebry $(\mathbf{M}, \cup, \cap, ')$ je například $\{3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4\} \cup \{3, 5\} = \{3, 4\} \cup \{3, 5\}$, ale přitom $\{1, 3, 4\} \neq \{3, 4\}$.

4. Naskytá se nyní otázka, zda jsme „odsouzení“ při řešení booleovských rovnic zkoušku dosazováním vždy provádět, či nikoliv. Vyslovíme a dokážeme dvě věty, které nám ukáží cestu, jak řešit tyto rovnice jenom pomocí ekvivalentních úprav.

Věta 1. *Pro všechny prvky x, y z Booleovy algebry platí: $x + y = 0$ právě když je $x = 0$ a zároveň $y = 0$.*

Důkaz. a) Nechť je $x = 0$ a zároveň $y = 0$. Pak je zřejmě $x + y = 0$ (pro každé x je $x + 0 = x$).

b) Nechť je $x + y = 0$. Pak je $x + (x + y) = (x + x) + y = x + y = 0$ a zároveň $x + (x + y) = x + 0 = x$. Je tedy $x = 0$. Zcela obdobně zjistíme, že je též $y = 0$. Tuto část důkazu už přenecháváme čtenáři.

Věta 2. Pro všechny prvky x, y z Booleovy algebry platí: $xy' + x'y = 0$ právě když je $x = y$.

Důkaz. a) Je-li $x = y$, pak je také $x' = y'$. Odtud plyne dále $xy' = 0$ a zároveň $x'y = 0$. Podle věty 1 je tedy také $xy' + x'y = 0$.

b) Nechť je nyní $x \neq y$. Chceme dokázat, že je pak $xy' + x'y \neq 0$. Předpokládejme, že existují $x, y, x \neq y$, pro něž je $xy' + x'y = 0$. Pak je podle věty 1

$$xy' = 0 \quad (9)$$

a zároveň také

$$x'y = 0 \quad (10)$$

Z (9) plyne dále $xy' + y = y$ a po úpravě levé strany dostaneme $x + y = y$. Obdobně z (10) dostáváme $x + y = x$. Odtud plyne $x = y$, což je spor s předpokladem $x \neq y$.

Tím je důkaz věty 2 proveden.

Vraťme se k naší rovnici (1) a ukažme si, jak ji lze řešit pomocí právě dokázaných vět. Z „tvaru“ těchto vět je ihned vidět, že daná rovnice a rovnice „upravená“ pomocí některé z nich, budou mít právě sobě rovné množiny kořenů. Půjde tedy o úpravy ekvivalentní.

Upravme rovnici (2) užitím věty 2. Dostaneme

$$ax \cdot (bx)' + (ax)' \cdot bx = 0$$

a po úpravách levé strany této rovnice

$$ax \cdot (b' + x') + (a' + x') \cdot bx = 0$$

$$ab'x + a'bx = 0$$

$$(ab' + a'b) \cdot x = 0$$

Dále už můžete pokračovat samostatně. Dospějete snadno k závěru, že množina všech kořenů rovnice (1) je rovna množině **P** z (5).

Cvičení.

1. Řešte rovnice o jedné neznámé **X** v množině $\hat{\mathbf{T}}$ všech podmnožin množiny $\mathbf{T} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

a) $(\mathbf{X} \cup \{3, 5\}) \cap (\mathbf{X}' \cup \{1, 6, 7\}) = \emptyset$

b) $\{5, 7, 9\} \cup (\mathbf{X} \cap \{6, 8, 9\}) = \mathbf{X}$

2. Rozhodněte, zda platí tyto věty.

Pro všechny prvky x, y Booleovy algebry je

a) $xy = 1$, právě když je $x = 1$ a zároveň $y = 1$;

b) $(x + y') \cdot (x' + y) = 1$, právě když je $x = y$.

Přímkové kružnice

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

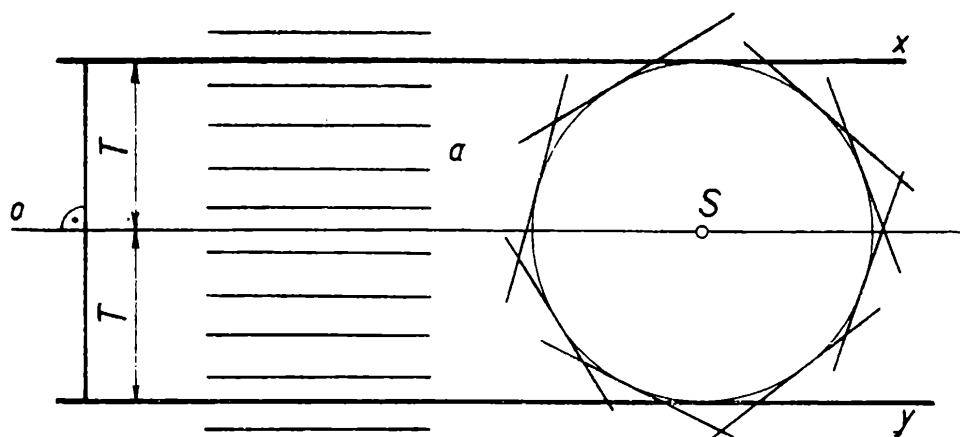
(Dokončení)

Úloha 4. V rovině ρ je dána osnova (a) a přímková kružnice (S, r) . Určete množinu všech přímek osnovy (a) , které jsou i přímkami kružnice (S, r) .

V úloze jde tedy o vyšetření průniku $(a) \cap (S, r)$.

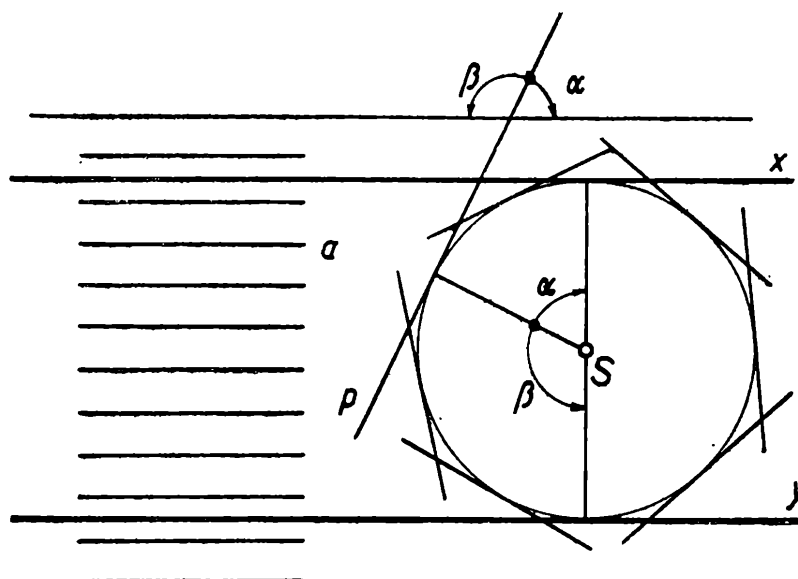
Naznačíme dva různé postupy řešení úlohy.

A. Hledejme mezi prvky množiny (a) ty, které náležejí množině (S, r) , tj. ty přímky rovnoběžné s a , které jsou vzdáleny o r od přímky $o \in (a)$, procházející bodem S . Jejich konstrukce je naznačena na obr. 5.



Obr. 5

B. Hledejme ty prvky, množiny (S, r) které náležejí osnově (a) . Hledané přímky x, y můžeme podle řešení úlohy 3 dostat jako obrazy libovolné přímky $p \in (S, r)$ v rotacích o středu S o úhel α nebo β podle obr. 6.



Obr. 6

Oba obrazy x, y přímky p v uvažovaných rotacích jsou zřejmě řešeními úlohy.

Máme tedy výsledek

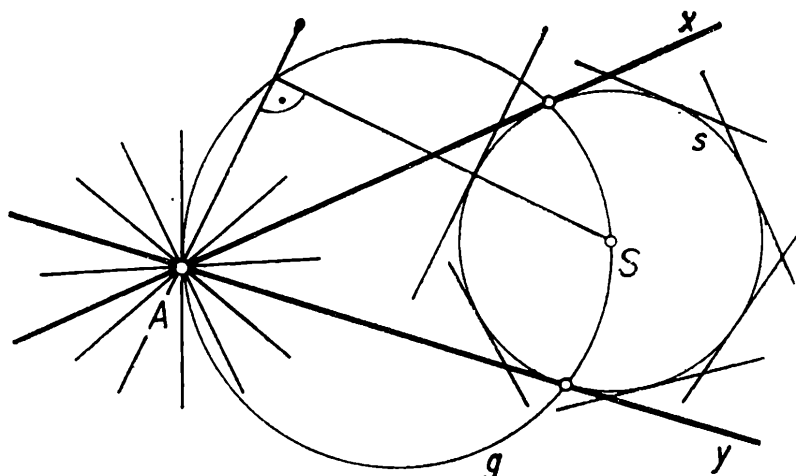
$$(a) \cap (S, r) = \{x, y\}.$$

Úloha 5. Je dán svazek (A) a přímková kružnice (S, r) . Určete množinu všech přímek svazku (A) , které jsou přímkami kružnice (S, r) .

V úloze jde o určení množiny $(A) \cap (S, r)$.

Postupujme opět dvěma způsoby.

A. Hledejme nejprve všechny přímky svazku, které mají od bodu S vzdálenost r . Protože vzdálenost libovolné přímky $p \in (A)$ měříme jako velikost úsečky SP , kde P je pata kolmice sestrojené z bodu S na přímku p , vyšetříme nejdříve množinu pat všech kolmic sestrojených z bodu S na přímky svazku (A) . Řešení této úlohy (známé z osmé třídy ZDŠ) přenechávám čtenáři. Hledanou množinou je kružnice g s průměrem SA . Protože hledáme patu kolmice, která je vzdálena o r od S , náleží tato pata průniku $g \cap s$. Odtud je konstrukce hledaných přímek x, y podle obr. 7 zřejmá.

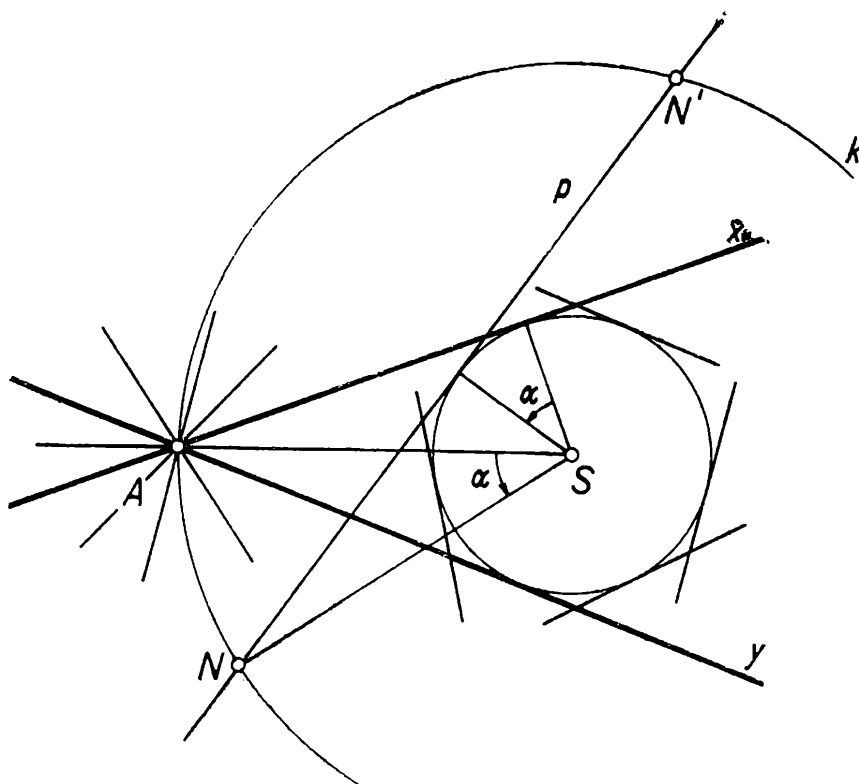


Obr. 7

B. Postupujme nyní opačně. Hledejme všechny přímky obálky (S, r) , které náležejí svazku (A) , tj. všechny přímky obálky, které procházejí bodem A . Libovolná přímka $p \in (S, r)$ je podle (*) obrazem hledané přímky x v rotaci kolem středu S o jistý úhel α . V této rotaci přejde bod A do bodu N , který snadno sestrojíme jako průsečík kružnice $(k \equiv (S, SA))$

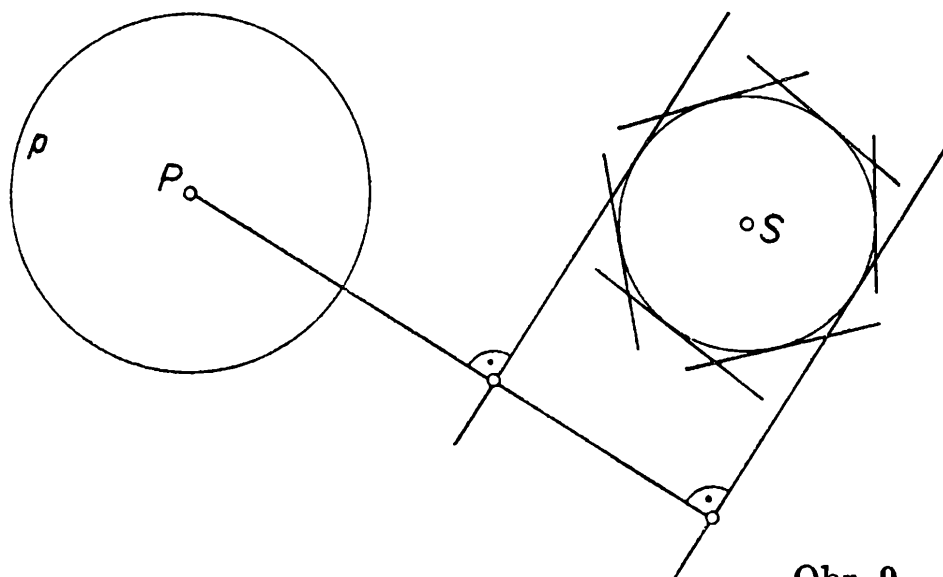
s přímkou p . Úhel α této rotace je určen: $\alpha = \widehat{ASN}$. Rotace kolem středu S o úhel $-\alpha$ (je to rotace inverzní k uvažované rotaci) pak převede přímku p v hledanou přímku x . V případě, že $AS > r$, existují právě dva body N a N' (obr. 8), v tomto případě má hledaný průnik právě dva prvky:

$$(A) \cap (S, r) = \{x, y\}$$



Obr. 8

Úloha o určení průniku $(A) \cap (S, r)$ je známou úlohou na konstrukci všech tečen bodové kružnice, které procházejí daným bodem. Úloha 4 vedla ke konstrukci tečny kružnice, která je rovnoběžná s danou přímkou.

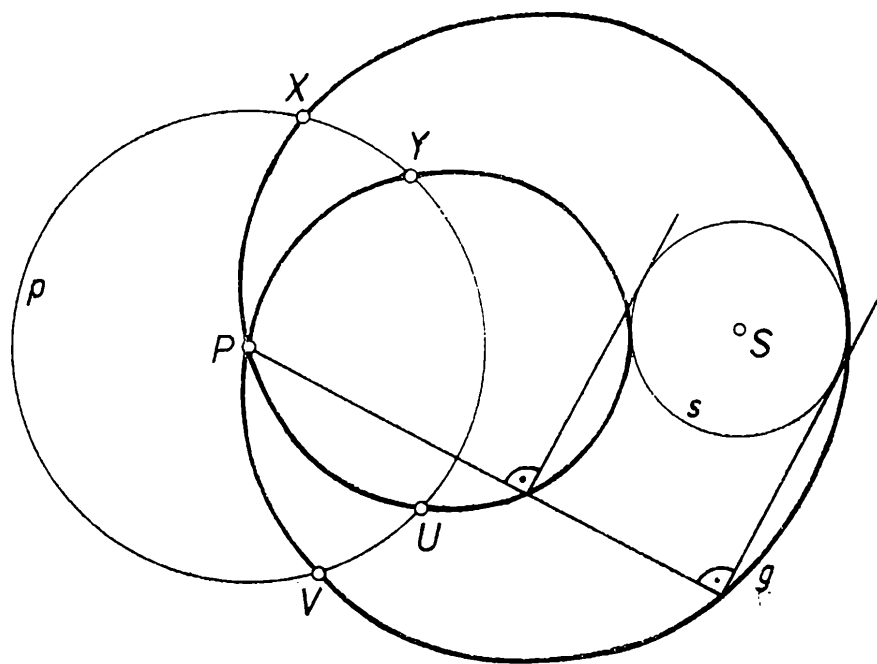


Obr. 9

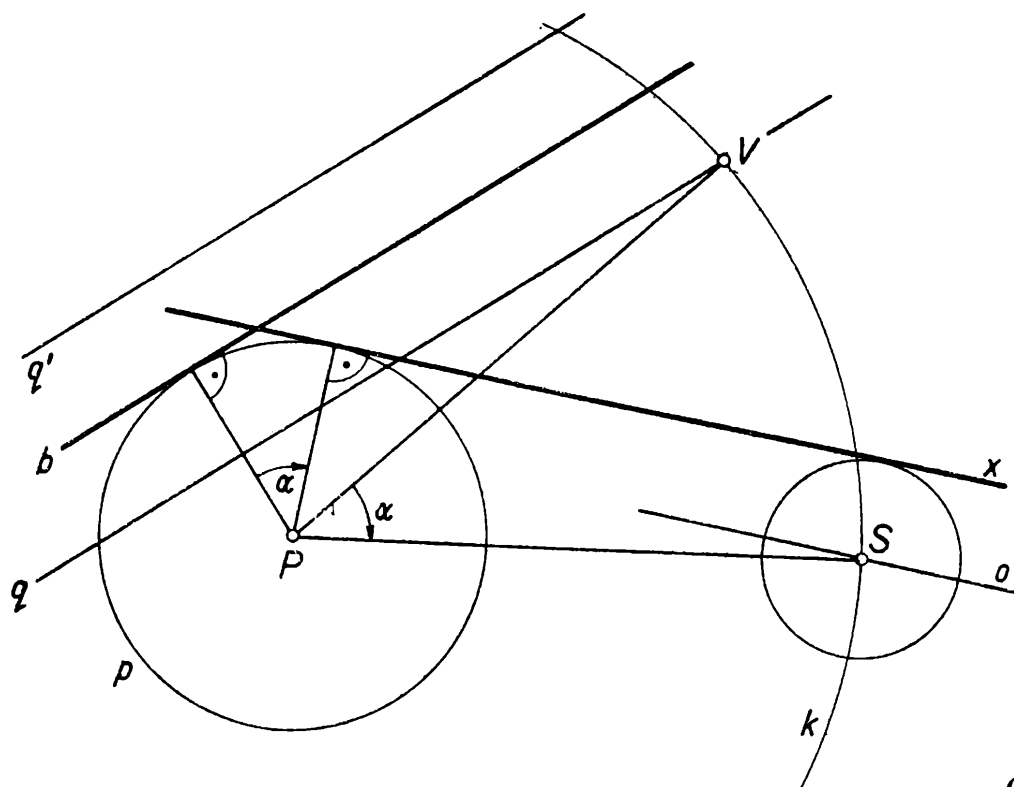
Úloha 6. Jsou dány dvě přímkové kružnice (P, n) a (S, r) . Určete jejich průnik.

A. Hledejme nejprve všechny přímky obálky (S, r) , které jsou přímkami kružnice (P, n) . Paty kolmic sestrojených z bodu P na tyto

přímky musí být body kružnice $p \equiv (P, n)$. Podaří-li se nám vyšetřit množinu g všech pat kolmic sestrojených z bodu P na přímky obálky (S, r) , (obr. 9), musí být body dotyku hledaných přímek a , kružnice p prvky průniku $g \cap p$. Množinu g můžeme snadno bodově sestrojít podle obr. 10, v němž $g \cap p = \{X, Y, U, V\}$. Tečny x, y, u, v v bodech X, Y, U, V jsou řešeními úlohy.



Obr. 10



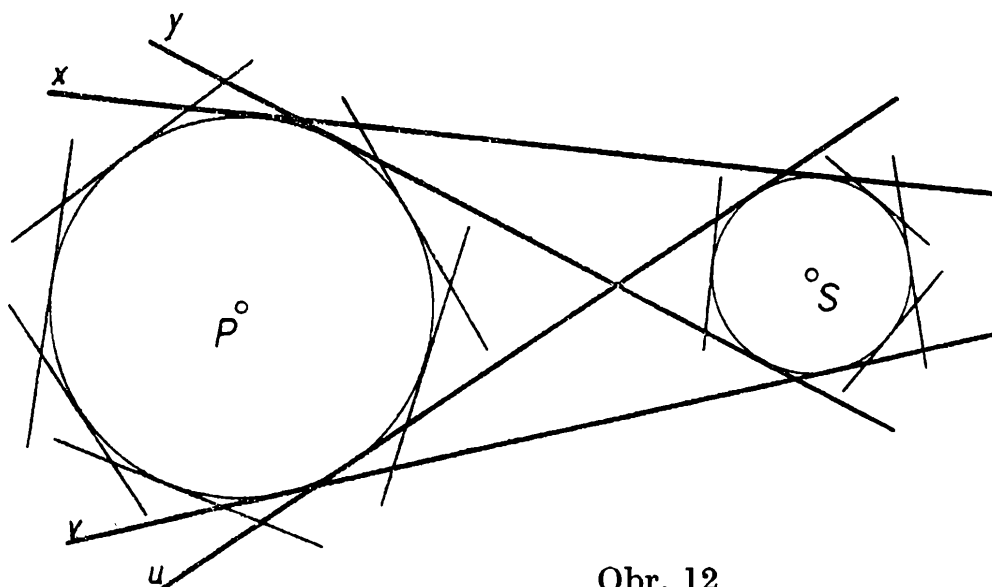
Obr. 11

Uvedená konstrukce prvků množiny $g - p$ nepatří mezi konstrukce, které jsou proveditelné pravítkem a kružítkem. Při konstrukci množiny g jsme sice sestrojili pravítkem a kružítkem libovolný počet bodů množiny g , tyto body jsme ovšem spojili od ruky, tedy ne zcela přesně. Hledejme proto jiné řešení úlohy.

Libovolná přímka $b \in (P, n)$ přejde v hledanou přímku $x \in (S, r)$ v jisté rotaci kolem středu P o neznámý úhel α . Přímka $o \parallel x$, která prochází bodem S , má v této rotaci vzor q (respektive q'), který umíme sestrojit, neboť vzdálenost přímky q (q') od přímky p je rovna r . Bod S má tedy v uvažované rotaci vzor $V \in q \cap k$, kde k je kružnice o středu P a poloměru PS . Úhel $\widehat{VPS} = \alpha$ je úhel hledané rotace a hledaná přímka x je obrazem přímky b v rotaci kolem středu S o úhel α (obr. 11). Protože průnik $k \cap (q \cup q')$ může obsahovat maximálně čtyři body, obsahuje průnik $(P, n) \cap (S, r)$ maximálně čtyři společné prvky. Jsou to přímky, které se dotýkají kružnice p i s , tedy společné tečny dvou kružnic. Nastává-li tyto situace, platí

$$(P, n) \cap (S, r) = \{x, y, u, v\}.$$

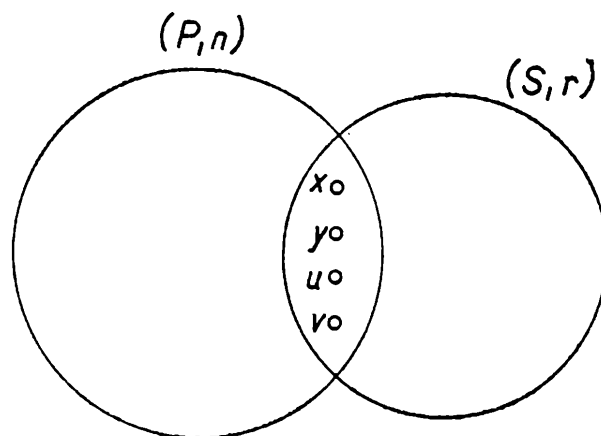
Výsledek je znázorněn na obr. 12, množinový diagram je na obr. 13.



Obr. 12

Úloha 7. Promyslete konstrukce společných tečen dvou bodových kružnic známé ze školy. Jedna z nich je založena na myšlence, že společná tečna dvou kružnic je rovnoběžná s tečnou vedenou ze středu menší kružnice ke kružnici soustředné s větší o poloměru rovném rozdílu (součtu) poloměrů obou kružnic. Druhá konstrukce se opírá o poučku o středech stejnolehlosti dvou kružnic.

Zároveň uvedme dvě úlohy na rýsování, kterými si připomeneme konstrukci dalších množin přímek v rovině.



Obr. 13

Úloha 8. Je dána kružnice k s průměrem AB a bod F , který je vnitřním bodem úsečky AB , není však jejím středem. Písmenem x označme libovolnou přímku svazku (F) , π je množina všech přímek roviny kružnice k . Narýsujte několik prvků množiny

$$E = \{t \in \pi; t \perp x \text{ a průsečík } t \text{ a } x \text{ leží na } k\}.$$

Množina E je množinou všech tečen jisté elipsy, tj. přímkovou elipsou.

Úloha 9. Je dána přímka p a bod F , který na ní neleží. Označme x libovolnou přímku svazku (F) , π množinu všech přímek roviny pF . Narýsujte několik prvků množiny

$$P = \{t \in \pi; t \perp x \text{ a průsečík } t \text{ a } x \text{ leží na přímce } p\}.$$

Množina P je množinou všech tečen jisté paraboly, tj. přímkovou parabolou.

Geometrická místa

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

Část II.

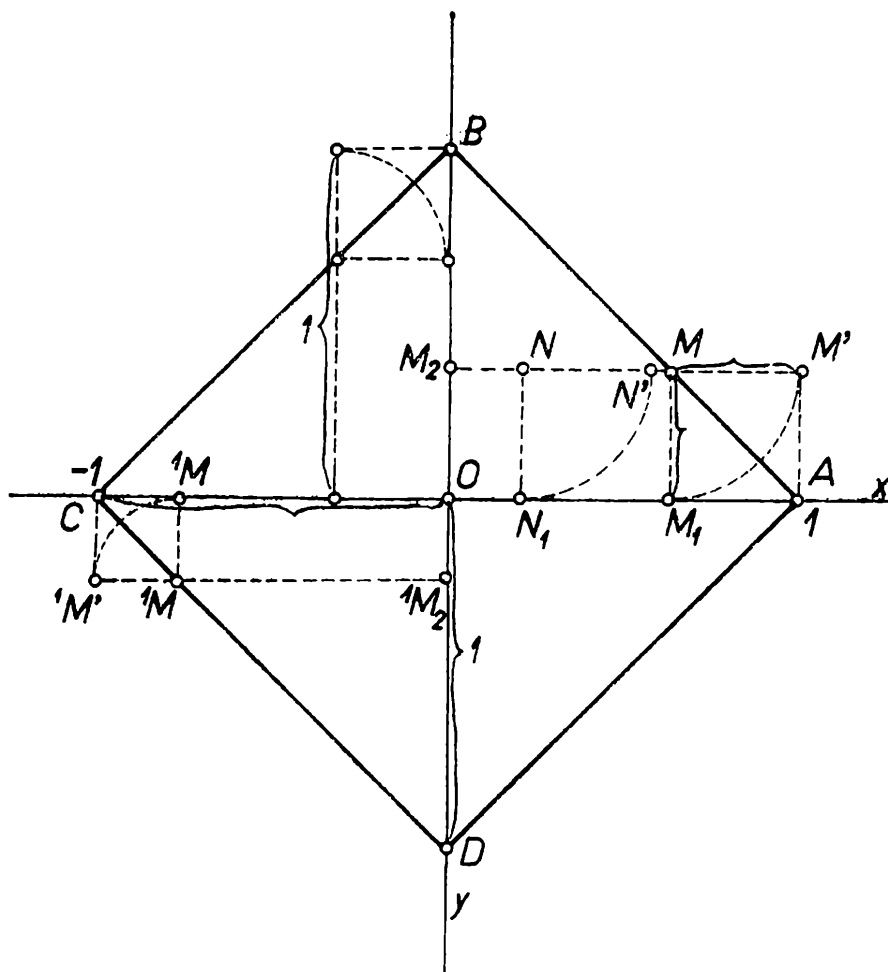
V další části budeme vyšetřovat geometrická místa, která se opírají o pravoúhlou soustavu souřadnic. Je jasné, že množinou všech bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice jsou celá čísla, je síť „mřížových bodů“. Tato množina obsahuje nekonečné množství izolovaných bodů, které můžeme velmi jednoduše vyjádřit pomocí uspořádaných dvojic čísel $[m; n]$, (m, n jsou celá čísla), která udávají pravoúhlé souřadnice těchto „mřížových bodů“ sítě.

Příklad 1. Máme určit g.m. bodů, které mají od dvou navzájem k sobě kolmých přímek stálý součet vzdáleností $s = 1$.

Zvolíme-li obě přímky za osy pravoúhlé soustavy souřadnic, můžeme uvedenou podmínku vyjádřit

$$|x| + |y| = 1. \quad (1)$$

Rovnici (1) vyhovují souřadnice bodů $A = [1; 0]$, $B = [0; 1]$, $C = [-1; 0]$, $D = [0; -1]$, ale také bodů $[\pm 1/2; \pm 1/2]$ (které dostaneme vezmeme-li všechny možné kombinace znamének $+$, $-$). Znázorníme-li si tyto body (obr. 5) v pravoúhlé soustavě souřadnic, jsme vedeni k domněnce, že hledaným g.m. jsou všechny body obvodu čtverce $ABCD$.



Obr. 5

Jak jsme již poznali, body A , B , C , D náležejí hledanému g.m. Zvolme si na obvodě čtverce libovolný bod M ; dokážeme, že jeho souřadnice splňují rovnici (1).

Sestrojíme na osách x , y pravoúhlé průměty

M_1 , M_2 bodu M do těchto os. Zřejmě platí $MM_1 = |y|$, $MM_2 = |x|$. Sestrojíme-li bod M' tak, aby $AM' \perp M_2M'$, je $MM' = MM_1$, neboť $\triangle AM_1M \cong \triangle AM'M$ a $M_2M' = OA = 1$, takže pro souřadnice bodu M platí rovnice (1), ať M volíme na kterékoliv straně čtverce $ABCD$. Tím jsme dokázali:

Geometrickým místem bodů, které mají od dvou k sobě kolmých přímek stálý součet vzdáleností $s = 1$, je obvod čtverce $ABCD$, jehož úhlopříčky leží na daných přímkách a vrcholy čtverce mají od jeho středu vzdálenost s .

Poznámka: Je zřejmé, že pro souřadnice bodů, které leží uvnitř čtverce (např. pro bod N na obr. 5), platí

$$|x| + |y| < 1.$$

Pro bod N platí: $M_2N + NN_1 < M_2M + MM_1 = M_2M + MM' = 1$ a podobně i pro ostatní body vnitřku čtverce $ABCD$.

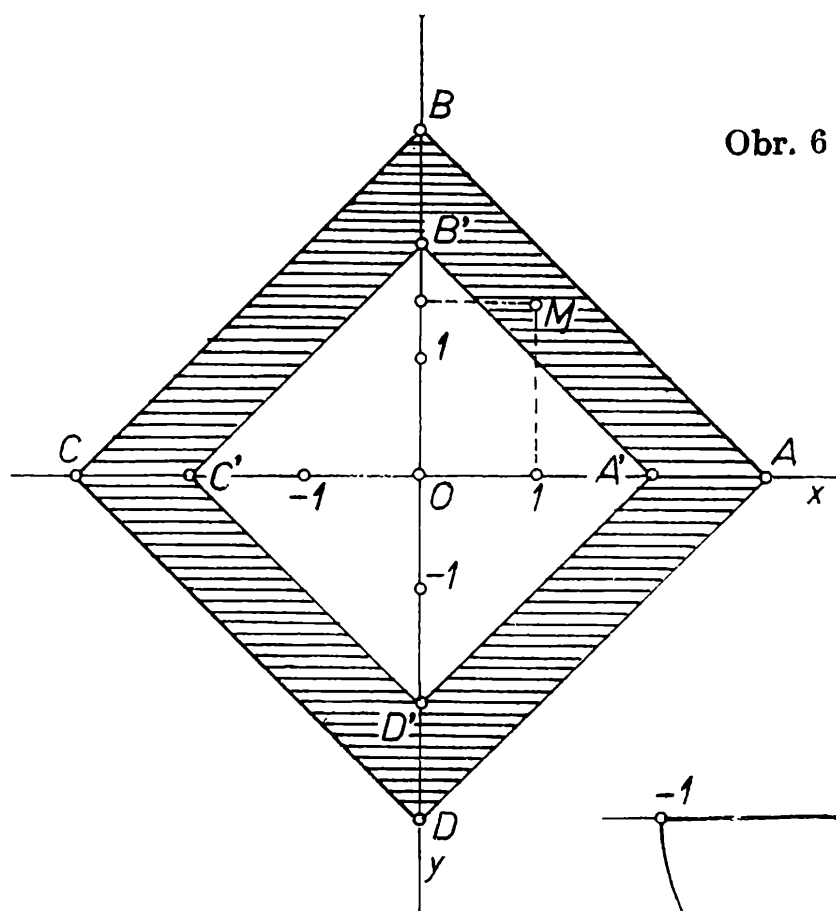
Platí tudíž pro všechny body plochy čtverce včetně jeho obvodu:

$$|x| + |y| \leq 1, \quad (2)$$

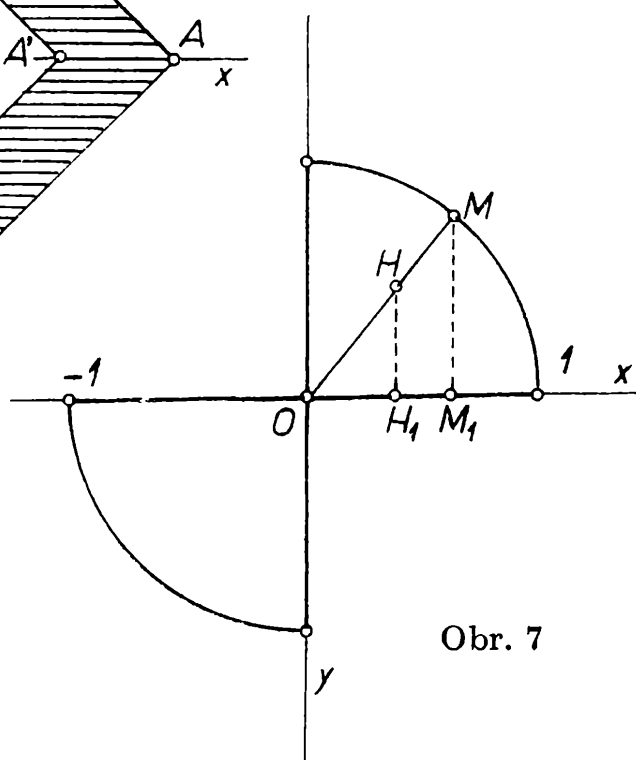
a pro body, které leží vně čtverce,

$$|x| + |y| > 1 \quad (2')$$

Těchto výsledků užijeme v následujícím příkladě.



Obr. 6



Obr. 7

Příklad 2. Určete g. m. bodů, jejichž součet vzdáleností od dvou k sobě kolmých přímek je aspoň 2, ale nejvýš 3 (obr. 6).

Zvolíme-li tyto přímky za osy pravoúhlé soustavy souřadnic, můžeme podmínku úlohy zapsat

$$2 \leq |x| + |y| \leq 3 \quad (3)$$

Podle výsledku předcházejícího příkladu [nerovnice (2) a (2')] víme, že g.m. bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice X, Y splňují nerovnici

$$|x| + |y| \leq 3,$$

jsou všechny body čtverce o vrcholech $A \equiv [3; 0]$, $B \equiv [0; 3]$, $C \equiv [-3; 0]$, $D \equiv [0; -3]$. Nerovnici $|x| + |y| \geq 2$ splňují souřadnice obvodu čtverce o vrcholech $A' \equiv [2; 0]$, $B' \equiv [0; 2]$, $C' \equiv [-2; 0]$, $D' \equiv [0; -2]$ a všechny body jeho vnějšku. Průnik množiny bodů plochy čtverce $ABCD$ a množiny bodů vnějšku čtverce $A'B'C'D'$ včetně obvodů obou čtverců náleží hledané množině.

závěr: Hledanou množinou všech bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice splňují nerovnici (3), je část roviny omezená čtverci $ABCD$, $A'B'C'D'$ včetně obvodů těchto čtverců.

V dalších dvou příkladech se budeme zabývat úlohou obrácenou. K dané množině bodů v rovině budeme hledat její matematické vyjádření.

Příklad 3. Máme nalézt matematické vyjádření všech bodů, které náleží vyznačeným částem kruhu v obr. 7.

Zvolíme si pravoúhlou soustavu souřadnic, jak je v obr. 7 naznačeno. Je-li H bod vnitřku vyznačené části kruhu, a jsou-li jeho souřadnice $[x; y]$, pak zřejmě platí $OH^2 = x^2 + y^2$.

Polopřímka OH protíná kružnici k v bodě M , jehož souřadnice můžeme psát $[kx; ky]$, kde x, y , jsou souřadnice bodu H a k je reálné číslo. Poněvadž $OM = 1$, platí

$$k^2x^2 + k^2y^2 = 1, \quad \text{takže} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{k^2} \leq 1$$

Pro část kruhu v 1. kvadrantu platí pro souřadnice všech bodů zároveň nerovnice

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (4)$$

Pro body kruhu ve 3. kvadrantu platí zároveň nerovnice

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \leq 0, \quad y \leq 0. \quad (4')$$

Výsledky (4) a (4') můžeme spojit a vyjádřit ve tvaru

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad xy \geq 0 \quad (5)$$

Obráceným postupem se přesvědčíme, že podmínka (5) vyjadřuje matematicky polohu všech bodů, které náležejí vyznačeným částem kruhu v obr. 7.

Příklad 4. Vyjádřete užitím pravouhlých souřadnic množinu všech bodů ležících v černých polích šachovnice o 64 polích.

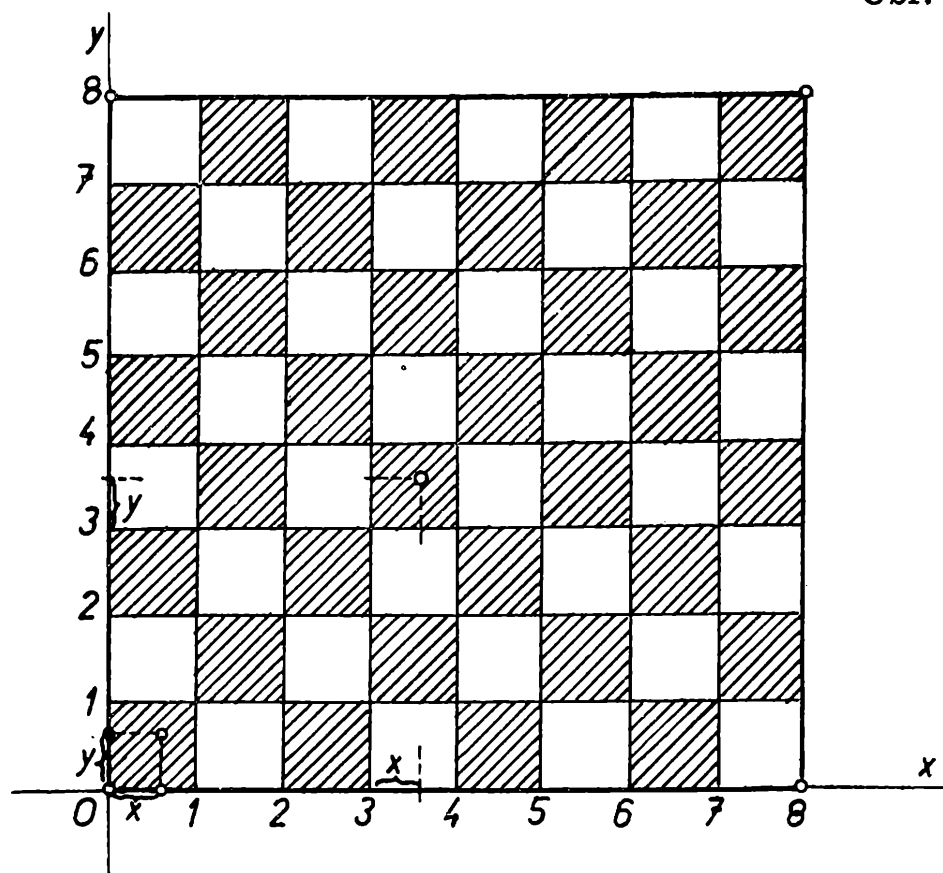
Zvolíme-li pravouhlou soustavu souřadnic, jak je naznačeno v obr. 8, můžeme všechny body ležící ve čtverci v levém dolním rohu vyjádřit dvojicemi uspořádaných reálných čísel $[x; y]$, které udávají pravouhlé souřadnice těchto bodů.

Platí pro ně

$$0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (5)$$

Snadno poznáme, že body ležící v m -tém řádku a n -tém sloupci jsou vyjádřeny souřadnicemi

Obr. 8



$$[m - 1 + x; \quad n - 1 + y], \quad (6)$$

m, n jsou přirozená čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 8\}$. Podmínky (5) a (6) však vyjadřují souřadnice bodů jak na černých, tak i na bílých polích.

Uvedením další podmínky, aby $m + n$ bylo číslo sudé, (7), dosáhneme toho, že máme pomocí souřadnic (6) určeny jen ty body, které jsou na černých polích šachovnice. *Vztahy vyjádřené v (5), (6) a (7) jsou nutnými a zároveň postačujícími podmínkami matematického vyjádření bodů na černých polích šachovnice.*

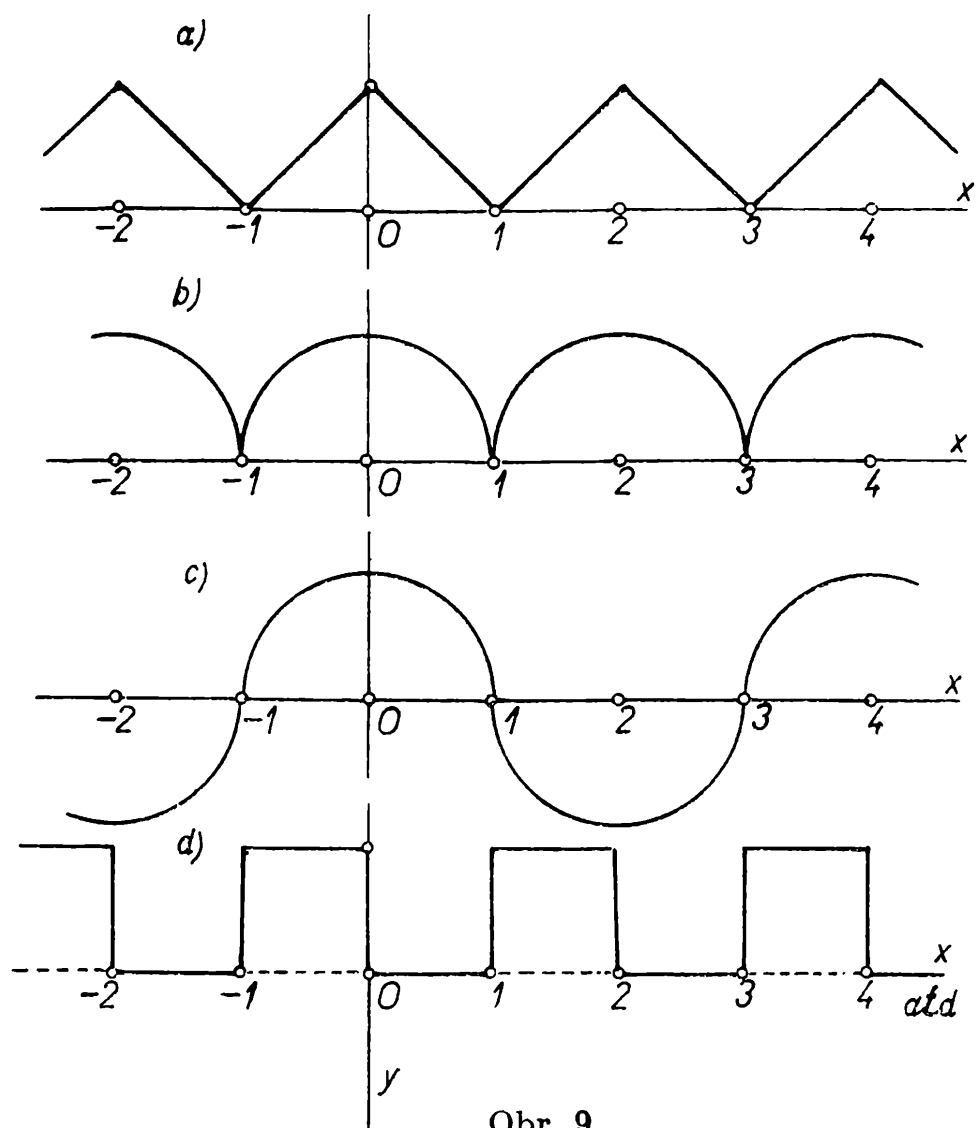
Cvičení k 2. části.

(Čísla m, n ve všech příkladech značí celá čísla (pokud není jinak uvedeno))

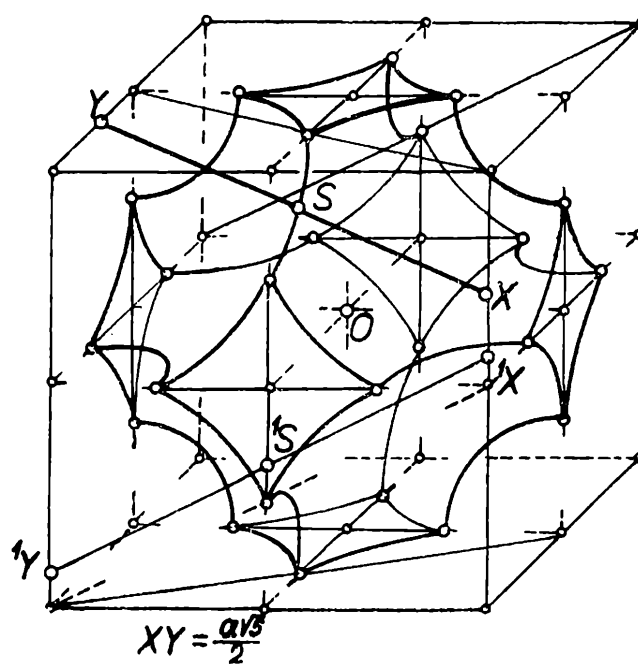
1. Určete g.m. bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice splňují rovnice:
a) $|x| = 1$, $|y| = 1$; b) $|x| = 2$, $|y| = 3$.
2. Určete g.m. bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice vyhovují nerovnicím:
a) $|x| < 1$, $|y| < 1$; b) $2 \leq |x| \leq 3$; $2 \leq |y| \leq 3$.
3. Určete g.m. bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice splňují nerovnice
a) $2n \leq (|x| + |y|) \leq 2n + 1$, n je přiroz. číslo,
b) $2n \leq |x| \leq 2n + 1$; $2n \leq |y| \leq 2n + 1$, n je přir. číslo.
4. Určete g.m. bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice splňují nerovnici:
 $|x - 2m| + |y - 2n| \leq 1$; (m, n je přir. číslo.)
5. Vyjádřete pomocí pravoúhlých souřadnic množinu středů všech kružnic, které jsou vepsány do čtverců o straně $a = 2$ čtvercové sítě, jestliže osy x a y soustavy souřadnic náleží do této sítě.
6. Kružnice v předcházejícím příkladě se navzájem dotýkají. Vyjádřete pomocí pravoúhlých souřadnic množinu všech jejich dotykových bodů.
7. Pomocí pravoúhlých souřadnic vyjádřete množinu všech průsečíků všech kružnic, které mají středy v mřížových bodech čtvercové sítě (velikost strany čtverečků je $a = 2$), jsou-li poloměry kružnic $r = \sqrt{2}$ (osy x, y náleží čtvercové síti).
8. Vyjádřete pomocí souřadnic množinu všech bodů na všech šachových polích, kterými prochází úhlopříčka, vycházející z levého dolního okraje šachovnice.
9. Vyjádřete pomocí pravoúhlých souřadnic množiny bodů čar vyznačených v obr. 9.
10. Vyjádřete pomocí pravoúhlých souřadnic všechny body plochy omezené osou x a čarami a) b) d) v obr. 9.

Výsledky k příkladům ve cvičeních :

Část I: 1. Jsou-li K, L body osy o , $SK = SL = AB/2$, je g.m. a) část osy o vně úsečky KL , b) body K, L , c) vnitřky úseček SK, SL . 2. Čára složená ze čtyř oblouků kružnic (uvnitř čtverce) o středech ve vrcholech čtverce a o poloměru $r = a/2$ a dále ze a) čtyř úseček na stranách čtverce, b) z částí oblouků kružnic a částí středních příček čtverce. 3. Podobně jako v př. 2b. 4. a) Oblouky čtyř kružnic se středy ve vrcholech krychle o poloměrech $r = a/2$ a ležících ve stěnách krychle, b) jako v a) a dále všechny střední příčky ve stěnách krychle, c) viz obr. 10, d) části oblouků kružnic v rovinách souměrnosti (rovnoběžných se stěnami) krychle, o poloměrech $a/2$ a o středech na hranách krychle a dále částí úseček spojujících středy stěn krychle. 5. Všechny body tří rovnoběžníků při vrcholech trojúhelníka se společným vrcholem v těžišti $\triangle ABC$ s dvěma stranami ve stranách daného trojúhelníka s vyloučením těch bodů, které leží na stranách daného trojúhelníka. 6. Všechny body čtyř rovnoběžníků při vrcholech daného čtyřúhelníka se dvěma stranami ve stranách čtyřúhelníka (délky jejich stran se rovnají třetinám délek stran daného



Obr. 9



Obr. 10

čtyřúhelníka) s vyloučením bodů na stranách daného čtyřúhelníka. 7. Všechny body prostoru osmi krychlí o hraně délky $a/3$, které mají s danou krychlí společné vrcholy a jejich tři stěny leží ve stěnách dané krychle, přičemž body ležící v těchto stěnách je nutno vyloučit. 8. Všechny body čtyř rovnoběžnostěnů při vrcholech A, B, C, D se stěnami ve stěnách jehlanu; délky hran jsou $a/3, b/3$ a jejich výška je $v/3$ (s vyloučením bodů ležících ve stěnách jehlanu). 9. Přímka $q \parallel p$ procházející těžištěm některého sestrojeného trojúhelníka (v a) je nutno vyloučit průsečík $q \cdot AB$. 11. Množina všech přímek rotačních kuželových ploch o vrcholech v bodech P_1, P_2 a ose AB pro které platí: $AP_1 : BP_1 = d_1/d_2, i = 1, 2$. Množina všech rovin, které neobsahují body A, B a procházejí body P_1, P_2 jako v př. 11.

Část II: (Ve všech výsledcích značí m, n celá čísla).

1. a) Obvod čtverce o vrcholech $[\pm 1; \pm 1]$; b) obvod obdélníka o vrcholech $[\pm 2; \pm 3]$. 2. a) Vnitřek plochy čtverce o vrcholech $[\pm 1; \pm 1]$, b) část roviny mezi čtverci s vrcholy $[\pm 3; \pm 3], [\pm 2; \pm 2]$ včetně jejich obvodů. 3. Části roviny mezi čtverci s vrcholy a) $[m_i; 0], [0; m_i], [-m_i; 0], [0; -m_i], i = 1, 2, m_1 = 2n + 1, m_2 = 2n, n$ je př. č.; b) $[\pm(2n + 1), \pm(2n + 1)]$ a $[\pm 2n, \pm 2n]$. 4. Množina všech bodů ploch čtverců a středech v bodech $[m; n]$ a shodných se čtvercem o vrcholech $[1; 0], [0; 1], [-1; 0], [0; -1]$ a s úhlopříčkami rovnoběžnými s osami x, y . 5. $[2m + 1; 2n + 1]$. 6. $[2m + 1; 2n], [2m; 2n + 1]$. 7. $[2m + 1; 2n + 1]$. 8. $[m - 1 + x; m - 1 + y], 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, m = 1, 2 \dots$. 9. a) $|x - 2m| + |y| = 1, y \geq 0$; b) $(x - 2m)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; c) $(x - 2m)^2 + y^2 = 1$, pro m sudé je $y \geq 0$, pro m liché je $y \leq 0$; d) $[m - 1 + x; \frac{1 + (-1)^2}{2}]$, $m + n$ je sudé číslo; $0 < x < 1$; pro $x = 1$ je $[m; y]$, kde $0 \leq y \leq 1$. 10. a) $|x - 2m| + |y| = 1, y \geq 0$; b) $(x - 2m)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; d) $[2m + 1 + x; y], 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

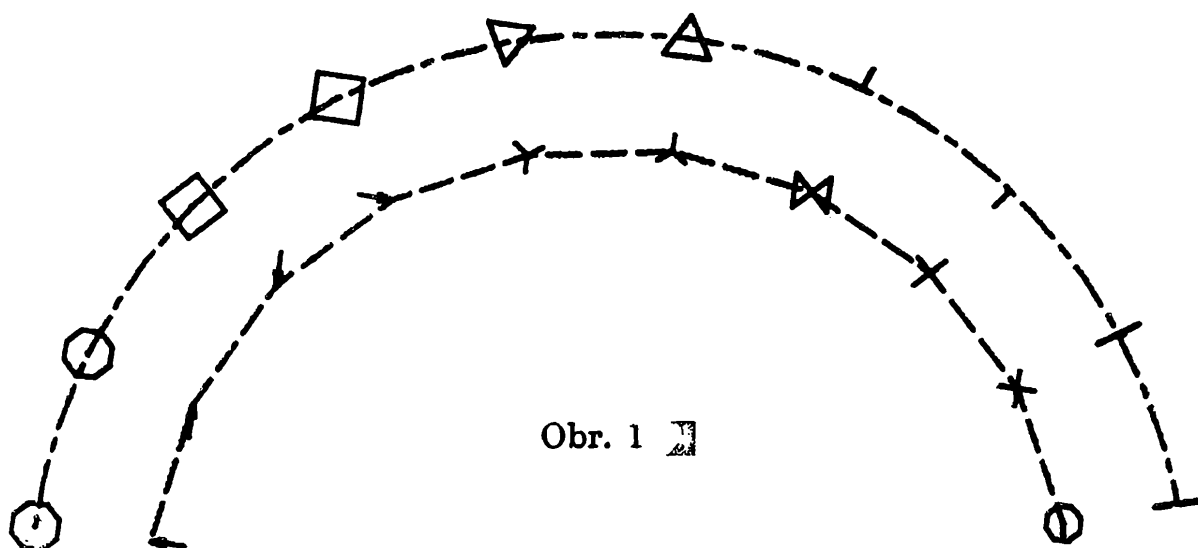
Automatické kreslení III.

„Vzdělání“ kreslících automatů

Doc. Ing. LADISLAV DRS, Praha

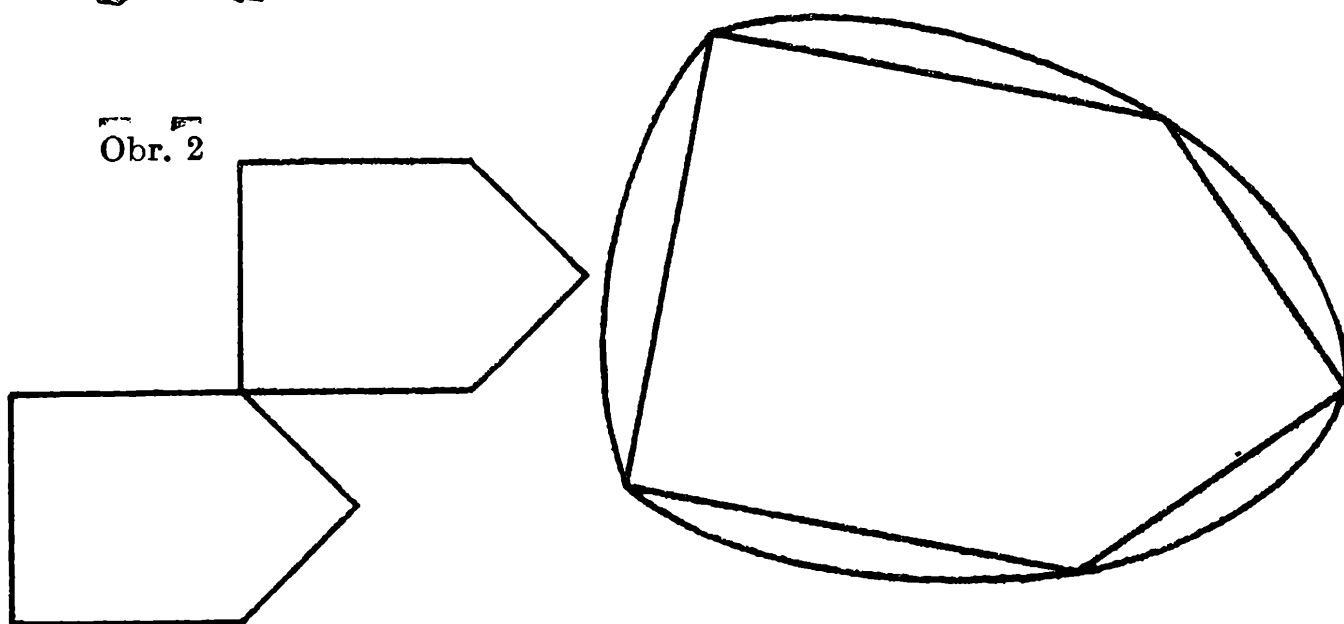
Předchozí dva články obsahovaly technický popis kreslících automatů řízených počítačem (plottrů) a popis způsobu jejich činnosti. Nyní se seznámíme s jejich „duševními“ schopnostmi.

Práce kreslícího automatu (stejně jako každého živého pracovníka) je tím hodnotnější, čím více úkolů dovede vykonat samostatně, bez podrobného návodu. Tato schopnost, umět určité základní operace na jednoduchý, pouze rámcový pokyn tvoří pak ono „vzdělání“ automatu. Dodává mu ho tak zvaný základní program, kterým je každý plotter



Obr. 1

Obr. 2



doplňen. Základní program se v podrobnostech pro různé kreslicí automaty liší, ale většinou „umí“ podle něj každý plotter.

1. spojovat dané body úsečkami různých typů (plně, čárkovaně, čerchovaně),

2. kreslit různé, v různých odvětvích techniky často se vyskytující značky,

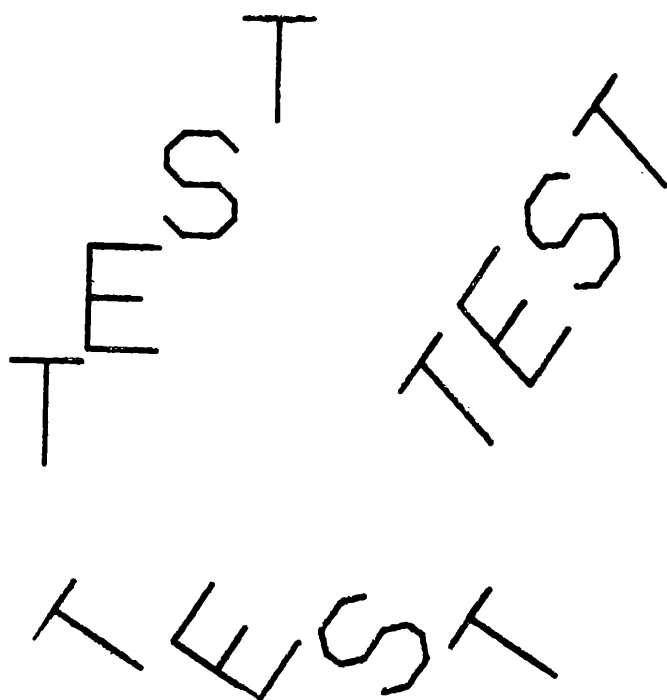
3. psát různými typy písma,

4. spojovat body vhodnými křivkami (interpolace),

5. zmenšovat, zvětšovat a otáčet dané rovinné útvary.

Připojené obrázky byly nakresleny automatem a ilustrují těchto pět schopností plottru.

Na obr. 1 je spojeno deset sousedních vrcholů pravidelného dvacetiúhelníka čárkovanou lomenou čarou a její vrcholy jsou opatřeny různými značkami. Deset sousedních vrcholů většího pravidelného dvacetiúhelníka je spojeno čerchovanou křivkou (interpolační křivka, má tvar kružnice) a v těchto vrcholech jsou nakresleny další značky.



Obr. 3

Na obr. 2 je základní obrazec (pětiúhelník uprostřed dole) jednak posunut vpravo nahoru, jednak posunut vlevo, dvakrát zvětšen a otočen o 1 rad. Tomuto pětiúhelníku je opsána interpolační křivka.

Na obr. 3 jsou různě uspořádané nápisy.

Všechny tyto práce vykonal kreslící automat podle jednoduchých pokynů asi tohoto typu: nakresli strany pravidelného dvacetiúhelníka, v jeho vrcholech nakresli značky atd. Pokyny neobsahují žádné podrobné instrukce (např. jak nakreslit značku $\triangle$, jak nakreslit interpolační křivku, jak

napsat písmeno T atd.). Tyto pokyny jsou ovšem napsány v jazyku, kterému počítač, řídicí plottr, „rozumí“ (FORTRAN).

Kromě tohoto základního vzdělání mohou mít kreslící automaty i „vyšší“ vzdělání, ale o tom až příště v závěrečné části článku.

FYZIKA

Rozumíte Archimedovu zákonu?

JAN TESAŘ, Praha

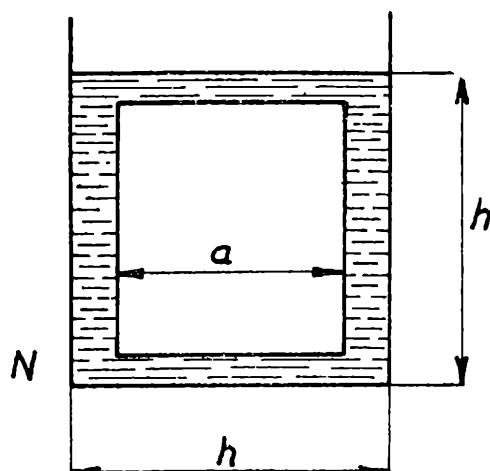
Obr. 1 znázorňuje krychli o hraně $a = 5,0$ cm, ponořenou do vody o hustotě $\rho' = 1,0$ g cm⁻³, která je nalita do nádoby N tvaru kvádrů. Vnitřní podstava nádoby je čtverec o straně $h = 5,2$ cm. Voda sahá v nádobě N po ponoření tělesa do výšky h nade dnem. Značí-li F velikost síly, jíž je těleso v kapalině nadlehčováno a V objem tělesa, je $F = V\rho'g = a^3\rho'g \doteq 125$ N, což je tíha vody o objemu 125 cm³. Přitom se při povrchním pozorování zdá, že tento objem 125 cm³ vody vytlačilo ponořené těleso o objemu V . Tato domněnka je však nesprávná, neboť všechna voda v nádobě má objem jen $V_0 = (h^3 - a^3) \doteq 140,6$ cm³ —

— $125 \text{ cm}^3 \doteq 16 \text{ cm}^3$. Ponořené těleso nemůže však v nádobě vytlačit 125 cm^3 vody, když jí v nádobě je jen 16 cm^3 . Je tedy patrné, že v tomto případě neplatí ta formulace Archimédova zákona, které se téměř všeobecně používá:

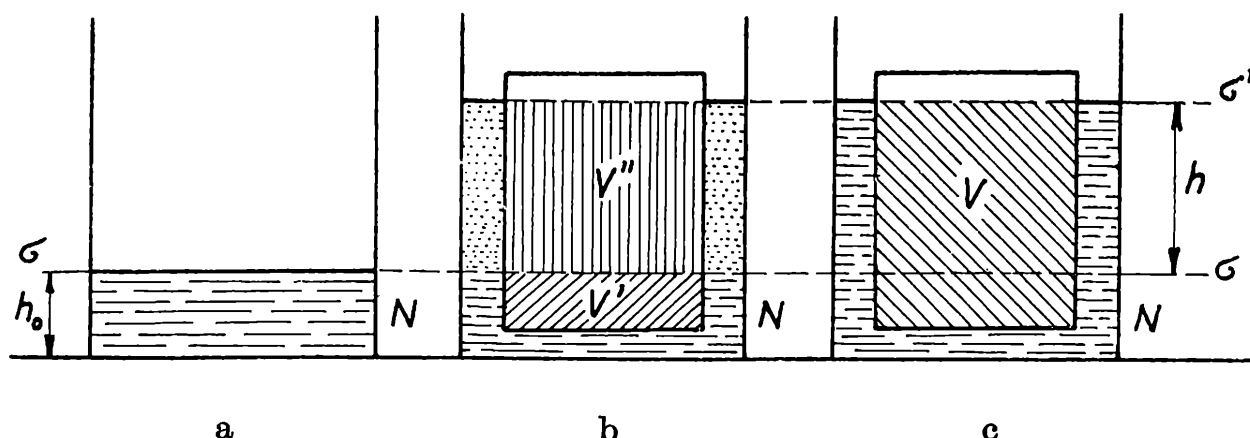
„Těleso ponořené do kapaliny je v ní nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze kapaliny vytlačené ponořenou částí tělesa.“ (A)

Kapalina totiž nemusí být vždy vytlačena ponořenou částí tělesa z celého objemu V , který těleso v kapalině zaujímá, nýbrž jen z části tohoto objemu, jak je patrné z obr. 2a, 2b, 2c. Je-li do prázdné nádoby nalita kapalina do výšky h_0 nade dno (obr. 2a), vytlačí ponořená část tělesa kapalinu jen z části prostoru objemu V' , šrafované na obr. 2b

šikmými šrafami, do prostoru označeného tečkami. Přitom se zvedne povrch kapaliny o výšku h (obr. 2c), takže se těleso ponoří do kapaliny objemem V , šrafovaným na obr. 2c šikmými šrafami, který je větší než objem V' . z něhož byla kapalina tělesem vytlačena. Rozdíl $V - V' = V''$. Objem V'' je na obr. 2b šrafován svislými šrafami. Z části prostoru o objemu V'' nemohlo těleso kapalinu vytlačit, protože tam nebyla, jak je patrné z obr. 2a.



Obr. 1



Obr. 2

Archimédův zákon lze vyjádřit také takto:

„Těleso ponořené do kapaliny je v ní nadlehčováno vztlakovou silou, která se rovná tíze kapaliny o objemu V , jímž je těleso v kapalině ponořeno.“ (B)

Je-li těleso ponořeno v kapalině zcela, značí V objem celého tělesa.

Správnost formulace (B) se snadno dokáže užitím zákona zachování mechanické energie. Značí-li F velikost síly, kterou je těleso v kapalině nadlehčováno, V objem ponořeného tělesa nebo objem ponořené části tělesa, ρ jeho hustotu, ρ' hustotu kapaliny, do které je těleso ponořeno, g tíhové zrychlení, zvětší se v tíhovém poli po přemístění tělesa z polohy I do polohy II potenciální tíhová energie tělesa o hodnotu $\Delta W_1 = V\rho gh$, jestliže počáteční rychlost tělesa v poloze I i koncová rychlost tělesa v poloze II se rovnají nule. Zároveň se však zmenší potenciální tíhová energie kapaliny o $\Delta W_2 = V\rho'gh$, neboť část kapaliny o objemu V vyplní prostor opuštěný tělesem (obr. 3). K jiné změně mechanické energie během přemístění tělesa nedošlo. Celková mechanická energie soustavy „kapalina + ponořené těleso“ vzroste tedy při tomto přemístění tělesa o $\Delta W = \Delta W_1 - \Delta W_2 = V\rho gh - V\rho'gh$. Podle zákona zachování mechanické energie je tato změna potenciální tíhové energie soustavy rovna práci A , kterou vykonala vnější síla při zvedání tělesa po dráze h . Platí tedy $A = (V\rho g - F)h = \Delta W = V\rho gh - V\rho'gh$, takže

$$F = V\rho'g = G', \quad (1)$$

kde G' značí tíhu kapaliny objemu V .

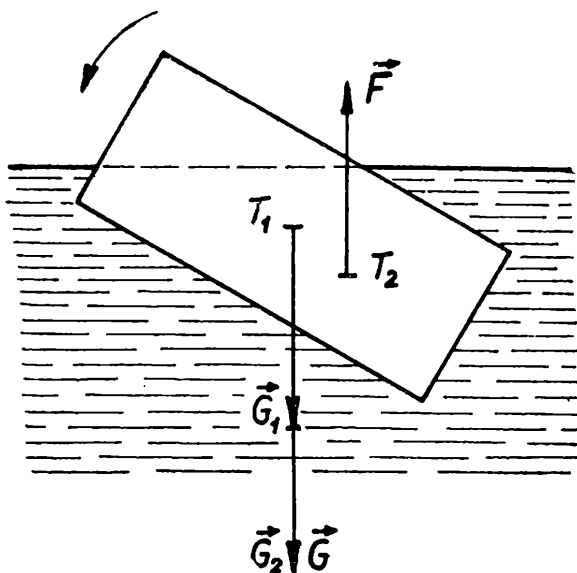
Vztah (1) je matematickým vyjádřením Archimédova zákona ve formulaci (B).

Nachází-li se soustava „kapalina + těleso“ v tíhovém poli, působí na těleso v kapalině dvě nesouhlasně orientované síly, tíhová síla G o velikosti $G = mg = V\rho g$ v těžišti T_1 tělesa, a vztlaková síla F o velikosti $F = V\rho'g$, určená formulací (B) Archimédova zákona. Síla F je výslednicí svislých složek všech sil vyvolaných hydrostatickými tlaky kapaliny na ponořené těleso. Síla F je orientována svisle vzhůru a působí v jistém bodě T_2 tělesa.

Mají-li síly $\vec{G}$ a $\vec{F}$ společnou vektorovou přímku, působí na ponořené těleso výslednice $\vec{F}'$ těchto sil, která má stálou velikost $F' = |G - F|$ (obr. 3). Tato síla uvede těleso v kapalině do přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu. Je-li $G > F$, klesá těleso ke dnu nádoby, je-li $G < F$, stoupá těleso k povrchu kapaliny a zůstává v ní ponořeno takovou částí svého objemu, že tíha $\vec{G}$ tělesa je v rovnováze se vztlakovou silou $\vec{F}$, kterou působí kapalina na ponořené těleso.

Obecně nemají vztlaková síla $\vec{F}$ a tíhová síla $\vec{G}$ společnou vektorovou přímku. V tomto případě není těleso v kapalině v rovnovážném stavu, neboť síla $\vec{G}$ působící v těžišti T_1 tělesa a síla $\vec{F}$ působící v bodě T_2 jsou opačně orientovány. Je-li $G = |\vec{G}| > F = |\vec{F}|$ (obr. 4), rozloží se síla

Je-li $G < F$, rozloží se síla $\vec{F}$ na složky $\vec{F}_1$ o velikosti $F_1 = G$ a $\vec{F}_2$ o velikosti $F_2 = F - G$. Podobnou úvahou jako v předcházejícím odstavci se dokáže, že těleso zaujme v kapalině po několika tlumených kyvech takovou polohu, že síly $\vec{F}$ a $\vec{G}$ budou mít společnou svislou vektorovou přímku a působením síly $\vec{F}_2$ vystoupí těleso k povrchu kapaliny.



Obr. 4

Nádoba s kapalinou, ve které se nachází také tuhé těleso, na něj kapalina chemicky nepůsobí, je soustavou dvou těles, již budeme značit soustava „kapalina a těleso“. Má-li být tato soustava, působí-li na ni

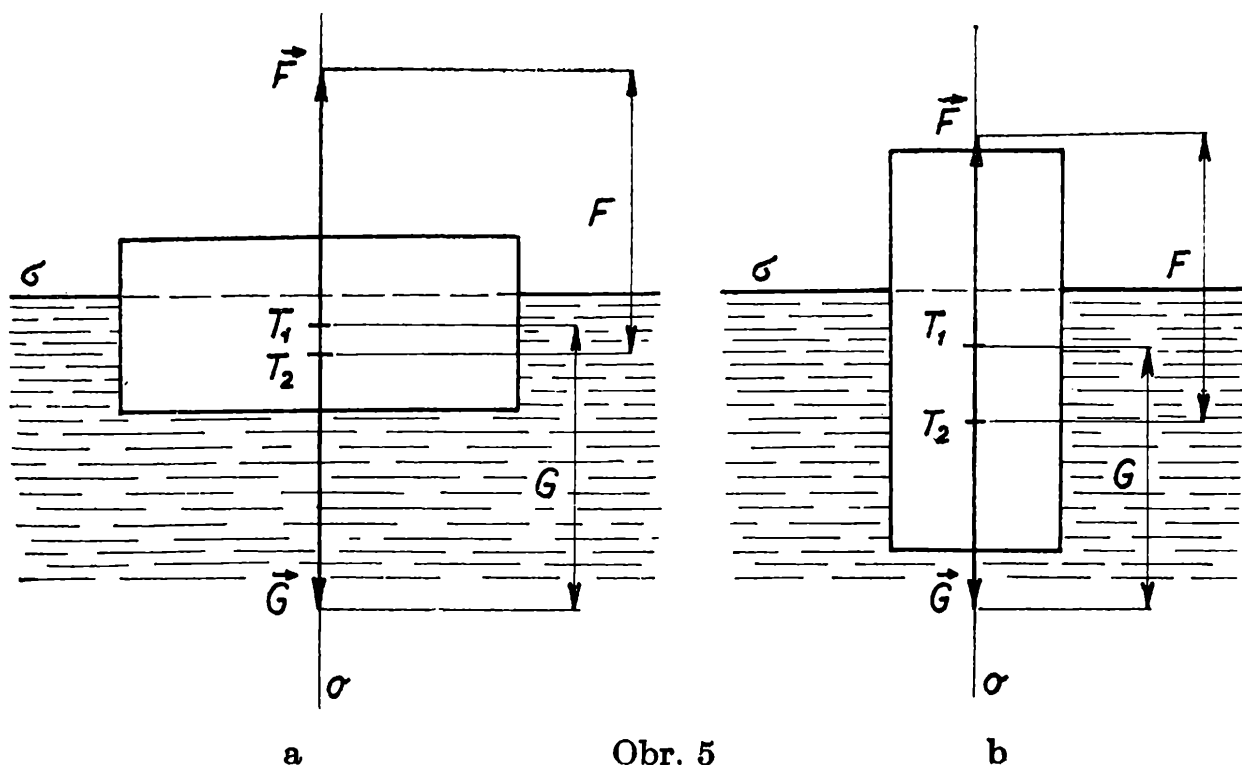
jen síly tíhového pole, v rovnovážné poloze, nesmí v ní dojít k jevům, při kterých se mění velikost potenciální tíhové energie soustavy. Druhy rovnovážných poloh soustavy těles jsou stejné jako u jednoho tělesa.

Těleso, jehož tíha má větší velikost než je velikost vztlakové síly ($G > F$), klesá podle úvah v předcházející kapitole ke dnu nádoby. Od okamžiku, kdy těleso dopadne na dno nádoby, je těžiště T soustavy za daných podmínek v nejnižší možné poloze a potenciální tíhová energie soustavy je nejmenší, neboť těleso těžší než stejný objem kapaliny jako má těleso, je u dna nádoby. Soustava má rovnovážnou polohu stálou. Tento případ nastane vždy, je-li průměrná hustota ρ tělesa větší než hustota ρ' kapaliny. Pak je také $G = V\rho g > G' = V\rho'g = F$.

Je-li $G = F$ a působíště sil $\vec{G}$ a $\vec{F}$ neleží na společné svislé vektorové přímce, uvede dvojice sil $\vec{G}$ a $\vec{F}$ těleso do takové polohy, že spojnice T_1T_2 působíšť obou těchto sil bude svislá. Pak budou síly $\vec{G}$ a $\vec{F}$ v rovnováze. Při jakémkoli přemístění tělesa do libovolné polohy v kapalině se v tomto případě potenciální tíhová energie soustavy nemění, neboť dojde jen k výměně poloh tělesa a kapaliny stejného objemu a stejné tíhy jako má těleso. Soustava má tedy rovnovážnou polohu volnou. Těleso se v kapalině vznáší. Tento případ nastane vždy, když průměrná hustota ρ tělesa se rovná hustotě ρ' kapaliny.

Je-li průměrná hustota ρ tělesa menší než hustota ρ' kapaliny, pak $G < F$ a těleso stoupá k povrchu kapaliny a zůstává v ní ponořeno takovou částí V svého objemu, že tíha G celého tělesa má stejnou velikost jako tíha G' ($G' = F$) stejného objemu kapaliny jako má ponořená část tělesa. V tomto případě plove těleso na kapalině. Plovoucí těleso může mít všechny tři druhy rovnovážné polohy. Závisí to na vzájemné

poloze působíště T_1 tíhové síly $\vec{G}$ a působíště vztlakové síly $\vec{F}$. Obě tyto síly mají při plování tělesa stejnou velikost a nesouhlasnou orientaci, takže jsou v rovnováze, když body T_1 a T_2 leží svisle nad sebou. Pak přímka o , procházející body T_1 a T_2 se nazývá osa plování. Je-li osa plování svislá, je soustava „Kapalina + těleso“ v rovnovážné poloze. O druhu rovnovážné polohy rozhoduje poloha tzv. metacentra. Metacentrum M je průsečík vektorové přímky síly $\vec{F}$ s osou o plování, vychýlenou poněkud z polohy svislé. Do metacentra je možno přemístit působíště síly $\vec{F}$, takže potom na těleso působí v metacentru M a v těžišti T_1 dvě stejně veliké, rovnoběžné, nesouhlasně orientované síly $\vec{F}$ a $\vec{G}$, které tvoří dvojici sil. není-li osa o plování svislá, otočí moment této dvojice sil těleso tak, aby těleso i soustava „kapalina + těleso“ zaujaly rovnovážnou polohu stálou.

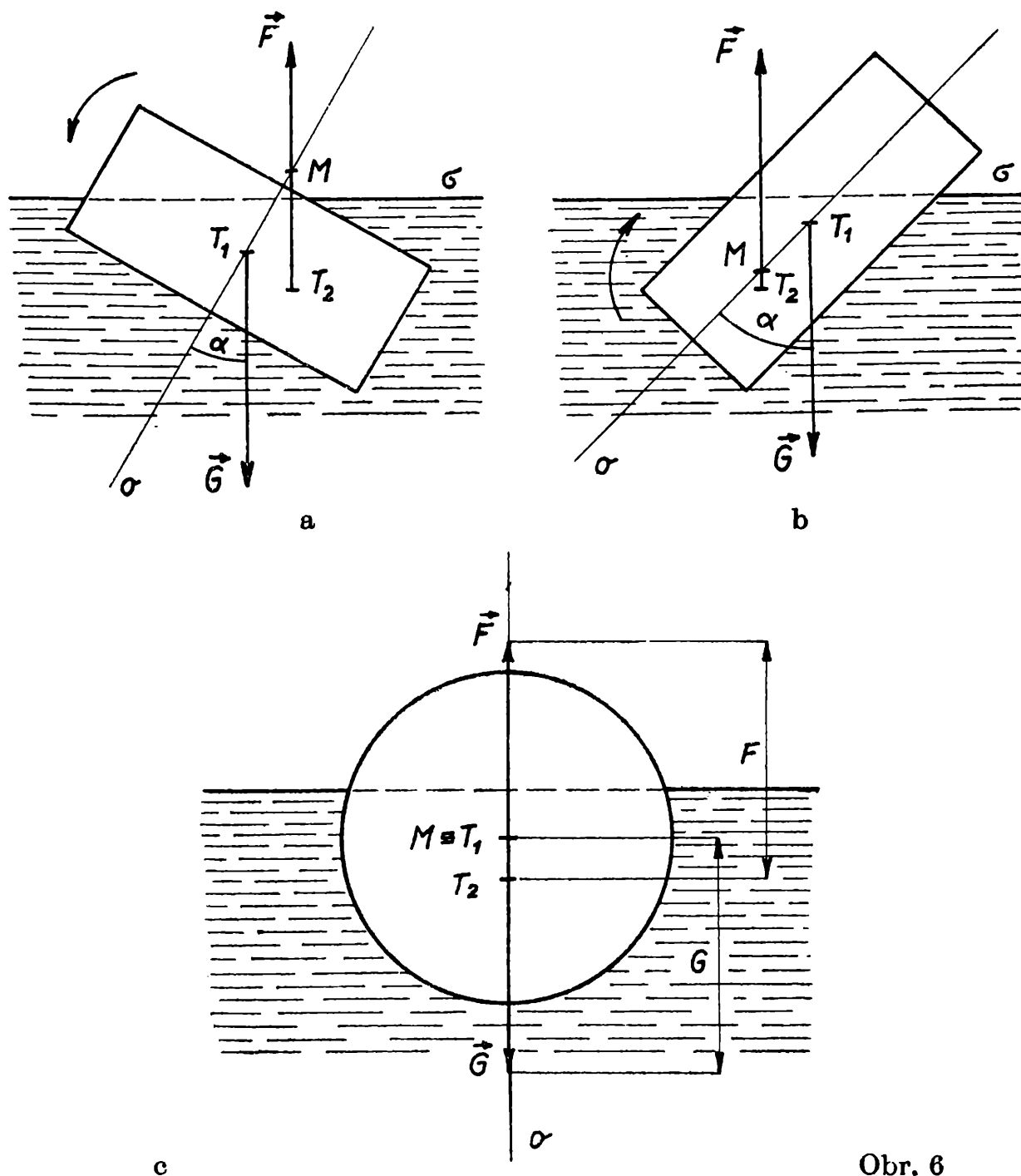


Obr. 5

Obr. 5a, 5b, 6a, 6b, 6c zobrazují řez soustavy „Kapalina + těleso“ svislou rovinou τ , procházející body T_1 a T_2 . V rovině τ leží také osa o plování i metacentrum M .

V situaci naznačené na obr. 5a je těžiště T_1 tělesa za daných okolností v nejnižší poloze. Proto je v nejnižší poloze i těžiště T soustavy, soustava má nejmenší potenciální tíhovou energii a je tedy v rovnovážné poloze stále. Vychýlíme-li těleso z rovnovážné polohy, takže osa o plování se otočí v rovině τ od svislého směru o úhel α (obr. 6a), pak moment dvojice sil $\vec{G}$ a $\vec{F}$, působících v bodech T_1 a T_2 vrátí těleso do původní polohy. Proto je soustava v rovnovážné poloze stálé. Tento případ nastane vždy, jestliže po vychýlení osy o plování ze svislé polohy je metacentrum nad těžištěm T_1 tělesa.

V poloze naznačené na obr. 5b je těžiště T_1 tělesa a tedy i těžiště T soustavy v poloze za daných okolností nejvyšší a potenciální tíhová energie soustavy je největší. Proto má soustava „kapalina + těleso“ rovnovážnou polohu vratkou. Jestliže vychýlíme těleso z této rovnovážné polohy tak, aby se osa o plování otočila v rovině τ od svislého směru o úhel α , potom moment dvojice sil $\vec{G}$ a $\vec{F}$ zvětšuje tuto odchylku a plovoucí těleso nezaujme po uvolnění původní vratkou rovnovážnou polohu, ale převrátí se do jiné rovnovážné polohy, v níž je svislá osa plování v rovině τ otočena od původní osy plování o úhel 90° . Nová rovnovážná poloha je stálá. Tento případ nastává vždy, když metacentrum je po vychýlení osy plování od svislé polohy pod těžištěm T_1 tělesa (obr. 6b).



Obr. 6

Splývá-li metacentrum s těžištěm T_1 tělesa, má soustava „kapalina + těleso“ rovnovážnou polohu volnou, neboť pak se při libovolném otočení tělesa kolem bodu T_1 poloha osy plování nemění a moment dvojice sil $\vec{G}$ a $\vec{F}$ je nulový. Příkladem na tento případ je stejnorodý váleček plovoucí na kapalině tak, že jeho podélná osa je vodorovná, nebo stejnorodá plovoucí koule (obr. 6c).

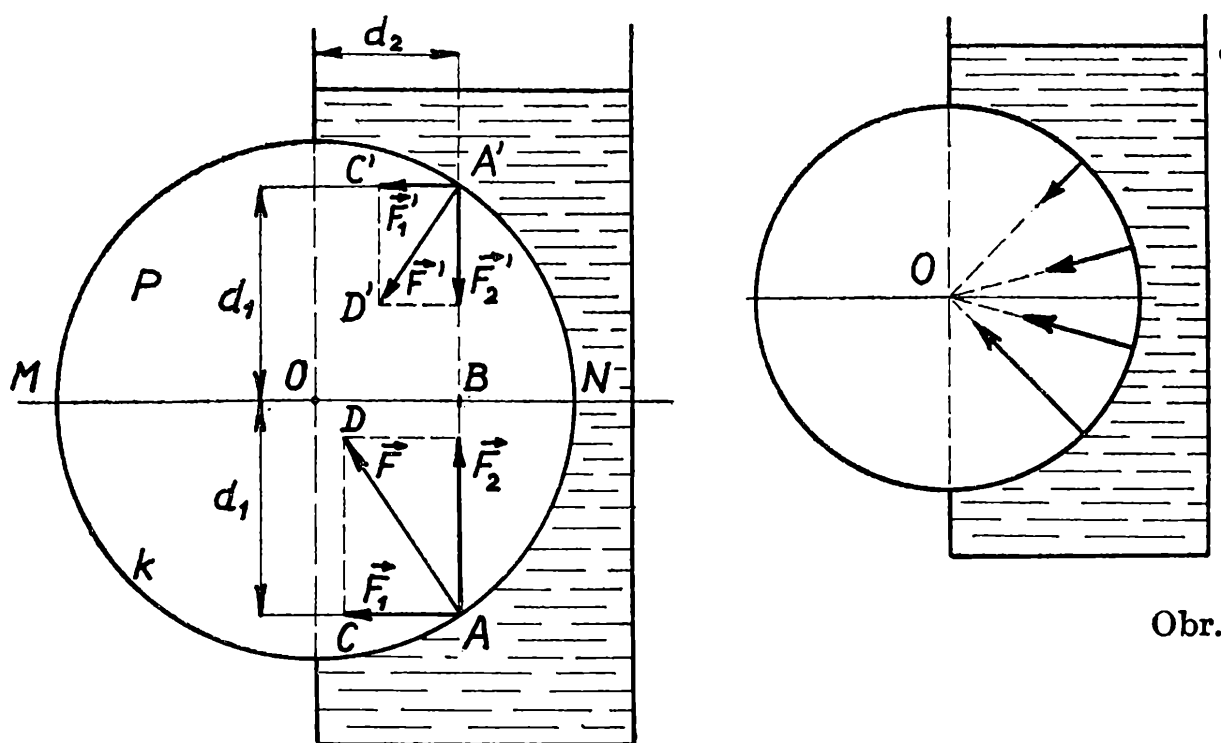
Rovnovážnou polohu vratkou má soustava „kapalina + těleso“ také v tom případě, že těleso, jehož průměrná hustota ρ je menší než hustota ρ' kapaliny, je přitisknuto svou podstavou ke dnu nádoby tak, že mezi podstavu tělesa a dno nádoby nemůže kapalina vniknout. Pak je těleso

stále přitlačováno ke dnu nádoby silou, vyvolanou hydrostatickými tlaky kapaliny, a neoddělí se ode dna nádoby, pokud mezi dno nádoby a podstavu tělesa nevnikne kapalina. Jde tu zřejmě o rovnovážnou polohu vratkou, protože potenciální energie tíhová soustavy je v tomto případě za daných okolností největší, neboť u dna nádoby je těleso, jež má menší tíhu než je tíha stejného objemu jako má ponořené těleso. Pokusně se dá tento stav dokázat, jestliže přitiskneme ke dnu nádoby zabroušenou skleněnou desku nebo polokouli se zabroušenou podstavou a do nádoby potom nalijeme opatrně rtuť.

K ověření správného pochopení důsledků Archimédova zákona slouží velmi dobře tato zajímavá úloha:

Nádoba tvaru kvádru má v jedné boční stěně vyříznutu svislou šterbinu, do které je těsně zasunuta deska P tvaru nízkého kolmého válce tak, že se může otáčet kolem vodorovné nehybné osy o (obr. 7), procházející kolmo k podstavám desky P jejich středy. Nádoba je naplněna vodou do takové výšky, že je potopena celá část desky P , zasahující do nádoby. Voda přitom šterbinou z nádoby neodtéká.

Bude se deska P otáčet, jestliže na soustavu „voda + těleso“ působí jen síla tíhového pole?



Obr. 8

Řešení: Většina čtenářů snadno pochopí, že by šlo o perpetuum mobile, kdyby se deska v tíhovém poli otáčela. Odůvodnit, proč se deska nemůže otáčet, není však jednoduché, jestliže uvažujeme vodorovné a svislé složky sil, jimiž působí hydrostatické tlaky kapaliny na plášť desky P . Při povrchním posuzování se pak snadno dojde k domněnce,

že vodorovné složky těchto sil se ruší pevností materiálu desky P i osy o otáčení. Protože svislé složky těchto sil, orientované vzhůru, jsou větší než složky orientované dolů, zdálo by se, že deska P se má v tíhovém poli kolem osy o otáčet. Rozebereme však tuto úlohu podrobněji.

Obraz 7 znázorňuje libovolný svislý řez deskou P , kolmý k ose o otáčení. Kružnice k znázorňuje plášť desky P a průměr MN kružnice k je obrazem vodorovné roviny σ , proložené osou otáčení. Na plášti desky P zvolíme libovolně ve dvou bodech A a A' souměrně sdružených podle roviny σ , plošky stejných obsahů S , tak malé, že lze zanedbat jejich velikost vzhledem k velikosti té části pláště válce, jež je ponořena v kapalině. Pak je možno považovat hydrostatické tlaky na všech místech každé z těchto plošek za stejné. Mají-li hydrostatické tlaky, působící na spodní z těchto plošek, velikost p a označíme-li p' stejně velké hydrostatické tlaky na všech místech horní plošky, pak na spodní plošku působí voda tlakovou silou velikosti $F = p S$, na horní plošku tlakovou

silou o velikosti $F' = p' S$. Síly $\vec{F}$ a $\vec{F}'$ jsou na obr. 7 znázorněny úsečkami délek $F = AD$, $F' = A'D'$, jejich vodorovné složky jsou zobrazeny úsečkami $F_1 = AC$, $F'_1 = A'C'$, svislé složky mají velikosti určené úsečkami délek $F_2 = CD$, $F'_2 = C'D'$. Z podobnosti trojúhelníků ACD a $A'C'D'$ vychází $F_2 : F_1 = F'_2 : F'_1 = n$. Zároveň vzhledem k podobnosti trojúhelníků ABO a ACD platí pro poměry ramen sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$ vztah $d_1 : d_2 = F_2 : F_1 = n$, takže

$$F_2 = n F_1, \quad \vec{F}'_2 = n \vec{F}'_1, \quad d_1 = n d_2. \quad (1)$$

Protože vektorové přímky sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$ neprocházejí osou otáčení, mají momenty těchto sil vzhledem k ose o na těleso otáčivé účinky.

Označíme-li momenty sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}'_1$, $\vec{F}'_2$ po řadě $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}'_1$, $\vec{M}'_2$ a $\vec{M}$ výsledný moment těchto sil vzhledem k ose o , platí podle momentové věty

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}'_1 + \vec{M}'_2. \quad (2)$$

Protože momenty $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}'_1$, $\vec{M}'_2$ mají společnou vektorovou přímku, lze rovnici (2) vyjádřit algebraicky. Protože síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ otáčejí válec podle obr. 7 ve smyslu kladném, síly $\vec{F}'_1$ a $\vec{F}'_2$ ve smyslu záporném, má rovnice (2) se zřetelem ke vztahům (1) algebraický tvar

$$M = -n F_1 d_2 + n F_1 d_2 + n F'_1 d_2 - n F'_2 d_2 = 0. \quad (3)$$

Poněvadž dvojici bodů A , A' , ležících na plášti desky P souměrně vzhledem k rovině σ , lze volit zcela libovolně, platí vztah (3) pro vše-

chný dvojice bodů uvedených vlastností. Všechny tyto dvojice pokrývají zcela plášť desky P . Proto platí vztah (3) pro momenty všech sil vyvolaných hydrostatickými tlaky kapaliny, působících na plášť desky P .

Protože podle vztahu (3) je vzhledem k ose o nulovým výsledný moment všech sil, vyvolaných hydrostatickými tlaky kapaliny, jež působí na plášť desky P , nemají tyto síly na desku otáčivé účinky. Deska se tedy v tíhovém poli nebude otáčet.

Uvedený důkaz je ovšem možno provést jednoduše takto:

Všechny síly vyvolané hydrostatickými tlaky kapaliny, působící na plášť desky P , jsou k tomuto plášti kolmé. Jejich vektorové přímky protínají tedy nehybnou osu o otáčení a její pevností a pevností materiálu desky se ruší. Proto nepůsobí na desku P otáčivými účinky (obr. 8).

Dočasné vedlejší jednotky

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Druhou skupinu vedlejších jednotek, o jejichž rozdělení jsme již dříve hovořili, tvoří jednotky, jež jsou dosud používány, jež se však připouštějí jen dočasně. Z celosvětového měřítka není termín, kdy se od těchto jednotek má upustit, stanoven. V ČSSR se dokonce již dnes některé z nich nemají používat (fyzikální atmosféra, gal a ångstrom), některé jsou naopak mezi jednotkami zákonnými (ar, hektar, bar). Příslušné ČSN, nové nebo revidované, k tomuto mezinárodnímu doporučení jistě přihlédnou. Zavádění SI v ČSSR začne asi v r. 1975.

V mezinárodním souhrnu jsou to tyto jednotky:

námořní míle		1 námořní míle = 1852 m
uzel		1 námořní míle za hodinu = = (1852/3600) m . s ⁻¹
ångström	Å	1 Å = 0,1 nm = 10 ⁻¹⁰ m
ar	a	1 a = (1 dam ²) = 10 ² m ²
hektar	ha	1 ha = (1 hm ²) = 10 ⁴ m ²
barn	b	1 b = 100 fm ² = 10 ⁻²⁸ m ²
bar	bar	1 bar = 0,1 MPa = 10 ⁵ Pa
fyzikální atmosféra	atm	1 atm = 101 325 Pa
gal	Gal	1 Gal = 1 cm . s ⁻² = 10 ⁻² m . s ⁻²
curie	Ci	1 Ci = 3,7 . 10 ¹⁰ s ⁻¹
rontgen	R	1 R = 2,58 . 10 ⁻⁴ C . kg ⁻¹
rad	rad (nebo rd)	1 ra = 10 ⁻² J . kg ⁻¹

Několik poznámek k uvedeným jednotkám:

Námořní míle je speciální jednotka používaná dosud mezinárodně v námořní a letecké dopravě pro vzdálenosti a obdobně *uzel* pro rychlosti.

Ar a *hektar* byly přijaty za jednotky Mezinárodní organizací vah a měr v roce 1879.

Barn je jednotka speciální, používaná v jaderné fyzice k vyjadřování účinných průřezů.

Bar byl přijat 9. Generální konferencí vah a měr v r. 1948.

Fyzikální atmosféra 10. Generální konferencí vah a měr v r. 1954. V ČSSR se tato jednotka již řadu let nemá používat. Používá se např. název *normální barometrický tlak*.

Gal je speciální jednotka používaná v geodesii a geofyzice pro vyjadřování tíhového zrychlení.

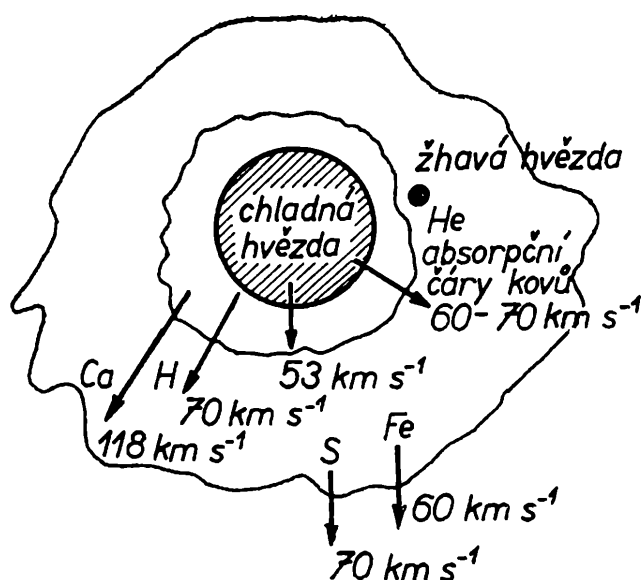
Curie je speciální jednotka používaná v jaderné fyzice pro vyjadřování aktivity radionuklidů (přijata na 12. Generální konferenci vah a měr v r. 1964). Také jednotka *rentgen* je speciální. Používá se při vyjadřování ozáření ionizujícím zářením. *Rad* je rovněž jednotkou speciální, používanou při vyjadřování absorbované dávky nějakého ionizujícího záření. Aby nedošlo u značky této jednotky k případné zaměně s radiánem, připouští se také značka *rd*, jak to je uvedeno již v tabulce.

ASTRONOMIE

Co jsou symbiotické hvězdy?

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, UP Olomouc

Termín „*symbiotické hvězdy*“ poprvé použil americký astronom Paul W. Merrill před více než čtvrt stoletím. Označil tak hvězdy, v jejichž spektrech jsou široké absorpční pásy kyslíčnicků různých kovů (především titanu) a sloučenin uhlíku — současně se v nich pozorují emisní čáry vodíku a ionizovaných prvků. Absorpční pásy svědčí o tom, že tyto hvězdy mají poměrně nízkou povrchovou teplotu (2000 až 3000) K a patří tedy do spektrální třídy *M*. Naproti tomu podle přítomnosti emisních čar bychom usuzovali na vysokou povrchovou teplotu, jakou mají např. hvězdy spektrální třídy *O*. Měřením zdánlivých hvězdných velikostí symbiotických hvězd bylo zjištěno, že jejich jasnost se mění a podle průběhu těchto změn je můžeme řadit mezi polopřavidelné proměnné hvězdy.



Obr. 1. Model symbiotické hvězdy CH Cygni.

První hvězda tohoto typu byla objevena P. W. Merrillem v roce 1932 a ve hvězdných katalozích je označena jako Z Andromedae. Její hvězdná velikost se mění od 8,0^m do 12,4^m a střední perioda změn jasnosti je 694 dní. Symbiotické hvězdy jsou v posledních letech středem pozornosti astronomů i astrofyziků; jsou studována spektra těchto hvězd a proměřovány jejich světelné křivky v různých oborech vlnových délek. Bylo zjištěno, že některými charakteristikami připomínají novy, jejich emisní spektrum je přitom podobné spektru planetárních mlhovin.

Pro vysvětlení vlastností těchto podivných objektů bylo vypracováno několik hypotéz, které vycházejí z různých předpokladů. Jedna z těchto hypotéz předpokládá, že jde o poměrně chladnou hvězdu spektrální třídy *M* obklopenou rozsáhlou plynnou obálkou. Emisní čáry vznikají v této plynné obálce v důsledku nárazových tlakových vln, šířících se z nitra hvězdy. Jiná hypotéza je naproti tomu založena na předpokladu, že jde o žhavou trpasličí hvězdu, která je zdrojem emisních čar; absorpční pásy vznikají v rozsáhlé chladnější vrstvě plynu, obklopujícího hvězdu.

Nejzajímavější a velmi rozšířená je hypotéza, jejímž autorem je sovětský astronom V. V. Sobolev. Pozorované neobvyklé vlastnosti symbiotických hvězd vysvětluje tato hypotéza předpokladem, že jsou to dvojhvězdy, obíhající kolem společného těžiště a ponořené do rozsáhlého společného plynného obalu. Jedna složka dvojhvězdy je chladná červená hvězda, druhá složka je žhavá bílá hvězda, která je navíc proměnná; čas od času „vybuchne“ a přitom odvrhne část své látky do okolního prostoru. V atmosféře chladnější složky vznikají kromě obvyklých absorpčních pásů vlivem vyzařování žhavé hvězdy také čáry ionizovaných kovů. Tato hypotéza vysvětluje zvláštnosti, pozorované ve spektrech symbiotických hvězd, i skutečnost, že jsou to proměnné hvězdy.

Na obr. 1 je znázorněn model jedné ze symbiotických hvězd — CH Cygni, který nedávno vypracovali R. Farraggiana a M. Hack. Tato hvězda byla známá jako polopravidelná proměnná hvězda spektrální třídy *M6* se střední periodou asi 97 dní a s amplitudou světelných změn od 7,4^m do 9,1^m. V roce 1963 byly ve spektru této hvězdy zjištěny emisní čáry vodíku, vápníku, železa síry; od té doby je CH Cygni zařazována mezi symbiotické hvězdy. Na obrázku jsou znázorněny oblasti, v nichž podle uvedeného modelu vznikají spektrální čáry různých prvků. Obálka obklopující obě hvězdy se rozšiřuje, přičemž její jednotlivé části se pohybují různými rychlostmi. Hypotéza o tom, že symbiotické hvězdy jsou dvojhvězdy, sice vysvětluje vlastnosti těchto objektů, je však třeba říci, že dosud nemáme k dispozici přímá pozorování, která by potvrzovala, že se skutečně jedná o dvojhvězdy. Než bude s konečnou platností přijata některá z hypotéz za správnou, bude nutno shromáždit mnohem bohatší pozorovací materiál a vyřešit mnoho teoretických problémů.

Vítr vane ze Slunce

MARCEL GRÜN, Praha

Laskavý čtenář nechť se necítí pohoršen, že na stránkách našeho časopisu nachází název článku, nápadně připomínající 2. díl Gulbrandsenovy trilogie; nadpis, který nadto může vyvolat na mnohé tváři pochybnosti o matematickofyzikálním obsahu. Neprávem, neboť nebude řeč ani o literatuře, ani o meteorologii. Sluneční vítr je označení, které pro tok koronální plazmy, šířící se od Slunce meziplanetárním prostorem, navrhl r. 1958 americký fyzik PARKER. Obsahem tohoto refetátu je souhrn studií, které byly této problematice v minulých letech věnovány.

Kdyby byl prostor mezi planetami sluneční soustavy prázdný, působila by v něm pouze magnetická, gravitační, ev. elektrická pole Slunce, planet a Galaxie. Meziplanetární prostor však není vakuum. Právě letos je tomu už 300 let, co italský astronom CASSINI usoudil z pozorování zodiakálního světla, že mezi planetami jsou zřejmě prachové částice, rozptylující sluneční záření. V minulém století byly již obecně známy souvislosti mezi četností polárních září a slunečních skvrn, aniž bylo ovšem vysvětleno, jaký je jejich mechanismus. Norský fyzik BIRKE-LAND předpokládal před více než 70 lety (1896), že Slunce vyzařuje nabité částice do zemské atmosféry a že tyto částice způsobují vznik polárních září. Své teoretické závěry se snažil podpořit laboratorními pokusy s malou kovovou koulí („Terrella“), zmagnetizovanou, pokrytou fluorescenčním materiálem a ozařovanou tokem elektronů. Jeho krajan, mate-

matik STORMER, se počátkem století zabýval pohybem monoenergetických proudů rychlých částic ze Slunce v magnetosféře Země a domníval se, že právě tyto proudy vyvolávají vznik polárních září. Dnes víme, že oba Norové se v mnohém mylili, avšak ve své době sehrály jejich představy významnou roli tím, že upoutaly pozornost k otázce existence a významu korpuskulárního záření Slunce.

Počátkem třicátých let upozorňovali CHAPMAN a FERRARO na souvislosti mezi výskytem polárních září, geomagnetickými bouřemi a sluneční aktivitou. Jejich výpočty dobře souhlasily se skutečností: oblak částic ze Slunce, pohybující se rychlostí $(1000 \text{ až } 2000) \text{ km.s}^{-1}$ dosáhne Země za (1 až 2) dny a rozruší magnetické pole Země. Pozdější výzkumy ukázaly, že variace intenzity kosmického záření, objevené americkým fyzikem FORBUSHEM, jsou spojeny s meziplanetárním magnetickým polem. Počátkem padesátých let L. BIERMANN začal na základě studia kometárních chvostů usuzovat na časově a prostorově stálou přítomnost slunečního korpuskulárního záření v meziplanetárním prostoru.

Základy k soustavnému budování teorie vzniku a pohybu slunečního větru jako toku plazmy položil švédský fyzik H. ALFVÉN (nositel Nobelovy ceny za r. 1970) svými studii z kosmické elektrodynamiky. S dalším výzkumem slunečního větru jsou úzce spojena jména CHAPMAN, PARKER, LÜST, NEUGEBAUER aj. V letech 1957–59 se podařilo dokázat, že sluneční vítr je přímým pokračováním sluneční korony, která tak dosahuje daleko za dráhu Země. Vznik tohoto korpuskulárního záření lze vysvětlit dynamickými pochody v protažené vnější sluneční atmosféře. Korona se vzhledem ke své vysoké teplotě neustále rozpíná a plazmový tok nabývá v jisté vzdálenosti od Slunce nadzvukovou rychlost. U Země se částice pohybují rychlostí několika set km.s^{-1} . Sluneční vítr obtéká magnetosféru Země, mění podstatně její tvar a při tom zesiluje na denní straně magnetické pole až na dvojnásobek, zatímco na noční straně se „vytahováním“ magnetosféry intenzita snižuje. Je také hlavním zdrojem poruch zemského magnetického pole a významně přispívá k formování pásů zvýšené radiace. Uvážíme-li dále, že ideální plazmový tok unáší s sebou magnetické pole (zákon zamrznutosti magnetického pole: siločáry magnetického pole jsou zamrzlé v plazmě, podobně jako gumové nítě v ledu), je zcela samozřejmé, že se studiem slunečního větru úzce souvisí výzkum meziplanetárního magnetického pole a planetárních magnetosfér. Přicházející plazmu lze rozdělit do tří skupin: 1. nepřetržitý tok plazmy, přicházející z korony nad celým slunečním povrchem je možno nazvat disipovaným tokem (escape flow). Zejména zde je na místě termín sluneční vítr; 2. toky excitovaných korpuskulárních částic, které se objevují jen občas a jejichž zdroji jsou tzv.

M-oblastí na Slunci. Existence těchto emisí byla předpokládána již před lety na základě 27denní periodicity geomagnetických poruch (27,3 dne je rotační perioda slunečního rovníku); 3. toky plazmy, excitované z aktivních oblastí při slunečních erupcích (plazmové obálky). Sledování těchto proudů plazmy vede k úvahám o vláknité struktuře sluneční korony.

V dalším probereme metody výzkumu slunečního větru.

I. NEPŘÍMÉ METODY.

1. Nejzajímavějšími indikátory slunečního větru jsou *kometry*, přirozené sondy, prolétající meziplanetárním prostorem a interagující s okolním prostředím. Připomeňme na tomto místě několik údajů o kometách. Jejich jádro má průměr 1–10 km, hmotu (10^{15} až 10^{20}) gramů, a je tvořeno pevnými částicemi a zmrzlými plyny (molekuly C, N, O, H). Přiblíží-li se kometa ke Slunci na vzdálenost několika astronomických jednotek, zahřívá se jádro, částice plynu se uvolňují a vzniká koma, složená z prachových částic a molekul ionizovaného plynu (CN, C₂, C₃, CH, NH, OH, NH₂, Na, Fe, Ni). Uvolňované částice jsou brzy odkláněny a urychleny směrem od Slunce a vytvoří tak chvost (symbolizující obvykle kometu, i když většina komet je téměř, nebo zcela bez něho). Koma mívá průměr 10^4 – 10^5 km, chvosty průměr 10^5 km a délku až 10^8 km; kromě toho byla u některých komet sledována r. 1970 z družic vodíková koma o průměru 10^7 km. Přidržíme-li se starší Bredichinovy klasifikace kometárních chvostů, pak chvosty typu II a III jsou tvořeny zejména mikroskopickými částicemi prachu a neutrálními molekulami. Zcela jiné jsou chvosty typu I, představující ionizovaný proud molekul CO⁺, N₂⁺, CO₂⁺ aj., směřující přímo ve směru prodlouženého průvodiče komety. Některé kometry mohou mít i dva chvosty; dlouhý přímý patří do I. kategorie, ostatní bývají často zakřivené.

Urychlení částic v ionizovaných chvostech převyšuje o 2–3 řády gravitační urychlení Sluncem, kdežto v prachových chvostech je řádově stejné ($0,6 \text{ cm.s}^{-2}$) a může být spolehlivě vysvětleno pouhým tlakem slunečního záření. BIERMANN r. 1951 přišel s myšlenkou, že molekuly ve chvostech urychluje sluneční korpuskulární záření (volně nabitě částice slunečního původu předávají svůj impuls iontům CO⁺ v chvostech a urychlují je až na 10^4 cm.s^{-2}). Interakcí mezi slunečním větrem a kometárními atmosférami se v poslední době vysvětluje i vznik vodíkových obálek.

Z měření, která prováděl HOFFMEISTER (1943) a později interpretovala řada autorů (BOERMANN 1951, BELTON a BRANDT 1966) vyplývá, že směr chvostu není přesně radiální od Slunce; chvost se někud odchyluje od radiusvektoru v souvislosti s pohybem komety po dráze a dále je deformován kolem korpuskulárního slunečního větru.

Předpokládáme-li, že sluneční vítr má jen radiální složku rychlosti w , pak

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{v \cdot \sin \gamma}{w - v \cdot \cos \gamma},$$

kde ε je úhel aberace, γ úhel mezi prodlouženým radiusvektorem a vektorem oběžné rychlosti komety, v rychlost komety kolmá na průvodič ($30\text{--}50 \text{ km.s}^{-1}$). Zjednodušený vztah vychází pro perihelium, kde $\gamma = 90^\circ$. $\operatorname{tg} \varepsilon = v/w$.

Průměrná hodnota ε byla určena v rozmezí $3\text{--}6^\circ$; pro $\varepsilon = 5^\circ$ vychází rychlost šíření slunečního větru asi 450 km.s^{-1} .

Komety s ionizovanými chvosty byly pozorovány ve všech heliografických šířkách. Většina z nich je sledována ve vzdálenosti $1\text{--}5 \text{ 2 AJ}$; výjimku tvoří kometa Humason 1963 VIII, fotografovaná do $5\text{--}6 \text{ AJ}$. Mechanismus vzájemného působení částic slunečního větru a chvostu je předmětem mnoha teoretických prací a není dosud komplexně zpracován; nebudeme se jím zabývat — jen připomeneme, že jde o problém v mnoha směrech obdobný obtékání zemské magnetosféry. Z výsledku radiální rychlosti je zřejmé, že složka rychlosti kolmá k průvodiči není sice nulová, avšak nemůže být větší než 50 km.s^{-1} . Spolu s jinými argumenty to nasvědčuje tomu, že ve vzdálenosti Země se sluneční vítr nezúčastňuje rotace Slunce (v takovém případě by totiž kolmá složka rychlosti převyšovala 400 km.s^{-1}).

2. Z výzkumu jasnosti, polarizace a spektrálního složení zodiakálního světla lze uszovat na vlastnosti meziplanetárního prostředí. Od r. 1953 se k původnímu Cassiniho vysvětlení připojují i argumenty BEHRA a SIDENTROPFA, kteří prokázali příliš vysokou polarizaci zvířetníkového světla, než aby mohla být vysvětlena pouze prachovými částicemi.

3. Výzkum kosmického záření přinesl též důležité informace nepřímého charakteru. Změny intenzity galaktické složky kosmického záření do 10^{11} eV dokonale korelují s 22letým cyklem sluneční činnosti. Při maximu sluneční aktivity registrujeme nejslabší tok. Podobně je tomu při velkých magnetických bouřích, resp. po velkých erupcích, kdy korpuskulární záření z aktivních oblastí na Slunci a s tím spojené magnetické pole odstiňují Zemi (Forbushův efekt). Pozorování kosmického záření ze Slunce bylo mezi vědeckými cíli už prvních družic Země a postupně přineslo doklady o existenci meziplanetárního magnetického pole a jeho struktuře (např. sondy Pioneer 5—9; Explorer 12 — hladina nízkoenetických protonů; IMP 1 — tok protonů kolem 1 MeV se v souvislosti se sluneční erupcí objevoval vždy po 27 dnech, sondy Mariner 4, 5, Venery, Zond 3, družice IMP, OGO, ESRO a další).

4. Radiové sledování sluneční korony (do 2 slunečních poloměrů) a zá-

kryty radiových zdrojů korunou (do 100 slunečních poloměrů). Sledování zákrytů bylo navrženo již r. 1951 a od té doby se provádí systematicky v Austrálii, SSSR, USA a Velké Británii. Jde jednak o scintilace radiových objektů o průměru kolem 0,5", častěji však o refrakci, při níž zjišťujeme nepřímo elektronovou koncentraci korony. Z pozorování Krabí mlhoviny vyplývá, že nerovnoměrným rozptylem paprsků na meziplanetární plazmě v okolí Slunce je radiový obraz značně deformován (ve vzdálenosti $15 \cdot 10^6$ km od Slunce je hustota plazmy 10^3 částic na cm^3).

5. Umělé komety. Výškové rakety vynesou do horních vrstev atmosféry nebo do kosmického prostoru poměrně malé množství sodíku, čpavku, vápníku, barya atd., které je v prostoru excitováno, ionizováno slunečním ultrafialovým zářením (ev. dalšími vlivy) a sleduje se intenzita, tvar a rychlost šíření. První umělé komety byly vytvořeny v horních vrstvách atmosféry v rámci Mezinárodního geofyzikálního roku. V kosmickém prostoru vytvořily sodíková oblaka sondy Luna 1 a 2 (1959) — $\frac{1}{3}$ vzdálenosti mezi Zemí a Měsícem — a baryový oblak rozptýlila ve vzdálenosti asi 75 000 km od Země západoevropská družice HEOS 1 (1969).

II. PŘÍMÁ MĚŘENÍ SLUNEČNÍHO VĚTRU.

První přímá měření z prostoru byla uskutečněna sondami Luna 1 a 2 (GRINGAUZ) a byl při nich zjištěn tok 10^8 protonů na cm^2 za sekundu. Podobné výsledky poskytl o dva roky později Explorer 10. Mariner 2 (1962) přinesl nejvýznamnější informace ze všech pokusů. Byla prováděna dlouhodobá měření (129 dní) a velkých vzdálenostech. Na základě jeho údajů NEUGEBAUER a SNYDER definitivně prokázali existenci kontinuálních toků plazmy ze Slunce a stanovili jejich rychlost, hustotu a chemické složení. Byl také nalezen vztah mezi rychlostí plazmy w a celkovým planetárním indexem geomagnetické aktivity ΣK_t :

$$w = (8,44 \pm 0,74) \Sigma K_p + (330 \pm 17) \quad [\text{km/s}]$$

Pro K_p našel WILCOX aj. vztah $K_p = \frac{1}{3} |B|$ kde B je intenzita meziplanetárního magnetického pole v jednotkách 10^{-5} gauss = 10^{-9} tesla.

Některé výsledky měření slunečního větru.

Dosud není známo zcela přesné chemické složení slunečního větru. Zhruba 95 % částic tvoří protony (H^+), 4–5 % částice α (He^{++}) a 0,1 % H^+ . Vedle $^1\text{He}^+$ a $^4\text{He}^{++}$ našel HUNDHAUSEN r. 1968 ještě slabé stopy $^3\text{He}^{++}$, $^4\text{He}^+$, $^{16}\text{O}^{+6}$, $^{16}\text{O}^{+7}$. Z výsledků letů Apollo byla potvrzena existence ^3He , i když tok těchto iontů je o tři řády slabší než tok iontů ^4He .

Ve vzdálenosti 1 UA je průměrná hustota toku kladných iontů $3 \cdot 10^8$ částic/cm²/s a prostorová hustota 5—8 protonů/cm³.

Střední rychlost částic u Země je asi 400—500 km.s⁻¹; při klidném Slunci asi 300 km.s⁻¹. Parametry se však výrazně mění: rychlost může být až 850 km.s⁻¹, směr se může odchýlit o 15°, teplota vzroste o 1—2 řády a obsah částic α se zvýší až na 20 %. Celková hustota pak stoupne až o řád.

Nejdůležitější charakteristiky plazmy ve vzdálenosti 1 UA od Slunce shrnuje tabulka (podle N. F. NESSE):

parametr	jednotka	minimum	maximum	střední hodnota
tok	iont.cm ⁻² .s ⁻¹	10^8	10^{10}	$3 \cdot 10^8$
rychlost	km.s ⁻¹	300	850	400—500
hustota	iont.cm ⁻³	0,2	80	5,5
teplota	°K	$6 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^5$
He : H	%	0	15	4,5
magnet. pole	10 ⁻⁹ tesla	2	40	6

K údajům o teplotě nutno připomenout, že jde o teplotu kinetickou, udávající rozložení rychlostí částic. Jinými slovy, je to teplota odpovídající energii tepelného pohybu částic.

Uvážíme-li hustotu toku 5 protonů na cm³ a rychlost 500 km.s⁻¹, stáří Slunce $5 \cdot 10^9$ let a konstantní vyzařování po celou tuto dobu, pak sluneční vítr roznesl do prostoru $3,5 \cdot 10^{-4}$ hmotnosti Slunce, tj. téměř stonásobek hmotnosti Země.

Velmi důležitou otázkou, která dosud není spolehlivě zodpovězena, je vzdálenost, do které působí sluneční vítr. Hustota částic větru klesá se čtvercem vzdálenosti od Slunce a v jisté vzdálenosti bude už plazma tak řídké, že ji zbrzdí i slabé mezihvězdné magnetické pole. Vezmeme-li v úvahu jeho střední hodnotu $2 \cdot 10^{-9}$ tesla jako maximální hodnotu odporu pohybu větru o nejmenší registrované hustotě, pak bude vítr zbrzděn ve vzdálenosti asi 12 UA, tedy blízko za dráhou Saturna. V nejlepším případě dosáhne vítr vzdálenosti až 160 UA. Nepřímá pozorování ze Země udávají průkazné působení větru na vzdálenost (20 až 40) UA. Úkolem přímých měření ze sond v sedmdesátých letech bude simultánní sledování z různých heliocentrických vzdáleností. Z těsné blízkosti Slunce (sonda Mariner 1973 k Merkuru a Helios 1974 mezi dráhu Merkura a Slunce), od Země a z Měsíce a dále ze sond k Jupiteru (Pioneer F a G — 1972 a 1973) i k vnějším planetám (Grand Tour). Teoretický výzkum se soustřeďuje na detailnější objasnění vzniku toků plazmy a jejich urychlování a na souvislosti mezi Sluncem, slunečním větrem a geofyzikou (nehovoříme-li o možných přímých vlivech slunečního korpuskulárního záření na počasí a pozemský život).

Družice a sondy, provádějící přímá měření slunečního větru

Název	Typ tělesa, cíl	Data startů
LUNA 1, 2	sondy k Měsíci	2. 1. 59 12. 9. 59
VENERA 1–7	sondy k Venuši	12. 2. 61 12. 11. 65 16. 11. 65 12. 6. 67 5. 1. 69 10. 1. 69 17. 8. 70
EXPLORER 10, 12, 14	UDZ — komplexní vý- zkum kosmického pros- toru	25. 3. 61 16. 8. 61 3. 10. 62
MARINER 2, 4, 5	sondy k Marsu a Venuši	26. 8. 62 28. 11. 64 14. 6. 67
VELA 1–12	dvojice družic pro sle- dování jaderných vý- buchů	17. 10. 63 17. 7. 64 20. 7. 65 25. 4. 67 23. 5. 59 8. 4. 70
IMP 1–5, 7	UDZ pro komplex. vý- zkum kosmického pros- toru	27. 11. 63 4. 10. 64 29. 5. 65 1. 7. 66 25. 5. 67 21. 6. 69
ELEKTRON 2, 4	UDZ	30. 1. 64 11. 7. 64
OGO 1–5	UDZ — geofyzikální observatoř — asi 20 experimentů	5. 9. 64 14. 10. 65 6. 6. 66 29. 7. 67 6. 6. 66 29. 7. 67 4. 3. 68
PIONEER 4–9	sondy pro výzkum meziplanetárního prostoru	16. 12. 65 17. 8. 66 13. 12. 67 8. 11. 68
LUNA 10	první družice Měsíce	31. 3. 66
IMP 6	družice Měsíce pro výzkum prostoru	19. 7. 67
HEOS 1	západoevrop. UDZ pro kompl. výzkum kosmic- kého prostoru	5. 12. 68
KOSMOS (?)	UDZ — pravděpodobně na některých též vý- zkum sluneč. větru	

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Fyzika

5. Letadlo s rozpětím křídel l metrů stoupá pod úhlem α (α je velikost úhlu, který svírá osa letadla s vodorovnou rovinou) přímočaře rovnoměrně ve svislé rovině, odkloněné od roviny místního poledníku o úhel β k východu. Za t sekund dosáhne letadlo výšky h metrů. V místě startu známe magnetickou deklinaci δ , magnetickou inklinaci i a magnetickou indukci B zemského magnetického pole. Jaké bude napětí mezi konci křídel letadla? Jaké bude napětí, pohybuje-li se letadlo vodorovně? Úlohu řešte obecně a do výsledku dosadte $l = 50$ m, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $t = 10$ s, $h = 3$ km, $\delta = 1^\circ 40'$, $i = 63^\circ$ a $B = 4 \cdot 10^{-5}$ T.

(Došlo 10 řešení)

František Vencálek

Řešil Luboš Pospíšil, 3. S SVVŠ, Brno

Zvolíme pravoúhlou prostorovou soustavu s počátkem v místě startu. Osu x , orientovanou přibližně k severu, položíme do průsečnice svislé roviny letu s vodorovnou rovinou σ , jdoucí místem startu (obr. 1), osu y , ležící v rovině σ , y rientujeme k západu a osa z míří svisle vzrůhu. Přímka a na obr. 1 je průsečnice roviny místního poledníku s rovinou σ , přímka b je průsečnice roviny magnetického poledníku s rovinou σ . V místě se západní magnetickou deklinací je $\delta > 0$, v místě s východní magnetickou deklinací je $\delta < 0$, na severní polokouli je $i < 0$, na jižní pak $i > 0$. Pro α a β platí: $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq |\beta| < 90^\circ$. Obr. 1 je zakreslen pro místo se západní deklinací na severní polokouli.

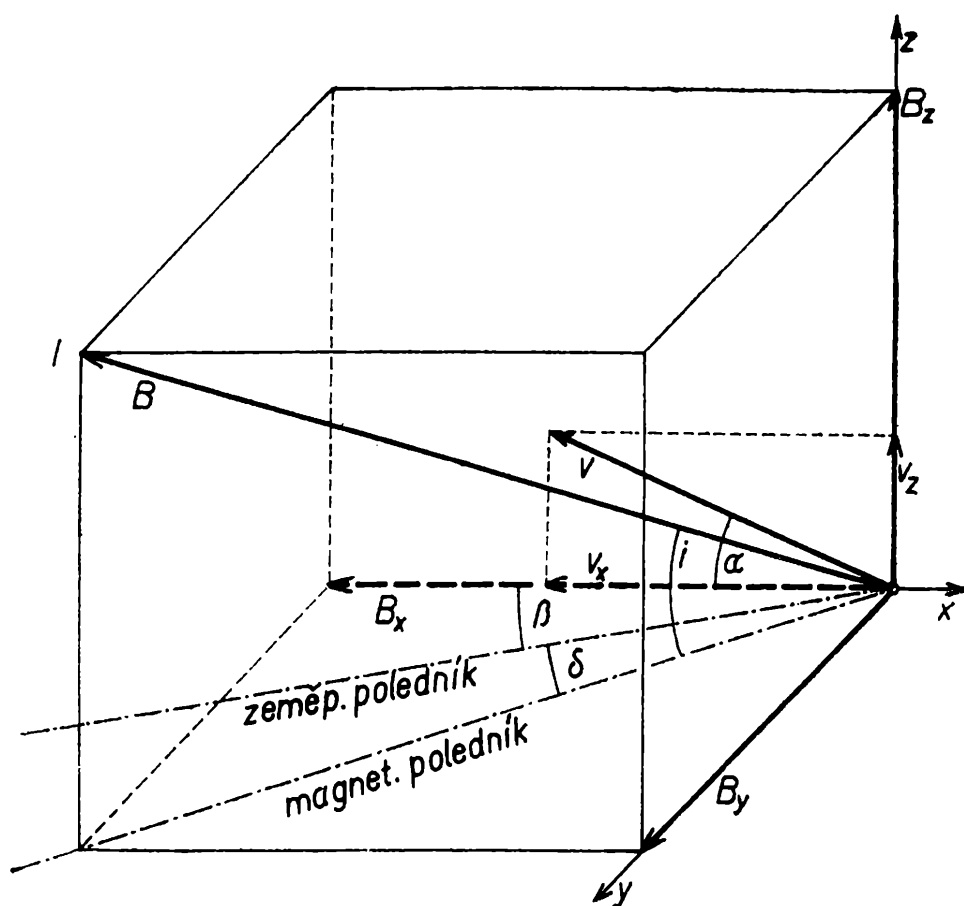
Rozložíme-li rychlost v letadla a magnetickou indukci B do souřadnicových os, dostáváme

$$\begin{array}{ll} v_x = v \cos \alpha & B_x = B \cos i \cos (\beta + \delta) \\ v_y = 0 & B_y = B \cos i \sin (\beta + \delta) \\ v_z = v \sin \alpha & B_z = B \sin i \end{array}$$

Poněvadž osa křídla zůstává při pohybu letadla rovnoběžná s osou y , vznikne v křídle při pohybu letadla ve směru osy x napětí

$$U_1 = |B_z v_x l| = B l v |\cos \alpha \sin i|$$

a při pohybu letadla ve směru osy z napětí



$$U_2 = B_x v_z l = B l v \sin \alpha \cos i \cos (\beta + \delta).$$

Podle Flemingova pravidla pravé ruky zjistíme, že napětí U_2 roste vždy, na severní i jižní polokouli, ve směru kladné poloosy y . Podle téhož pravidla zjistíme, že napětí U_1 roste ve směru kladné poloosy y v případě, že $\cos \alpha \sin i < 0$ a ve směru záporné poloosy y , je-li $\cos \alpha \sin i > 0$.

Je tedy výsledné napětí v křídle

$$U = B l v \sin \alpha \cos i \cos (\beta + \delta) - B l v \cos \alpha \sin i = \\ = B l v (\sin \alpha \cos i \cos (\beta + \delta) - \cos \alpha \sin i)$$

za předpokladu, že platí úmluva o velikosti úhlů α , β , δ a i .

Správnost odvozeného vztahu pro U si ověříme např. tak, že vypočteme napětí U v případě, že letadlo letí v rovině magnetického poledníku kolmo k magnetickým silovým čarám. Pak je $\beta + \delta = 0$ a $\alpha = 90^\circ + i$ (pro obě polokoule). Dosazením do odvozeného vztahu dostáváme

$$U = B l v (\cos^2 i + \sin^2 i) = B l v$$

jak lze odvodit i přímo.

Letí-li letadlo vodorovně, je $\alpha = 0^\circ$ nebo $\alpha = 180^\circ$. Pak je

$$U = -B l v \sin i \quad \text{nebo} \quad U = B l v \sin i$$

Podle podmínek úlohy je $v_z = \frac{h}{t}$. Dostáváme tedy z rovnice

$$\frac{h}{t} = v \sin \alpha$$

že

$$v = \frac{h}{t \sin \alpha}$$

Pro hodnoty $B = 4 \cdot 10^{-5}$ T, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\delta = 1^\circ 40'$, $i = 63^\circ$, $l = 50$ m, $h = 3$ km a $t = 10$ s dostáváme $v = 200 \cdot \sqrt{3} \text{ m s}^{-1} \doteq 346,4 \text{ m s}^{-1}$.

Startuje-li letadlo na severní polokouli k severu, je v místě se západní deklinací $U = 540,7$ mV a v místě s východní deklinací $U = 549$ mV. Startuje-li letadlo k jihu (pak je $\alpha = 120^\circ$), je za těchto podmínek $U = 76,8$ mV a $U = 70,3$ mV. Na jižní polokouli dostaneme v prvním případě $U = 76,8$ mV a $U = 70,3$ mV, v druhém případě pak $U = 540,7$ mV a $U = 549$ mV.

Při vodorovném letu s rychlostí $v = 346,4$ mV je $U = \pm 617,3$ mV.

6. Kružnice leží ve svislé rovině a je rozdělena vodorovným a svislým průměrem AC , resp. BD na 4 kvadranty. Z bodu P ležícího na kružnici v I. kvadrantě (oblouk AB) padá bez počáteční rychlosti hmotný bod po tětivě do bodu Q ve III. nebo IV. kvadrantě (oblouk CDA) tak, že dobu pádu pólí okamžik, kdy bod projde vodorovným průměrem. Jak souvisí délka tětivy s polohou výchozího bodu P ?

(Došlo 12 řešení)

Václav Vilímek

Upravené řešení Jiřího Jelínka z SVVŠ Olomouc a Luboše Pospíšila z SVVŠ Brno

Daná kružnice nechť je jednotková se středem O v průsečíku průměrů AC a BD . Libovolný bod M na této kružnici je udán orientovaným úhlem $\omega = \widehat{AOM}$ s počátečním ramenem OA . Je-li po řadě $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, je $M = A, B, C, D$. Bodu P nechť náleží úhel α , bodu Q úhel

β kde $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\pi \leq \beta \leq 2\pi$. Jestliže P_1, Q_1 jsou průměty bodů P, Q do svislého průměru BD , má být podle zadání

$$P_1O = \sin \alpha = \frac{1}{2} g t^2, P_1Q_1 = \sin \alpha - \sin \beta = \frac{1}{2} g (2t)^2, \quad (1)$$

kde g je gravitační zrychlení a t doba pádu po dráze P_1O . Svírá-li tětiva PQ s vodorovným průměrem AC úhel φ , probíhá po ní pohyb se zrychlením $a = \sin \varphi \cdot g$.

Z (1) vyplývá $\sin \alpha - \sin \beta = 4 \sin \alpha$ a tedy

$$\sin \beta = -3 \sin \alpha, \text{ odtud } \cos \beta = \pm \sqrt{1 - 9 \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

Délka tětivy PQ je udána vzorcem $PQ^2 = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2$; po dosazení z (3) a jednoduché úpravě máme

$$PQ = \sqrt{2 + 6 \sin^2 \alpha \pm 2 \cos \alpha \sqrt{1 - 9 \sin^2 \alpha}} \quad (4)$$

Z (3) je zároveň zřejmé, že nejvyšší hodnota úhlu α , pro niž existuje β , je $\alpha = \alpha_0$, kde $\sin \alpha_0 = \frac{1}{3}$; num. $\alpha_0 \approx 19^\circ 29'$. V tom případě je $\sin \beta = -1$ a $\beta = \frac{3}{2}\pi$, tj. $Q \equiv D$; z bodu P lze vést jedinou tétivu délky $PQ = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Je-li $\alpha = \alpha_1$, kde $0 < \sin \alpha_1 < \frac{1}{3}$, potom existují dvě tětivy se společným počátečním bodem P a koncovými body Q v III. a Q' ve IV. kvadrantu; body Q, Q' jsou souměrné podle osy BD . Délky tětiv jsou udány vzorcem (4), při čemž pro PQ platí dolní znaménko a pro PQ' horní znaménko. Posouvá-li se bod P od místa charakterizovaného úhlem α_0 směrem k bodu A , posouvá se bod Q po oblouku DC směrem k C a bod Q' po oblouku DA směrem k A . Bodů C resp. A dosáhnou pro $\alpha = 0$; potom je $PQ = 2, PQ' = 0$. Pohyb však v těchto krajních případech nenastává, a to v prvním případě, poněvadž je zrychlení nulové ($\varphi = 0$) a v druhém případě, poněvadž je dráha nulová.

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány tři polopřímky x, y, z o společném počátku O , a to tak, že každé dvě polopřímky svírají dutý úhel. V úhlu polopřímek y, z ($z, x; x, y$) je dán vnitřní bod A ($B; C$). Užitím deskriptivní geometrie sestrojte trojúhelník XYZ tak, aby vrcholy X, Y, Z ležely po řadě na polopřímkách x, y, z a aby strana XY (YZ, ZX) procházela bodem C (A, B).

(Došlo 5 řešení)

Ladislav Drs

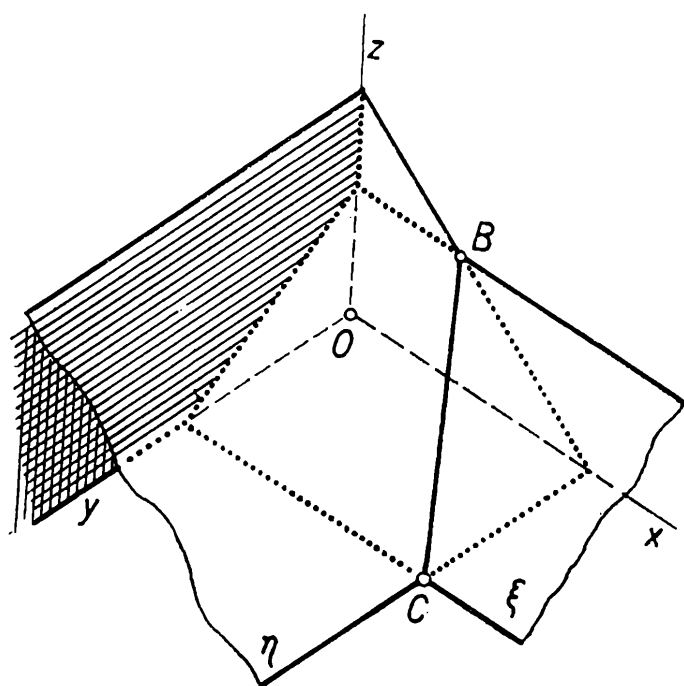
Řešil Karel Šafařík, 3B SVŠ Bratislava (řešení upravil autor).

a) Nechť polopřímky x, y, z neleží v rovině. Pak určují trojbokou jehlanovou plochu π . Body A, B, C leží ve stěnách plochy π a nemohou proto být na jedné přímce. V opačném případě by totiž tato přímka měla s plochou π společné tři různé body, což není možné, neboť tu jde o konvexní plochu. Body A, B, C proto určují rovinu ρ . Průsečíky roviny ρ s polopřímkami x, y, z — pokud existují — řeší úlohu. Abychom zjistili, zda existují, vedeme např. přímkou BC rovinu $\xi \parallel x$ a rovinu $\mu \parallel y$ (obr. 1). Pokud bod A je uvnitř vyšrafované části roviny yz , hledaný trojúhelník existuje a je jediný. Je-li bod A na hranici nebo vně této části, řešení neexistuje.

Tyto úvahy platí bez ohledu na úhly, které svírají přímky $x, y; x, z; y, z$. Konstrukci trojúhelníka XYZ provedeme nejjednodušší v Mongeově promítání, když dvě z přímek x, y, z zvolíme v jedné průmětně.

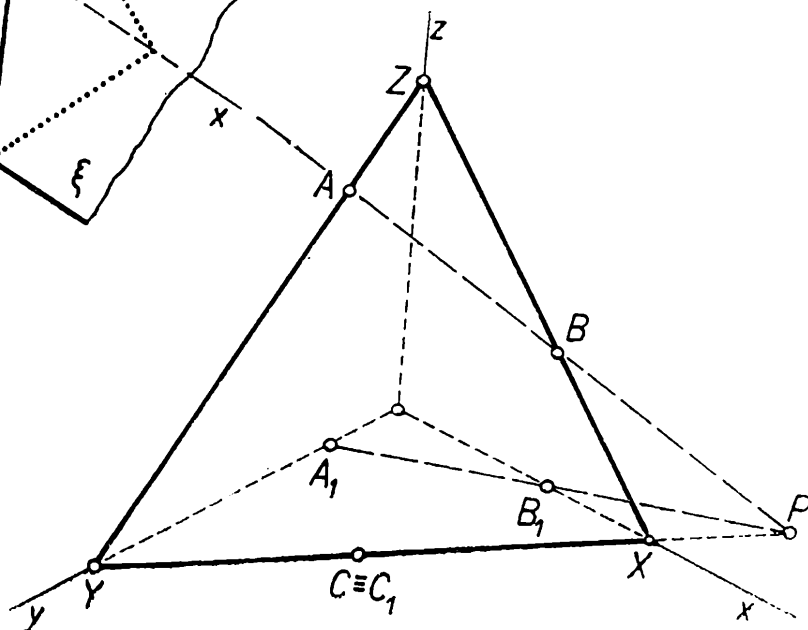
b) Nechť polopřímky x, y, z leží v rovině a body A, B, C na přímce. Řešení neexistuje.

c) Nechť polopřímky x, y, z leží v rovině a body A, B, C neleží na přímce. Přímky x, y, z zvolíme za osy osového kříže pravoúhlé axonometrie. (Zde je nutný předpoklad tupých úhlů $\sphericalangle xy, \sphericalangle xz, \sphericalangle yz$.) Jsou to tedy průměty os x', y', z' pravoúhlého souřadnicového trojhranu. Body A, B, C chápeme jako axonometrické průměty bodů A', B', C' ležících v souřadnicových rovinách $y'z', x'z', x'y'$. Body A', B', C' určují rovinu σ a průměty X, Y, Z průsečíků X', Y', Z' roviny σ s osami x', y, z' řeší úlohu. Kritérium existence je totéž jako v odst. 1. Na obr. 2 byl trojúhelník XYZ sestaven takto: byly určeny axonometrické půdorysy A_1, B_1 bodů A, B . Průsečík P přímek AB, A_1B_1 je axonometrický průmět půdorysného stopníku přímky $A'B'$. Body P, C určují axonometrický průmět půdorysné stopy p^σ roviny σ a pak je $X = x \cdot p^\sigma, Y = y \cdot p^\sigma, Z = XB \cdot z$. Tím je trojúhelník určen.



Obr. 1

Obr. 2



2. Jsou dány tři různé body A, B, V , úhel velikosti α a číslo r . Sestrojte kulovou plochu, která má poloměr r , prochází body A, B a z bodu V je vidět pod úhlem α .

(Došlo 5 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Karel Šafařík, 3B SVŠ Bratislava

Známe-li úhel α a poloměr r , dá se snadno sestavit vzdálenost $d = SV$, kde S je střed hledané kulové plochy: $d = r : \sin \frac{\alpha}{2}$. Střed S leží pak na kulové ploše $\lambda \equiv (V; d)$. Střed S leží též na kulové ploše $\varepsilon \equiv (A; r)$ a na kulové ploše $\varphi \equiv (B; r)$. Leží proto na kružnici m , která je společná plochám ε, φ . Hledaný střed S je bod společný ploše λ a kružnici m .

Nutná podmínka pro to, aby existovalo řešení, je $AB \leq 2r$.

Jestliže $AB = 2r$, existuje řešení jedině v tom případě, že střed úsečky AB je bodem plochy λ . Střed úsečky AB je pak střed S hledané kulové plochy.

Jestliže $AB < 2r$, existuje kružnice m . Řešení existuje potom jen tehdy, když plocha λ má s ní společný bod. Označme

l vzdálenost bodu V od středu úsečky AB ,

v vzdálenost bodu V od roviny kružnice m ,

r' poloměr kružnice m ,

r'' poloměr kružnice n , v níž rovina kružnice m protíná plochu λ .

Vzdálenost středů kružnic m, n je $c = \sqrt{l^2 - v^2}$. Řešení podle toho existuje, jestliže

$$|r' - r| \leq c \leq r' + r.$$

Je vidět, že v tomto případě má úloha nejvýše dvě různá řešení, a to v případě nerovností. Platí-li jedna rovnost, má úloha pouze jedno řešení.

Ze zahraničních časopisů

Znovu uveřejňujeme několik příkladů z MO Německé demokratické republiky. Jsou to příklady náležející do Olympiadeklasse 10. Nejsou obtížné a proto snad přijdou vhod našim čtenářům.

1. Dokažte tuto větu: Mějme libovolné číslo (reálné) a k němu přičtěme dvojnásobek poloviny čísla o 1 menšího. Výsledek je dvojnásobek nějakého čísla.

2. Je dán rovnoramenný trojúhelník, v němž $AC = BC$. Tento trojúhelník rozdělte přímkou r rovnoběžnou se základnou AB tak, aby

vzniklé dvě části měly týž obsah. Konstrukci popište, zdůvodněte a proveďte diskusi.

3. Určete všechny lineární funkce $f(x)$, které pro každé reálné x a pro každé reálné a mají tu vlastnost, že

$$f(x) = f(x + 1) - a.$$

4. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ a pro všechna kladná reálná čísla $x \neq 1$ platí

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}.$$

5. Při šachovém turnaji bylo sehráno přesně 15 partií a přitom každý hrál proti každému právě jednou. Vítěz partie dostal 1 bod, poražený nedostal žádný bod a při remíze dostal každý z hráčů $\frac{1}{2}$ bodu. Po skončení turnaje neměli žádní dva hráči stejný počet bodů. Druhý nejlepší měl právě o 2 body víc než poslední. O několika účastnících turnaje — označíme je A, B, C, ... — jest známo:

A se umístil lépe než D, ale ani A ani D v žádné hře neremizovali. — C se umístil jako třetí a porazil čtvrtého.

Ukažte, že tyto údaje stačí k tomu, abychom mohli určit výsledek hry B proti C.

6. Uvnitř krychle, jejíž hrana má delku 1, je naprosto libovolně umístěno 28 různých bodů. Ukažte, že o vzdálenosti s aspoň dvou z těchto bodů platí

$$d \leq \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

Dva účastníci MO 1970 v Německé demokratické republice, Roland Wolter a Bernhard Worel, zaslali čtenářům časopisu Alpha tyto dva příklady.

1. Jsou dána dvě racionální čísla

$$a = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} \quad b = \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$$

Rozhodněte, zda si jsou obě čísla rovna a když ne, které je větší. (R. Wolter)

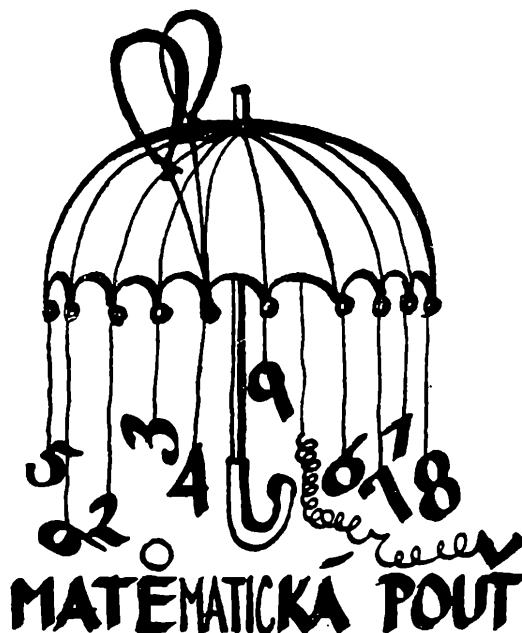
2. Nechť a je kladné reálné číslo. Zjistěte, zda soustava

$$\begin{aligned} x_1 x_4 x_5 &= a^2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 &= 3a, \\ x_3 + x_5 &= 2x_6, \\ x_1 x_2 x_4 &= a^3. \end{aligned}$$

má řešení vyjádřené nezápornými čísly. (B. Worel)

S. H.

MATEMATICKÉ ZÁBAVY



BÍLÝ TAHNE A VYHRAJE.

Název připomíná často užívané označení šachových studií. Úloha, kterou vám předkládáme však s královskou hrou v šachy nesouvisí, ale je to také hra.

Hrací plochou je graf na obr. 1. V základním postavení má bílý svůj kámen na poli B, černý — také jeden kámen — na poli Č. Kameny se při každém tahu mohou přemístit vždy jen na sousední pole.

Pravidla a cíl hry :

- (1) Bílý začíná.
- (2) Bílý a černý táhnou střídavě.
- (3) Bílý vyhraje, jestliže nejpozději šestým tahem „vyhodí“ černého (tzn. táhne na pole obsazené černým hráčem). V opačném případě bílý prohrává. (Obr. 1 je na následující str.)

Úkol pro čtenáře: Zjistěte, zda sdělení v nadpise je pravdivým výrokem. (Řešení zašlete redakci časopisu do dvou měsíců po vyjití tohoto čísla.)

Milan Koman

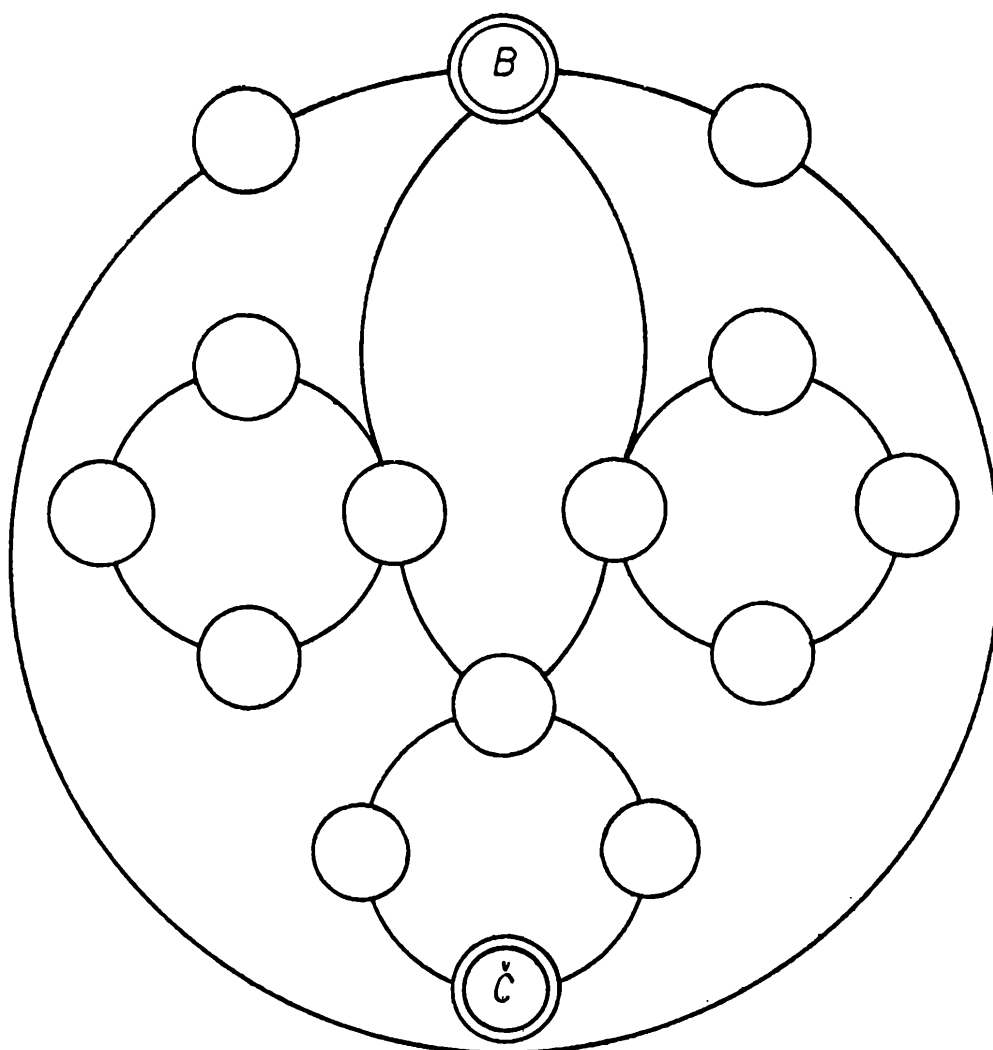
2. V kolektivu pracují muži a ženy. Jedna z žen odchází do důchodu. Kdyby byla nahrazena dalším mužem, bylo by procento žen v kolektivu právě o jedno menší než v případě, že odejde bez náhrady. Kolik mužů a kolik žen bylo původně v kolektivu?

3. Trojmoci přirozených čísel jsou psány pořadě vedle sebe:

182764125216

Která číslice je ve vzniklém čísle na 1972. místě?

O. S.



Obr. 1

Pokyny čtenářům

Znovu upozorňujeme, že veškerou agendu spojenou s expedicí Rozhledů (předplatné, objednávky jednotlivých čísel, odhlášení) provádí jen Poštovní novinová služba v místě zájemce. Redakce nemá k dispozici volné výtisky.

Pokyny autorům

Otiskujeme články zaslané redakci s úplným jménem autora (včetně akademických titulů), jeho působištěm a plnou adresou bydliště. O otištění rozhoduje redakční rada po vyslechnutí připomínek určeného recenzenta. *Nevyžádané rukopisy se nevracejí.* Zamítavé recenze se autorům oznamují po schválení redakční radou, a to ve zhuštěné formě. Recenze ani otištění proto neurgujte.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

křivka
 prostorová křivka

 řídící křivka
 uzavřená křivka
 vytvorující křivka

křivkový
křivočarý

křivost

křivý

kulatý

kulový

 kulový pás
 kulová plocha
 kulová úseč
 kulový vrchlík
 kulová výseč

kužel

 rotační kužel

 šikmý kužel

kuželosečka

kuželový

 kuželová plocha

kvádr

kvadrant

kvadratický

kvadratura

kvadrika

kvantifikátor

kvocient

ligne *ž* courbe; courbe *ž*
 courbe gauche; courbe à deux
 courbures

directrice *ž*
 courbe fermée

génératrice *ž*

curviligne

curviligne

courbure *ž*

courbe

rond, e

sphérique

 zone *ž* sphérique

 sphère *ž*; surface *ž* sphérique

 segment *m* sphérique

 calotte *ž* sphérique

 secteur *m* sphérique

cône *m*

 cône de révolution

 cône oblique

section *ž* conique; conique *ž*
conique

 surface *ž* conique

parallélepède *m* rectangle

quadrant *m*

quadratique

quadrature *ž*

quadrique *ž*

quantificateur *m*

quotient *m*

— L —

lemma
 lemniskata
 levý
 levá strana rovnice

 ležet
 bod A leží na přímce p
 libela
 libovolně
 libovolný
 líc
 lichoběžník
 lichoběžníkový
 lichý
 limita
 lineární
 lineární rovnice
 logaritmus
 dekadický logaritmus

 logaritmus o základu z
 přirozený logaritmus

 logaritmický
 logaritmické pravítko
 logaritmické tabulky
 logický
 logika
 lokální
 lomený
 lomená čára
 lomená závorka

lemme m
 lemniscate $ž$
 gauche
 premier membre m d'une équation $ž$
 appartenir
 le point A appartient à la droite p
 niveau m
 arbitrairement
 arbitraire
 avers m
 trapèze m
 trapézoidal, e, aux
 impair
 limite $ž$
 linéaire
 équation linéaire
 logarithme m
 logarithme décimal, logarithme vulgaire
 logarithme dans un système de z
 logarithme naturel; logarithme népérien
 logarithmique
 règle m à calcul
 table $ž$ des logarithmes
 logique
 logique $ž$
 local, e, aux
 brisé, e
 ligne $ž$ brisée
 crochet m

— M —

majoranta
 majorantní
 malý
 nekonečně malý
 mantisa
 matematicky
 matematický
 matematická indukce
 matematická naděje
 matematicka
 matematik
 matematika

majorant m
 majorant, e
 petit, e
 infinitement petit
 mantisse $ž$
 mathématiquement
 mathématique
 récurrence $ž$
 espérance $ž$ mathématique
 mathématicienne $ž$
 mathématicien m
 mathématique $ž$, mathématiques $ž$

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 50, 1971-1972, KVĚTEN



ROČNÍK 50
KVĚTEN 1972

9

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odbornou péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellero- vá, Teplice. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Pra- ze, 1972.

OBSAH

J. Kotyk: Hrst vzpomínek .	385
J. Troják: Stromy a lesy	388
RNDr. O. Odvárko: Ještě jednou o Boo- leovských rovnicích	391
A. Smržová: Dynamické programování	396
I. Volf, M. Volfová: K čemu mi slouží znalost druhých mocnin některých čísel	403
S. Horák: Věta o tečnovém čtyřúhelníku	407
Doc. ing. L. Drs: Automatické kreslení IV	409
F. Golab: Kontaktní napětí a jeho vznik	411
I. Baník: Další paradox	414
Ing. dr. V. Šindelář: Vedlejší jednotky mezinárodně nedoporučované	419
RNDr. J. Široký, RNDr. M. Široká: Ote- vřené hvězdokupy	420
Naše soutěž	423
J. Kotyk: Vývoj telekomunikací	428
J. Sedláček: Problém čtyř barev zůstává nerozřešen	430
Recenze	431
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouz- ský	3. a 4. str. obálky



Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

Jubilejní padesátý ročník Rozhledů!

Letos proto častěji než jindy vzpomínáme...

Byl jsem tehdy, před 50 lety, ještě žákem střední školy, když také náš pečlivý učitel fyziky několikrát obětoval kousek vyučovací hodiny Rozhledům a vzpomínám.

* * *

Jednou, bylo to na sklonku prvního pololetí školního roku, dojat sděloval, že dne 22. ledna 1922 zemřel jeden z našich předních fyziků Dr. Čeněk Strouhal, profesor experimentální fyziky Karlovy university. Vřelými slovy přiblížil nám pak Strouhala jako průkopníka fyzikálního bádání u nás a ocenil záslužnou vědeckou činnost i osobní vlastnosti svého vysokoškolského učitele; líčil, jak jeho přednášky byly vždy vzorně připraveny a svědomitě do všech podrobností po stránce věcné i jazykové propracovány. Strouhalovo pedagogické mistrovství bylo prý obecně známo tak, že na jeho přednášky přicházeli jako hosté i posluchači práv, historie a filosofie. Profesor Strouhal, mistr slova i přednesu, zkušený, přesný a obratný experimentátor, přitahoval celou svou osobností. Vzácný člověk!

Nám, žákům, byl Strouhal znám především jako autor mnoha poutavých článků „Mosaiky“ v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky; jimi získával Strouhal středoškolskou mládež studiu fyziky, astronomie a meteorologie. Tento úkol převzaly také — a to právě *před 50 lety* — naše Rozhledy. V řadě výtečných učebnic, vydaných v proslulém Sborníku Jednoty českých matematiků a fysiků, podařilo se Strouhalovi mistrně zpracovat některé kapitoly učiva fyziky; postupně vyšly: „Mechanika“ (1901), „Akustika“ (1902), „Thermika“ (1908)

a „Optika“ (1918). Jako vhodná a velmi vyhledávaná maturitní četba se osvědčily zejména tzv. Strouhalovy „Archy“, dva díly „Experimentální fyziky“, litografované přednášky, jež vyšly již v minulém století ve dvou vydáních (1887 a 1897) a dosáhly také u žáků středních škol veliké obliby. Strouhalovy spisy staly se tak přední ozdobou knihovny každého abiturienta, majícího o fyziku hlubší zájem, a trvalým pomocníkem v jeho dalším studiu.

Bouřlivý rozvoj fyziky a techniky na sklonku 19. a počátku 20. století — první bezdrátový přenos Morseových značek Alexandrem Stěpanovičem Popovem památného dne 7. května 1895; první bezdrátový přenos mluveného slova slovenským vynálezcem Jozefem Murgašem roku 1905; pokroky techniky lampové (dioda, Fleming 1904; trioda, Lee de Forest 1906) a netušené možnosti jejího dalšího úspěšného uplatnění ve sdělovací technice; objev paprsků X (Röntgen 1895); objev radioaktivního záření (Becquerel 1896); desintegrační teorie Rutherfordova (1902) a vývoj nových názorů o stavbě atomu; možnost realizovat dávný sen lidstva a představy alchymie transmutacemi prvků; revoluční objev účinkového kvanta, teorie kvant (Planck 1900); kvantová podstata světla, slavná rovnice $W = m c^2$, princip relativnosti prostoru a času (Einstein 1905) — nebylo téměř roku, který by nepřinesl převratnou novinku, zázrak nad zázrak — nutil naše fyziky, aby s prof. Strouhalem v čele usilovali o stavbu ústavu, jenž by umožnil také české vědě s jinými národy úspěšně soutěžit. Po dlouholetém boji se jim konečně podařilo přestěhovat universitní fyziku ze stísněného „domečku“ v starobylém Klementinu do nového Fyzikálního ústavu v Praze 2, U Karlova 5. První přednáška v něm byla proslovena dne 13. ledna 1908. Tento den patřil k nejšťastnějším i v životě prof. Strouhala, jehož nový Fyzikální ústav české university se stal také důstojným památníkem.

* *

*

Neuplynul — tehdy, před 50 lety — ani celý měsíc a náš milý učitel fyziky opět přišel do vyučování s novinkou. Česká věda se hned v počátcích naší státní samostatnosti před celým světem proslavila významným objevem, objevem polarografie dne 10. února 1922. Tohoto památného dne provedl 31letý Dr. Jaroslav Heyrovský první pokus elektrolýzy s rtuťovou kapkovou elektrodou, kterou tvořila rtuťová kapka vytékající z velmi úzké skleněné kapiláry. Pravidelným odkapáváním rtuti se Heyrovský důmyslně postaral o to, že se povrch elektrody periodicky obnovuje, odstraňují se produkty elektrolýzy, vytvářejí se stále podmínky pokusu. Po třech letech, roku 1925, následovalo sestrojení přístroje, který automaticky zaznamenával křivky znázorňující závislost procházejícího elektrického proudu na elektrickém

napětí vloženém na elektrody, prvního automatického laboratorního přístroje. Heyrovský nazval svůj přístroj polarograf. Pro elektrolýzu jím upravenou začal se pak používat výraz polarografie. Výsledky získané pomocí kapkové elektrody rtuťové záhy umožnily vypracovat nové metody také pro práci s elektrodami z jiných kovů. Elektrochemie na nertuťových elektrodách se rozvíjela souběžně s polarografií zvláště v Sovětském svazu. Vystoupení české vědy na mezinárodním jevišti, zejména také přednášky, které Heyrovský vykonal roku 1934 v Leningradě, v Moskvě a v Kyjevě, otevřelo jeho metodě brzy cestu do světa. Heyrovského objev polarografie vyvolal v jistém smyslu renesanci celé elektrochemie.

* *

*

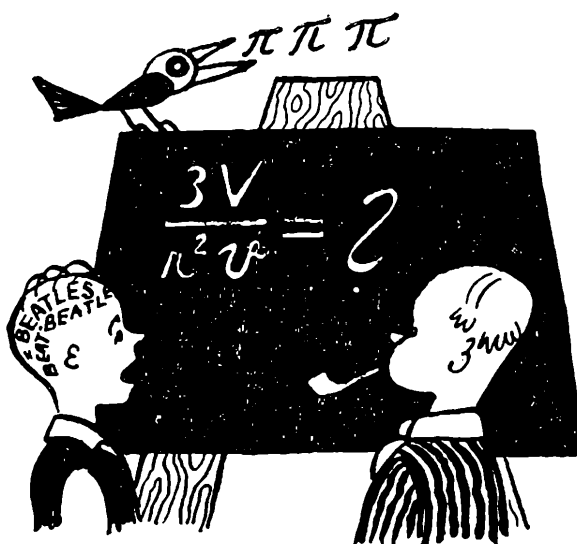
Roku 1922, také právě před 50 lety, stal se nositelem Nobelovy ceny dánský fyzik Niels Bohr, jehož cesta k zdrojům atomové energie dospěla k významnému milníku — vytvoření modelu atomu. Z fyziků, s nimiž jsme se v pohnutém desetiletí 1895 až 1905 výše setkali, byli tímto vysokým vyznamenáním postupně již dříve poctěni Wilhelm Konrad Röntgen (1901), Henri Becquerel (1903), Ernest Rutherford (1908), Max Planck (1918) a Albert Einstein (1921). V roce 1959, kdy polarografie byla už netoliko samostatným vědním oborem, nýbrž i analytickou metodou, ba přímo samozřejmou součástí našeho života, byla Nobelova cena udělena také jejímu zakladateli prof. Dr. Jaroslavu Heyrovskému. Čech Heyrovský stanul tak v řadě nejslavnějších badatelů, kteří se zasloužili o lidstvo.

Čtenářům Rozhledů doporučujeme:

Vyšín-Macháček: XX. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Brožura matematické olympiády informuje o výsledcích a průběhu předchozího ročníku matematické olympiády a přináší vyřešené úlohy všech kol a kategorií soutěže včetně připravených úloh. Publikace má získat žáky pro matematickou olympiádu a poskytnout jim vzorová řešení pro přípravu na tuto soutěž. Brožury matematické olympiády slouží i jako sbírky řešených úloh k opakování a prohlubování učiva z matematiky. V závěru knihy je zpráva o mezinárodní olympiádě spolu s vyřešenými soutěžními úkoly. I. vydání.

Brož. Kčs 7,50



Stromy a lesy

JAN TROJÁK, MFF UK

Nedůvěřivého čtenáře mohu ujistit, že opravdu čte článek s matematickým obsahem, že nepůjde o botaniku ani o problematiku ochrany přírody. Budeme se zabývat jedním typem grafů, které se, jak uvidíme, celkem výstižně nazývají stromy, resp. lesy. Teorie grafů vůbec s oblibou používá slov z běžného života či jiných věd k označení svých pojmů; přesvědčíte se o tom v dalších článcích o grafech.

Se základními pojmy teorie grafů jste se seznámili v článku J. Šedivého Grafy s uzly a hranami (Rozhledy, roč. 50, č. 7). Zavedme si však další úspornou symboliku: symbolem $\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{H})$ označme neorientovaný graf s množinou uzlů $\mathbf{U}$ a s množinou hran $\mathbf{H}$, někdy označíme graf jen písmenem $\mathbf{G}$. V tomto článku vždy bude $\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{H})$ neorientovaným grafem, ve kterém jsou každé dva uzly spojeny nejvýše jednou hranou, proto budeme moci označit hranu spojující uzly u_i, u_j symbolem $u_i u_j$ nebo $u_j u_i$.

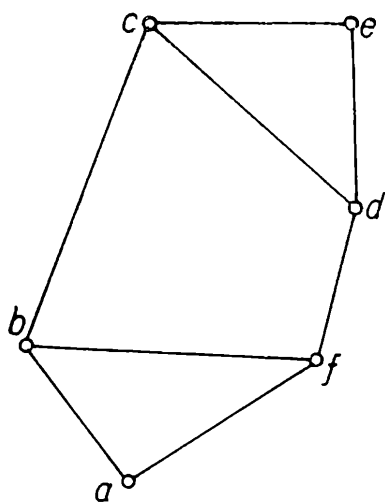
Již v citovaném článku byla naznačena užitečnost cest v grafu a zapsána posloupnost uzlů a hran, kterou lze takovou cestu vyjádřit. Zobecníme poněkud pojem cesty v grafu, přiznejme si možnost, že při procházce bez cíle po grafu by nám nevadilo, kdybychom prošli několikrát stejným uzlem nebo přešli vícekrát po stejné hraně. Posloupnost uzlů a hran, které při tom postupně procházíme, nazveme sledem v grafu $\mathbf{G}$ a zapíšeme ji symbolicky

$$u_0, u_0 u_1, u_1, u_1 u_2, u_2, \dots, u_{n-1}, u_{n-1} u_n, u_n,$$

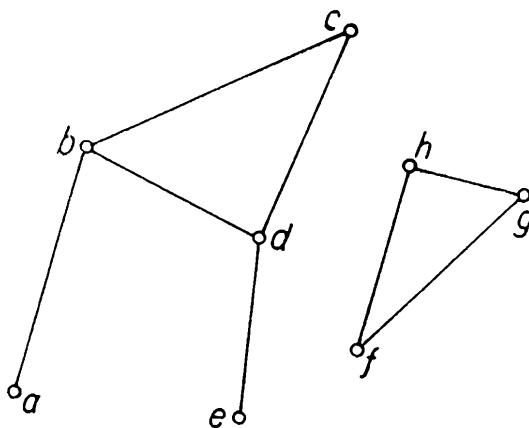
kde u_i označuje uzel grafu a $u_i u_j$ hranu spojující uzly u_i, u_j . Hrany i uzly se mohou v posloupnosti opakovat, může být např. $u_2 = u_0$ apod.

Vzhledem k úmluvě, že každé dva uzly grafu jsou spojeny nejvýše jednou hranou, můžeme sled zapsat úsporněji jen posloupností uzlů: $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$, přičemž rozumíme tomuto zápisu tak, že kromě uzlů procházíme také po každé hraně spojující dva sousední uzly v posloupnosti (a že tato hrana v grafu existuje). Sled budeme nazývat *uzavřeným*, bude-li $u_0 = u_n$ a *otevřeným*, bude-li $u_0 \neq u_n$.

V grafu na obr. 1 můžeme najít nepřeborné množství různých sledů. Jedním z nich je např. sled $a, b, c, d, f, b, c, e, d$, který se podobá toulání v parku bez cíle. Sledem je jistě i posloupnost $a, f, a, f, a, f, \dots, a$, nebo $d, e, c, \dots, c, e, d$ apod. Půjdeme-li však za určitým cílem, třeba z a do d , nebudeme ztrácet čas vrácením se do míst, kterými jsme již prošli a zvolíme např. sled a, f, d nebo a, b, f, d apod.



Obr. 1



Obr. 2

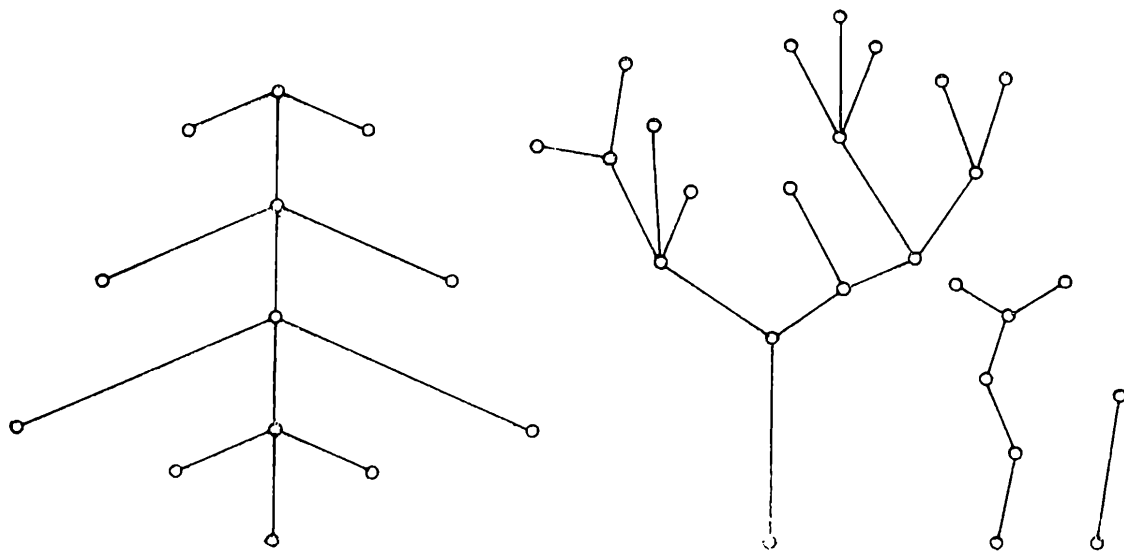
Cestou v grafu budeme nazývat každý sled, ve kterém jsou všechny uzly (s možnou výjimkou prvního a posledního) navzájem různé. Uzavřená cesta s aspoň třemi uzly se nazývá *kružnice* v grafu. Cesty v grafu na obr. 1, které zapíšeme posloupnostmi a, b, f, a , nebo b, c, d, f, b nebo a, b, c, e, d, f, a jsou *kružnicemi* v grafu. Vidíte, že i termín „kružnice“ si teorie grafů vypůjčila k označení jednoho ze svých pojmů, který *kružnici* v geometrickém smyslu slova připomíná jen návratem do výchozího uzlu.

Všimněme si grafu na obr. 2; je zřejmé, že každé dva uzly z pětičky b, c, d, e, f lze spojit nějakou cestou. Podobně lze spojit nějakou cestou kterékoliv dva z uzlů f, g, h . Naopak však z uzlu a nevede žádná cesta do uzlu f ; navíc neexistuje žádná cesta z kteréhokoliv z uzlů a, b, c, d, e do některého z uzlů f, g, h . Graf na obr. 2 obsahuje tedy dva podgrafy, jejichž uzly nelze spojovat cestami, tím se liší graf na obr. 2 od grafu na obr. 1.

Existuje-li ke každým dvěma uzlům grafu G cesta, která je spojuje, nazýváme graf G *souvislým grafem*; v opačném případě mluvíme

o nesouvislém grafu. Je jasné, že graf znázorněný na obr. 1 je příkladem souvislého grafu, zatímco obr. 2 ukazuje nesouvislý graf. Ovšem i nesouvislý graf může obsahovat souvislé podgrafy; zvolíme-li v grafu na obr. 2 uzel b , můžeme vytvořit podgrafy zahrnující všechny uzly a hrany, které mohou být s b v nějakém sledu. Takový podgraf zahrnuje uzly a, b, c, d, e a hrany ab, bc, bd, cd, de ; celkem výstižně ho můžeme nazvat komponenta grafu, druhou komponentou je podgraf s uzly f, g, h a hranami fg, gh, hf .

Někdy může o souvislosti grafu rozhodovat jediná hrana; čtenář si může snadno nakreslit graf, který získá doplněním hrany ef v grafu na obr. 2. Toto doplnění hrany připomíná vybudování mostu na přerušené komunikaci, skutečně se také v teorii grafů užívá termínu *most* k označení hrany souvislého grafu, po jejímž odstranění se poruší souvislost grafu. Na obr. 1 není žádná hrana grafu jeho mostem.



Obr. 3

Všimněme si nyní grafu znázorněného na obr. 3; jde zřejmě o nesouvislý graf, který má pět komponent. V žádné komponentě nenajdeme ani jednu kružnici, a to je výrazná vlastnost toho typu grafů, ke kterému míříme v tomto článku. Tři komponenty grafu na obr. 3 jsou záměrně nakresleny tak, aby připomínaly stromy, celý graf můžeme pak považovat za jakýsi les.

Každý neorientovaný graf, ve kterém neexistují kružnice, budeme nazývat les. Každý souvislý neorientovaný graf bez kružnic budeme nazývat strom.

Domysleme některé důsledky uvedených definic, abychom nechápali stromy a lesy v nějak zúženém významu. Uvědomme si, že i graf skládající se z jediného uzlu je stromem, stejně tak graf skládající se ze dvou uzlů a hrany, která je spojuje (oba stromy jsou znázorněny i na obr. 3). Dále je lesem i každý strom (zde by biologové asi nejvíce protestovali, matematici však jsou zvyklí na takové případy, např. na jednoprvkové množiny).

Stromy však mají celou řadu výrazných charakteristických vlastností, zkuste např. spočítat, o kolik více uzlů než hran má každý strom znázorněný na obr. 3. Možná vás překvapí, že vždy vyjde týž výsledek. Uvědomte si dále, kolika různými cestami lze spojit libovolné dva uzly stromů na obr. 3; není jich mnoho — jen jediná cesta pro každou dvojici uzlů stromu. Je to náhoda nebo nutnost? Jak lze nazvat kteroukoliv hranu stromu, uvědomíme-li si důsledky jejího odstranění pro souvislost grafu? Můžete se nad těmito problémy zamyslet, vrátíme se k nim v dalším článku.

Cvičení

1. Nakreslete větší počet stromů se čtyřmi (pěti, šesti) uzly, vytvoříte tak les. Pokuste se o co nejrozmanitější typy „větvení“ stromů.
2. Jistě znáte strukturní vzorce organických chemických sloučenin. Omezte se na sloučeniny s jednoduchými vazbami mezi atomy a přiřadte strukturním vzorcům uzlové grafy tak, že atomy znázorníte uzly grafu a vazby mezi nimi hranami. Jaký význam má pojem stromu v tomto případě, tj. jaké chemické sloučeniny představují stromy?
3. Kolik hran musíte odstranit z grafu na obr. 1, abyste získali strom se stejnou množinou uzlů? Dojdeme při různých postupech k různým výsledkům, nebo vždy skončíme u stejného počtu hran?

Ještě jednou o booleovských rovnicích

RNDr. OLDŘICH ODVÁRKO, MFF UK

V článku „Řešení booleovských rovnic“ (číslo 8, roč. 50) jsme si na jednom příkladě ukázali dvě metody řešení booleovských rovnic. Stručně si je připomeňme.

I. metoda: Kromě vět (0)–(20) užíváme úpravy „násobení obou stran rovnice stejným prvkem různým od nuly“. Abychom nemuseli při zkoušce „prověřovat“ příliš mnoho prvků, ukazuje se obvykle vhodné násobit danou rovnici postupně různými prvky. Takto získané rovnice „zjednodušujeme“ pomocí vět (0)–(20) a odtud potom vyslovíme závěry o množině „případných“ kořenů. Při řešení touto metodou musíme vždy provést zkoušku dosazováním.

II. metoda: Zde používáme kromě vět (0)–(20) ještě tyto dvě věty:

$$x + y = 0 \text{ právě když je } x = 0 \text{ a zároveň } y = 0, \quad (\text{a})$$

$$xy' + x'y = 0 \text{ právě když je } x = y. \quad (\text{b})$$

Užijeme-li k řešení dané rovnice tuto metodu, není třeba zkoušku dosazováním provádět.

V tomto článku si ukážeme řešení několika dalších booleovských rovnic a jejich soustav.

1. V článku „Několik modelů Booleovy algebry“ (číslo 6) jsme dospěli k závěru, že množina $\mathbf{P} = \{1, 2, 3, 6\}$, na níž jsou definovány binární operace „tvoření nejmenšího společného násobku“, „tvoření největšího společného dělitele“ a unární operace „ $x^* = \frac{6}{x}$ “, je modelem Booleovy algebry $(\mathbf{B}, +, \cdot, ')$. Význačnými prvky jsou čísla 1 a 6; nejmenší společný násobek čísel x, y jsme označovali $n(x, y)$, největší společný dělitel $D(x, y)$.

Řešme v množině $\mathbf{P}$ rovnici

$$n(D(x, 2), 3) = D(n(3, x^*), x) \quad (1)$$

o jedné neznámé x .

Zvolme k vyřešení tohoto úkolu II. metodu. Zápis rovnice (1) přepíšeme do jazyka Booleovy algebry. Půjde o tyto záměny: $n(x, y) \rightarrow x + y$, $D(x, y) \rightarrow xy$, $x^* \rightarrow x'$, $2 \rightarrow a$, $3 \rightarrow b$.

Dostaneme pak rovnici

$$ax + b = (b + x') \cdot x$$

o jedné neznámé $x \in \mathbf{B}$. Po úpravě její pravé strany dospějeme k rovnici

$$ax + b = bx \quad (2)$$

Sledujte pozorně další kroky řešení a vždy je zdůvodněte!

$$\begin{aligned} (ax + b) \cdot (bx)' + (ax + b)' \cdot bx &= 0 & [\text{věta (b)}] \\ (ax + b) \cdot (b' + x') + (a' + x') \cdot b' \cdot bx &= 0 \\ ab' \cdot x + bx' &= 0 \end{aligned}$$

$$ab'x = 0 \quad \text{a zároveň} \quad bx' = 0 \quad [\text{věta(a)}]$$

čili

$$ab' \cdot x = 0 \quad \text{a zároveň} \quad b' + x = 1$$

Po přepisu do symboliky $(\mathbf{P}, n, D, *)$ dostaneme

$$D(D(2, 3^*), x) = 1 \quad \text{a zároveň} \quad n(3^*, x) = 6$$

čili

$$D(2, x) = 1 \quad (3)$$

a zároveň

$$n(2, x) = 6 \quad (4)$$

Přitom (3) platí, právě když je $x = 1$ nebo $x = 3$; (4) platí, právě když je $x = 3$ nebo $x = 6$. Množina všech kořenů rovnice (1) je tedy rovna množině $\{3\}$.

Poznámka: Množina $\mathbf{P}$ je pouze čtyřprvková. Můžeme tedy rovnici (1) řešit také tak, že do ní dosazujeme za neznámou x postupně jednotlivé prvky množiny $\mathbf{P}$ a vždy rozhodujeme, zda získaný výrok je pravdivý či nikoliv.

Můžete také zkusit řešit naši rovnici I. metodou. Vhodné je například násobit rovnici (2) postupně prvky b' , x' .

Porovnejte pak, která z uvedených metod se vám v tomto příkladě jeví nejvhodnější.

2. Ilustrujme na jednom zcela jednoduchém příkladě, jak řešíme soustavu booleovských rovnic. Budeme řešit soustavu rovnic

$$x + y = x' \quad (5)$$

$$x'y = 0 \quad (6)$$

s neznámými x, y v množině $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$.

Rovnici (5) upravíme užitím věty (b) uvedené v úvodu článku:

$$(x + y) (x')' + (x + y)' \cdot x' = 0 \quad (7)$$

Dále aplikujeme na rovnice (6) a (7) větu (a):

$$(x + y) \cdot (x')' + (x + y)' \cdot x' + x'y = 0$$

Upravujeme levou stranu této rovnice a postupně dostáváme

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot x + x'y'x' + x'y &= 0 \\ x + (x'y' + x'y) &= 0 \\ x + x' &= 0 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice ihned plyne, že množina všech řešení dané soustavy rovnic je prázdná (pro každé $x \in \mathbf{B}$ je $x + x' = 1$; přitom je $1 \neq 0$).

3. Uvedme nyní jednu slovní úlohu, jejíž řešení po matematizaci podmínek z jejího textu vede k problému řešit booleovskou rovnici.

Jirka a Zdeněk jsou vášniví filatelisté. Z nové série sedmi známek má Jirka tři. Zdeněk právě všechny zbývající a oba se snaží vlastnit úplnou sérii. Označme zde pro stručnost známky této série čísla 1, 2, ..., 7. Jirka postupně získal od dalších filatelistů známky 3, 4, 5, 7, Zdeněk 2, 4, 6. (Přitom ovšem není vyloučeno, že některé z nich už předem vlastnili, získané známky jsou jim dobré i „na výměnu“.) Když vzájemně porovnávali svá alba, zjistili, že známky 2, 4, 5, 7 mají oba, ale ostatní známky série má vždy nejvýše jeden z nich. Určete, které známky ze série vlastnil Jirka původně a které má v albu nyní.

Využijme při řešení této úlohy nejprve svých znalostí o množinách. Písmenem $\mathbf{F}$ označme množinu všech známek uvažované série, tj. $\mathbf{F} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pokusme se nyní vyjádřit všechny podmínky z textu úlohy pomocí podmnožin množiny $\mathbf{F}$ a operací s nimi. Ponechme zatím stranou údaj o počtu známek, které původně Jirka a Zdeněk vlastnili.

Písmenem $\mathbf{X}$ označme neznámou množinu těch známek z dané série, které měl původně Jirka. Pak je dále

$\mathbf{X}'^*$	množina známek, jež měl původně Zdeněk
$\mathbf{X} \cup \{3, 4, 5, 7\}$	množina známek, jež má Jirka nyní
$\mathbf{X}' \cup \{2, 4, 6\}$	množina známek které má Zdeněk nyní
$(\mathbf{X} \cup \{3, 4, 5, 7\}) \cap (\mathbf{X}' \cup \{2, 4, 6\})$	množina známek, které jsou nyní ve vlastnictví obou
$\{2, 4, 5, 7\}$	množina známek, které jsou nyní ve vlastnictví obou

Z posledních dvou řádků provedené analýzy podmínek z textu úlohy lze už sestavit rovnici

$$(\mathbf{X} \cup \{3, 4, 5, 7\}) \cap (\mathbf{X}' \cup \{2, 4, 6\}) = \{2, 4, 5, 7\} \quad (8)$$

o jedné neznámé $\mathbf{X}$. Naším úkolem je řešit tuto rovnici v množině $\hat{\mathbf{F}}$ všech podmnožin množiny $\mathbf{F}$, tj. určit všechna $\mathbf{X} \in \hat{\mathbf{F}}$, pro něž platí (8). Rovnici budeme řešit metodou II. Přepíšme zápis rovnice (8) do jazyka Booleovy algebry. Namísto „ $\{3, 4, 5, 7\}$ “, „ $\{2, 4, 6\}$ “, „ $\{2, 4, 5, 7\}$ “, budeme psát postupně a, b, c . Dospějeme pak k rovnici

$$(x + a) \cdot (x' + b) = c$$

Po úpravě její levé strany dostaneme

$$bx + ax' + ab = c$$

Prověřujte další kroky řešení!

$$\begin{aligned} (bx + ax' + ab) \cdot c' + (bx + ax' + ab)' \cdot c &= 0 \\ (bx + ax' + ab) \cdot c' + (b' + x') \cdot (a' + x) \cdot (a' + b') \cdot c &= 0 \\ bc'x + ac'x' + abc' + a'b'c + a'cx' + a'b'cx + a'b'c + a'b'cx' + b'cx &= 0 \\ (bc' + b'c) \cdot x + (ac' + a'c) \cdot x' + (abc' + a'b'c) &= 0 \end{aligned}$$

Použijeme-li věty (a), dostaneme

$$(bc' + b'c) \cdot x = 0 \quad (9)$$

$$(ac' + a'c) \cdot x' = 0 \quad (10)$$

$$abc' + a'b'c = 0 \quad (11)$$

Přepíšme rovnice (9), (10) a (11) zpět do symboliky množinové algebry $(\hat{\mathbf{F}}, \cup, \cap, ')$. Úkolem je pak určit všechny prvky $\mathbf{X} \in \hat{\mathbf{F}}$, pro něž zároveň platí

$$((\{2, 4, 6\} \cap \{2, 4, 5, 7\})' \cup (\{2, 4, 6\}' \cap \{2, 4, 5, 7\})) \cap \mathbf{X} = \emptyset \quad (12)$$

$$((\{3, 4, 5, 7\} \cap \{2, 4, 5, 7\})' \cup (\{3, 4, 5, 7\}' \cap \{2, 4, 5, 7\})) \cap \mathbf{X}' = \emptyset \quad (13)$$

*) $\mathbf{X}'$ označuje doplněk množiny $\mathbf{X}$ vzhledem k množině $\mathbf{F}$

$$(\{3, 4, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6\} \cap \{2, 4, 5, 7\}') \cup (\{3, 4, 5, 7\}' \cap \{2, 4, 6\}' \cap \{2, 4, 5, 7\}) = \emptyset \quad (14)$$

Všimněme si, že v zápisu (14) se nevyskytuje neznámá. Kdyby výrok (14) byl nepravdivý, pak by množina všech kořenů rovnice (8) byla zřejmě prázdná. Sami snadno zjistíte, že (14) je výrok pravdivý; pokračujme proto v řešení našeho úkolu.

Po úpravách levých stran rovnice (12) a (13) dostaneme

$$\{5, 6, 7\} \cap \mathbf{X} = \emptyset \quad (15)$$

a dále

$$\{2, 3\} \cap \mathbf{X}' = \emptyset \quad (16)$$

(15) platí, právě když je

$$\mathbf{X} \subset \{5, 6, 7\}'$$

čili, když je

$$\mathbf{X} \subset \{1, 2, 3, 4\} \quad (17)$$

Rovnici (16) lze postupně upravit takto:

$$\{2, 3\}' \cup \mathbf{X} = \emptyset'$$

$$\{1, 4, 5, 6, 7\} \cup \mathbf{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Odtud už snadno dostaneme

$$\mathbf{X} \supset \{2, 3\} \quad (18)$$

Ze vztahů (17) a (18) plyne, že pro množinu $\mathbf{P}$ kořenů rovnice (8) platí:

$$\mathbf{P} = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Přihlédneme-li ještě k podmínce v textu úlohy, že Jirka měl původně tři známky, dospíváme k těmto dvěma možnostem jeho „původního vlastnictví“: 1, 2, 3; 2, 3, 4. Zkouškou dosazením do textu úlohy se přesvědčte, že obě získané trojice známek jsou řešením. Sami už jistě také odpovíte na druhou otázku. Zkuste ještě rovnici (8) řešit metodou I.

Cvičení

1. Řešte v $P = \{1, 2, 3, 6\}$ (viz odstavec 1) rovnici

$$D(n(x, D(1, x)), 6) = n(D(x^*, 3), 2)$$

o jedné neznámé x .

2. V článku „Několik modelů Booleovy algebry“ byl v odstavci 3 uveden model $(\mathbf{U}, +, \cdot, ')$, jehož prvky byly jisté uspořádané n -tice. Uvažujte speciálně $n = 3$, $a = 4$, $b = 5$ a řešte pak rovnici

$$([x_1, x_2, x_3] + [4, 5, 4])' + [x_1, x_2, x_3]' = [4, 4, 5]$$

o jedné neznámé $[x_1, x_2, x_3]$ v množině $\mathbf{U}$.

3. Zkuste řešit ještě jeden „filatelistický problém“: Jirka a Zdeněk měli z jisté série o sedmi známkách (opět je označme 1, 2, ..., 7) zcela stejné známky. Jirka později sehnal ještě známky 2, 3, Zdeněk 1, 2, 5, 7. Poté měl Zdeněk všechny známky jako Jirka a navíc ještě vlastnil 5 a 7. Které známky z dané série měl Zdeněk původně?

Dynamické programování

ANNA SMRŽOVÁ, Č. Budějovice

Společnost stojící na prahu vědeckotechnické revoluce se neobejde bez zavádění moderních matematických metod do všech sfér činnosti. Čtenáři, kteří se zajímají o moderní aplikace matematiky, jistě slyšeli o různých metodách programování sloužících k tomu, aby se z jisté množiny variant vybrala varianta vedoucí k optimálnímu výsledku. Poměrně známé je tzv. lineární programování, jehož různé metody jsou vyloženy v celé řadě publikací. V tomto článku ukáži na jednoduchém příkladě metodu dynamického programování.*)

Je dána tato úloha: Letadlo se nachází v dané výšce v_0 a má danou rychlost r_0 . Známe spotřebu pohonných hmot nutnou pro zvětšení výšky letadla z libovolné výšky v_1 na libovolnou výšku $v_2 > v_1$ při zachování rychlosti r ; rovněž známe spotřebu pohonných hmot při zvýšení libovolné rychlosti r_1 na libovolnou rychlost $r_2 > r_1$ při zachování výšky v . Cílem je dosáhnout konečné výšky v_k a konečné rychlosti r_k při minimální spotřebě pohonných hmot, přitom je $v_k > v_0$; $r_k > r_0$.

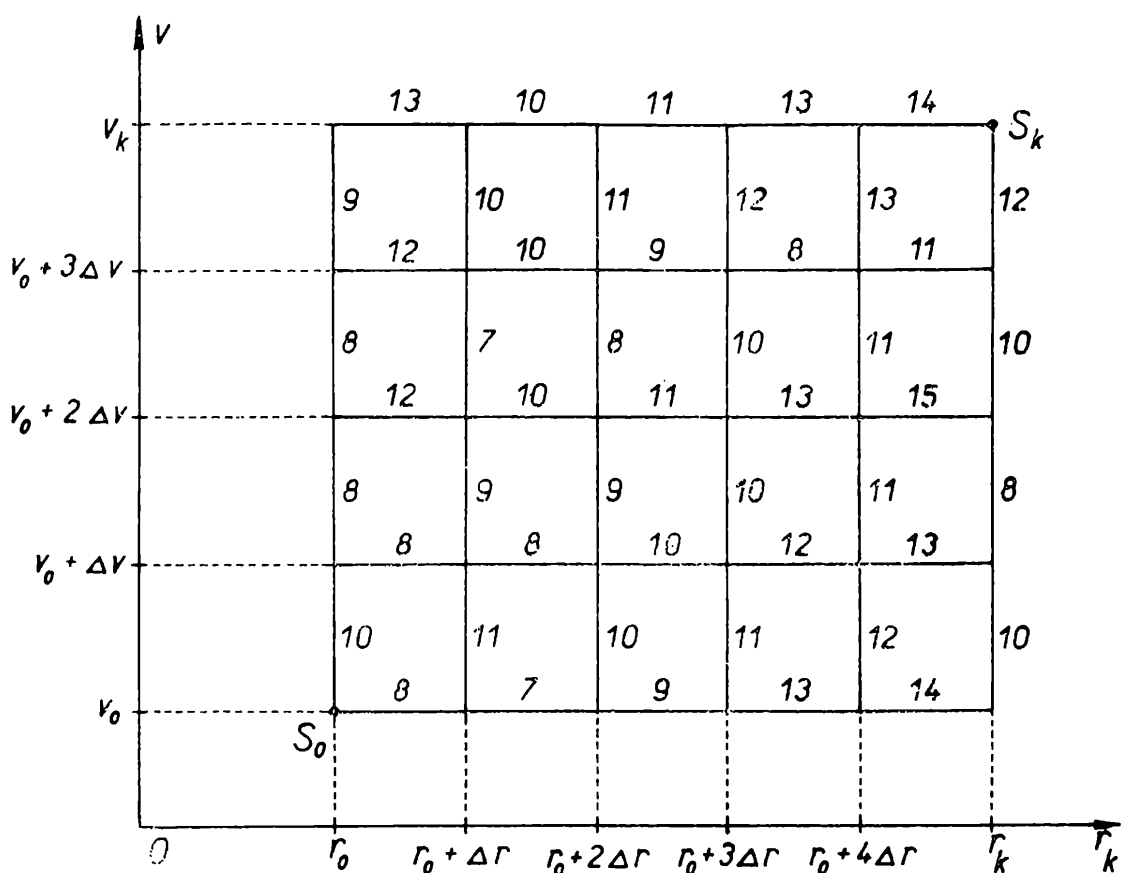
Nejprve budeme řešit jednodušší variantu úlohy. Předpokládejme, že proces získání požadované výšky a rychlosti sestává z řady po sobě následujících etap, ve kterých lze zvýšit buď pouze výšku nebo pouze rychlost (takto zjednodušený problém ovšem neodpovídá plně skutečnosti, neboť zpravidla lze měnit rychlost i výšku současně). Naším úkolem je vybrat optimální dráhu W , tj. dráhu, na které letadlo spotřebuje minimální množství pohonných hmot.

Postupujeme takto: rozdíl výšek $v_k - v_0$ rozdělíme na n_1 stejných dílů a rozdíl rychlostí $r_k - r_0$ na n_2 stejných dílů. Průběh pohybu rozdělíme na etapy tak, že v každé etapě lze změnit buď jen výšku v o hodnotu

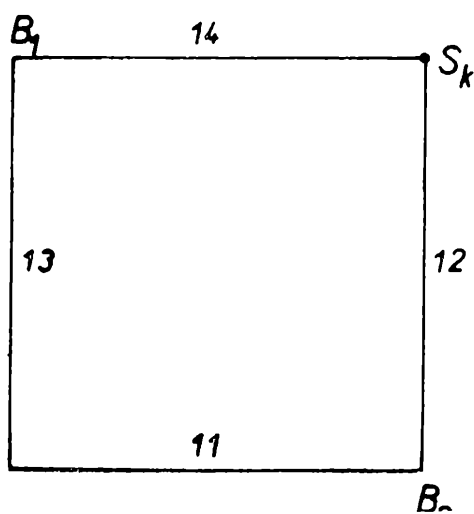
$$\Delta v = \frac{v_k - v_0}{n_1} \text{ nebo lze změnit pouze rychlost o hodnotu } \Delta r = \frac{r_k - r_0}{n_2}.$$

Je zřejmé, že počet etap, které jsou třeba, aby se letadlo z polohy S_0 dostalo do konečné polohy S_k , je dán součtem $n_1 + n_2$. Použijeme-li k znázornění dráhy letadla systému souřadnic rOv , jsou úseky dráhy letadla v jednotlivých etapách znázorněny horizontálními nebo vertikálními úsečkami o délce Δr , resp. Δv . Mezi všemi přípustnými drahami z S_0 do S_k musíme najít optimální. Ke každému úseku dráhy připsáme číselný údaj spotřeby pohonných hmot (obr. 1). K přemístění z S_0 do S_k

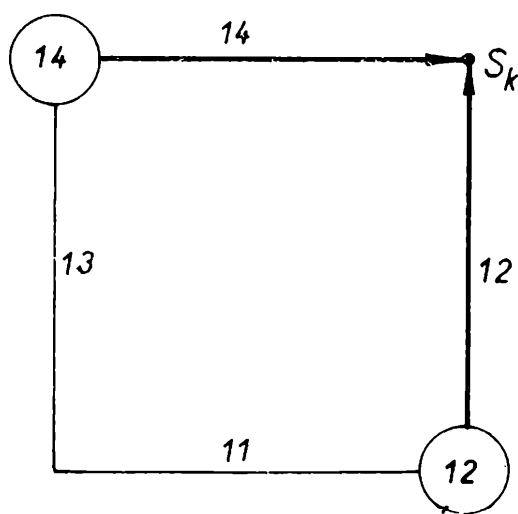
*) Ve 2. čísle tohoto ročníku Rozhledů byl uveřejněn článek dr. J. Morávka *O jedné rekurentní metodě pro řešení extrémálních úloh*, ve kterém autor vyložil obecný princip dynamického programování. Nynější článek vhodně ilustruje tuto metodu programování, zároveň je názornou ukázkou uplatnění ohodnocených grafů při řešení úloh. (Poznámka redakce.)



Obr. 1



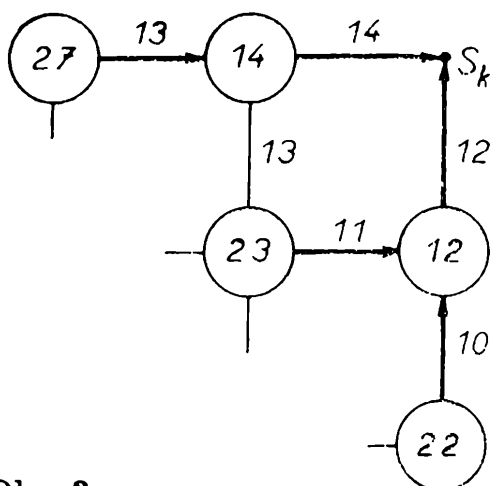
Obr. 2a



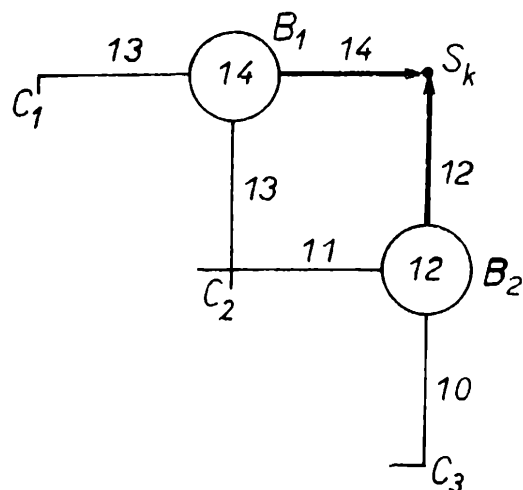
Obr. 2b

je třeba devíti etap; budeme se snažit minimalizovat spotřebu pohonných hmot v každé etapě. Začneme poslední etapou (obr. 2a).

Do bodu S_k se můžeme dostat pouze z bodu B_1 nebo z bodu B_2 . Dráha B_1S_k je charakterizována číslem 14, dráha B_2S_k číslem 12. Dostaneme-li se v předposlední, tj. osmé etapě do bodu B_1 , je pro nás optimální pokračovat z něho do bodu S_k po dráze B_1S_k . Dostaneme-li se do bodu B_2 , postupujeme po dráze B_2S_k . Tím jsme optimalizovali poslední etapu. Minimální spotřebu pohonných hmot zapíšeme do kroužku u bodů B_1 a B_2 , dráhu označíme šipkou (obr. 2b).

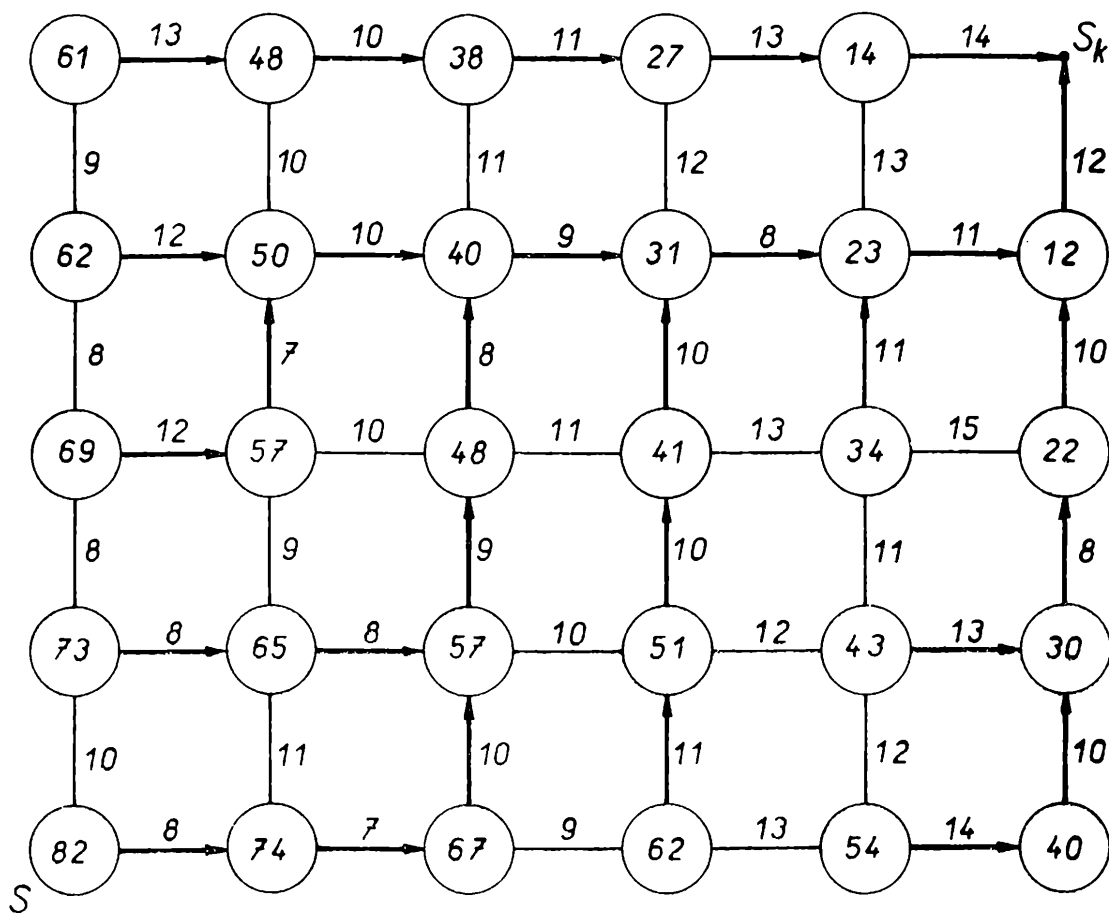


Obr. 3a

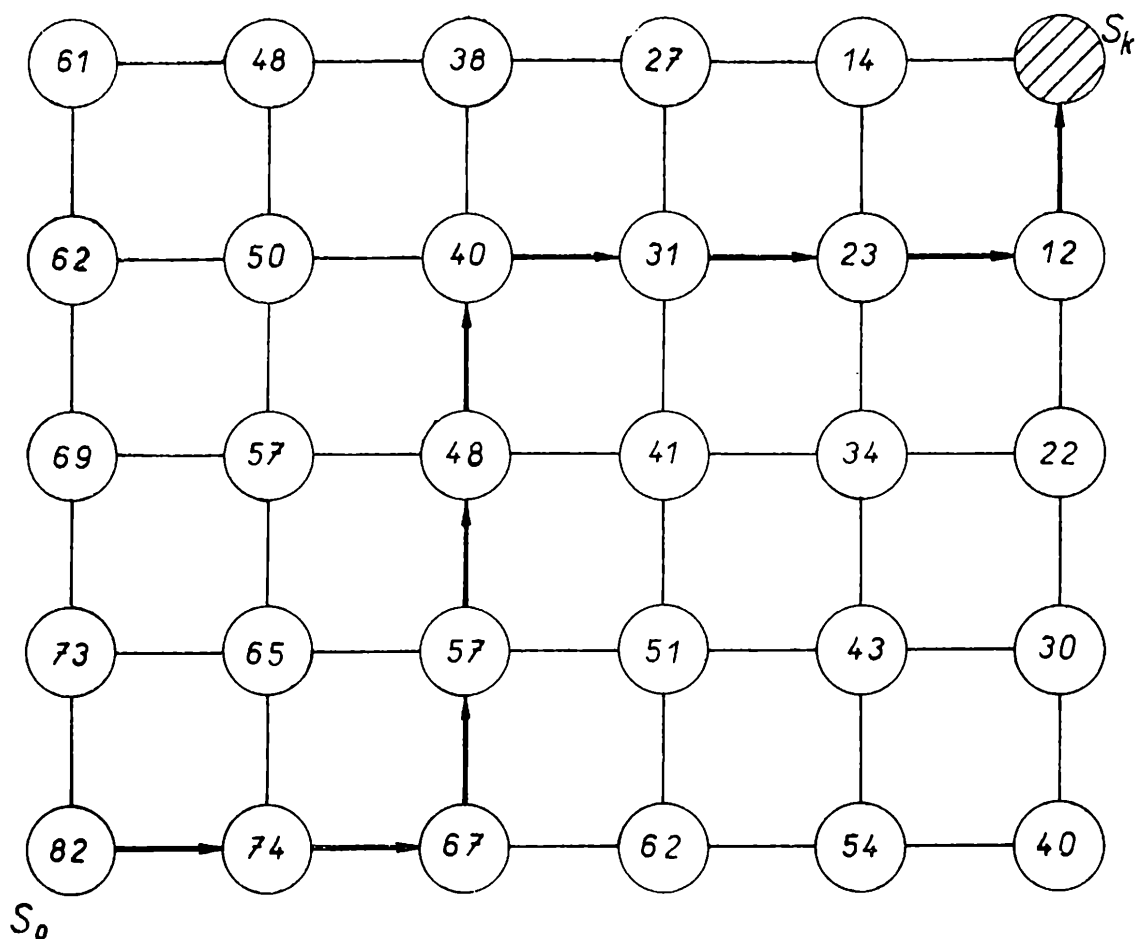


Obr. 3b

Přejdeme k optimalizaci předposlední, osmé etapy (obr. 3a). Po ukončení sedmé etapy se můžeme nacházet v jednom z bodů C_1 , C_2 , C_3 a z každého tohoto bodu musíme najít optimální dráhu do S_k . Z bodu C_1 můžeme pokračovat jedině do bodu B_1 a odtud do S_k . Spotřeba je $13 + 14$, tj. 27 jednotek pohonných hmot (dále jen j. p. h.); je to tedy optimální dráha z C_1 . Nacházíme-li se v bodě C_2 , můžeme pokračovat po dráze $C_2B_1S_k$ se spotřebou $13 + 14 = 27$ j. p. h. nebo po dráze $C_2B_2S_k$ se spotřebou $11 + 12 = 23$ j. p. h. Optimální dráha bude zřejmě dráha $C_2B_2S_k$. Nacházíme-li se po sedmé etapě v bodě C_3 , je možná



Obr. 4a



Obr. 4b

pouze dráha $C_3B_2S_k$ se spotřebou $10 + 12 = 22$ j. p. h. Je tedy pro nás drahou optimální. Výsledek zakreslíme do obr. 3b.

Podobně prozkoumáme všechny etapy, až dojdeme do bodu S_0 , kterému připíšeme číslo, udávající minimální možnou spotřebu pohonných hmot nutnou k dosažení polohy S_k . Výsledek optimalizace je dán obr. 4a.

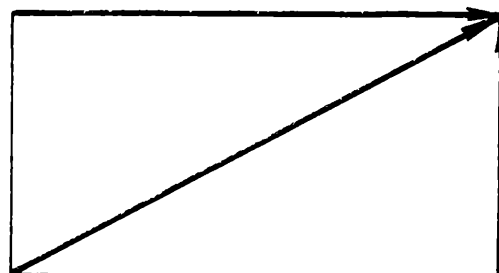
Optimální dráhu W pak snadno určíme tím, že vyjdeme z bodu S_0 a pohybujeme se po šípkách získaných při předchozím optimalizačním procesu. Optimální dráha je znázorněna na obr. 4b.

Tímto postupem jsme vyřešili zjednodušenou úlohu o dosažení dané výšky a rychlosti optimálním způsobem.

Nyní si tuto úlohu zkomplikujeme tím, že *budeme uvažovat případ, kdy je možno zvýšit současně rychlost i výšku*. Na rozdíl od první úlohy jsou možné 3 typy drah, které naznačuje schema na obr. 5, jde o dráhy

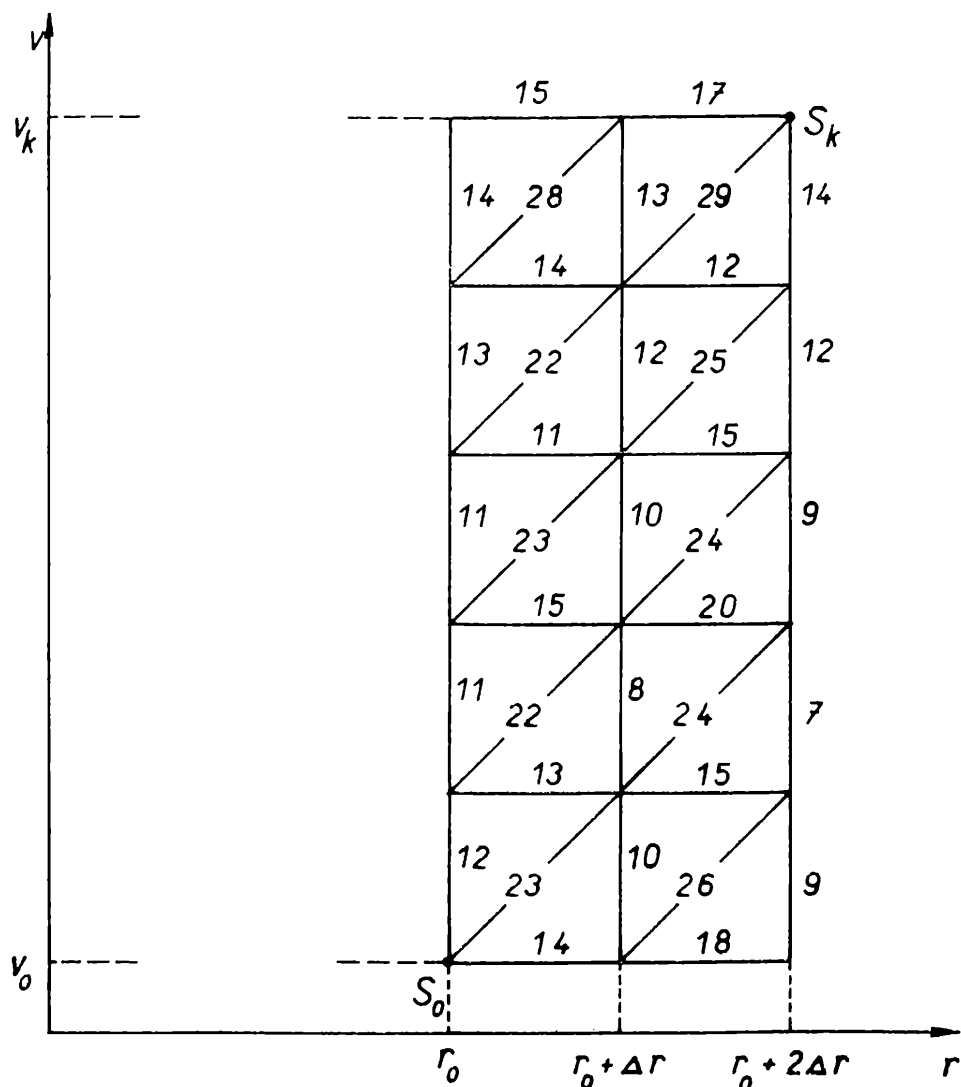
1. po horizontále,
2. po diagonále,
3. po vertikále.

Obr. 5



Vzhledem k těmto okolnostem nebudeme vrcholy charakterizovat po-

čtem kroků, ale např. velikostí rychlosti, tj. budeme optimalizovat dráhy vedoucí z každého vrcholu ležícího na přímkách $r = r_0 + (n_2 - 1)\Delta r$, $r = r_0 + (n_2 - 2)\Delta r$, ..., $r = r_0$. Optimální dráhy vedoucí z jednotlivých vrcholů označíme šipkou a z nich potom vybereme dráhu vedoucí k minimální spotřebě pohonných hmot.



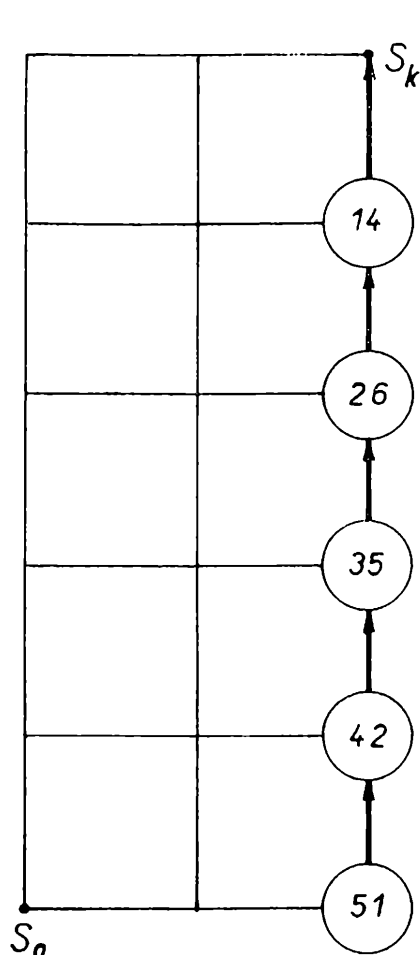
Obr. 6

V prvním pravém čtverci nahore místo 12 má být 17.

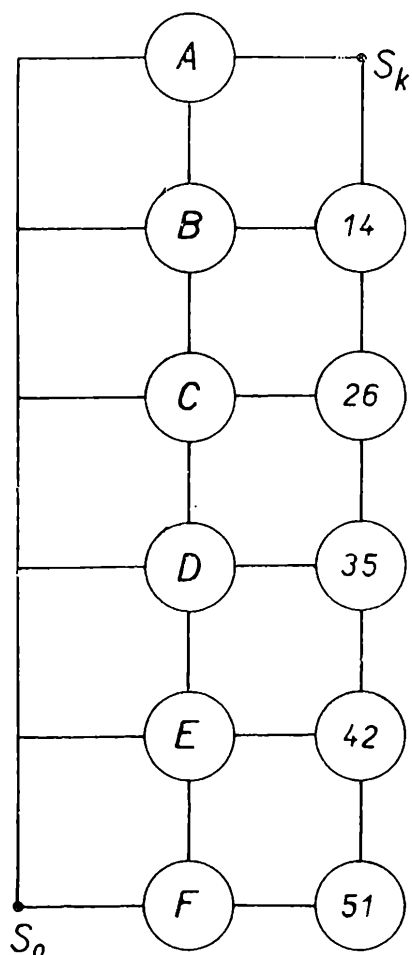
Tento postup ukážeme na úloze, jejíž schéma je dáno obr. 6. Poslední etapa bude spočívat v přesunu z vrcholů na přímce $r = r_0 + 2\Delta r$ do bodu S_k . Je zřejmé, že optimální pohyb se bude dít jen po této přímce. Spotřeba pohonných hmot je dána obr. 7.

Předpokládejme, že se po předchozím pohybu nacházíme v některém vrcholu přímky $r = r_0 + \Delta r$. Optimalizujeme dráhu vedoucí do S_k (situace je dána obr. 8).

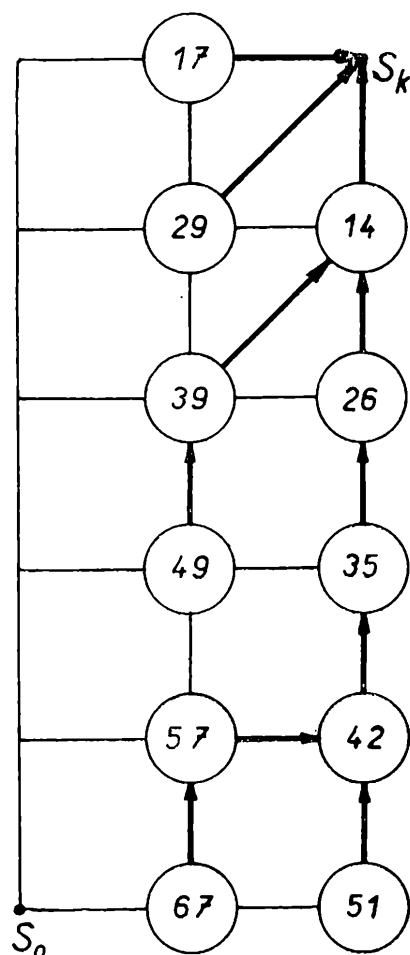
Nacházíme-li se ve vrcholu A, máme pouze jedinou možnost (a tím i optimální), a to pohyb po horizontále. Spotřeba je 17 j. p. h. Nacházíme-li se ve vrcholu B, existují již 3 možnosti, ze kterých musíme vybrat optimální.



Obr. 7



Obr. 8



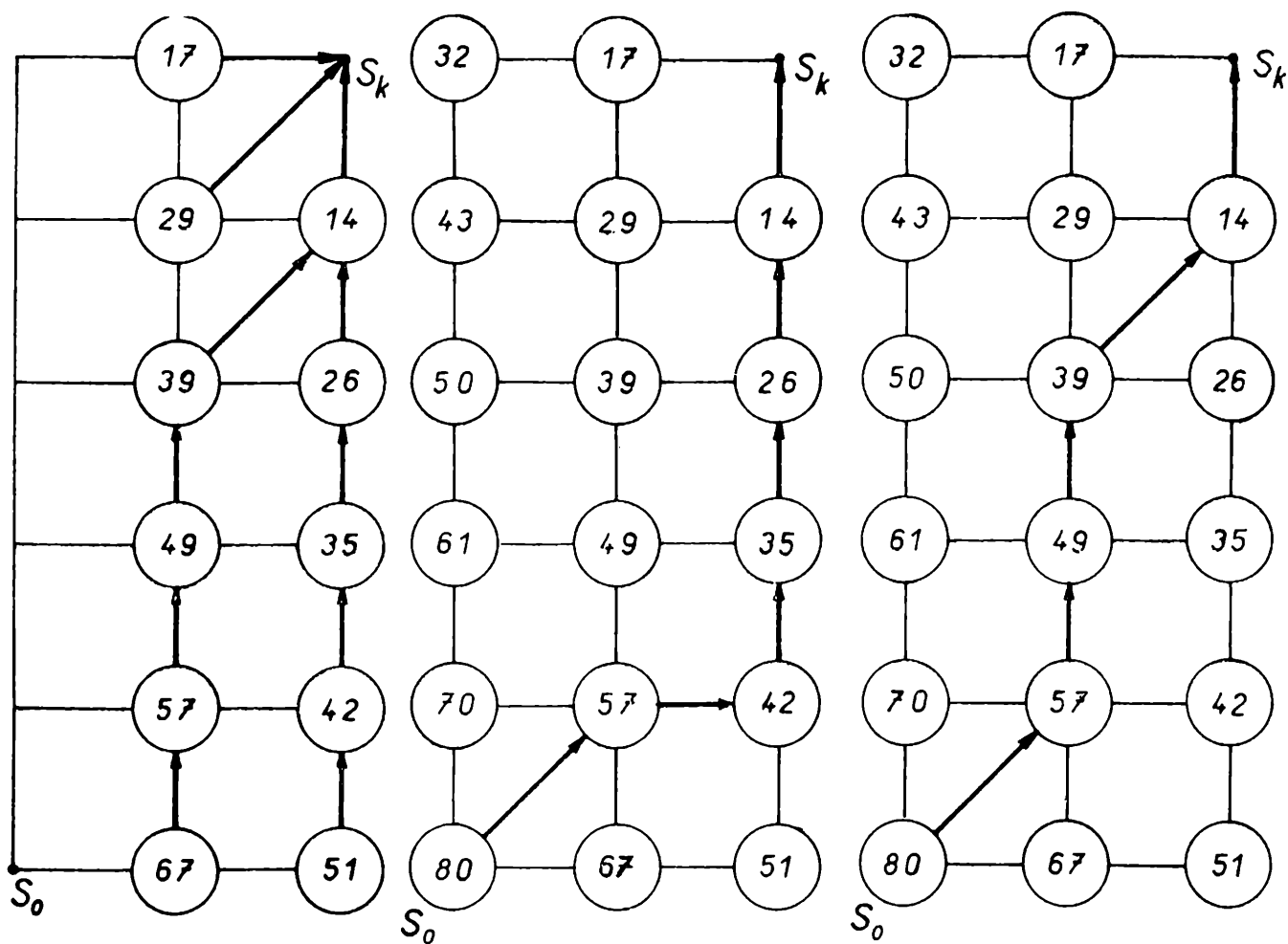
Obr. 9a

Jsou to: pohyb po vertikále se spotřebou $13 + 17 = 30$ j. p. h.
 pohyb po diagonále se spotřebou 29 j. p. h.
 pohyb po horizontále se spotřebou $17 + 14 = 31$ j. p. h.

Optimální je zřejmě pohyb po diagonále. Vyznačíme jej na diagramu šipkou a do vrcholu B zapíšeme číslo 29. Podobným způsobem vyhodnotíme ostatní vrcholy C, D, E, F .

Nacházíme-li se však ve vrcholu E , existují dvě možnosti pohybu, které vedou k optimu. Můžeme se pohybovat po vertikále, kde spotřeba činí $49 + 8 = 57$ j. p. h., nebo po horizontále, kde spotřeba činí $42 + 15 = 57$ j. p. h. Výsledek hodnocení (obě možné varianty pohybu) je zakreslen na obrázcích 9a a 9b.

Nyní zbývá vyhodnotit vrcholy na přímce $r = r_0$ a najít konečnou dráhu, která odpovídá našim požadavkům. Vyhodnocování probíhá stejně jako u bodů ležících na přímkách $r = r_0 + 2\Delta r$ a $r = r_0 + \Delta r$. Protože při vyhodnocování pohybu z bodů ležících na přímce $r_0 + \Delta r$ jsme dospěli ke dvěma možným rovnocenným drahám, existují dvě rovnocenné optimální dráhy, které jsou řešením našeho příkladu. Tyto dráhy jsou zakresleny na obr. 10a a 10b.



Obr. 9b

Obr. 10a

Obr. 10b

Budeme-li předchozí příklad a jeho řešení formulovat obecněji, získáme *základní myšlenku dynamického programování*.

Nechť existuje jistá soustava S (letadlo), jejíž stav je určen několika parametry (v_i, r_i) . Tato soustava může v čase měnit svou polohu (letadlo se pohybuje). Změny polohy (stavu) soustavy S můžeme pomocí svých rozhodnutí U řídit. Úkolem je převést soustavu S z počáteční polohy S_0 ($S_0 = [v_0, r_0]$) do konečné polohy S_k ($S_k = [v_k, r_k]$) tak, abychom dosáhli jistého cíle (chceme, aby letadlo vzlétlo do určité výše a dosáhlo určité rychlosti při minimální spotřebě pohonných hmot). Tento cíl je možno matematicky vyjádřit pomocí funkce W , která závisí pouze na našem rozhodnutí U a na současné poloze systému S .

Úlohu řešíme tím způsobem, že celý proces změny polohy systému S z polohy S_0 do polohy S_k rozdělíme na n etap, tj. $W = \sum_{i=1}^n W_i(S_{i-1}, U_i)$ (celková spotřeba pohonných hmot je dána součtem spotřeby

pohonných hmot v jednotlivých etapách) a v každé etapě, počínaje poslední, vybíráme z několika možných rozhodnutí pouze rozhodnutí $U_i^*(S_{i-1})$, které je pro nás optimální. Výsledkem tohoto rozhodnutí je

změna polohy soustavy S (transformace parametrů). Uděláme-li poslední rozhodnutí, tj. dojdeme-li až k poloze S_0 , nalezneme optimum funkce W . Abychom našli i optimální řízení $U^* = (U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*)$ soustavy S , procházíme úlohou ještě jednou od počátku do konce a počítáme $U_i^* = U_i^*(S_{i-1})$, kde $S_i = S_i(S_{i-1}^*, U_i^*)$, $i = 1, \dots, n$.

Úlohy dynamického programování se řeší na samočinných počítačích, které vlastně umožnily, aby se z dynamického programování stalo něco víc, než matematicky zajímavý princip pro hledání extrémů.

K čemu mi slouží znalost druhých mocnin některých čísel?

IVO VOLF a MARTA VOLFOVÁ

Žijeme v době automatů a elektronických počítačů. Má to své klady i zápory — často se stane, že určitá věc je současně dobrem i zlem. Tak je možno soudit i o numerickém počítání. Počítací stroj vykonává aritmetické operace v několika milisekundách; někteří studenti střední školy používají běžně při numerických výpočtech různých tabulek, logaritmických pravítek, jiní dokonce mechanické či elektrické výpočetní techniky. Proto se nelze divit, že jsme na otázku „Kolik je 27^2 ?“ dostávali následující odpovědi:

O 1: To určíme násobením:

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

O 2: Výsledek určíme na logaritmickém pravítku: $27^2 \doteq 730$.

O 3: Podíváme se do tabulek druhých mocnin.

O 4: Výsledek vypočteme podle algoritmu

$$\begin{array}{r} 27^2 = \\ 2^2 \quad \dots 4 \dots \\ 47 \quad 7 \quad \dots 329 \\ \hline 729 \end{array}$$

A přece existovala odpověď nejjednodušší

O 5: Vždyť je to 729, protože to umím nazpaměť.

Přemíra pomůcek vede někdy studenty k tomu, že neradi zatěžují svou mechanickou paměť. Souhlasíme plně s tím, že matematika musí přispívat k rozvoji logického uvažování. Ovšem např. ve školské fyzice a velmi často v praktickém životě se stává, že lidé musejí provádět numerické výpočty bez jakýchkoliv pomůcek. Mnohokrát jsme museli vypočítat zejména druhou mocninu či odmocninu čísla, aniž bychom potřebovali výpočet s vysokou přesností, jak nám ho dává použití známých algoritmů. Podívejme se na jednu metodu přibližného výpočtu druhé mocniny a odmocniny čísla.

Máme za úkol určit $28,2^2$. Podle algoritmu

$$\begin{array}{r} 28,2^2 = \\ 2^2 \qquad \qquad \qquad 4. \\ 48 \quad 8 \qquad \qquad \qquad 384 \\ 562 \quad 2 \qquad \qquad \qquad 11 \, 24 \\ \hline 795,24 \end{array}$$

Uvedme další, obecně známý fakt. Číslo 28,2 jsme mohli získat na základě měření nebo zaokrouhlení jiného čísla. Potom velikost absolutní chyby činí 0,05; relativní chyba je $\varepsilon = 0,00177$, tj. 0,177 %. Relativní chybu výsledku stanovíme $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 = 0,00355$, tj. 0,355 %. Absolutní chyba výsledku je potom 2,58. Výsledek uvedené operace by bylo nutno uvést ve tvaru neúplného čísla, tj. $28,2^2 = 795,24 \pm 2,58$; pohybuje se v mezích intervalu (792,66, 797,82).

Pokusme se nyní určit výsledek jiným způsobem:

$$28,2^2 = (28 + 0,2)^2 = 28^2 + 2 \cdot 28 \cdot 0,2 + 0,2^2 = 784 + 11,2 + 0,04 = 795,24.$$

Vezmeme-li v úvahu pouze první dva členy rozvoje, lze výsledek stanovit přibližně:

$$28,2^2 = (28 + 0,2)^2 \doteq 28^2 + 2 \cdot 28 \cdot 0,2 = 784 + 11,2 = 795,2.$$

Získaná hodnota se nalézá uvnitř dříve stanoveného intervalu; zanedbaná hodnota $0,2^2$ je mizivě malá a na výsledku se neprojeví.

Určíme nyní velikost čísla $27,8^2$:

$$27,8^2 = (27 + 0,8)^2 = 27^2 + 2 \cdot 27 \cdot 0,8 + 0,8^2 \doteq 729 + 43,2 = 772,2.$$

Zdá se však na první pohled být jasné, že výsledek bude možné přesněji stanovit jako:

$$27,8^2 = (28 - 0,2)^2 \doteq 784 - 11,2 = 772,8.$$

Přitom přesná hodnota výpočtu je 772,84, tedy druhý způsob je přesnější.

Podobně lze s výhodou určit velikost čísel $23,25^2$ a $25,875^2$:

$$23,25^2 = (23 + 0,25)^2 \doteq 23^2 + 2 \cdot 23 \cdot 0,25 = 529 + 11,5 = 540,5$$

$$25,875^2 = (26 - 0,875)^2 \doteq 26^2 - 2 \cdot 26 \cdot 0,125 = 676 - 6,5 = 669,5$$

Správné výsledky jsou $23,25^2 = 540,5625$; $25,875^2 = 669,515625$. Výsledky byly dosaženy rychleji a mají postačující přesnost. Dále je pochopitelné, že zvládneme-li tuto metodu, lze mezivýpočty vynechávat. Pak lze psát přímo

$$14,25^2 = 196 + 7 = 203. \quad (\text{Správný výsledek } 203,0625.)$$

Uzavřeme tedy část našich úvah: Známe-li druhé mocniny některých celých čísel, pak můžeme s jejich pomocí určit poměrně přesně a rychle velikost druhé mocniny některých víceciferných čísel. Přitom pro výpočet vhodně volíme rozdělení daného čísla na součet dvou sčítanců, popř. rozdíl dvou čísel. Je pochopitelné, že této metody lze použít nezávisle na řádu první číslice daného čísla.

Na tomto místě je mi jasné, že ještě nejste přesvědčeni o užitečnosti znalosti druhých mocnin čísel. Uvážíme tedy jinou matematickou operaci — odmocňování. Máme za úkol stanovit $\sqrt{370}$ na pět platných cifer. Klasický způsob pomocí algoritmu je tento:

$$\begin{array}{r} \sqrt{370} = 19,235 \\ 270 \quad 29 \cdot 9 \\ 900 \quad 382 \cdot 2 \\ 13600 \quad 3843 \cdot 3 \\ 207100 \quad 38465 \cdot 5 \\ 14775 \end{array}$$

Určíme velikost odmocniny daného čísla jiným způsobem. Přitom předpokládáme znalost $19^2 = 361$. Potom označme

$$\sqrt{370} = 19 + x,$$

kde x je neznámý doplněk k číslu 19 takový, aby číslo $(19 + x)^2$ bylo přibližně rovno 370. Řešíme tedy rovnici

$$370 = 361 + 38x + x^2$$

$$x^2 + 38x - 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-38 \pm \sqrt{1444 + 36}}{2} = -19 \pm \sqrt{370}$$

Vidíme, že se nám úlohu nepodařilo vyřešit. Opustíme proto tento způsob myšlení a uvážíme velikost čísla x . Odhadneme, že číslo x dosáhne maximálně hodnoty 0,3; potom $x^2 = 0,09$ představuje číslo zanedbatelně malé jak proti $19^2 = 361$, tak proti $2 \cdot 19 \cdot 0,3 = 11,4$. Proto je možno výraz x^2 při výpočtech zanedbat. To však znamená, že danou úlohu převádíme na řešení rovnice lineární

$$\sqrt{370} = 19 + x$$

$$370 = 361 + 38x + x^2$$

$$370 \doteq 361 + 38x$$

$$x \doteq 9/38 = 0,237$$

Potom $\sqrt{370} \doteq 19,237$; relativní chyba je menší než 0,01 %.

Dejme ještě naši metodu do souvislosti s algoritmem odmocňování (víme, že $19^2 = 361$)

$$\begin{array}{r} \sqrt{370} \doteq 19,24 \\ -361 \quad \quad \quad \uparrow \\ \hline 9 \ 00 \quad 38 \end{array} \quad \text{popř.} \quad \begin{array}{r} \sqrt{370} = 19,237 \\ -361 \quad \quad \quad \uparrow \\ \hline 9 \ 00 \quad 38 \end{array}$$

Čtenáři je jasné, že naše metoda spočívá v omezení řetězce výpočtů uvedených v algoritmu odmocňování.

Většinou nám postačí znalost druhých mocnin celých čísel v intervalu $[1; 32]$, neboť tím pokryjeme interval $[1; 1024]$, do nějž lze po vhodné úpravě zařadit všechna čísla, z nichž druhou odmocninu máme vy počítat.

Poukažme ještě na jednu přednost naší metody:

$$\begin{aligned} \sqrt{8} &= 2,8 + x \\ 8 &\doteq 7,84 + 5,6x \\ x &\doteq 0,16/5,6 = 0,02857; \text{ tedy } \sqrt{8} = 2,82857. \end{aligned}$$

Výpočet pomocí algoritmu dává hodnotu $\sqrt{8} = 2,82843$. Absolutní chyba výsledku je 0,00014, relativní chyba 0,005 %. Je-li to však nutné, můžeme použít při výpočtu postupného přibližování. Tak tedy pro $\sqrt{5}$

a) $\sqrt{5} = 2 + x$
 $5 \doteq 4 + 4x$
 $x \doteq 0,25$ a tedy $\sqrt{5} \doteq 2,25.$

b) $\sqrt{5} = 2,2 + x$
 $5 \doteq 4,84 + 4,4x$
 $x \doteq 0,0374$ a tedy $\sqrt{5} \doteq 2,2374$

c) $\sqrt{5} = 2,23 + x$
 $5 \doteq 4,9729 + 4,46x$
 $x \doteq 0,0067$ a tedy $\sqrt{5} \doteq 2,2367$.

Čtenář, který pochopil naše úvahy, naučí se v brzké době rychle a poměrně s velkou přesností určovat druhé odmocniny čísel. Přitom sám snadno přijde na metodu, jak s využitím závěrů našeho článku může získávat velikosti druhých odmocnin čísel s větší přesností, než jakou mu umožňují matematické tabulky, popř. logaritmické pravítko. Doufáme, že si tento čtenář přečte i naše další články zabývající se technikou přibližných výpočtů.

Věta o tečnovém čtyřúhelníku

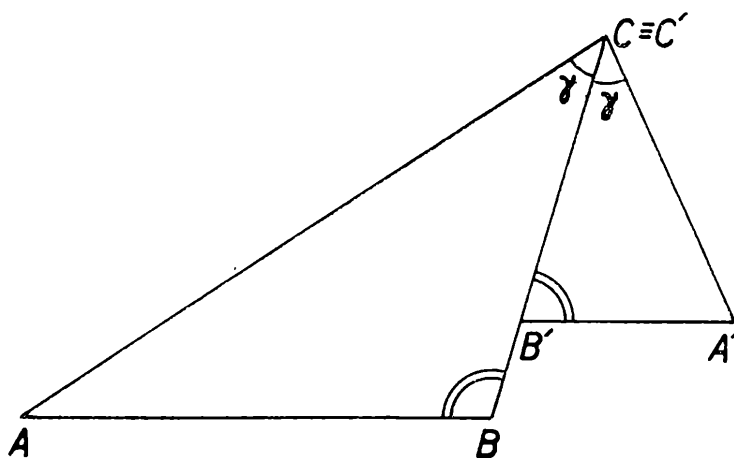
STANISLAV HORÁK st.

1. Mějme dva trojúhelníky ABC , $A'B'C'$, jejichž úhly označíme α , β , γ v prvním trojúhelníku a α' , β' , γ' v druhém trojúhelníku. Dokážeme větu

V 1. *Jestliže o úhlech daných trojúhelníků platí*

$$\gamma = \gamma' \quad \text{a} \quad \beta = 180^\circ - \beta', \quad (1)$$

potom o stranách těchto trojúhelníků při obvyklém označení platí $c : b = c' : b'$



Obr. 1

Důkaz (obr. 1). Za předpokladu, že platí rovnice (1), můžeme uvažované trojúhelníky přemístit tak, jak je naznačeno v obr. 1; přitom $AB \parallel A'B'$. Použijme na oba trojúhelníky sinové věty.

$$\begin{aligned} b : c &= \sin \beta \quad \sin \gamma, \\ b' : c' &= \sin \beta' \quad \sin \gamma = \sin \beta \quad \sin \gamma, \end{aligned}$$

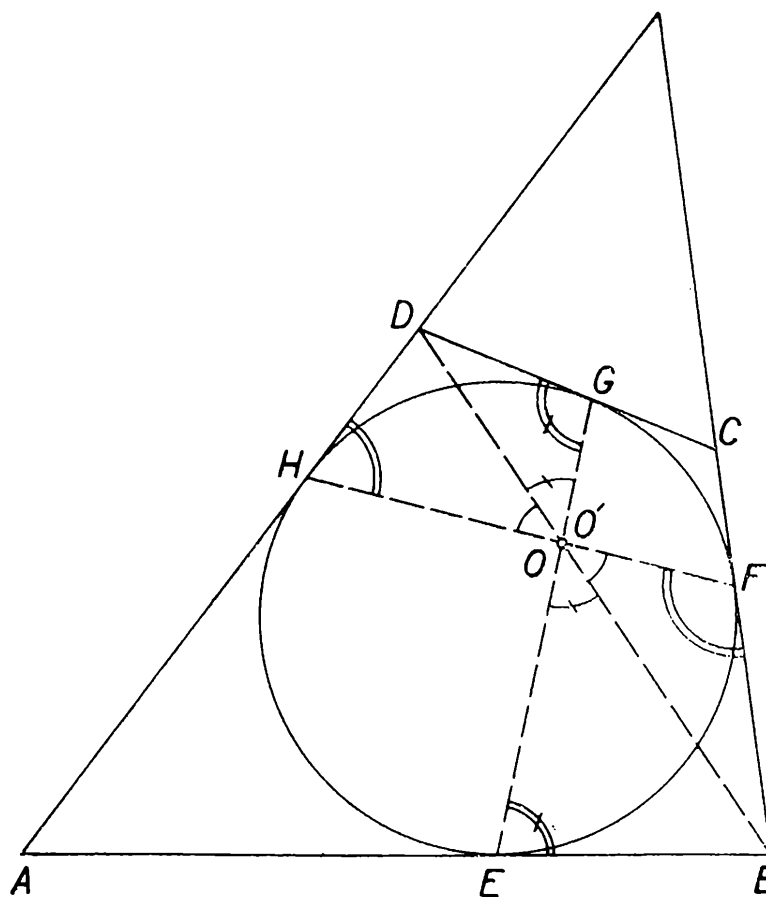
a tím jsme s důkazem hotovi.

2. Tohoto výsledku použijeme při důkazu jedné věty o tečnovém čtyřúhelníku. Víme, že tečnový čtyřúhelník je každý (konvexní) čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici.

V 2. *V tečnovém čtyřúhelníku úhlopříčky a spojnice bodů dotyku protějších stran s vepsanou kružnicí procházejí jediným bodem.*

Důkaz (obr. 2). Daný čtyřúhelník označíme $ABCD$, body dotyku s vepsanou kružnicí jsou E na straně AB , F na BC , G na CD a H na AD . Průsečík úseček BD , FH označme O . Všimněme si, že trojúhelníky OHD , OFB se shodují v úhlu při O a že úhly $\sphericalangle OHD$, $\sphericalangle OFB$ jsou výplňkové. Je to tedy případ dvou trojúhelníků, o nichž jsme mluvili v odst. 1 a proto můžeme psát

$$DH : DO = BF : BO. \quad (a)$$



Obr. 2

Průsečík úseček BD , EG označme O' . A opět tu máme dvojici trojúhelníků DGO' , BEO' , o nichž jsme mluvili v odst. 1. Z toho obdržíme tuto úměru

$$DG \quad DO' = BE \quad BO' \quad (b)$$

Ale

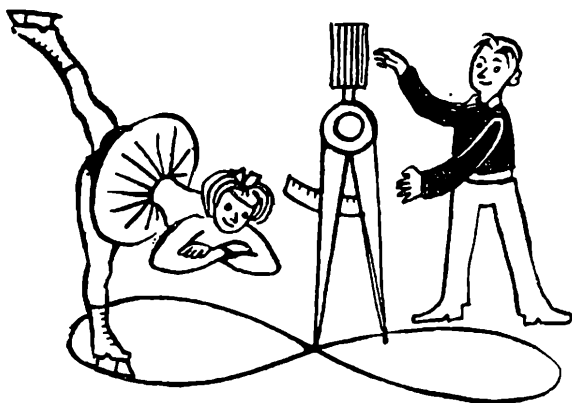
$$DG = DH \quad \text{a} \quad BE = BF$$

a po dosazení do (b) máme

$$DH \quad DO' = BF : BO' \quad (b')$$

To znamená, že úsečka BD je bodem O i bodem O' dělena v témž poměru, a to není jinak možné, než že $O = O'$

Naprostu stejným způsobem můžeme důkaz provést pro průsečík O'' přímk FH a AC , čímž je důkaz proveden.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Automatické kreslení IV

Doc. Ing. LADISLAV DRS

„Vyšší vzdělání“ kreslících automatů

V minulém článku jsme si vysvětlili, jaké „základní vzdělání“ mají kreslící automaty, tj. jaké kreslířské práce jsou schopny vykonávat samostatně podle velmi jednoduchých pokynů programátora. Toto „vzdělání“ dodají kreslicímu zařízení tzv. základní programy a využívá se ke kreslení běžných výkresů.

Často jsou však požadovány velmi speciální výkresy. Například v kartografii je to kreslení katastrálních map, vyhledávání vrstevnic, v meteorologii analogické kreslení isobar, v elektrotechnice kreslení integrovaných obvodů, v silničním stavitelství určování výkopů a násypů a téměř ve všech odvětvích techniky kreslení názorných průmětů projektovaných objektů.

Pro každý takový úkol je nutné obohatit základní program kreslicího automatu o zvláštní program, podle kterého pak kreslící zařízení dokáže konat požadované speciální práce. Tento program dodá tedy kreslicímu automatu ono „vyšší“ vzdělání.

Závěrem zase několik ukázek, nakreslených kreslicími automaty, řízenými počítači.

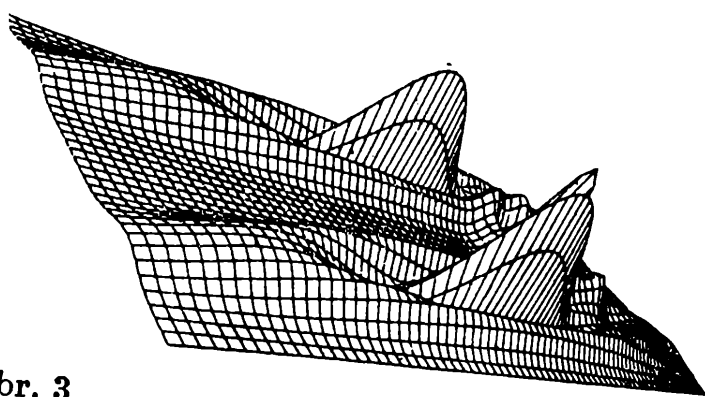
Obr. 1. Vrstevnice topografické plochy. Podkladem pro nakreslení vrstevnic jsou pouze kóty změřených bodů zemského povrchu. Vrstevnice určí počítač a nakreslí automat.

Obr. 2. Perspektiva úseku dálnice. Byla zadána mapa terénu, osa a profil dálnice. Rozsah výkopů a násypů určí a kreslí zařízení automaticky.

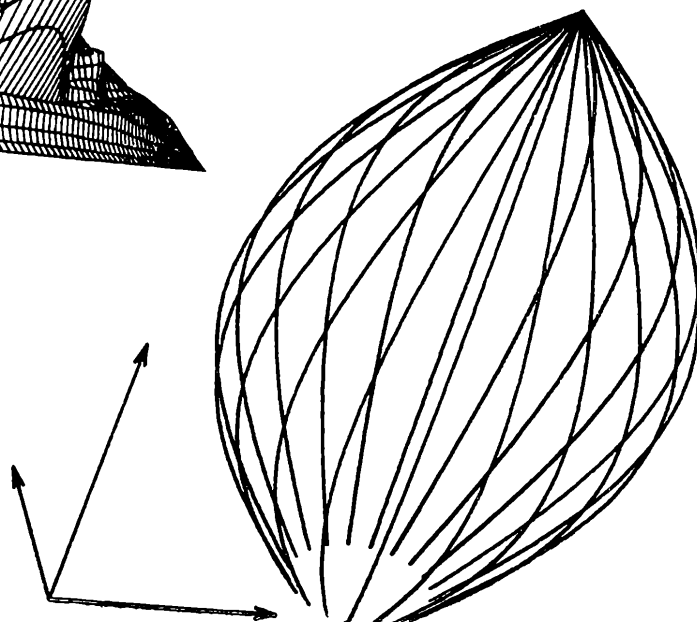


Obr. 2

Obr. 1



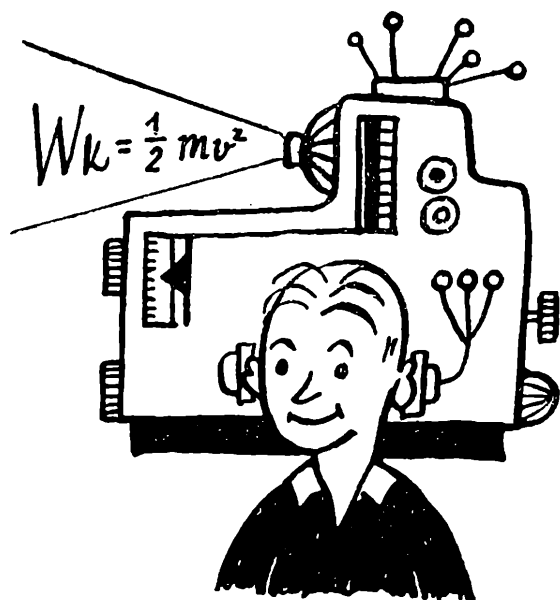
Obr. 3



Obr. 4

Obr. 3. Perspektiva plochy. Plocha je určena sítí křivek. Zařízení bere v úvahu i viditelnost křivek plochy. Neviditelné části křivek nejsou kresleny.

Obr. 4. Axonometrie rotační plochy. Plocha je určena rotací oblouku sinusoidy. Průmět je vytvořen podle programu na axonometrii.



F Y Z I K A

Kontaktní napětí a jeho vznik

FRANTIŠEK GOLAB, prom. ped.

Již v článcích [1, 2] byla v souvislosti s termoelektrickými jevy stručná zmínka o Seebeckově termoelektrickém jevu. Abychom pochopili fyzikální podstatu Seebeckova jevu, tj. vzniku termoelektrického napětí, musíme nejprve studovat jevy na styku dvou různých kovů. V tomto článku se pokusíme podat přístupný výklad vzniku kontaktního napětí.

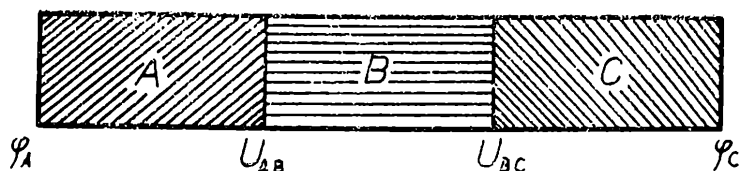
1. Kontaktní napětí

Roku 1789 upozoroval Galvani, že obvodem složeným ze dvou různých kovů a jednoho vodiče druhé třídy (žabí nožky) protéká elektrický proud bez vnějšího zdroje napětí. Tento proud je ovšem důsledkem vzniku elektromotorického napětí (EMN), které v takovém obvodu vzniká. Volta roku 1797 zjistil, že potenciálový rozdíl vzniká i na styku dvou různých vodičů první třídy (kovů). Prováděl pokusy s mnoha kovy a dospěl k závěru, že se kovy dají seřadit vedle sebe tak, že každý

předcházející kov této řady se ve styku s kterýmkoliv z následujících kovů nabíjí kladně. Pořadí kovů v této posloupnosti je následující:

Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd.

Uvedený rozdíl potenciálů (napětí) vzniká zcela samovolně při dotyku dvou různých kovů a nazývá se kontaktní (dotykový) rozdíl potenciálů — kontaktní napětí. To je malé a pro různé dvojice kovů nabývá hodnot od několika desetin do několika jednotek voltu. Je však značně závislé na čistotě kovů, zvláště na čistotě jejich povrchů.



Obr. 1

Spojíme-li za sebou více různých kovů, je potenciálový rozdíl mezi prvním a posledním kovem řady též, jako by se oba tyto kovy dotýkaly přímo. Kovy, jež jsou v řadě mezi nimi, nemají na výsledný rozdíl potenciálů vliv.

Toto tvrzení dokážeme pro tři kovy (obr. 1).

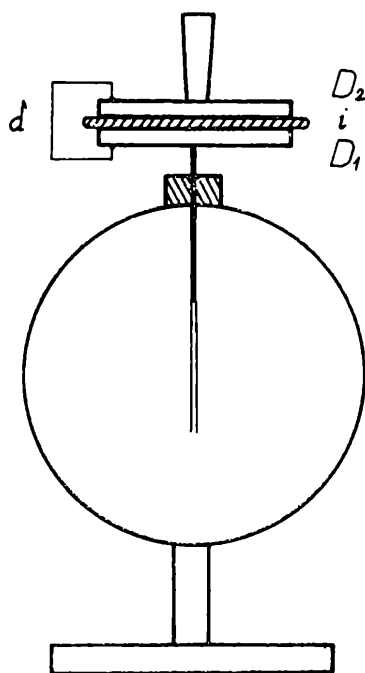
Kontaktní rozdíly potenciálů sousedních kovů označme $U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A$ a $U_{BC} = \varphi_C - \varphi_B$. Pak $U_{AC} = \varphi_C - \varphi_A$ je rozdíl potenciálů mezi prvním a třetím kovem této řady. Zřejmě platí

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} = (\varphi_B - \varphi_A) + (\varphi_C - \varphi_B) = \varphi_C - \varphi_A. \quad (1)$$

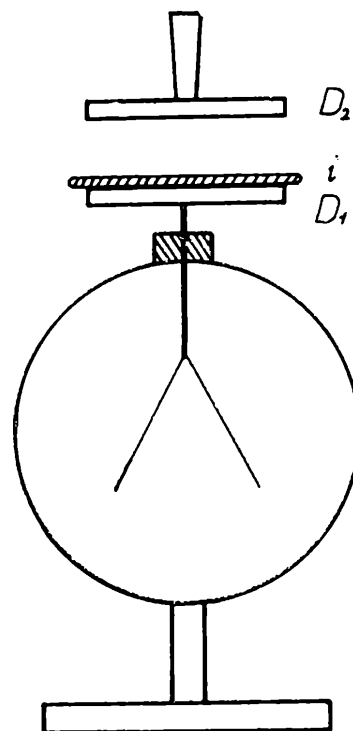
Tento výsledek lze snadno zobecnit na libovolný počet různých kovů spojených za sebou.

Existenci kontaktních napětí lze ukázat následujícím jednoduchým pokusem.

Na citlivý elektroskop (elektrometr) připevníme kovovou destičku D_1 opatřenou nahoře velmi tenkou izolující vrstvou i . Na ni položíme druhou kovovou destičku D_2 z některého jiného kovu, která je opatřena izolujícím držadlem. Obě destičky vodivě spojíme drátkem d (obr. 2a). Ve shodě se vztahem (1) vznikne mezi oběma destičkami D_1 a D_2 kontaktní napětí, jehož velikost je závislá na materiálu destiček, ale je zcela nezávislá na materiálu spojovacího drátku d . Obě destičky představují nabitý kondenzátor. Spojíme-li nyní horní destičku se zemí a odstraníme drát d , obě destičky spojující, nabije se dolní destička (a tím i elektroskop) na potenciál, který se rovná kontaktnímu napětí mezi oběma deskami. Vzhledem k malé citlivosti elektroskopu jej ještě nezjistíme. Zvedneme-li však horní desku D_2 , zmenší se kapacita deskami tvořeného kondenzátoru, potenciálový rozdíl vzroste a lístky elektroskopu se rozeštoupí (obr. 2b). Použijeme-li k pokusu elektrometru, můžeme velikost kontaktního napětí změřit.



Obr. 2a

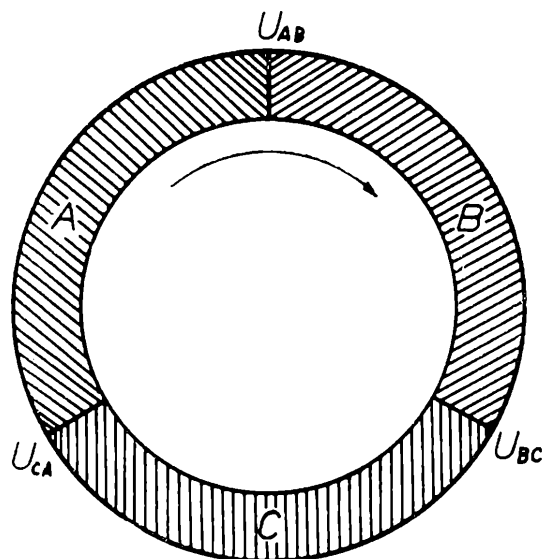


Obr. 2b

Sestavme nyní uzavřený obvod ze tří různých kovů podle obr. 3. Ze vztahu (1) lze snadno odvodit, že výsledné elektromotorické napětí, které je dáno součtem všech kontaktních napětí v obvodu, je rovno nule:

(1a)

$$E = U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = (\varphi_B - \varphi_A) + (\varphi_C - \varphi_B) + (\varphi_A - \varphi_C) = 0.$$



Obr. 3

Tento výsledek lze opět snadno zobecnit pro libovolný počet kovů v obvodu, tedy i pro obvod složený jen ze dvou kovů. V tomto případě je zcela evidentní, že kontaktní napětí na obou styčných místech mají sice stejnou velikost, ale opačná znaménka, takže se navzájem ruší:

$$E = U_{AB} + U_{BA} = (\varphi_B - \varphi_A) + (\varphi_A - \varphi_B) = 0. \quad (1b)$$

Z obou vztahů (1a) i (1b) je zřejmé, že kontaktních napětí nemůže být nikdy použito jako zdrojů elektromotorického napětí, protože při uzavření obvodu je vždy rovno nule.

2. Výklad vzniku kontaktního napětí

Vznik kontaktního napětí plyne z vlastností atomů kovů. V atomu každého kovu je alespoň jeden elektron, který je k jádru atomu vázán poměrně slabými silami. Jsou to tzv. valenční elektrony, které se při spojování atomů v krystal kovů a dále v polykrystalické kovové těleso ze svých atomů uvolňují a stávají se v kovu volně pohyblivými. Vytvářejí v něm elektronový plyn. Elektrony tohoto plynu se uvnitř kovu pohybují neuspořádaným tepelným pohybem. Jejich energie při obvyklých pokojových teplotách nestačí k tomu, aby z kovu unikaly. Je to způsobováno především silami vzájemného působení elektronů a kladných nábojů iontů tvořících krystalickou mřížku, v jejichž elektrickém poli se volné elektrony pohybují. Z toho plyne, že každému elektronu uvnitř kovu přísluší určitá potenciální energie, která je vždy menší než potenciální energie elektronu vně kovu, již obvykle klademe rovno nule. (Energie elektronu uvnitř kovu je tedy záporná.)

Elektron, který se při svém tepelném pohybu uvnitř kovu přiblíží k jeho povrchu, odpuzuje jiné blízké elektrony zpět dovnitř kovu. Tím vzniká blízko povrchu kovu přebytek kladných nábojů, které představují pro elektrony na jejich cestě ven z kovu překážku.

Z uvedeného plyne, že na výstup elektronu s nábojem $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ z kovu je třeba vynaložit určitou práci A , zvanou výstupní práce elektronu z kovu (dále jen výstupní práce), jež je rovna součinu náboje elektronu a napětí U potřebného k uvolnění elektronu z kovu:

$$A = e \cdot U \quad (2)$$

Jednotkou výstupní práce je elektronvolt : eV. Je roven práci potřebné k přemístění elektronu mezi dvěma místy s potenciálovým rozdílem 1 volt:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Protože náboj elektronu je konstanta, je výstupní práce jednoznačně určena napětím U , zvaným v tomto případě výstupním napětím, jež je pro každý kov jiné a je jednou z jeho charakteristických konstant (viz tabulka).

Různá výstupní napětí (a tedy různé výstupní práce) jsou příčinou vzniku kontaktních napětí.

Při vzájemném dotyku dvou různých kovů A, B přecházejí elektrony z jednoho kovu do druhého. Předpokládáme-li, že výstupní napětí U_A kovu A je větší než výstupní napětí U_B kovu B, pak elektrony budou snadněji vystupovat z kovu B a přecházet do kovu A než naopak. Pro

Tabulka I.
Výstupní napětí některých kovů

Kov	Výst. napětí V	Kov	Výst. napětí V
Na - sodík	2,33	Sn - cín (tetraedrický)	4,51
K - draslík	2,26	Pb - olovo	4,15
Cs - cesium	1,93	Sb - antimon	4,02
Cu - měď	4,29	Bi - vizmut	4,62
Ag - stříbro	4,73	Co - kobalt	3,72—4,25
Au - zlato	4,76	Fe - železo	4,75—4,77
Mg - hořčík	3,69	Ni - nikl	4,98—5,03
Zn - zinek	4,25	Rh - rhodium	4,75
Al - hliník	4,25	Pt - platina	5,44—6,37
Ge - germanium	4,55	Se - selén	4,89

jednoduchost předpokládejme, že počet volných elektronů v objemové jednotce (koncentrace volných elektronů) každého kovu je týž. Pak je nasnadě, že z kovu B přejde do kovu A větší počet elektronů než směrem opačným. Tím se kov A nabije záporně, kov B kladně a mezi oběma kovy vzniká rozdíl potenciálů U_{BA} . Vlivem tohoto potenciálového rozdílu vzniká elektrické pole, které brání dalšímu přechodu elektronů. Velikost tohoto potenciálového rozdílu U_{BA} bude odpovídat dynamické rovnováze proudu elektronů z kovu B do kovu A a naopak (oba proudy se při dynamické rovnováze rovnají), jež nastane tehdy, rovná-li se potenciálový rozdíl U_{AB} rozdílu výstupních napětí U_A a U_B :

$$U_{AB} = U_B - U_A \quad (3)$$

nebo užitím vztahu (2)

$$U_{AB} = \frac{A_B - A_A}{e}, \quad (3a)$$

kde A_A , A_B jsou výstupní práce z kovu A a B.

Je však známo, že se koncentrace volných elektronů v různých kovech přece jen trochu liší. Z toho plyne, že při přechodu elektronů mezi kovy bude v průměru vystupovat více elektronů z toho kovu, v němž je jejich koncentrace větší. Tak vzniká mezi kovy A a B ještě další potenciálový rozdíl, který v případě, že koncentrace volných elektronů n_{0A} v kovu A je větší než koncentrace volných elektronů n_{0B} v kovu B ($n_{0A} > n_{0B}$), má opačné znaménko než U_{AB} . Z teorie [3] plyne, že tento dodatečný potenciálový rozdíl U_{AB} má hodnotu

$$U_{AB} = \frac{k\Theta}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}, \quad (4)$$

kde k je Boltzmannova konstanta, e je náboj elektronu, Θ kelvinova teplota.

Protože se n_{0A} a n_{0B} pro všechny kovy liší nepatrně, je i hodnota U_{AB} velmi malá a v běžné praxi ji lze zanedbat. Výraz (3) nebo (3a) lze pak považovat za dostatečné přesné vyjádření velikosti kontaktního potenciálového rozdílu — kontaktního napětí.

Při výkladu jsme až dosud mlčky předpokládali, že teploty styčných míst kovů jsou stejné. Jak se situace změní v případě různých teplot a které fyzikální jevy lze pozorovat, si vysvětlíme v dalším článku.

Literatura

- [1] Golab, Fr.—Kamenčák, Fr., Termoelektrické jevy, Rozhledy matematicko-fyzikální, 46, 1967—68, 10, 473—478
- [2] Golab, Fr.—Kamenčák, Fr., Peltierův jev a jeho využití k termoelektrickému ochlazování, Rozhledy matematicko-fyzikální, 48, 1969—70, 8, 372—377
- [3] Friš, S. E.—Timoreva, A. V., Kurs fyziky II, NČSAV Praha 1953
- Další literatura:
- [4] Ilkovič, D., Fyzika ,SVTL—SNTL, Bratislava—Praha 1959
- [5] Fuka, J.—Havelka, B., Elektřina a magnetismus, SPN Praha 1965

Ďalší paradox? (alebo, kto sa mýlil pri úlohe B-4 na krajskom kole FO)

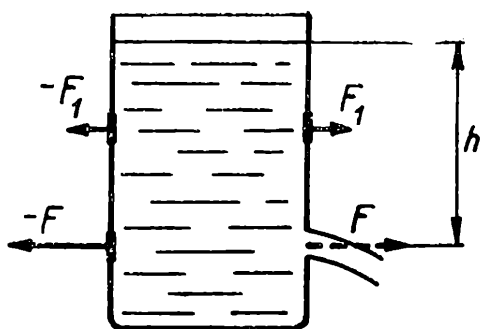
IVAN BANÍK, SVŠT Bratislava

Pri riešení úlohy B-4 na krajskou kole FO mnohí súťažiaci postupovali spôsobom, ktorý sa na prvý pohľad zdá vhodný a bezchybný, avšak predsa... Pretože chyba, ktorej sa dopustili nebola naozaj triviálna, nezaškodí, keď se nad ňou zamyslíme.

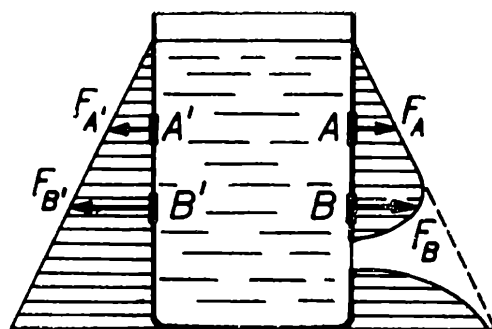
Nebudeme opakovat zadanie súťažnej úlohy, ani uvádzať jej riešenie. Jednalo sa v nej o nádobu s dvomi otvormi v stene, ktorými vytekala kvapalina. Bolo treba určiť zrýchlenie udeľované nádobe položenej dnom na hladkú vodorovnú podložku v dôsledku reakcie vytekajúcej kvapaliny. Budeme uvažovať len zjednodušený problém, a to tak, ako to znázorňuje obr. 1, pričom budeme počítat silu reakcie vytekajúcej kvapaliny. Prierez otvoru označíme S , výtokovú rýchlosť v .

Riešenia súťažiacych boli v podstate dvojaké:

1. Väčšina žiakov vychádzala zo vzťahu medzi silou a zmenou hyb-



Obr. 1



Obr. 2

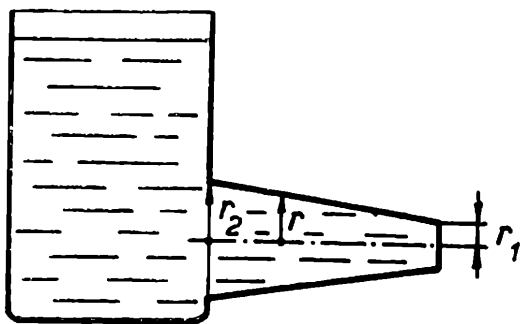
nosti: $F\Delta t = \Delta H = m v$, kde $v = \sqrt{2gh}$ a m znamená hmotnosť kvapaliny vytečenej otvorom za čas Δt . Pre silu reakcie vychádza hodnota:

$$F_{\text{reakc}} = 2S sgh$$

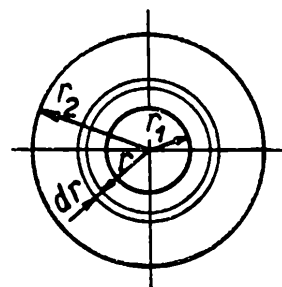
Uvedený postup je správny.

2. Značná časť žiakov uvažovala takto: Silový účinok kvapaliny na nádobu je daný tlakovou silou pôsobiacou na plošku protiahlú k otvoru v stene. Na obr. 1 je táto sila označená $-F$. Ku každej inej ploške možno nájsť s ňou združenú protiahlú plošku, pričom silové účinky kvapaliny na obe plošky sa navzájom rušia. Pre výslednú silu tak vychádza $F_{\text{reakc}} = S sgh$. Získaná hodnota je však polovičná v porovnaní s hodnotou (1). Na druhej strane sa výpočet zdá byť správny. Kde je tedy chyba? Ukážeme si, že pri druhom postupe sa nerešpektovalo niečo, čo predstavuje polovicu celkového silového účinku. Neuvažovalo sa prúdenie kvapaliny v okolí otvoru, ktoré najmä v jeho blízkosti nie je zanedbateľné. V dôsledku prúdenia nastáva v týchto bodoch, ako plynie z Bernoulliho rovnice, pokles tlaku. Priebeh tlaku na dvoch protiahlých stenách pri vytekaní kvapaliny ukazuje orientačne obr. 2. Tlakové sily kvapaliny na dve jednotkové plošky stien v miestach B a B' sa preto nebudú navzájom kompenzovať. Ich rozdiel prispieva k sile (2). Dodatočná sila odvodená z poklesu tlaku na celej stene s otvorom je zhodou okolností taktiež $S sgh$ a treba ju pridať k sile (2). Celková reakčná sila bude teda $2 S sgh$, čím paradox zaniká. Výpočet dodatočnej sily by bol však v danom usporiadaní veľmi komplikovaný a neuvádzame ho. Išlo nám skôr o kvalitatívne pochopenie príčiny rozporu.

Pre tých, ktorí by si to predsa len radi overili aj výpočtom a ktorí čo-to poznajú z integrálneho počtu, uvedieme stručný návod a to pre prípad znázornený na obr. 3, kedy kvapalina vyteká z nádoby kúžellovitou trubičkou. Pre zjednodušenie predpokladáme, že zužovanie trubičky je pozvolné, avšak pomer väčšieho a menšieho koncového polomeru trubky je značne veľký. Rýchlosť prúdenia pozdĺž trubičky a teda aj tlak v jej jednotlivých miestach sa v tomto prípade dá pomerne ľahko zistiť. Výtokovú rýchlosť koncovým prierezom trubičky vypočí-



Obr. 3



Obr. 4

tame pomocou Torricelliho vzťahu. Na základe známej rýchlosti prúdenia sa už dá určiť silový účinok kvapaliny na trubičku. Rýchlosť prúdenia kvapaliny pozdĺž zvislej steny nádoby je tu už zanedbateľná, takže úbytok tlaku na nej sa nemusí brať do úvahy.

Z rovnice spojitosti plynie pre závislosť rýchlosti prúdenia od polomeru v danom mieste vzťah $v(r) = v_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2$ kde v_1 je výtoková rýchlosť kvapaliny cez koncový prierez. Na základe Bernoulliho rovnici bude pre tlak platiť

$$p = p_0 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right], \quad (3)$$

kde p predstavuje prírastok tlaku vzhľadom na barometrický. Výškové rozdiely v bodoch toho istého prierezu zanedbávame, takže tlak je v celom danom priereze prakticky rovnaký. Pri prúdení nastáva v jednotlivých miestach trubičky zmena tlaku, pre ktorú podľa (3) platí

$$\Delta p = -p_0 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \quad \text{kde} \quad p_0 = sgh.$$

Celkovú silu na trubičku pri prúdení spočítame najľahšie tak, že si trubičku premietneme na rovinu kolmú na os trubičky. Plašť trubičky sa nám potom javí ako medzikružie (obr. 4), pričom tlak v rôznych jeho bodoch je závislý na vzdialenosti od stredu. Výsledná sila bude daná integrálom

$$F = \int p dS = \int (p_0 + \Delta p) dS = F_0 - \int \Delta p dS = F_0 - \int_{r_2}^{r_1} p_0 \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 2\pi r dr$$

$$F = F_0 - \pi r_1^2 p_0 = F_0 - S sgh$$

pričom $S = \pi r^2$ a F_0 znamená silu pôsobiacu na trubku v statickom prípade. V predchádzajúcom sme kládli $\frac{r_1}{r_2} = 0$. Celková sila na medzikružie (a teda na trubičku) je pri prúdení o hodnotu $\Delta F = S sgh$ menšia

než v statickom stave. Silové pôsobenie na medzikružie zodpovedajúce priemetu trubičky na opačnú časť steny sa však pri výtoku vzhľadom na statický stav nemení. Celková sila pôsobiaca na nádobu bude teda určená súčtom síl daných výrazmi (2) a (4) a bude teda rovná hodnote $2 S_{sgh}$.

Postup 2., keďže sa pri ňom sila (4) nerešpektovala, bol teda nesprávny. Tí, ktorí se uvadenej chyby dopustili, nemusia však „vešať hlavu“. Ich chyba naozaj nebola školácka. To je už ale riziko súťaže.

Vedlejší jednotky mezinárodně nedoporučované

ING. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

V předešlých dvou krátkých informacích jsme hovořili o vedlejších jednotkách trvalého charakteru a doporučených k dočasnému používání. Třetí skupinu tvoří vedlejší jednotky, od jejichž používání se má pokud možno brzy upustit a mají se nahrazovat jednotkami mezinárodní soustavy. Je to zatím mezinárodní doporučení Mezinárodního výboru vah a měr; jednotlivé země budou toto doporučení postupně respektovat při vydávání příslušných normativů. V ČSSR se již z dřívějšíka většina uvedených jednotek používat nemá, až na další zůstávají zákonné jednotky v platnosti, jako torr, kilopond a kalorie. Kromě toho je zatím připuštěno užívat název mikron, nikoliv však jeho bývalou značku.

Mezinárodní soubor nedoporučovaných jednotek je:

fermi	$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
metrický karát	$1 \text{ metrický karát} = 200 \text{ mg} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$
torr	$1 \text{ torr} = \frac{101\,325}{760} \text{ Pa}$
kilopond (nebo v zahraničí též kilogram síly)	$1 \text{ kp} = 9,806\,65 \text{ N}$
kalorie	$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$
mikron	$1 \mu = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$
jednotka X	
stéra	$1 \text{ st} = 1 \text{ m}^3$
gamma	$1 \gamma = 1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ T}$
γ	$1 \gamma = 1 \mu\text{g} = 10^{-9} \text{ kg}$
λ	$1 \lambda = 1 \mu\text{l} = 10^{-6} \text{ l}$

Několik poznámek k uvedeným jednotkám:

Varianta kilopondu — kilogramu síly (kilogramme-force) má značku kgf. *Metrický karát* přijala 4. Generální konference vah a měr v r. 1907 pro vážení diamantů, perel a drahokamů. *Kalorie* se zde rozumí „mezinárodní tabulková „IT“ (z r. 1956). Jednotka *mikron* (se značkou μ) byla přijata 1879 Mezinárodním výborem, připomenuta znovu v r. 1948 a zrušena 13. Generální konferencí vah a měr v r. 1967. *Jednotka X* byla užívána speciálně pro vyjadřování vlnových délek paprsků X; zhruba platí, že $X \doteq 1,002 \cdot 10^{-4} \text{ nm} = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Jednotka *stéra* používaná zejména při měření topného dříví byla přijata Mezinárodním výborem v r. 1879 (původně se značkou *s*, změněnou r. 1948 na *st*). Značky γ a λ se vyskytují v oficiálních materiálech Mezinárodní organizace vah a měr z let 1880 resp. 1881. Tyto značky se donedávna používaly ve speciálních metrologických oborech, na školách byly opuštěny již dávno.

Pokud jde o *jednotky bývalé soustavy CGS* (se samostatným názvem), nemají být používány a mají se nahrazovat jednotkami SI nebo jejich násobky či díly. V ČSSR nejsou vyjma stoku a poisu (jež jsou zatím mezi vedlejšími zákonnými jednotkami) tyto jednotky již používány.

Jedná se o tento soubor jednotek:

erg ($= 10^{-7} \text{ J}$), dyn ($= 10^{-5} \text{ N}$), poise ($= (0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s})$), stok ($= 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), gauss (odpovídající 10^{-4} T), oersted (odpovídající $\frac{1000}{4\pi} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$), maxwell (odpovídající 10^{-8} Wb), stilb ($= 10^4 \text{ cd} \cdot \text{m}^{-2}$) a fot ($= 10^4 \text{ lx}$).

ASTRONOMIE

Otevřené hvězdokupy

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Nejznámější otevřenou hvězdokupou jsou *Plejády* (lidově nazývané Kuřátka) v souhvězdí Byka. Jejich celková zdánlivá hvězdná velikost je $1,3^{\text{m}}$ a na obloze mají úhlový průměr 2° . Za dobrých pozorovacích podmínek rozlišíme v Plejádách prostým okem až 9 hvězd; celkový počet hvězd, tvořících tuto hvězdokupu, se odhaduje na 120. Plejády jsou ve vzdálenosti 126 parseků a jejich skutečný průměr je asi 4 ps. Ve stejném souhvězdí, v blízkosti červené hvězdy Aldebarana, je podobná hvězdokupa, nazývaná *Hyády*. Je to nejbližší otevřená hvězdokupa, jejíž vzdálenost od nás je 41 ps. Celková hvězdná velikost Hyád je $0,6^{\text{m}}$, jsou tedy jasnější než Plejády, avšak na obloze zauímají velkou

rozlohu — její úhlový průměr je 7° — a proto nejsou tak výrazné jako Plejády. Celkový počet hvězd v Hyádách se odhaduje na 100. Pouhým okem můžeme na severní obloze uvidět také *Praesepe* (Jesle) v souhvězdí Raka ($3,7^m$), a dvojitou otevřenou hvězdokupu h a χ v souhvězdí Persea ($4,1^m$ a $4,3^m$), která dohromady obsahuje asi 540 hvězd.

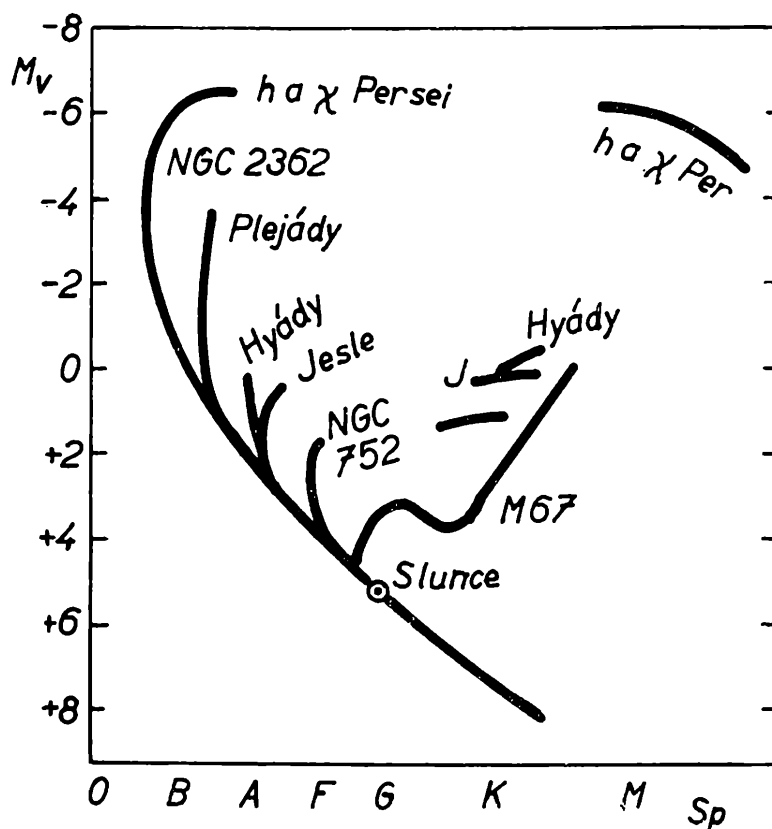
Otevřené hvězdokupy můžeme charakterizovat jako soustavy několika desítek až set hvězd, které jsou spolu vázány vzájemným gravitačním působením, a které pravděpodobně společně vznikly. V katalogu hvězdokup a asociací, který v Praze vydali v r. 1961 G. Alter, J. Ruprecht a V. Vanýsek, je obsaženo 760 otevřených hvězdokup; odhaduje se, že celkový počet těchto útvarů v naší Galaxii dosahuje 20 000. Otevřené hvězdokupy byly pozorovány také v Magellanových mračnecích a ve spirální galaxii M 31 v souhvězdí Andromedy. Skutečné průměry otevřených hvězdokup jsou v intervalu od (2 do 20) parseků, 80 % známých hvězdokup má průměry od (2 do 6) parseků. Některé údaje o pěti otevřených hvězdokupách, viditelných na severní obloze, jsou v tab. I.

Tabulka I.
Několik otevřených hvězdokup

Název	Galakt. souřadnice		Vzdálenost [pc]	Průměr [pc]	Počet hvězd	Stáří (v mili- ónech roků)
	délka l_{II}	šířka b_{II}				
Plejády	167°	-24°	126	4	120	50
Hyády	179	-24	40	5	100	400
h Persei	135	-4	2200	19	300	10
K Persei	135	-4	2300	20	240	12
Praesepe	206	$+32$	159	4	100	250

Podle Kopylovových výzkumů, které zahrnuly 300 otevřených hvězdokup, jsou jejich celkové absolutní hvězdné velikosti v intervalu od 0^M do -10^M s maximem okolo $-3,5^M$. Skutečnost, že jich známe poměrně málo je způsobena tím, že otevřené hvězdokupy tvoří v Galaxii plochý subsystém. Otevřené hvězdokupy jsou tedy soustředěny do poměrně tenké vrstvy kolem galaktické roviny; tloušťka této vrstvy se odhaduje na 1000 parseků. Kolem galaktické roviny je však také vysoká koncentrace mezihvězdného plynu a prachu. Tato mezihvězdná látka způsobuje vysokou absorpci světla hvězd a důsledkem je, že otevřené hvězdokupy vidíme pouze do vzdálenosti asi 3000 parseků. Světlo, přicházející ze vzdálenějších hvězdokup, je v mezihvězdné látce zcela absorbováno. Absorpce světla v mračnecích mezihvězdné látky má rovněž nepříznivý vliv na přesné určení vzdáleností otevřených hvězdokup. Na druhé straně však studium otevřených hvězdokup přispělo k rozvoji poznatků o struktuře a složení mezihvězdné látky.

Při studiu otevřených hvězdokup je někdy velmi obtížné stanovit, které hvězdy patří ke hvězdokupě, a které se jen náhodně na obloze na hvězdokupu promítají a nijak s ní nesouvisí. Proto je třeba pečlivě proměřovat vlastní pohyby, radiální rychlosti a spektrální třídy hvězd v okolí hvězdokupy. Hvězdy tvořící hvězdokupu mají totiž prakticky shodné vlastní pohyby a radiální rychlosti a také jejich spektrální třídy se od sebe příliš neliší, takže tvoří na Hertzsprungově-Russellově diagramu výrazné skupiny (obr. 1). Podle sovětského astronoma Markar-



Obr. 1

jana můžeme otevřené hvězdokupy rozdělit do tří základních skupin, a to podle spektrálních tříd hvězd, které je tvoří. Typ *O* obsahuje hvězdy raných spektrálních tříd *O* a *B1*, typ *B* se skládá z hvězd spektrálních tříd *B1* až *B5* a typ *A* obsahuje hvězdy tříd *B6* až *A3*.

Otevřené hvězdokupy jsou poměrně mladé útvary v Galaxii. Stáří Plejád se odhaduje na 50 miliónů roků, stáří dvojité hvězdokupy *h a χ Persei* na pouhých 10 miliónů let. Tato skutečnost spolu s tím, že hvězdy tvořící hvězdokupu pravděpodobně současně vznikly a vyvíjejí se, podtrhuje význam studia otevřených hvězdokup pro kosmogonii — vědu, zkoumající problémy vzniku a vývoje hvězd.

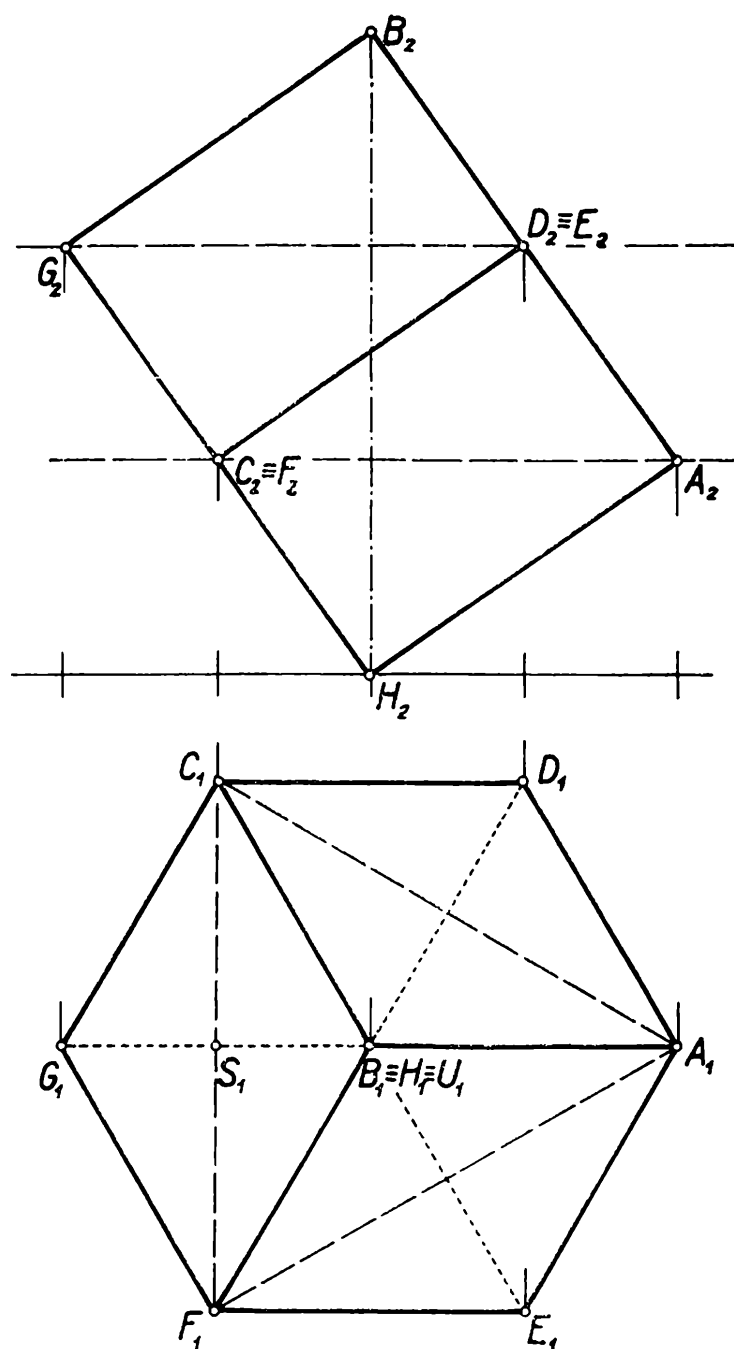
NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že osa mimoběžek BH , CF : a) prochází vrcholem A ; b) středem stěny $BCGF$; c) úhlopříčku BH protíná ve vnitřním bodě U tak, že platí $2 \cdot BU = HU$.

(Došlo 5 řešení)

Stanislav Horák ml.



Obr. 1

Pro zobrazení krychle použijeme Mongeova promítání (obr. 1). Přitom první průmětnu zvolíme kolmou k tělesové úhlopříčce BH a druhou průmětnu kolmou k úhlopříčce CF , což můžeme, neboť rovina ACF je rovnoběžná s první průmětnou. Osa o mimoběžek BH , CF je potom rovnoběžná s první průmětnou a protíná přímku CF ve středu S úsečky CF , tj. ve středu stěny $BCGF$. Z toho však zároveň vyplývá, že prochází vrcholem A .

Poněvadž hrana BC je kolmá ke stěně $CDHG$, je hrana BC kolmá i ke stěnové úhlopříčce HC a proto trojúhelník BCH je pravoúhlý. O jeho stranách platí

$$BC = a, \quad HC = a\sqrt{2}, \quad BH = a\sqrt{3}.$$

Osa o protne úhlopříčku BH v bodě U , který je zároveň patou výšky, spuštěné z vrcholu C na přeponu BH . Označme $BU = x$ a na pravoúhlý trojúhelník BCH použijme Eukleidovy věty:

$$BU \cdot BH = BC^2,$$

$$x \cdot a\sqrt{3} = a^2,$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} BH$$

a tím jsou naše tvrzení dokázána.

Poznámka autora. Toto řešení je pravděpodobně nejjednodušší a také nej názornější. Řešitelé zobrazovali krychli tak, že stěna $ABCD$ ležela v první průmětně nebo v rovině s ní rovnoběžné.

4. Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky a , b . Sestrojte krychli, jejíž tělesová úhlopříčka leží na přímce a a její stěnová úhlopříčka leží na přímce b .

(Došlo 5 řešení)

František Hradecký

Riešil Karel Šafařík, 3B SVŠ Bratislava

Označme hľadanú kocku $ABCDEFGH$. Nech na priamke a leží telesová uhlopriečka BH a na priamke b stenová uhlopriečka CF . Na osi o mimobiežiek a a b leží bod A (viď úlohu 3). Označme U priesečník priamok o a a a S priesečník priamok o a b . Užitím podobnosti trojuholníkov SUB a AUH je zrejmé, že $AU = 2 \cdot SU$ a $HB = 2 \cdot BU$. Bod A leží nutne na polopriamke SU . Na priamke a zostrojíme bod B (B') tak, že $BU = SU \sqrt{2}$; ($AB \quad AH = SU \quad BU = 1 \sqrt{2}$). Ďalej vieme, že trojuholník ACF je rovnostranný a body C , F ležia na priamke b tak, že $SC = SF = SB$.

Potom už vieme kocku $ABCDEFGH$ zostrojiť.

Z dôkazu v úlohe 3 a predchádzajúceho rozboru je zřejmé, že kocka $ABCDEFGH$ má požadované vlastnosti.

V každom prípade existujú práve dva rôzne body B a B' a preto i dve rôzne kocky.

Vzpomínáme

V r. 1921 vyšiel prvý sešit 1. ročníku časopisu „Rozhledy matematicko-fyzikální“ za redigování prof. Dr. Vladimíra Ryšavého. Naše čtenáře bude jistě zajímat, jaké byly tehdejší soutěžní úlohy. Z celkového počtu 29 úloh vybrala pro vás redakce jen několik. Uvědomte si, že je řešili vrstevníci vašich dědečků.

Z MATEMATIKY

1. Z rovnice

$$\begin{aligned} 4x &= 3a \cos \varphi + a \cos \varphi, \\ 4y &= 3a \sin \varphi - a \sin 3\varphi \end{aligned}$$

vyložit φ .

Prof. Václav Hübner

2. Sestrojiti kružnici tak, aby procházela dvěma danými body a aby byla viděna z bodu třetího v daném úhlu.

Prokop

3. Řešiti dvojstředový čtyřúhelník, dány-li úhlopříčky svými délkami m, n a poloměr kruhu vepsaného ϱ .

† prof. Rudolf Hruša

4. Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC budiž ϱ . Poloměry kolmé ke stranám svírají s libovolnou přímkou p úhly α, β, γ měřené v témže smyslu. Pak plocha tohoto trojúhelníka dá se vyjádřiti vzorcem:

$$\Delta = \varrho^2 \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma - \alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Prof. Karel Koutský

5. Vypočtete souřadnice těžiště poloviny elipsy, půlené buď osou $2a$ nebo osou $2b$!

Prof. J. Kroupa

6. Trojúhelníku vepsanému do elipsy jest opsána kružnice; dokázati, že poloměr oné kružnice jest vyjádřen vzorcem

$$R = \frac{d_1 d_2 d_3}{ab},$$

kde a , b značí poloosy elipsy a d_1 , d_2 , d_3 poloviny průměrů rovnoběžných se stranami trojúhelníka.

Karel Lerl

7. Řešte rovnici

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n-1)(n-2) = 1254.$$

Dr. Vlad. Ryšavý

8. V jakém poměru jsou osy elipsy, je-li možno jí vepsati dva popřípadě více čtverců tak, že řada jejich úhlopříček tvoří hlavní osu elipsy.

Prof. Jiří Archleb

9. Řešiti rovnice:

$$\begin{aligned} a^{2x} - a^{2y} &= 16, \\ x + y &= \log_a 15 \end{aligned}$$

Dr. Josef Štěpánek

Z FYZIKY

1. Trojhranná deska rozměrů AB , BC , CA jest na rozích podepřena třemi svislými sloupky dané výšky. Kterým směrem a jakým urychlením stéká po ní voda?

Dr. Marian Haas

2. Určete magnetické pole ve středu sférického galvanometru, pokrytého rovnoběžnými dráty až na dva diametrálně ležící vrchlíky, patřící ke středovému úhlu 2α , je-li tloušťka drátu $2r$.

Prof. Jan Schuster

3. Po střeše absolutně hladké délky s , odchýlené od vodorovné roviny o úhel α , padá hmota M bez tření. Jaká jest dráha při dalším pádu se střechy s výšky h ?

Dr. J. Zahradníček

Z DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

1. Stanoviti rotační kužel, je-li dána osa, bod a tečna.

Prof. Jos. Hanuš

2. Stanoviti rotační kužel, je-li dán bod, tečna a vepsaná koule.

Týž

3. Sestrojte nejmenší čtyřstěn pravidelný, aby jeden vrchol byl na jedné mimoběžce a výška protější stěny na druhé dané mimoběžce.

Prof. J. Kroupa

To byly některé soutěžní příklady v 1. ročníku Rozhledů. Snad jste si povšimli zastaralého pravopisu, zastaralého vyjadřování a hodně ne-

přesné formulace příkladů, která ostře kontrastuje s jasnou a jednoznačnou formulací příkladů MO.

A jste zvědaví na vítěze? O nich se dovídáme na poslední stránce ročníku.

UDÍLENÍ CEN

Redakce úloh, přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, prisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem „Jednoty českých matematiků a fyziků“.

Z matematiky

Ceny první. Pánové: *Jaroslav Miksch*, stud. VIIb. I. r. v Brně. — *Fr. Lad. Rieger*, stud. VII. r. v Praze III. — *Václav Skalický*, stud. VII. r. v Pardubicích. — *Karel Sýkora*, stud. VII. r. v Pardubicích.

Ceny druhé. Pánové: *Fr. Dobiš*, stud. VIII. rg. v Trnavě. — *Vladimír Knichal*, stud. IV. r. v Mor. Ostravě. — *Fr. Možný*, stud. VII. g. v Hradci Králové. — *Jos. Pikula*, stud. VIII. g. v Báňské Bystřici. — *Eugen Theimer*, stud. VII. r. v Prostějově. — *Fr. Wolf*, stud. VII. r. v Prostějově.

Z deskriptivní geometrie

Ceny první. Pánové: *R. Dohnálek*, stud. VI. r. I. v Brně. — *Aug. Borecký*, stud. VII. r. v Písku. — *Fr. Lad. Rieger*, stud. VII. r. v Praze III.

Ceny druhé. Pánové: *K. Elicer*, stud. VII. r. v Nymburce. — *Fr. Možný*, stud. VII. g. v Hradci Králové. — *Vladimír Knichal*, stud. IV. r. v Mor. Ostravě.

Z fyziky

Cenu obdrží p. *Václ. Skalický*, stud. VII. r. v Pardubicích:

S. H.

Čtenářům Rozhledů doporučujeme:

Janků-Košťál-Nater: XII. ROČNÍK FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Publikace obsahuje zprávu o organizaci a průběhu soutěže fyzikální olympiády, dále studijní texty určené k samostatnému studiu a kompletní řešení úloh jednotlivých kategorií a kol probíhající soutěže. Je určena žákům a učitelům základních škol, gymnásií, středních odborných škol a zájemcům o soutěž fyzikální olympiády. I. vydání.

Brož. Kčs 11,—

Vývoj telekomunikací

JOSEF KOTYK, Pardubice

Angl. spisovatel T. B. Macaulay:
„Nejvíce prospěly civilizaci vynálezy, které sblížily vzdálené kraje a země.“

Od nepaměti se lidé pokoušeli navazovat spojení na dálku, podávat na vzdálená místa zprávy způsobem co nejrychlejším. V dávnověku volali na sebe s vrcholků kopců. K nejstarším společným vzpomínkám lidstva z minulosti, nám již zcela nedostupné, náleží zejména radost z novu. Lidé vítali nový srp Měsíce jásáním a voláním.¹⁾ V pozdějších dobách dopravovali zprávy štafetou běžců nebo jezdců, rozeznívali signální bubny, vysílali kouřové signály apod.

Před vynalezením telegrafu neexistovalo rychlejší spojení než službou kurýrní, organizovanou již mnohými starými kulturami. Tak o kurýrní službě Peršanů napsal už Hérodotos:²⁾ „Nikdo na světě necestuje rychleji než perští poslové.“ Systematickou soustavu spojení měli také staří Římané; pro jejich štafety se rychlost 150 km za den pokládala za velmi dobrý výkon. Málo je rovněž známo, že velmi výkonný byl zejména systém kurýrů v říši peruánských Inků; podle dochovaných zpráv mohla štafeta inckých běžců (časkiů) urazit na silnicích³⁾ vzdálenost 2000 km v nadmořské výšce (2000 až 5000) m mezi Qitem a Cuzkem — za pět dní! Španělská koloniální vláda udržovala tak dokonalý systém kurýrních služeb proto až do roku 1800.

¹⁾ V mohamedánském světě vyhlíží ještě dnes muezzini z minaretů jemný srpek novu. Ovzduší radostného vyvolávání novu připomíná latinské slovo *calendae* = volání; odtud odvozujeme také název kalendáře.

²⁾ Hérodotos z Halikarnassu (naroz. kolem roku 485 před n. l.) sepsal obsáhlé „Dějiny“, první veliké dějepisné dílo řecké, „aby časem neupadlo v zapomenutí, co se na světě přihodilo“. Cicero nazval Hérodota otcem dějepisu.

³⁾ Slavný německý cestovatel Alexander Humboldt (1769 až 1859) označil soustavu inckých silnic za „nejdůležitější a nejúžasnější dílo, jaké kdy člověk vykonal“. Překvapuje však, že kolo Inkové neznali. Silnice u starobylého města Nazca působí spíše dojmem letiště. Na minulosti lidstva leží stín, jenž zakrývá řadu důležitých událostí.

Římský básník Lucretius⁴⁾ napsal: „Vždy dříve postřehne naše oko blesk, než hřmění nám k sluchu dojde; to z té příčiny se děje, že zvuk ten později v sluch proniká než v oko to, co je dráždí.“ Co dráždí oko, je ovšem světlo. Jeho podstatu starověký básník sice neznal, vyjádřil však prastarou zkušenost lidskou, že světlo se šíří vzduchem blesku-rychle, mnohem — dnes víme, že skoro milionkrát — rychleji než zvuk. Až do dávnověku lze také stopovat snahu člověka podávati na vzdálená — avšak viditelná — místa zprávy o tom, že byl spatřen srp „nového“ Měsíce, hranicemi zapalovanými na horách. Znamení ohněm byla dávana i na značné vzdálenosti. Tento „telegraf“ se osvědčoval hlavně v noci. Jsou o něm zmínky např. již v hrdinských zpěvech starořeckých, připisovaných pěvci Homérovi;⁵⁾ pád Tróje byl podle nich oznámen do Řecka tak, že na kopcích byly postupně zapalovány veliké ohně. Časem se vyskytuje také užívání různě zbarvených praporků, z nichž byla dokonce sestavena i zvláštní abeceda. Podobná spojení, hodná již názvu telegraf (v doslovném překladu dalekopis, z řec. téle = daleko, grafó = píši), zřídili prý Démokritos a Kleoxenes v 2. pol. 5. století před n. l., nedošla však dalšího rozšíření.

Optický telegraf vstupuje pak na scénu kulturních dějin lidstva po mnoha staletích zase až v době buržoazní revoluce ve Francii roku 1790. Inženýr Claude Chappe (čti Klód Šap) byl tehdy vyzván, aby výsledky svých zdařilých pokusů realizoval také prakticky. I vybudoval na lince Paříž—Lille dvacet dvě stanice, jež rozložil na vyvýšených místech tak, aby z každé bylo vidět do sousedních. Nad stanicí byl vztyčen stožár s příčným trámcm, na jehož koncích byla upevněna dvě kratší ramena. Trámcem i rameny bylo možno otáčet. Telegrafista vzbuzoval potřebné změny na menším modelu, odkud byly složitou soustavou pák a šňůr přenášeny na mechanismus výše popsany. Z různých poloh, jež pohyblivé součástky telegrafu mohly zaujmouti, byla sestavena písmena. Čtenáře bude zajímati, že první zpráva, která byla tehdy z Paříže vyslána, dospěla do Lille, tj. na vzdálenost 30 mil⁶⁾ (něco přes 200 km) — teprve za 45 minut. Časem se dodávání zpráv ovšem zrychlilo, Chappeův telegraf byl proto již roku 1795 zaveden ve Švédsku, roku 1835 v Rakousku (linka Vídeň—Linec) aj.

Teprve devatenácté století změnilo tedy v základech míru a rytmus pozemské rychlosti. Již v jeho první polovině se sblížily země a národy, pokud jde o časovou a prostorovou vzdálenost, více než předtím za tisíce let. V třicátých letech 19. století staly se, jak známo, předmětem zkou-

⁴⁾ Titus Lucretius Carus žil asi v letech (98 až 55) před n. l. Napsal báseň „De rerum natura“ (O podstatě věcí), velkolepý didaktický epos, v němž vykládá, jak vše povstává, trvá a zaniká podle přírodních zákonů.

⁵⁾ Konečná úprava homérských básní Iliady a Odysseje spadá do (8. až 7.) století před n. l. V básních obrazy se však období (12. až 8.) století před n. l., nazývané někdy dobou homérskou.

mání možnosti, jak použití k přenosu zpráv do dálky energie elektrického proudu. Neodolatelná touha člověka zvítěziti nad prostorem a časem vedla záhy na to k sestrojení elektrického telegrafu. Stalo se tak *před 135 lety* památného roku 1837 zásluhou Američana Samuela F. B. Morsea.⁷⁾ Jeho vynálezy (telegrafický klíč, elektromagnetický zapisovací přístroj a důmyslná abeceda) řadí jej k předním dobrodincům lidstva. V telekomunikacích přivodily opravdový převrat. Nikdy nedokážeme už, lidé atomového věku, znovu procítit úžas tehdejších lidí nad tím, že hračka, která někdy stěží třením skleněné tyče přitáhla několik kousků papíru, že maličká, sotva postřehnutelná elektrická jiskřička, která někdy stěží přeskočila s konduktoru elektriky nebo leydenské láhve na kotník přiblíženého prstu, najednou získala démonickou schopnost přeskočit hravě hory, země a celé světadíly, nadšené ohromení nad tím, že myšlenku, kterou člověk snad ještě ani nedomyslel, že slovo, které právě napsal a které je ještě mokré, mohou v témž okamžiku přijmout a číst lidé žijící na tisíce a tisíce mil daleko, úžas nad prvními výkony elektromagnetických telegrafů. A to ještě nebylo možno v této době tušiti, co očekávají od zázraku — bezdrátového spojení!

⁶⁾ Zeměpisná míle měří 7420,4385 m. (viz Alberti, pozn. red.)

⁷⁾ Samuel Finley Breese Morse zemřel právě před 100 lety roku 1872. U příležitosti tohoto výročí nechť proto naše řádky jsou na něho vděčnou vzpomínkou.

Problém čtyř barev zůstává nerozřešen

JIŘÍ SEDLÁČEK, ČSAV Praha

V druhé polovině roku 1971 se v matematických kruzích rozšířila zpráva, že byl rozřešen problém čtyř barev. Zvěst se dostala i do Prahy a vypadalo to tentokrát velmi důvěryhodně. Bohužel, to byl jen planý poplach a tak problém zůstává i nadále nerozřešen. Oč jde?

Problém čtyř barev pochází z poloviny minulého století (Möbius, de Morgan, Cayley) a dá se formulovat velmi snadno. Jde o to, zda každou zeměpisnou mapu v rovině (nebo na kouli) je možno obarvit, máme-li po ruce čtyři barvy. Přitom se žádá, aby dva státy, které mají společnou hranici, byly obarveny vždy různými barvami. Otázku tedy pochopí každý, ale řešení není známé, ačkoliv se úlohou různí matematikové zabývají více než sto let. V historii ovšem nechyběly falešné důkazy, že obarvení je možné. První takový pokus vykonal už A. B. Kempe r. 1879, avšak hned r. 1890 upozornil P. J. Heawood, že předložený důkaz není

správný. Upravil též Kempeho příspěvek a podařilo se mu dokázat, že ke zmíněnému obarvení stačí pět barev.

Roku 1971 oznámil Y. Shimamoto svůj pokus. Podle jeho slov bylo jádrem jeho důkazu zjištění, že jistá konfigurace H je „ D -reducibilní“, což si mělo vyžádat dlouhou analýzu na počítačích. Dva teamy výzkumníků začaly pracovat na tom, aby dostaly kýžený výsledek a počítač prý musel analyzovat stovky a tisíce případů. Předběžnou Shimamotovu zprávu o výzkumu dostal do ruky též známý kanadský matematik W. T. Tutte, který práci zmíněné matematické skupiny podrobil rozboru. Tutte, který už v minulosti několikrát upozornil na nesprávné výsledky, jejichž závadnost předtím mnohým unikla, i tentokrát rozebral materiál velmi kriticky a našel chybu v teoretické části. Dalo mu to námět pro sepsání krátké výzkumné práce na universitě ve Waterloo. Problém čtyř barev tedy zůstává nerozřešen, ale pokus Shimamotův nebyl tak zcela bez užitku. Zbyl z něho zajímavý test pro tzv. D -reducibilitu a znovu potvrdil, o jak obtížnou úlohu jde.



RECENZE

J. Chudý:

DETERMINANTY A MATICE

SNTL, Praha 1971, 194 stran
Cena brož. výtisku Kčs 19,—

Útlá knížka, kterou vydalo Státní nakladatelství technické literatury, rozmnožuje řadu příruček vycházejících v Polytechnické knihnici. Autor v ní přístupným způsobem vykládá tradiční partie lineární algebry a ukazuje jejich běžné použití při řešení soustavy lineárních rovnic, jakož i aplikaci kvadratických forem v geometrii, zejména při vyšetřování kuželoseček.

Obsah je rozdělen do 4 kapitol: I. Vektory a matice; II. Determinanty; III. Lineární rovnice; IV. Maticový počet.

I. kapitola seznamuje čtenáře se základními pojmy: n -rozměrné vektory a vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost vektorů, hodnota soustavy vektorů, matice a její hodnota. Na příkladech se ukazuje, jak se prakticky určí hodnota matice.

II. kapitola vychází z řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, na jehož podkladě definuje dvouřadový determinant a for-

muluje pro tento případ Cramerovo pravidlo. Pak přechází autor k obecné definici determinantu při použití permutací, inverzí a transpozic a dokazuje základní věty o determinantech a jejich použití ukazuje při praktickém výpočtu víceřadových a speciálních determinantů. Ukázkami aplikací determinantů v rovině analytické geometrii a větou o násobení determinantů kapitola končí.

III. kapitola je věnována otázce řešitelnosti a řešení soustavy lineárních rovnic. Hlavním obsahem je tu samozřejmě Cramerovo pravidlo a Frobeniova věta. Samostatné články jsou v této kapitole věnovány jednak numerickým eliminačním metodám a soustavě homogenních rovnic.

IV. kapitola je nejrozsáhlejší (zabírá sama skoro polovinu celé knížky); obsahuje základy maticového počtu (početní výkony s maticemi, inverzní matice, charakteristická čísla matice, lineární a kvadratické formy a jejich užití). Je škoda, že

zřejmě v důsledku omezeného rozsahu knížky byl autor nucen použít v této kapitole už trochu úspornějšího způsobu výkladu, i když ani zde se nedá říci, že by výklad byl nerosozumitelný. Maticový počet, jehož význam je dnes nepopíratelný a s rozvojem samočinných počítačů zřejmě stále poroste, by si byl zasloužil podrobnější a ještě dále sahající výklad.

Výklad autorův je ve všech částech knihy jasný, srozumitelný a přístupný každému čtenáři, který má nejnutnější znalosti středoškolské matematiky. Je provázen četnými příklady řešenými v textu a při geometrických aplikacích jsou uváděny i názorné obrázky. Doc. Chudý dovedl v této knížce velmi dobře uplatnit mnohaleté zkušenosti ze svého působení na technice, takže jeho dílko lze plně a bez výhrad doporučit zájemcům o lineární algebru, zejména pak studentům vyšších ročníků našich gymnasií a SVVŠ.

F. Kejla

Konkurs JČSMF na návrhy úloh pro MO

Před šesti lety na jaře roku 1966 vyhlásila JČSMF konkurs na návrhy úloh pro Matematickou olympiádu. Návrhy úloh pro MO lze do konkursu zasílat neustále, neboť není časově omezen a probíhá nepřetržitě. Konkurs má tyto podmínky:

Text a řešení každé úlohy je třeba zaslat napsané na listu formátu A4 (vždy originál a jeden opis) na adresu: Ústřední výbor matematické olympiády, Praha 1-Nové Město, Žitná 25. Za každou přijatou úlohu je vyplácena odměna ve výši 50 Kčs v kategoriích A, B a C a 30 Kčs v kategorii Z. Při recenzi se přihlíží k původnosti úlohy a odměna může být případně zvýšena, např. přijaté úlohy, s nimiž se počítá, že budou na některé MO předloženy jako čs. návrh, jsou odměňovány částkou 80 Kčs. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vracejí. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archívu ÚV MO. Vyplacením odměny autorovi získává ÚV MO dispoziční právo, zejména upravit text úlohy i autorské řešení a použít úlohy pro účely MO podle vlastní volby. Autor samozřejmě bere na sebe závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Naději na úspěch má v konkursu každá kvalitní úloha s jakoukoli tematikou, která odpovídá současné škole.

ÚV MO

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

matice
rozšířená matice
maximální
maximum
medián
méně
měniti se
menší
meridián
měřitelný
měřiti
měřítko (nákresu)
metoda
metoda nejmenších čtverců
substituční metoda
metr
metrický
metrika
mez
dolní mez
horní mez
mezera
mezikruží
miliarda
milión
miliontina
miliontý
mimoběžky
minimální
minimum
minor
minus (znaménko —)
minuta
míra

matrice *ž*
matrice complète
maximal, e, aux
maximum *m*
médiane *ž*
moins
varier, changer
moindre, plus petit
méridienne *ž*
mesurable
mesurer
échelle *ž*
méthode *ž*
méthode des moindres carrés *m*
méthode de substitution *ž*
mètre
métrique
métrique *ž*
borne *ž*
borne inférieure
borne supérieure
lacune *ž*
couronne *ž* circulaire
milliard *m*
million *m*
millionième *m*
millionième
droites *ž* non coplanaires
minimal, e, aux
minimum *m*
mineur *m*
moins *m*
minute *ž*
mesure *ž*

místo
 geometrické místo
 desetinné místo
 platné místo
 mnohočlen
 mnohohran
 mnohonásobný
 mnohostěn
 mnohoúhelník
 množina
 disjunktní množiny
 konečná množina
 nekonečná množina
 prázdná množina
 spočetná množina
 uspořádaná množina
 množinový
 množný
 množství
 mocnina
 n -tá mocnina čísla a
 nultá mocnina čísla a

 mocninný
 mocnitel
 mocnost
 mocnost bodu ke kružnici

 model
 modul
 mohutnost
 mohutnost kontinua
 mohutnost množina
 moment
 moment setrvačnosti
 moment vektoru
 monotónní

—N—

naděje
 matematická naděje
 nadkoule
 nadplocha
 nadrovina
 náhoda
 náhodně
 náhodný
 náhodná proměnná

lieu m
 lieu géométrique
 chiffre m déci-mal
 chiffre m significatif
 polynôme m
 angle m polyèdre
 multiple
 polyèdre m
 polygone m
 ensemble m
 ensembles disjoints
 ensemble fini
 ensemble infini
 ensemble vide
 ensemble dénombrable
 ensemble ordonné
 ensembliste
 multiple
 quantité z , ensemble m
 puissance z
 puissance n du nombre a
 puissance d'exposant m zéro du
 nombre a
 potentiel, elle
 exposant m
 puissance z
 puissance d'un point par rapport
 au cercle m
 modèle m
 module m
 puissance z , cardinal m
 puissance du continu
 cardinal d'un ensemble
 moment m
 moment d'inertie z
 moment d'un vecteur
 monotone

espérance z
 espérance mathématique
 hypersphère z
 hypersurface z
 hyperplan m
 hasard m
 au hasard
 accidentel, elle; fortuit, e; aléatoire
 variable z aléatoire

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

10

ROČNÍK 50. 1971-1972. ČERVEN



**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 g, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellero-
vá, Teplice.
Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

ROČNÍK 50
ČERVEN 1972

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

OBSAH

Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Lidice a Le- žáky stále varují .	433
J. Troják: Několik vět o stromech .	435
A. Peři Apollonijsova kružnice .	438
S. Horák: Nagelova věta .	442
J. Filip: Voľné pravouhlé premietanie	444
RNDr. J. Široký, RNDr. M. Široká: Kulo- vé hvězdokupy	455
MO + FO	458
J. Kotyk: Z dějin telegrafu	467
RNDr. M. Bednařík: O muži, který ob- jevil Velké nic	472
Recenze .	476
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouz- ský	3. a 4. str. obálky

Lidice a Ležáky stále varují

Doc. Dr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

Třicet let v lidském životě je poměrně dlouhá doba, v životě národa snad jen okamžik. Proto je třeba si neustále připomínat mnoho událostí z poslední doby a nelze si říci: Již dost o době druhé světové války, již dost o době okupace Československa nacistickým Německem, již dost o Lidicích a Ležácích!

Šroub nesvobody a politického útlaku od zřízení tzv. Protektorátu Čechy a Morava byl stále více utahován a všechny projevy odporu stále tíživěji postihovány. Tak po demonstracích 28. října a 15. listopadu následuje uzavření českých vysokých škol a persekuce českého studentstva v akci „17. listopad“. Teror s mnohonásobnou větší silou začal po výměně tzv. říšského protektora von Neuratha za Reinharda Heydricha, který podle své funkce byl pravou rukou vedoucího Gestapa a státní bezpečnosti Himmlera. Od jeho příchodu do Prahy v září 1941, kdy byl téměř v celém Protektorátě vyhlášen výjimečný stav a zřízeny stanné soudy, bylo do 26. května 1942 popraveno mnoho českých lidí, tisíce uvězněny v káznicích a koncentračních táborech. Po atentátu 27. května, kdy byl Heydrich parašutisty vyslanými z Anglie smrtelně zraněn a zejména po jeho smrti 4. června se tento teror dále vystupňoval.

Pro odvetnou akci a zastrašení celého národa byla, jak ukázala vyšetřování po ukončení války, uměle vykonstruována vina malé obce Lidice u Kladna. Podle úřední zprávy vydané 10. června 1942 za to, že se „obyvatelé této obce svou činností a podporou vrahů SS-Obergruppenführera Heydricha co nejhrubším způsobem provinili proti vydaným zákonům, byli dospělí muži zastřeleni, ženy dopraveny do koncentračního tábora a děti dány na náležité vychování. Budovy v obci byly srovnány se zemí a jméno obce bylo vymazáno.“

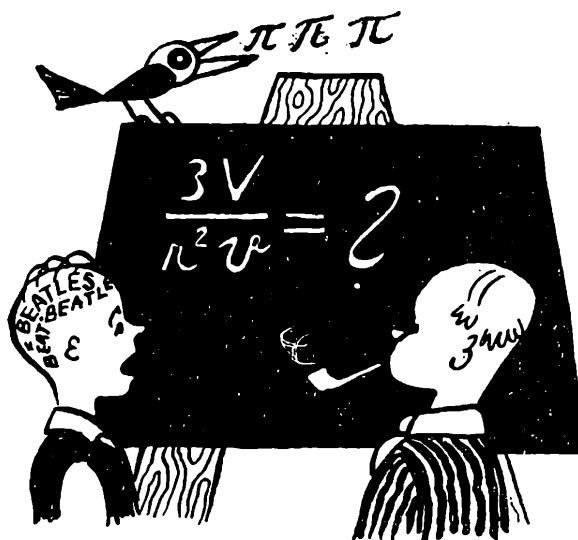
Jestliže předtím šlo hlavně o akce proti české inteligenci, je tentokrát postižena dělnická a rolnická obec. Z 483 lidických občanů bylo v červnu popraveno 199 mužů a žen, v koncentračním táboře zahynulo 52 žen a ze všech lidických dětí bylo do konce roku 1945 nalezeno pouze 10. Ostatní podle průvodního dopisu při příchodu do Lodže byly podrobeny „zvláštnímu jednání“ a dnes je zřejmo, že zahynuly v plynových komorách.

Za 14 dní po této hrůzné události byla obdobným způsobem postižena osada Ležáky, ze které byli zastřeleni všichni dospělí obyvatelé a z dětí se do r. 1946 vrátily pouze dvě.

Osudy těchto dvou obcí jsou dnes známy po celém světě. Víme však také, že podobný osud mělo později mnoho dalších obcí, zvláště pak v Sovětském svazu a Polsku, ale také ve Francii a Itálii. Výjimečnost Lidic a Ležáků není však v jejím prvenství, ale v tom, že byla zpupným způsobem oznámena hned po tragédii celému světu.

Našemu lidu, ale také všem pokrokovým lidem na světě připomínají tato jména stále věrnost, statečnost a odhodlanost svých obyvatel, ukazují nám však také, jaký osud byl chystán nacistickým Německem nejen nám, ale i všem ostatním slovanským národům.

Nezapomeňme!



Několik vět o stromech

JAN TROJÁK, MFF UK

V minulém čísle Rozhledů jsme se seznámili s neorientovanými souvislými grafy bez kružnic, které stručně nazýváme stromy. V závěru článku jsme si povšimli několika vlastností společných všem stromům znázorněným v článku, pokusme se nyní jasně formulovat příslušné věty a dokázat je.

Každý neorientovaný graf G má buď všechny nebo nemá žádnou z těchto vlastností:

V_0 G je stromem, tj. souvislým grafem bez kružnic.

V_1 Každé dva uzly grafu G jsou spojeny jedinou cestou.

V_2 G je souvislý a počet jeho uzlů je o jednu větší než počet hran.

V_3 G neobsahuje kružnici a počet jeho uzlů je o jednu větší než počet jeho hran.

Dříve než se pustíme do důkazu uvedených vět, uvědomme si, že máme dokázat ekvivalenci čtyř vět. V článku J. Šedivého v 7. čísle Rozhledů byl naznačen úsporný způsob důkazu takových ekvivalencí, v našem případě postačí, dokážeme-li pravdivost vět vyjadřujících $V_0 \Rightarrow V_1, V_1 \Rightarrow V_2, V_2 \Rightarrow V_3, V_3 \Rightarrow V_0$. Znázorníme si tento postup na grafu s uzly V_0, V_1, V_2, V_3 , ve kterém zakreslíme hranu $\overrightarrow{V_i V_j}$ jen v případě, kdy bude dokázána pravdivost věty vyjadřující $V_i \Rightarrow V_j$ (obr. 1).

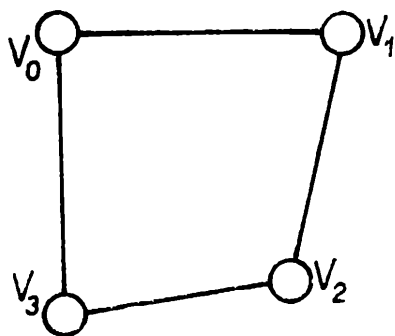
V tomto grafu zřejmě z každého uzlu $V_i, i = 0, 1, 2, 3$ vede cesta do každého uzlu $V_j, j = 0, 1, 2, 3$. Např. V_1, V_2, V_3 je cesta z V_1 do V_3 , která vyjadřuje možnost důkazu věty $V_1 \Rightarrow V_3$; protože existuje i cesta

V_3, V_0, V_1 z uzlu V_3 do V_1 , platí také $V_3 \Rightarrow V_1$ a v důsledku toho platí ekvivalence $V_1 \Leftrightarrow V_3$. Dokažme nyní postupně, že pro každý graf $\mathbf{G}$ platí:

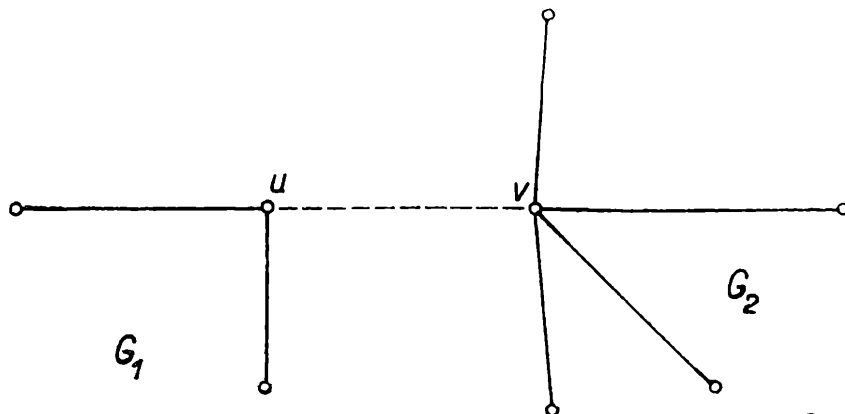
(1) $V_0 \Rightarrow V_1$, (2) $V_1 \Rightarrow V_2$, (3) $V_2 \Rightarrow V_3$, (4) $V_3 \Rightarrow V_0$,

tím bude zaručena platnost výše vyslovené věty pro každý graf $\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{H})$,

Čtenář si při studiu důkazů těchto vět připomene nebo pozná základní způsoby důkazů v matematice.



Obr. 1



Obr. 2

(1) $V_0 \Rightarrow V_1$. Protože $\mathbf{G}$ je souvislý graf, existuje ke každým dvěma jeho uzlům u, v cesta, která je spojuje, důkaz unicisty (tj. doslova jedinství) této cesty provedeme sporem. Předpokládáme, že existují v $\mathbf{G}$ dvě různé cesty

$u, u_1, u_2, \dots, u_n, v$ a $u, v_1, v_2, \dots, v_k, v$,

které spojují u s v . Uvažujme odděleně o dvou případech:

a) $u_i \neq v_j$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ a $j = 1, 2, \dots, k$; pak obě cesty mají společné jen dva uzly u, v a sled

$i, u_1, u_2, \dots, u_n, v, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1, v$

je kružnice, což je ve sporu s V_0 .

b) Obě cesty mají společný aspoň jeden další uzel různý od u, v ; pak označme písmenem w ten ze společných uzlů různých od u, v , který má nejnižší index v posloupnosti $u_1, u_2, \dots, u_n$. Dvojice uzlů u, w v $\mathbf{G}$ opět leží na kružnici a dostáváme též spor s V_0 .

Nemůže tedy existovat v grafu $\mathbf{G}$ více než jedna cesta z u do v , existuje proto vždy právě jedna taková cesta.

(2) $V_1 \Rightarrow V_2$. Z vlastnosti V_1 grafu $\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{H})$ vyplývá jeho souvislost, zaměříme se na důkaz vztahu mezi počtem uzlů a hran grafu. Označme si pro stručnost počet uzlů, resp. hran, grafu $\mathbf{G}$ symboly $|\mathbf{U}|, |\mathbf{H}|$ (čtěme však tyto symboly slovy „počet uzlů, počet hran“, nehovořme o absolutní hodnotě!). Máme tedy dokázat, že $|\mathbf{U}| = |\mathbf{H}| + 1$, provedeme důkaz matematickou indukcí.

a) Je-li $|\mathbf{U}| = 1$, je $|\mathbf{H}| = 0$; strom má jediný uzel a žádnou hranu (takový strom si snadno zakreslíme).

b) Předpokládejme, že pro grafy s $|U| \leq n$ platí $|U| = |H| + 1$ a uvažujme dále o grafech $G(U, H)$ s počtem uzlů $|U| = n + 1$, kde $n \geq 1$. Zvolme dva uzly $u, v \in G$ spojené hranou uv ; podle V_1 spojuje u, v jediná cesta a tou je hrana uv . Vynechme nyní hrana uv a vytvořme graf $G'(U, H - \{uv\})$, který není souvislý (obr. 2), ale obsahuje dvě souvislé komponenty $G_1(U_1, H_1), G_2(U_2, H_2)$. Platí zřejmě, že $|U| = |U_1| + |U_2|$, $|H| = |H_1| + |H_2| + 1$. Protože $|U_1|, |U_2|$ jsou přirozená čísla a $|U_1| + |U_2| = |U| = n + 1$, je $|U_1| \leq n$ i $|U_2| \leq n$ a pro G_1, G_2 platí podle předpokladu

$$|U_1| = |H_1| + 1, \quad |U_2| = |H_2| + 1$$

V grafu $G(U, H)$ s $(n + 1)$ uzly je pak

$$|U| = |U_1| + |U_2| = |H_1| + |H_2| + 2 = |H| + 1$$

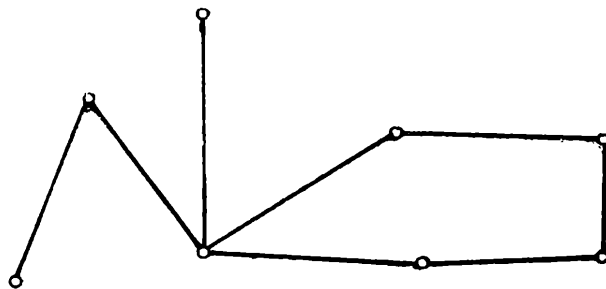
Tím je dokončen důkaz matematickou indukcí pro každý graf.

(3) $V_2 \Rightarrow V_3$. Postačí dokázat, že žádný souvislý graf $G(U, H)$, pro který platí $|U| = |H| + 1$, neobsahuje kružnici.

Provedme nepřímý důkaz, dokažme, že platí $V_3 \Rightarrow V_2$; předpokládejme, že v souvislém grafu G existuje kružnice, která má právě C uzlů. Tato kružnice obsahuje C hran, graf $G(U, H)$ má pak $|U| - C$ uzlů neležících na uvažované kružnici.

Pokud je $|U| - C = 0$, tj. $|U| = C$, je graf G sám kružnicí a $|H| = C$, potom $|U| \neq |H| + 1$.

Pokud je $|U| - C > 0$, vychází v důsledku souvislosti grafu G z každého uzlu neležícího na uvažované kružnici aspoň jedna hrana, která kružnici nenáleží (viz obr. 3). Každému z těchto uzlů můžeme přiřadit první hranu cesty, jež ho spojuje s některým uzlem kružnice; tak



Obr. 3

dosáhneme toho, že různým uzlům přiřadíme různé hrany. Graf G tedy obsahuje kromě C hran kružnice ještě aspoň $|U| - C$ dalších hran,

$$|H| \geq C + (|U| - C) = |U|,$$

což popírá vlastnost V_2 . Tím jsme dokázali větu vyjadřující $V_3 \Rightarrow V_2$, jež má stejnou pravdivostní hodnotu jako věta vyjadřující $V_2 \Rightarrow V_3$.

(4) $V_3 \Rightarrow V_0$. Protože G neobsahuje kružnici, zbývá dokázat, že G je souvislý; podejme nepřímý důkaz sporem. Předpokládejme, že G

není souvislý, skládá se z aspoň dvou souvislých komponent a přitom $|\mathbf{U}| = |\mathbf{H}| + 1$. (Předpokládáme platnost $V_3 \wedge V'_0$ a pokusíme se dojít ke sporu.)

Protože $\mathbf{G}$ neobsahuje kružnice, neobsahuje je ani žádná z jeho k komponent, jež jsou vesměs stromy, označme je $\mathbf{G}_i (\mathbf{U}_i, \mathbf{H}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, $k \geq 2$.

Pro stromy však platí, jak jsme již dokázali v (3),

$$|\mathbf{U}_i| = |\mathbf{H}_i| + 1,$$

$$\text{pak } |\mathbf{U}| = |\mathbf{U}_1| + \dots + |\mathbf{U}_k| = (|\mathbf{H}_1| + 1) + \dots + (|\mathbf{H}_k| + 1) = \\ = (|\mathbf{H}_1| + \dots + |\mathbf{H}_k|) + k = |\mathbf{H}| + k$$

Protože podle předpokladu je $|\mathbf{U}| = |\mathbf{H}| + 1$, platí $k = 1$, a to je spor. Neplatí tedy věta vyjadřující $V_3 \wedge V'_0$, platí $V_3 \Rightarrow V_0$.

Tím jsme ukončili důkaz ekvivalence čtyř vlastností V_0, V_1, V_2, V_3 ; kteroukoliv z nich lze vzít jako charakteristickou vlastnost stromů a využít jí v definici stromu. Ve cvičeních může čtenář dokázat, že další dvě vlastnosti stromů jsou ekvivalentní s vlastnostmi zde uvedenými.

Cvičení

1. Dokažte, že každý neorientovaný graf $\mathbf{G} (\mathbf{U}, \mathbf{H})$ je stromem právě tehdy, když každá jeho hrana je jeho mostem.
2. Dokažte, že každý neorientovaný graf $\mathbf{G} (\mathbf{U}, \mathbf{H})$ je stromem právě tehdy, když neobsahuje kružnici, ale přidáním jediné hrany (spojením dvou dosud nespojených uzlů u, v) vytvoříme graf $\mathbf{G}^* (\mathbf{U}, \mathbf{H} \cup \{uv\})$, který obsahuje právě jednu kružnici.

Apolloniova kružnice

ALOIS PEŘINA, Brno

V článku „Z geometrie trojúhelníku“ na 10. stránce 49. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních, sešit č. 1, byla obsažena definice harmonické čtveřiny bodů v tomto znění: čtyři body A, B, U, V ležící na přímce tvoří harmonickou čtveřinu, splňují-li vztah

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AV}{BV} \quad (1)$$

V citovaném článku byl obsažen příklad takové harmonické čtveřiny, tvořené vrcholy A, B trojúhelníku ABC jako body základními a průsečíky U, V os vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C s přímkou r určenou

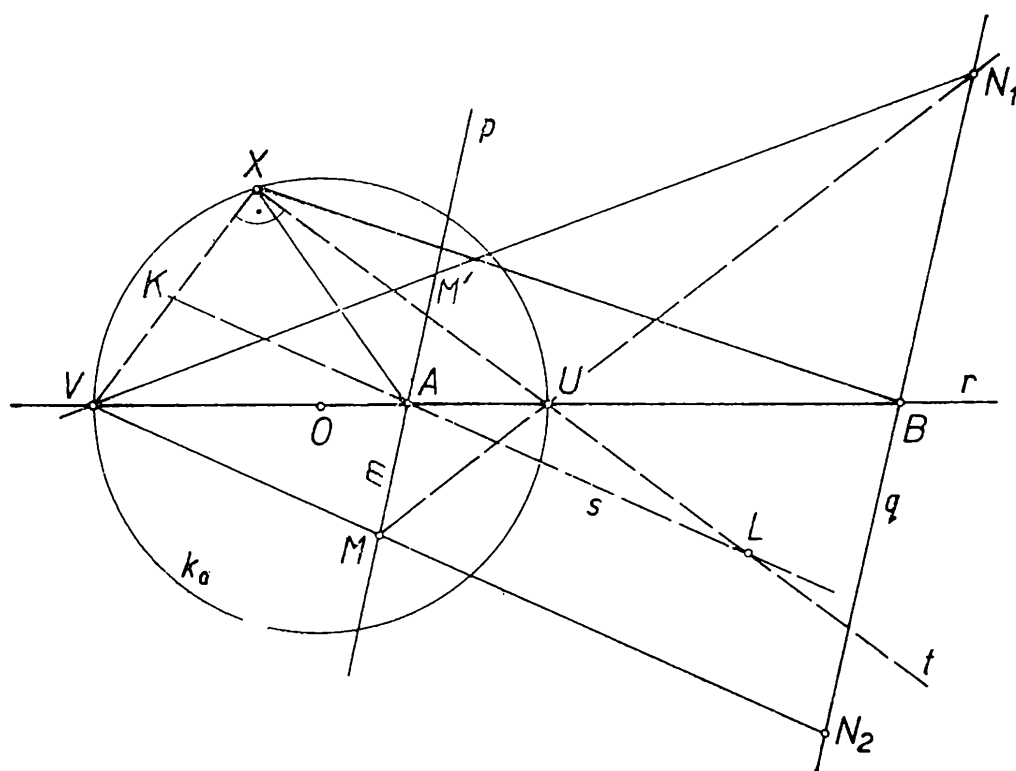
bodů A, B . Ukážeme, jak se harmonická čtveřina zpravidla sestrojuje, je-li dáno kladné číslo

$$\lambda = \frac{AU}{BU} = \frac{AV}{BV} \quad (2)$$

Číslo λ lze určit dvěma úsečkami volenými tak, aby pro jejich délky m, n platilo:

$$\lambda = \frac{m}{n} \quad (3)$$

Konstrukci ukáží na obrázku, pro něž bylo voleno m, n , aby pořadí bodů A, B, U, V vyšlo shodné s pořadím na obrázcích v citovaném člán-



Obr. 1

ku. Dané základní body A, B určují přímku r . Jimi vedeme v libovolném směru přímky $p \parallel q$. Přímka, vedená bodem A , je označena p , přímka q prochází bodem B . Na p sestrojíme bod M tak, že $AM = m$, na q body N_1 ; a N_2 tak, že $BN_1 = BN_2 = n$, při čemž N_1 leží v opačné polorovině vyřazené přímkou r než M , bod N_2 leží v téže polorovině jako M . Spojnice MN_1 určí svým průsečíkem s r bod U spojnice MN_2 určí bod V , čímž je sestrojena harmonická čtveřina bodů A, B, U, V daná základními body A, B a číslem λ . Správnost konstrukce si čtenář snadno ověří stejnoolehlostí. Sestrojíme-li nyní nad úsečkou UV jako průměrem kružnici k_a , nazýváme tuto kružnici Apolloniiovou kružnicí příslušnou k bodům A, B a číslu λ . (Vzhledem k bodům U a V je k_a ovšem kružnicí Thaletovou.)

Apolloniova kružnice příslušná k bodům A, B a číslu λ je geometrickým místem bodů X , jejichž vzdálenosti od A, B jsou v poměru $\frac{AX}{BX} = \lambda$.

Provedení důkazu nechť čtenář sleduje na obrázku. Na Apolloniově kružnici k_a zvolíme libovolný bod X různý od U, V a sestrojíme přímku XB . Pak vedeme bodem A přímku s rovnoběžnou s touto spojnicí, takže $s \parallel BX$. Její průsečík se spojnicí XV označíme K a průsečík s přímkou t , procházející body X, U , označíme L . Bod A je středem úsečky KL , jak hned dokážeme. Z podobnosti trojúhelníku BXU , ALU plyne,

$$AL : BX = AU : BU$$

vzhledem ke vztahům (2) a (3) je možno psát

$$\frac{AL}{BX} = \frac{m}{n} = \lambda. \quad (4)$$

Obdobně z podobnosti trojúhelníků VAK , VBX dostáváme

$$AK : BX = AV : BV$$

a vzhledem ke vztahu (2)

$$\frac{AK}{BX} = \frac{m}{n} = \lambda. \quad (5)$$

Ze vztahů (4) a (5) plyne shodnost úseček AK, AL , čímž je dokázáno, že bod A je středem úsečky KL . Trojúhelník KLX je pravoúhlý s pravým úhlem při X , jak si čtenář sám snadno odůvodní, proto platí

$$AX = AK = AL$$

a se zřetelem na vztahy (4) a (5) můžeme psát

$$\frac{AX}{BX} = \lambda = \frac{m}{n}.$$

Protože pro body U, V platí $\frac{AU}{BU} = \frac{AV}{BV} = \lambda$, máme zjištěno, že $\frac{AX}{BX} = \lambda$ pro každý bod X dané Apolloniovy kružnice.

Zbývá ještě dokázat, že každý bod X , pro který platí $\frac{AX}{BX} = \lambda$, leží na Apolloniově kružnici příslušné k bodům A, B a číslu λ . Zatím víme, že na přímce AB leží právě dva takové body U, V , a ty leží na uvažované Apolloniově kružnici. Leží-li však takový bod X mimo přímku AB , sestrojíme osy vnitřního a vnějšího úhlu trojúhelníku u vrcholu X ; podle výsledku uvedeného v citovaném článku protínají tyto osy přímku AB v bodech U, V . Je tedy úhel UXV pravý a bod X leží na kružnici s průměrem UV , tj. na uvažované Apolloniově kružnici.

Bezprostředním využitím právě dokázané věty může čtenář snadno rozřešit úlohu požadující setrojení pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána jeho přepona a poměr délek jeho odvěsen. (Tuto úlohu lze však rozřešit i bez Apolloniovy kružnice.)

Předkládám čtenáři ještě jednu úlohu, kterou po přečtení tohoto článku snadno rozřeší užitím Apolloniovy kružnice: Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dána jeho strana $c = AB$, výška v_c a poměr stran $\frac{AC}{BC} = \lambda \neq 1$.

Podle toho, jaké hodnoty si zvolíte pro c , v_c a λ , dostanete dvě různá, jedno nebo žádné řešení.

Pro čtenáře znajícího základy analytické geometrie v rovině naznačím analytické odvození rovnice Apolloniovy kružnice řešením úlohy: Určete geometrické místo bodů X , jejichž poměr vzdáleností od daných bodů A, B je konstantní, takže platí $\frac{XA}{XB} = \lambda$, kde λ je dané kladné číslo.

Volíme spojnici AB za osu x a počátek souřadnic ve středu úsečky $AB = c$ tak, že bod A má souřadnice $(-\frac{c}{2}; 0)$, bod B $(\frac{c}{2}; 0)$. Označíme-li x, y souřadnice bodu X , platí

$$\frac{XA}{XB} = \frac{\sqrt{(x + \frac{c}{2})^2 + y^2}}{\sqrt{(x - \frac{c}{2})^2 + y^2}} = \lambda,$$

po úpravě dostáváme rovnici

$$x^2 (\lambda^2 - 1) - cx (\lambda^2 + 1) + \frac{c^2}{4} (\lambda^2 - 1) + y^2 (\lambda^2 - 1) = 0$$

Určeme její geometrický význam nejprve pro triviální hodnotu $\lambda = 1$. Vyjde $x = 0$, což je rovnice osy úsečky AB .

V případě $\lambda \neq 1$ je $\lambda^2 - 1$ různé od nuly, takže můžeme rovnici dělit dvojnásobkem $(\lambda^2 - 1)$. Tím obdržíme výsledek, který je rovnicí kružnice

$$x^2 - cx \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} + \frac{c^2}{4} + y^2 = 0,$$

z níž po úpravě získáme rovnici kružnice Apolloniovy, jejíž střed má souřadnice $\left(\frac{c}{2} \cdot \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}; 0\right)$ a poloměr $r = \frac{c \lambda}{|\lambda^2 - 1|}$

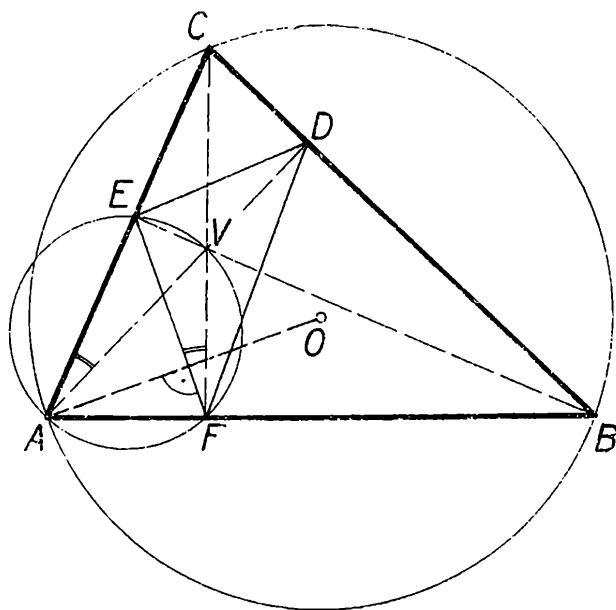
Apollonios z Pergy žil v Alexandrii před rokem 200 před naším letopočtem. Vyšetřoval vynikajícím způsobem kuželosečky a výsledky svých bádání a tehdejší znalosti vůbec shtnul do osmi knih díla nazvaného Kuželosečky.

Nagelova věta

STANISLAV HORÁK st., Praha

Je dán trojúhelník ABC . Výška, jdoucí vrcholem A (B, C) protíná protější stranu v bodě D (E, F). Trojúhelník DEF se nazývá *ortický*. Jestliže O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC , platí tato věta:

Přímky OA, OB, OC jsou kolmé po řadě ke stranám ortického trojúhelníka EF, DF, DE .



Obr. 1

Důkaz (obr.) provedeme pro vrchol A a stranu EF . Především je patrné, že

$$\sphericalangle OAF = 90^\circ - \gamma$$

Průsečík výšek daného trojúhelníka je V . Všimněme si, že čtyřúhelníku $AEVF$ lze opsat kružnici. V ní nad týmž obloukem $\widehat{EV}$ jsou obvodové úhly $\sphericalangle EAV, \sphericalangle EFV$. O nich tedy platí

$$\sphericalangle EAV = \sphericalangle EFV = 90^\circ - \gamma$$

Ale potom

$$\sphericalangle AFE = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$$

Z toho ovšem plyne, že přímky AO, EF jsou navzájem kolmé, jak jsme měli dokázat. Pro druhé dva vrcholy se důkaz provádí obdobně.

II. Nagelovu větu můžeme dokázat i užitím analytické geometrie. Počátek souřadnicové soustavy zvolme ve vrcholu A , osu x položíme do přímky AB , osy y je potom k ní kolmá. Souřadnice bodů, které budeme potřebovat, jsou

$$A = \left/ 0, 0 \right/, B = \left/ c, 0 \right/, O = \left/ \frac{1}{2} c, \frac{1}{2} c \cdot \cotg \gamma \right/ ,$$

$$F = [b \cdot \cos \alpha, 0] .$$

Souřadnice bodu E se počítá poněkud složitěji. Nejprve

$$AE = c \cdot \cos \alpha$$

a tudíž $E = [c \cdot \cos^2 \alpha, c \cdot \cos \alpha \sin \alpha]$

Souřadnice vektorů $\vec{AO}$, $\vec{EF}$ jsou

$$\vec{AO} = \left(\frac{1}{2} c, \frac{1}{2} c \cdot \cotg \gamma \right), \vec{EF} = (b \cos \alpha - c \cos^2 \alpha, -c \cos \alpha \sin \alpha)$$

Ale vektory $\vec{AO}$ a $\vec{EF}$ jsou k sobě kolmé a k tomu je nutné, aby

$$\vec{AO} \cdot \vec{EF} = 0 .$$

Po dosazení dostaneme výraz, který hned upravujeme

$$\begin{aligned} \vec{AO} \cdot \vec{EF} &= \frac{1}{2} (bc \cdot \cos \alpha - c^2 \cdot \cos^2 \alpha - c^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cotg \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} c \cdot \cos \alpha (b - c \cdot \cos \alpha - c \cdot \sin \alpha \cotg \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} c \cdot \cos \alpha (EC - BE \cotg \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} c \cos \alpha (EC - EC) = 0 \end{aligned}$$

Tím je vlastně důkaz proveden, neboť, platí-li věta o straně EF a poloměru AO , platí jistě i pro stranu FD (ED) a poloměru BO (CO).

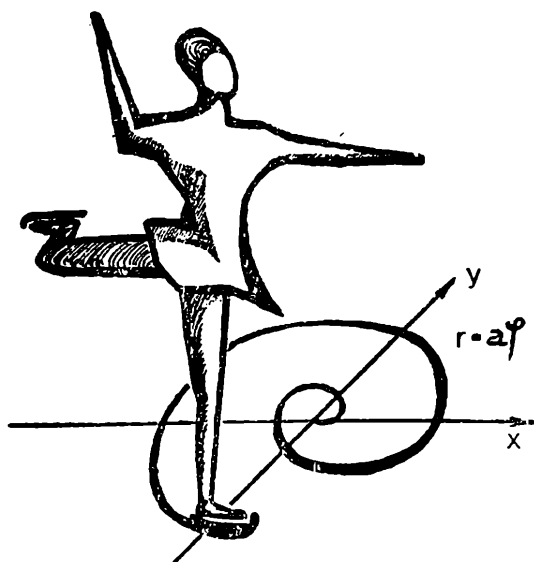
Poznámka. Právě dokázaná věta se v západní Evropě nazývá Nagelova podle svého objevitele Nagela, který byl ředitelem reálky v Ulmu.

Cvičení. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán a) trojúhelník AEF , b) trojúhelník DFV .

Pokračování recenze ze str. 476

Na straně 25 ve vzorci (32') místo $k = j$ má být $k \neq j$. Na straně 49, řádek 6 shora místo $F_k(x)$ má být $F_r(x)$. Na str. 76, řádek 11 zdola místo $B_r^2(x)$ má být $B_r^q(x)$. Na str. 78, řádek 8 zdola místo argumentu x má být $-x$. Na str. 92, řádek 3 zdola ve vzorci poslední exponent má být

$k + 1$ místo k . Na str. 131, ve vzorci (22) má být P_n^k místo P_k^n . Na str. 132 ve vzorci (24) je v exponentech uváděno α místo a . Konečně na str. 145, řádek 5 zdola vzorec začíná x^2 místo x^n . To je tedy několik oprav, na něž upozornil sám autor.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Vol'né pravouhlé premietanie

JOZEF FILIP, Bratislava

V praxi sa často stretávame s požiadavkou upresniť predstavu objektu, o ktorom hovoríme alebo píšeme. Slovný opis na to obyčajne nestačí a preto siahame po vhodnejšom vyjadrovanom prostriedku, ako je v tomto prípade reč a tým prostriedkom je názorný obraz.

V tomto článku chceme naznačiť a na niekoľkých príkladoch ukázať, ako môžeme pomerne jednoducho kresliť správne a názorné obrázky. Zobrazovacia metóda, o ktorej budeme hovoriť, patrí — ako už názov naznačuje — medzi najpoužívannejšie metódy známe pod menom pravouhlé premietanie.¹⁾

Svoje úvahy oprieme o dôležité vety V1, V2, V3 a V4, z ktorých druhú dvojicu aj dokážeme. Dôkazy prvej dvojice ponecháme čitateľovi.

V1. Dve navzájom kolmé priamky sa premietajú do dvoch navzájom kolmých priamok práve vtedy, ak aspoň jedna je rovnobežná s priemetňou a druhá nie je na priemetňu kolmá. (V tomto článku budeme používať obrátenú vetu. Ako znie obrátená veta k V1?).

V2. Keď kružnica $g(S; r)$ leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, je priemetom kružnice g kružnica $g_1 \cong g$. Keď kružnica g leží v rovine kolmej na priemetňu, je priemetom kružnice g úsečka $g_1 = 2r$. Keď kružnica g leží v rovine, ktorá nie je s priemetňou rovnobežná ani na ňu kolmá, je priemetom kružnice g elipsa g_1 , ktorej hlavná os leží na priemete hlav-

¹⁾ V ďalšom texte budeme slovo pravouhlý vynechávať a hovoriť proste o priemete.

nej priamky roviny a má dĺžku $2r$; vedľajšia os leží na priemete spádovej priamky a má dĺžku $2r \cdot \cos \alpha$, kde α je odchýlka roviny od priemetne.

V3. Každé dve úsečky na priemetni možno pokladať za pravouhlý priemet dvoch úsečiek zhodných a vzájomne kolmých.

V4. Keď sa kružnica g zobrazí v pravouhlom premietaní do elipsy g_1 , tak každá úsečka zhodná s polomerom kružnice g a kolmá na jej rovinu sa zobrazí do úsečky kolmej na hlavnú os elipsy g_1 a dĺžka tejto úsečky sa rovná lineárnej excentricite elipsy g_1 .

Pri dôkaze vety V3 budeme postupovať tak, aby sme mohli výsledky úvah, ktoré pri tom vykonáme, použiť v ďalšom výklade. Bez újmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že úsečky, o ktorých hovorí veta V3, majú jeden krajný bod spoločný. Nech sú teda na priemetni dané (nenulové) úsečky J_1S_1 a L_1S_1 celkom ľubovoľné čo do dĺžky i veľkosti uhla $J_1S_1L_1$, o ktorom budeme predbežne predpokladať, že je kosý (teda že nie je ani nulový, ani pravý). Takéto úsečky môžeme vždy pokladať za združené polomery elipsy, ktorá je týmito združenými polomermi (resp. združenými priemermi) určená. Avšak každú elipsu môžeme pokladať za pravouhlý priemet istej kružnice²⁾, v ktorej polomery JS , LS ako vzory priemetov J_1S_1 , L_1S_1 sú združenými polomermi a teda sú zhodné a vzájomne kolmé.

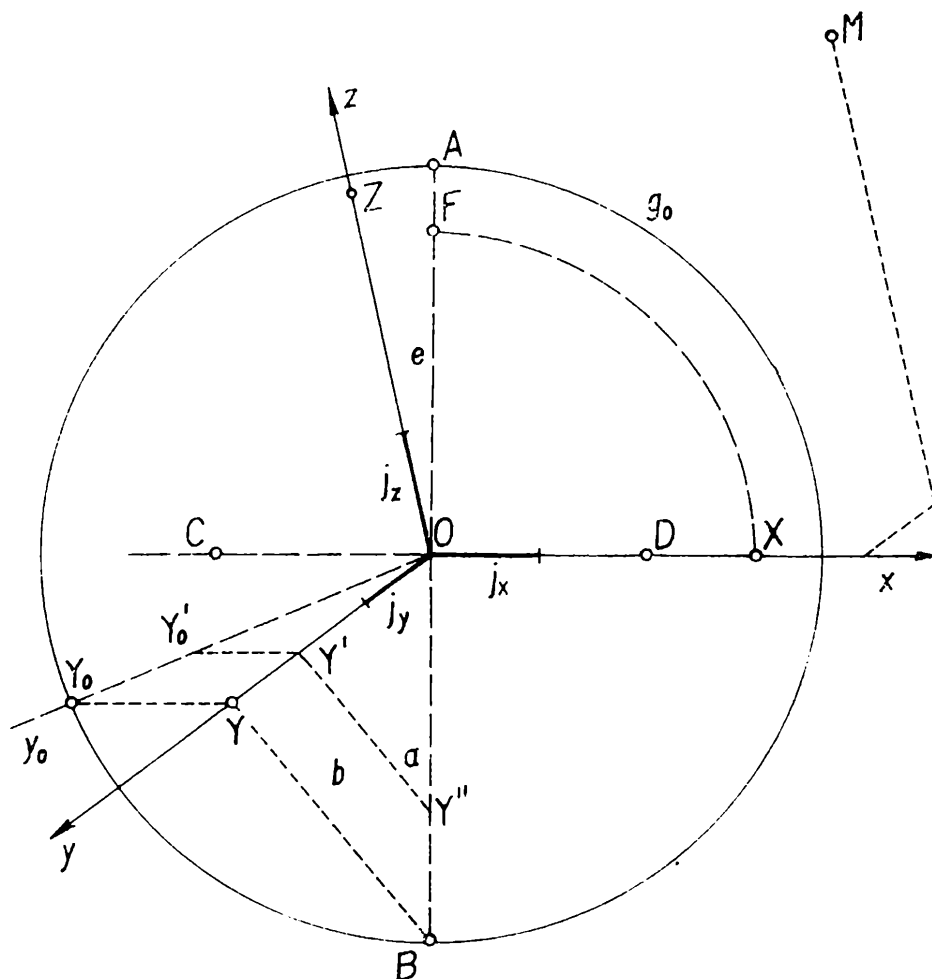
Pozrime sa ešte v krátkosti na prípady, ktoré sme vylúčili: 1. Ak $\sphericalangle J_1S_1L_1 = R$ a má byť obrazom pravého uhla, musí byť aspoň jeden z polomerov JS_1 , LS rovnobežný s priemetňou [V1]. Keď $J_1S_1 > L_1S_1$, je JS hlavnou a LS vedľajšou polosou elipsy a polomer JS je rovnobežný s priemetňou. Keď $\overline{J_1S_1} = \overline{L_1S_1}$, sú oba polomery JS , LS rovnobežné s priemetňou.

2. Keď $\sphericalangle J_1S_1L_1 = 0$, čiže keď úsečky J_1S_1 a L_1S_1 ležia na jednej priamke, nastane zjednodušenie. Vtedy obe úsečky JS , LS ležia v tej istej premietacej rovine κ . Sú tu dve možnosti, ktoré sme znázornili na obr. 1a,b za predpokladu, že sme rovinu κ sklopili do priemetne.

Tým sme vyčerpali aj zvláštne prípady a presvedčili sme sa, že je možné ku každým dvom úsečkám J_1S_1 a L_1S_1 na priemetni priradiť v priestore dve úsečky JS a LS také, že $\overline{JS} = \overline{LS}$ a $JS \perp LS$, pričom úsečka JS (LS) je vzorom a úsečka J_1S_1 (L_1S_1) obrazom v pravouhlom premietaní.

Poznámka 1. Toto priradenie, pravda, nie je jednoznačné, nie je napr. známa vzdialenosť bodov J , L , S od priemetne. Z obr. 1a,b vidno, že by sme mohli $\sphericalangle JSL$ ľubovoľne posunúť v smere kolmom na priemetňu, prípadne zostrojiť k uhlu JSL uhol súmerne združený podľa priemetne apod., ale nám išlo o to dokázať, že v priestore vždy existujú dve úsečky zhodné a vzájomne kolmé, ktoré sa premietajú kolmo do úsečiek daných na priemetni a to sme urobili.

²⁾ Dôkaz nájde čitateľ v každej učebnici deskriptívnej geometrie.

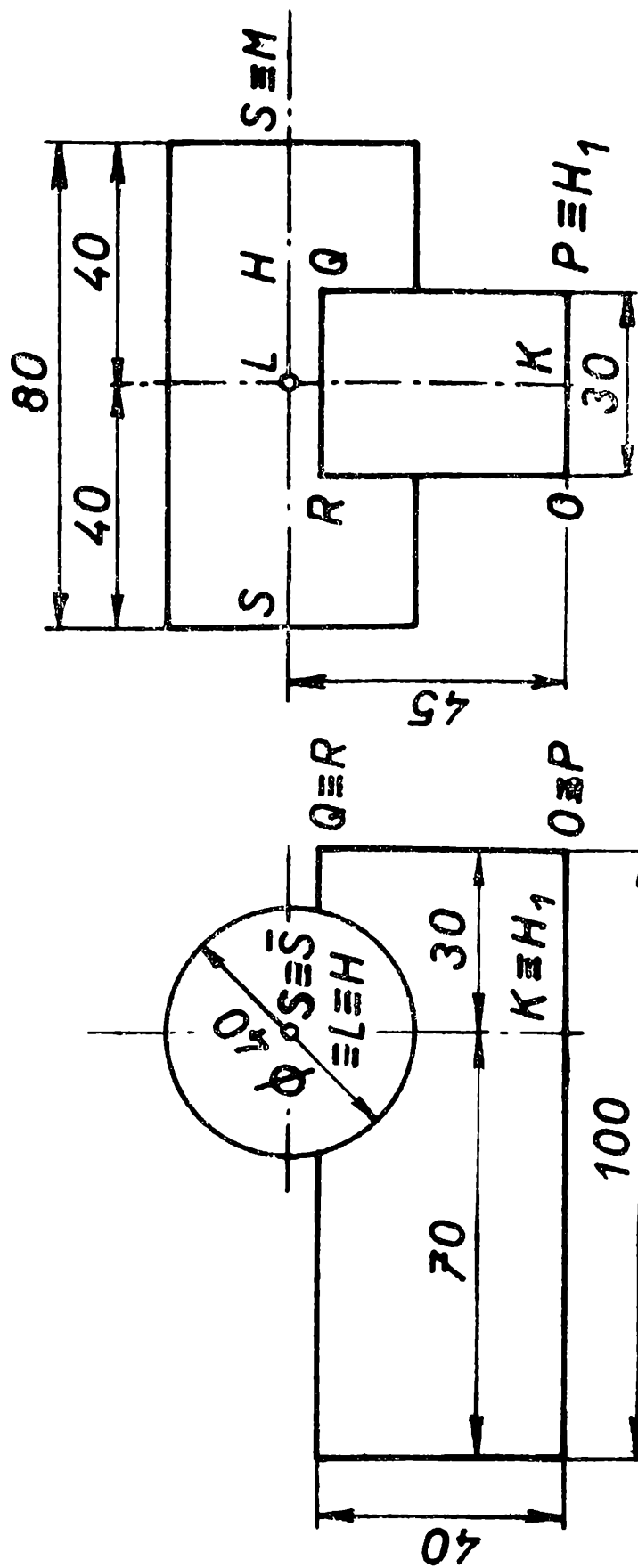


Obr. 2

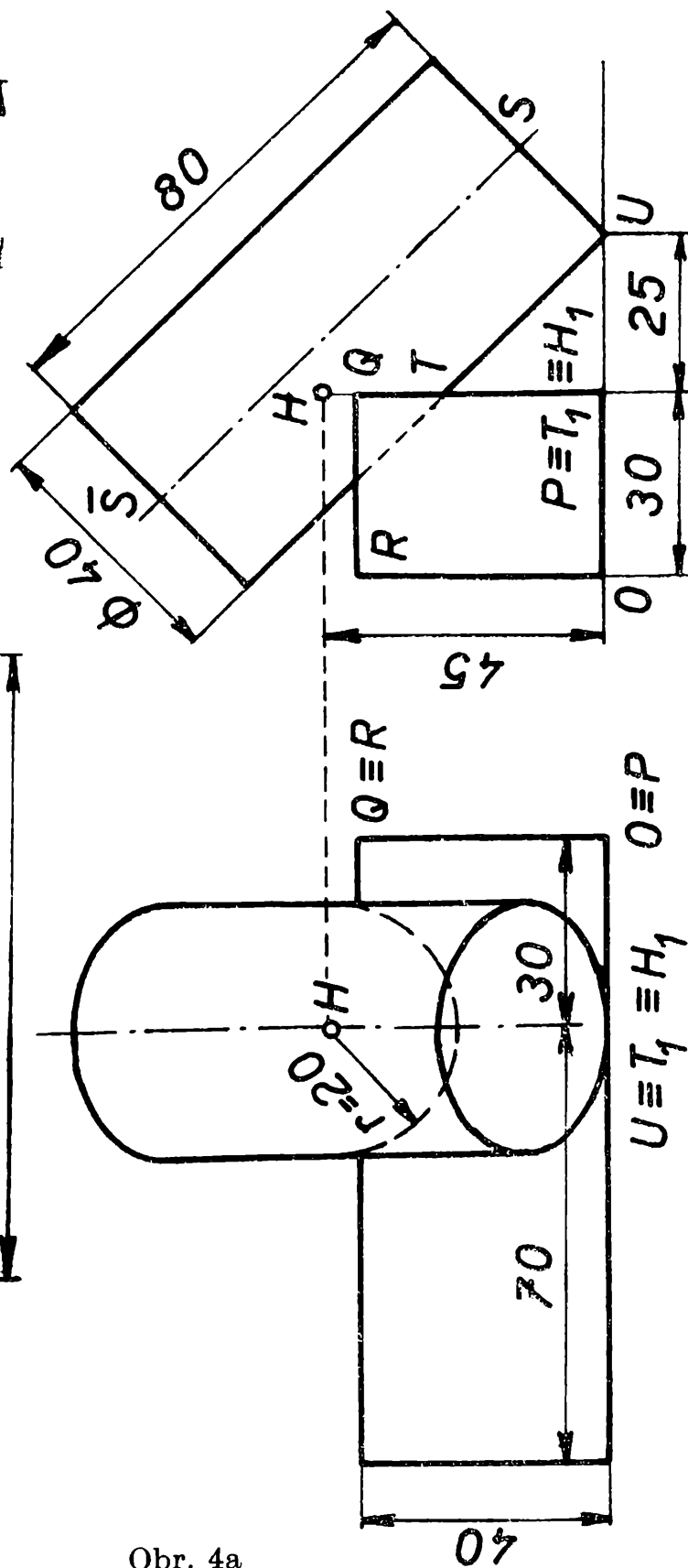
podobne ako na ďalších — označujeme priemety bez indexov, teda tak ako objekty zobrazované, sme zvolili dvojicu yz s jednotkovými úsečkami OY a OZ . Tieto úsečky nech sú združenými polomerami elipsy g (viď dôkaz vety V3). Jej osi $AB > CD$ zostrojíme niektorou zo známych konštrukcií. (Na obr. 2 sme použili konštrukciu Rytzovu). V priamke CD máme priemet tretej osi x a keď na ňu nanesieme úsečku OX ($\overline{OX} = \overline{OF}$, kde F je ohnisko elipsy g), máme aj na tejto osi jednotkovú úsečku OX [V4]. Orientácia súradnicových osí je na obr. 2 vyznačená šípkami.

Ak sú jednotkové úsečky OX , OY , OZ príliš veľké, rozdelíme je na n rovnakých dielikov. Na obr. 2 sme zvolili úsečky tretinové $j_x = \overline{OX} : 3$, $j_y = \overline{OY} : 3$, $j_z = \overline{OZ} : 3$ a zobrazili sme bod $M/4; -1; 3$.

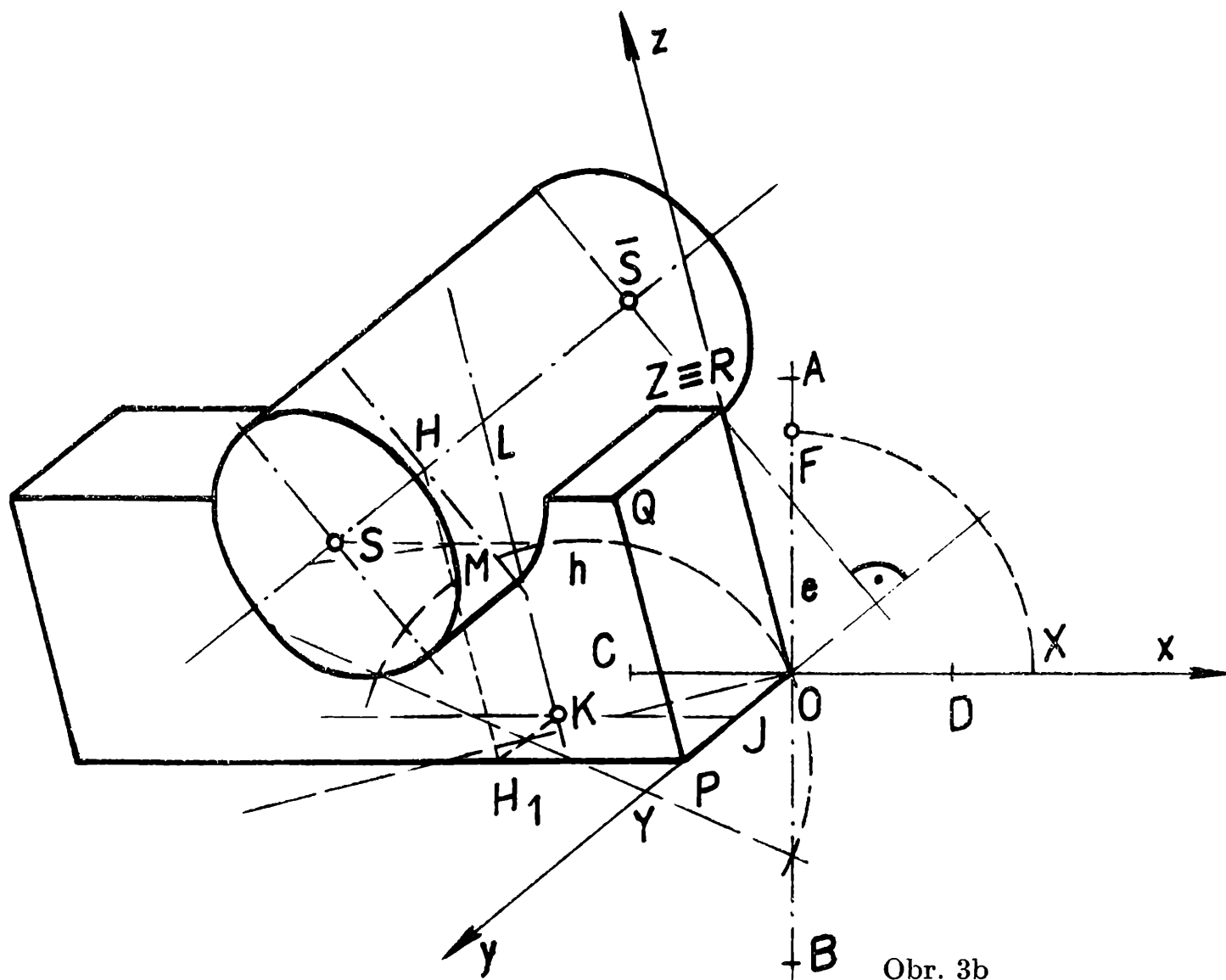
Mohla by sa vyskytnúť požiadavka zostrojiť priemet takej jednotkovej úsečky j , ktorá by mala v skutočnosti danú dĺžku (napr. 1 cm). Pretože priamka AB je rovnobežná s priemetňou, ktorú budeme dôsledne označovať písmenom δ , môžeme rovinu $\mu \equiv yz$ otočiť okolo priamky AB do polohy rovnobežnej s priemetňou δ . Elipsa g , ktorá je priemetom kružnice, prejde otočením do kružnice g_0 , ktorá má priemer AB . Bod Y sa otočí do bodu Y_0 na g_0 $YY_0 \perp AB$. Na polpriamku $\overline{OY_0} \equiv y_0$ nanesieme úsečku $OY'_0 = j$ a keď zostrojíme na y bod Y' tak, aby $Y'_0Y' \perp AB$,



Obr. 3a



Obr. 4a



Obr. 3b

máme v úsečke OY' priemet úsečky, ktorá má v skutočnosti veľkosť j . Priemet úsečky j na osi x , resp. z , tj. j_x , resp. j_z , môžeme potom zostrojiť pomocou rovnobežnosti $Y'X' \parallel YX$ a $Y'Z' \parallel YZ$.

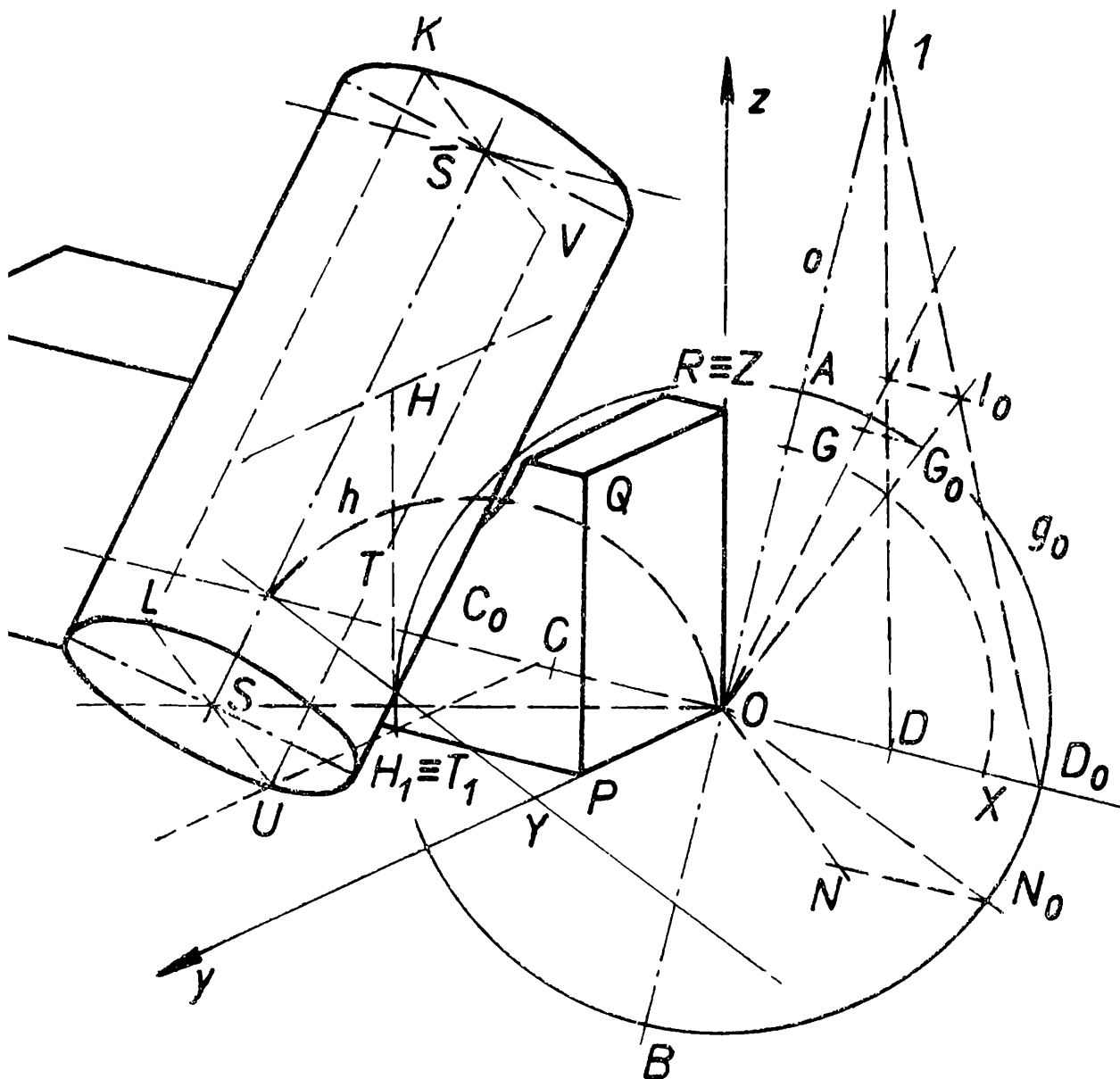
Konštrukciu môžeme zjednodušiť, Úsečka OB má takú veľkosť ako úsečka OY v skutočnosti [V2]. Ak teda na úsečku OB nanesieme úsečku $\overline{OY''} = j$, je $Y'Y'' \parallel YB$.

Obrátene môžeme ľahko zistiť, aká dlhá je jednotková úsečka v skutočnosti, keď je známy jej priemet.

Na základe toho by sme mohli skonštruovať názorný obraz priestorového objektu, keby sme zostrojili priemety jeho význačných bodov z ich súradníc, podobne ako sme zostrojili priemet bodu M na obr. 2.

Na ďalšom príklade ukážeme, ako zostrojíme v tomto voľnom premietaní názorný obraz predmetu z jeho kótovaného obrazu na technickom výkrese. Ide o zobrazenie zostavy kvádra a rotačného valca podľa obr. 3a⁴⁾.

⁴⁾ Na technických výkresoch nepoužívame označenie písmenami. V tomto prípade sme urobili výnimku za tým účelom, aby sme sa mohli stručne vyjadrovať.



Obr. 4b

Názorný obraz 3b začneme kresliť tak, že na výkrese zvolíme dve polpriamky y a z vychádzajúce zo spoločného začiatku O (polpriamku z zvislú) a nanesieme na ne ľubovoľné úsečky OY a OZ . Z dôvodov, ktoré vysvitnú z ďalšieho, budeme predpokladať, že úsečky OY a OZ majú v skutočnosti dĺžku $4j$ a že sú združenými polomermi elipsy g , ktorá má osi $AB > CD$. Tieto osi zostrojíme, ale elipsu g nekreslíme. V priamke CD máme potom priemet tretej osi x a keď na ňu nanesieme úsečku OX dĺžky e , kde e je lineárna excentricita elipsy g , má aj úsečka OX v skutočnosti dĺžku $4j$ [V4]. Rozdelením úsečiek OX , OY a OZ na štyri zhodné dieliky, dostaneme priemety j_x , j_y a j_z jednotkovej úsečky j .

Teraz už ľahko nakreslíme priemet kvádra. Jednou jeho stenou je obdĺžnik $OPQR$ v rovine $\mu \equiv yz$. Jeho priemetom je rovnobežník, ktorého strana $\overline{OR} \equiv \overline{OZ} = \overline{PQ}$ a strana $\overline{OP} = \overline{RQ} = 3j_y^5$). Posunutím tohto rovnobežníka v smere x o dĺžku $10j_x$ podľa obr. dostaneme priemet

protiľahlej steny a dokončenie obrazu kvádra je potom už evidentné.

Ostáva ešte zobraziť valec a v kvádri kruhový výrez, v ktorom valec leží. Os valca zostrojíme pomocou bodu L , ktorý je stredom valca. Bod L je na obr. 3b vo výške $4,5j_z$ nad bodom K , ktorého priemet zostrojíme tak, že stredom J hrany OP vedieme polpriamku smeru x a nanesieme na ňu úsečku $\overline{JK} = 3j_x$ (podľa obr.).

Bodom L nakreslíme priamku smeru y a na nej úsečky $\overline{LS} = \overline{L\bar{S}} = 4j_y$ a úsečku $\overline{LH} = 1,5j_y$. (Alebo bod H zostrojíme pomocou bodu H_1 , ako sme to urobili na obr. 3b).

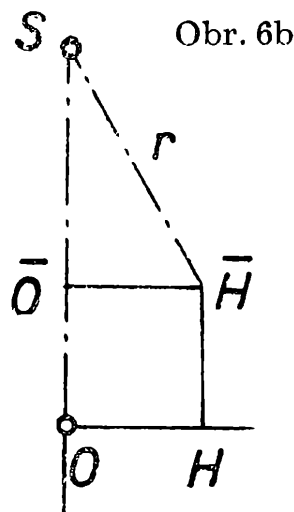
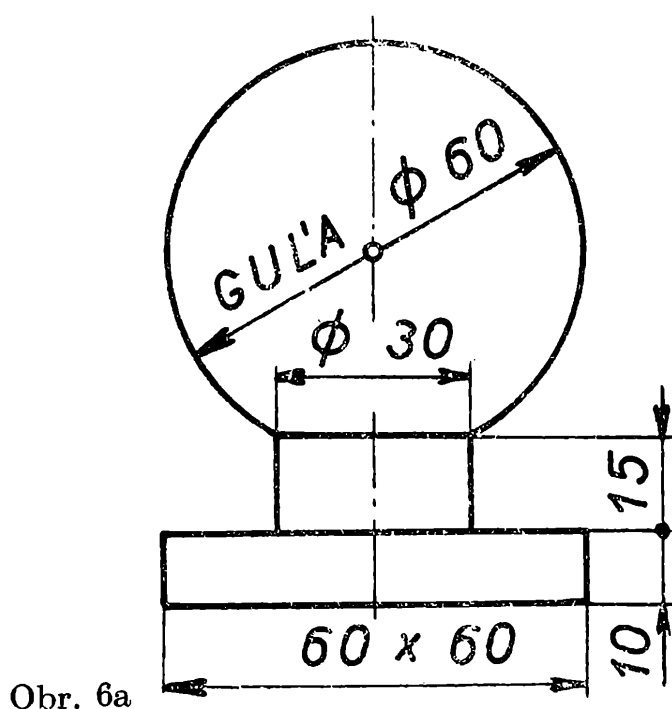
Podstava valca, ktorá má stred S , sa zobrazí do elipsy, ktorej hlavná os je kolmá na os y a pretože má dĺžku $4j$, je zhodná s úsečkou OA , resp. OB [V2]. Vedľajšiu os zostrojíme rozdielovou konštrukciou pomocou ďalšieho bodu M na obvode podstavy. Na obr. 3b sme zostrojili bod M tak, aby $SM \parallel x$ a $\overline{SM} = 2j_x$. Elipsu takto zostrojenú potom posunieme v smere y tak, aby jej stred splynul najprv s bodom H a potom s bodom $\bar{S}$. Časť elipsy so stredom H zobrazuje na kvádri hranu h kruhového výrezu, v ktorom je uložený valec. Praktický význam má, pravda, len malá časť tejto elipsy, lebo zobrazujeme objekty hmotné a na názornom obraze kreslíme obyčajne len priemety čiar, ktoré sú viditeľné.

Na obr. 4ab sme nakreslili tú istú zostavu ako na obr. 3 s pozmenenou polohou valca. Kváder leží na rovine $\pi \equiv xy$ práve tak ako na obr. 3, ale valec sa opiera v bode U o π a v bode T o kváder. Kváder zobrazieme ako na obr. 3 a na ňom nakreslíme kruhový výrez, v ktorom bol pôvodne uložený valec. Kruhovú hranu h tohto výrezu leží na rovine PQH a má stred H (Bod H je ten istý ako na obr. 3). Jej najnižší bod, koncový bod zvislého polomeru, to je bod T , v ktorom sa valec opiera o kváder. Keď zostrojíme bod U tak, že na polpriamku smeru y vychádzajúcu z bodu H_1 (ktorý je ten istý ako na obr. 3) nanesieme úsečku $\overline{H_1U} = 2,5j_y$ a bod U spojíme s bodom T , máme priamku, na ktorej leží jedna strana valca. Priemet UV tejto strany, ktorá má v skutočnosti dĺžku $8j$, zostrojíme takto: Priamka $UT \parallel \mu \equiv yz$, lebo pretína priamky H_1U a H_1T , ktoré obe sú rovnobežné s rovinou μ . Vedme teda v rovine μ priamku $OI \parallel UT$ a rovinu μ otočme okolo priamky $o \equiv AB \parallel \delta$ do polohy rovnobežnej s priemetňou δ . Elipsa g , ktorá má osi $AB > CD$, prejde otočením do kružnice g_0 opísanej nad úsečkou AB ako nad priemerom. Os CD prejde do priemeru C_0D_0 a polpriamka OI do polpriamky OI_0 . Polpriamka OI_0 pretne kružnicu g_0 v bode G_0 a teda $\overline{OG_0} = 4j$. Keď zostrojíme na polpriamke OI bod G ($GG_0 \perp o$), má priemet strany valca dĺžku $2 \cdot \overline{OG}$. Ide tu zrejme o pravouhlú afinitu, ktorá má os o a dvojicu združených bodov D, D_0 a ktorú budeme označovať symbolom (oDD_0) .

⁵⁾ Úsečka j_y (a podobne aj úsečky j_x a j_z) má v skutočnosti dĺžku j a tá zodpovedá úsečke 10 mm na obr. 3a. Viď poznámku 4 na konci článku.

z elipsy, ktorej hlavná os AB je na výkrese vodorovná a má práve tak ako vedľajšia os CD ľubovoľnú dĺžku. Je to obraz kružnice g , ktorá leží v rovine $\pi \equiv xy$ a má stred O . Najprv zase zostrojíme obraz pravo-uhlej súradnicovej sústavy $O(x, y, z)$ s príslušnými jednotkovými úsečkami (obr. 5). Jednu z osí x, y môžeme zvoliť. Na obraze 5 sme zvolili os x . Priemet druhej osi y zostrojíme otočením roviny π do polohy rovnobežnej s priemetňou δ okolo osi $o \equiv AB \parallel \delta$ [V2]. Kružnica g sa otočí do kružnice g_o , ktorá má priemer AB . Bod C prejde do bodu C_o a bod D do bodu D_o na kružnici g_o a pritom $CC_o \perp o$ a $DD_o \perp o$ ⁶⁾.

Priamka $d \parallel o$ idúca bodom D sa otočí do priamky d_o idúcej bodom D_o . Otočenú os x_o zostrojíme pomocou bodu $L \equiv x \cdot d$. Otočená os $y_o \perp x_o$ a jej priemet y zostrojíme pomocou bodu $M \equiv y \cdot d$.



Keď na osiach x a y zostrojíme body X a Y tak, aby ležali zároveň na kružnici g a úsečku OA pokladáme za jednotkovú úsečku j , zostrojili sme priemety $j_x = \overline{OX}$ a $j_y = \overline{OY}$ jednotkovej úsečky na osiach x a y . Jednotková úsečka $j_z = \overline{OZ}$ na priemete osi $z \equiv CD$ má dĺžku lineárnej excentricity elipsy, z ktorej sme vyšli [4].

Ak sú tieto jednotkové úsečky príliš veľké, môžeme ich zmenšiť v určitom pomere, tak ako sme to urobili na obr. 2.

Mysleme si teraz, že sme na obr. 6b zobrazili pri tom istom označovaní opísaným spôsobom osový systém $O(x, y, z)$ a že máme zostrojiť názorný

⁶⁾ Body C_o a D_o by sme mohli aj zameniť.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 49, 1971-72

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. OTA S E T Z E R

nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR: STANISLAV HORÁK

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

OBSAH

Úvodníky

Drábek Karel: Lidice a Ležáky stále varují	433
Chudý Jaroslav: K volbám	97
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	385
Sedláček Jiří: Tři malé rozhovory	193
Setzer Ota: Do jubilejního ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních	1
Schwarz Štefan: Zamyslenie nad 50. ročníkom Rozhledov	241
Skotnický Jozef: Náš čitateľ spomína	337

Matematika

Baník Ivan: Ako náhoda pomáha určovať obsah rovinných útvaroch	297
Daneš Josef, Danešová Jana: O Kakeyově úloze	246, 299
Geryk Milan: Iterační hledání kořene a míjima funkce	149, 203
Horák Stanislav st.: Nagelova věta	442
Věta o tečnovém čtyřúhelníku	407
Hradecký František: Geometrická místa	253, 348
Hroník Jaromír: Zajímavá „dualita“	195
Iláš Štefan: O pojme vzdialenosť	99
Kuřina František: Množiny přímek	8
Přímkové kružnice	294, 343
Liška Jan: O řešení jednoho typu soustavy rovnic	49
Morávek Jaroslav: O jedné rekurentní metodě pro řešení extrémálních úloh	53
Moravusová Eliška, Říha Ota: O jednom užítí matic při řízení provozu počítačem	3
Myslík Jiří: Některé aplikace Booleovy algebry	145
Odvárko Oldřich: O základech Booleovy algebry	104
Několik modelů Booleovy algebry	250
Řešení booleovských rovnic	333
Ještě jednou o booleovských rovnicích	391
Peřina Alois: Apolloniiova kružnice	438
Říha Ota: Sčítání matic a násobení matic reálným číslem	198
Smržová Anna: Dynamické programování	396
Šedivý Jaroslav: Grafy s uzly a hranami	289
Troják Jan: Stromy a lesy	388
Několik vět o stromech	435
Volf Ivo, Volfová Marta: K čemu mi slouží znalost druhých mocnin u některých čísel?	403

Fyzika

Baník Ivan: Další paradox	416
Baník Stanislav: Niektoré problémy o elektrickom prúde	107, 286
Bryknař Zdeněk: Luminiscence	23
Ferko Pavol: Nerelativistické pohyby elektronu	158
Golab František: Kontaktní napětí a jeho vznik	411
Horák Zdeněk, Štěpánek Antonín: Translačně rotační kyvadlo	260
Houdek Oldřich: O rychlostech molekul	213
Kružík Miroslav: Historický vztah mezi fyzikou a technikou	86, 114, 168
Marčok Milan: Existují trachyóny?	310
Scholtz Elemír: Bohrov model atomu	18
Šindelář Václav: Sedm základních jednotek SI	28
Z historie mezinárodní soustavy jednotek SI	188
Doplňkové jednotky SI	167
Odvozené jednotky SI se samostatným názvem	219
Odvozené jednotky SI	220
Odvozené jednotky SI třetí skupiny	264
Vedlejší jednotky	312
Dočasné vedlejší jednotky	368
Vedlejší jednotky mezinárodně nedoporučované	419
Tešar Jan: Rozumíte Archimedovu zákonu?	357
Wohlmuthová Anežka: Termionukleární reakce — zdroj energie	71

Deskriptivní geometrie

Drs Ladislav: Automatické kreslení	156, 308, 355, 409
Filip Jozef: Voľné pravoúhlé premietanie	444
Harant František: Jarolímkovy konstrukce	01

Astronomie

Grün Marcel: Cíl výzkumu — Mars	119
Vítr vane ze Slunce	369
Kotyk Josef: Z dějin astrologie	234, 277
Široká Miroslava, Široký Jaromír: Povrchové teploty hvězd	30
Jsou pulsary neutronové hvězdy?	76
Česká jména na mapách Měsíce	122
Fyzikální znaky hvězd	174
Pulzující proměnné hvězdy	272
Expandující proměnné hvězdy	314
Co jsou symbiotické hvězdy?	367
Otevřené hvězdokupy	429
Kulové hvězdokupy	455

Naše soutěž

Soutěžní příklady a řešení úloh loňské soutěže	35, 79, 125, 177, 221, 318, 376, 423
--	--------------------------------------

Matematická olympiáda

XXI. ročník MO	37
XXII. ročník MO	460
Horák Stanislav: Předmět snažení 116 olympioniků	84
Setzer Ota: XIII. MMO očima účastníků	81
MMO na Slovensku	229
Řešení úloh XIII. MMO	133

Fyzikální olympiáda

Košťál Rostislav: Třetí kolo kat. A XII. ročníku FO	179
Pátá MFO v Sofii	181
XIV. ročník FO	458

Různé

Bartuška Pavel: O objevu rentgenových paprsků	186
M. V. Lomonosov — osobnost ruské vědy	183
Bednařík Milan: O muži, který objevil Velké nic	472
Bílek Josef: Zapomenutý astronom František Doutlík	44
Drábek Karel: 225. výročí narozenin Gasparda Monge	86
F. X. z H.: Vzpomínky letce — konstruktéra	89
Horský Jan: Profesor V. A. Fok	42
Chudý Jaroslav: Volební příklad	281
Jelínek Miloš: 110 let Jednoty čs. matematiků a fyziků	336
Kolomý Rudolf: Uplynulo 75 let od objevu přirozené radioaktivity	275
Kotyk Josef: Rozhledy pomáhají škole	92
Předmět matematiky	141
Z dějin astrologie	234, 277
Vývoj telekomunikací	428
Z dějin telegrafie	467
Maleček Kamil: První způsoby měření Země	323
Mikulčák Jiří: Nicolas Bourbaki	231
Sedláček Jiří: Problém čtyř barev zůstává nerozřešen	430
Široká Miroslava: Vzpomínka na prof. dr. A. Seydlera	326

Matematické a fyzikální zábavy

Kotyk Josef: Zmatlíková poučka	284
Říman Evžen: Záhadné telefonní číslo	283
Různé zajímavosti	48, 328, 383
Ze zahraničních časopisů	45, 238, 334, 381
Nejmladším čtenářům	96, 144, 190, 285
Recenze	48, 183, 288, 332, 431, 476

zistíme veľkosť úsečky OS . Úsečka OS sa skladá z dvoch častí: z úsečky $\overline{OO}$, ktorá má dĺžku $1,5j$ a z odvesny $\overline{OS}$ pravouhlého trojuholníka $\overline{HOS}$, ktorého prepona má dĺžku $3j$ (obr. 6c; na obr. 6b je úsečka $\overline{OH}$ hlavnou polosou elipsy h). Priemet úsečky OS sa zmenší v pomere $j : j_z$. Ak teda na polpriamke OB zostrojíme bod M , aby $\overline{OM} = \overline{OS}$ a urobíme $MS \parallel BZ$, dostaneme na osi z priemet bodu S . Priemetom gule je kruh stredom S a polomeru $3j$.

Poznámky: 3. Pôdorys a nárys na obr. 3, 4 a 6 sme kreslili za tým účelom, aby sme upresnili predstavu zostavy, ktorú máme zobrazit a aby sme mohli o nej stručne hovoriť. Obyčajne však kreslíme názorný obraz priamo z predstavy bez akýchkoľvek pomocných priemetov.

4. Na technických strojných výkresoch sa udávajú kóty v mm. Tak sme to aj urobili na obr. 3a, 4a a 6a. Pri kreslení názorných obrazov 3b, 4b a 6b sme však z praktických dôvodov zvolili jednotkovú úsečku j tak, aby zodpovedala v skutočnosti dĺžke 1 cm.

5. V pravouhlom premietaní sa guľa zobrazí vždy do kruhu. V inom premietaní tomu tak obyčajne nebýva. Z tohto dôvodu sme zvolili práve pravouhlé premietanie.

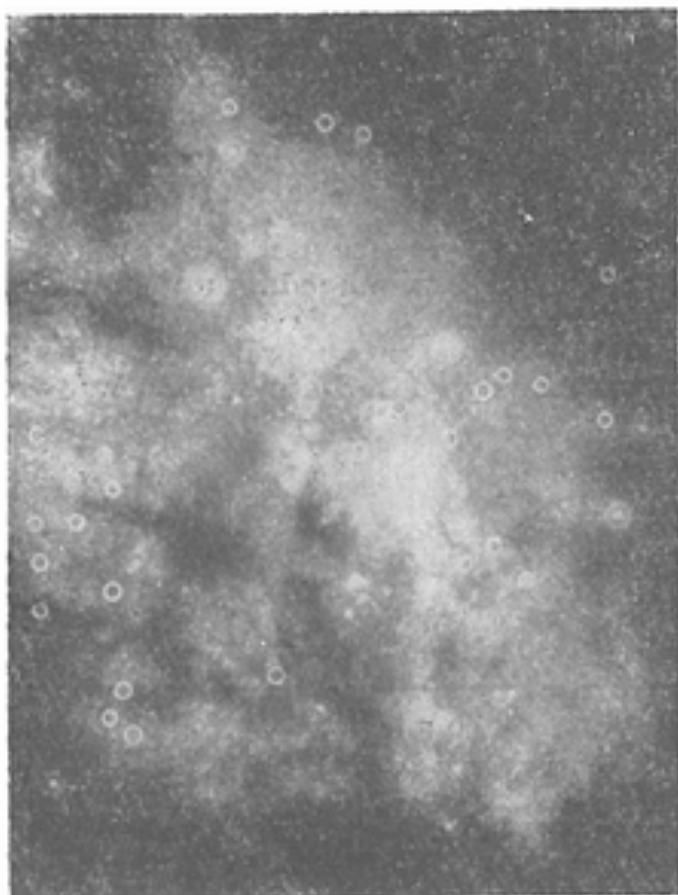
ASTRONOMIE

Kulové hvězdokupy

RNDR. JAROMÍR ŠIROKÝ RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Na severní obloze můžeme uvidět prostým okem jedinou kulovou hvězdokupu, a to M 13 v souhvězdí Herkula. Její celková zdánlivá hvězdná velikost je $5,8^m$, je tedy na hranici viditelnosti pouhým okem a za tmavé bezměsíční noci ji najdeme jako mlhavý obláček na spojnici hvězd η a ξ Herculis. Úhlový průměr hvězdokupy M 13 je $4,8'$, její vzdálenost se odhaduje na 8 kiloparseků a skutečný průměr na 11 parseků. Na jižní obloze jsou dvě poměrně jasné kulové hvězdokupy: ω Centauri a 47 Tucanae; celkové zdánlivé hvězdné velikosti obou hvězdokup jsou $3,7^m$. Úhlový průměr první je $23'$, druhé $30'$, takže zdánlivý průměr 47 Tuc se rovná úhlovému průměru Měsíce v úplňku.

Kulové hvězdokupy jsou tvořeny statisíci až milióny hvězd, které se výrazně shlukují do tvaru koule (fotografie M 13 je otištěna na obr. 248 v učebnici Fyziky pro 3. a 4. roč. gymnasií) — odtud jejich název. V Galaxii známe v současné době 119 kulových hvězdokup. Na obloze jsou tyto útvary rozloženy velmi nestejně, nejvíce jich je v souhvězdí Střelce (obr. 1), tedy ve směru ke středu Galaxie. Z prostorového



Obr. 1. Kulové hvězdokupy v souhvězdí Střelce. (Protože jsou ve velké vzdálenosti, jeví se tyto kulové hvězdokupy pouze jako body, a proto je jejich poloha vyznačena dodatečně nakreslenými bílými kroužky.)

rozložení kulových hvězdokup je zřejmé, že tvoří v Galaxii kulový subsystém: jsou rozloženy v kouli o průměru asi 40 kiloparseků a výrazně se koncentrují ke středu Galaxie. Skutečnost, že je v okolí galaktické roviny prakticky nepozorujeme, je způsobena tím, že jde o útvary velmi vzdálené a jejich světlo je zcela absorbováno v hustých mračnách mezihvězdné látky, koncentrované k rovině Galaxie. Celkové hmotnosti kulových hvězdokup se odhadují na statisíce až milióny hmotností Slunce. Hmotnost hvězdokupy M 3 v souhvězdí Střelce je kolem $3 \cdot 10^5$ hmotností Slunce, největší dosud známou hmotnost má hvězdokupa M 22 v souhvězdí Střelce: $7 \cdot 10^6$ hmotností Slunce.

Protože jsou kulové hvězdokupy tvořeny velkým počtem hvězd, jsou velmi jasné (střední absolutní hvězdná velikost kulových hvězdokup je $-8,1^m$) a můžeme je pozorovat i ve velkých vzdálenostech a proto se také odhad celkového počtu těchto útvarů v Galaxii příliš neliší od počtu pozorovaných kulových hvězdokup. Z výzkumů různých badatelů plyne, že celkový počet kulových hvězdokup v naší hvězdné soustavě můžeme odhadnout na 500, tedy pouze čtyřikrát více, než je počet pozorovaných hvězdokup. Kulové hvězdokupy se pozorují i v sousedních galaxiích, ve velkém počtu např. ve spirální galaxii M 31 v souhvězdí Andromedy a také ve Velkém a v Malém mračnu Magellanově.

V mnoha kulových hvězdokupách byly pozorovány proměnné hvězdy, a to převážně typu RR Lyrae, což umožňuje stanovit vzdálenosti těchto hvězdokup; víme totiž, že absolutní hvězdné velikosti proměnných hvězd typu RR Lyrae jsou kolem 0^m a z rozdílu zdánlivé a absolutní hvězdné velikosti pulsujících proměnných hvězd můžeme stanovit vzdálenost hvězdokupy, jejímiž členy tyto proměnné jsou. Nejbližší kulová hvězdokupa je M 4 v souhvězdí Štíra; je od nás vzdálena 2600 parseků.

Jak ukázaly výzkumy v minulých letech, patří kulové hvězdokupy k nejstarším útvarům v naší Galaxii — jejich stáří se odhaduje na 50 miliard roků. O stáří těchto útvarů svědčí nejen to, že tvoří kulový subsystém, ale také zvláštní tvar Hertzsprungova-Russellova diagramu, sestaveného pro hvězdy z těchto hvězdokup, který se podstatně liší od normálního tvaru tohoto diagramu.

Skutečné průměry kulových hvězdokup jsou v rozmezí (15 až 120) parseků, hustota hvězd je v okrajových oblastech asi 10krát, v centru asi 10 000krát větší než v okolí Slunce. Kdyby naše Slunce bylo v centrální oblasti průměrné kulové hvězdokupy, pak bychom na noční obloze viděli pouhým okem asi 50 000 hvězd (místo 3000, které pozorujeme nyní), přičemž kolem 50 z nich by zářilo jasněji než Síríus, nejjasnější hvězda naší oblohy. Celkové osvětlení způsobené hvězdnou oblohou by odpovídalo osvětlení, které působí Měsíc v první anebo v poslední čtvrti.

Opravy

V článku Ing. J. Hroníka, Zajímavá „dualita“ má poslední odstavec znít (str. 198): Závěrem třeba připomenout, že v této úvaze se nedá mluvit o dualitě v pravém slova smyslu, neboť v typicky duálních úlohách v rovině odpovídá bodu přímka a přímce bod.

R.

V obr. 1 na str. 439 má být s || XB. Trapný omyl se stal při přerýsovávání.



MO+FO

XXII. ročník matematické olympiády

Ve školním roce 1972—73 proběhne již XXII. ročník naší MO. Po organizační stránce se tento ročník nijak neliší od ročníku předcházejícího. Mění se však poněkud termíny odevzdání žákovských řešení učiteli žáka, popř. referentu MO na škole. Uvedeme přehlednou tabulku:

	Kategorie			Z
	A	B	C	
Odevzdání řešení přípravných úloh I. kola žáky	15. listopadu 1972	15. listopadu 1972	15. listopadu 1972	15. listopadu 1972
Odevzdání řešení soutěžních úloh I. kola	15. ledna 1973	15. února 1973	15. února 1973	31. ledna 1973
II. kolo	první týden v březnu 1973	první týden v dubnu 1973	první týden v dubnu 1973	první týden v březnu 1973
III. kolo	12.—14. dubna 1973 Bratislava	—	—	Podle rozhodnutí příslušného KV MO

Přípravné úlohy I. kola

1. Kategória A

1. Určíte všechny přirozené čísla x , pro které je výraz $x^4 - 23x^2 + 42$ dělitelný číslem 83.

2. Určete všechna reálná čísla x , která splňují rovnici

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] + \left[\frac{4x+1}{6} \right] = \frac{5x-4}{3},$$

přičemž symbol $[a]$ znamená celou část reálného čísla a , což jest celé číslo, pro které platí

$$[a] \leq a < [a] + 1$$

3. Ak platí v trojúhelníku ABC vztah $\alpha = 2\beta$, potom platí $a^2 = b^2 + bc$. Dokážte a zjistěte, či platí aj obrácená veta.

4. Na průměru MN kružnice $k = (S; r)$ jsou dány body $A \neq S, B \neq S$, které leží na opačných polopřímkách vyřatých na MN bodem S . Na kružnici k určete všechny body X takové, aby osa úhlu AXB procházela bodem S .

2. Kategorie B

1. Tři konečné množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ mají po řadě n_1, n_2, n_3 prvků; množina $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3$ má s prvků.

Dokažte: a) Je-li $n_1 + n_2 + n_3 - 2s + 1$, má průnik všech tří množin alespoň jeden prvek.

b) Má-li průnik všech tří množin alespoň jeden prvek, je $n_1 + n_2 + n_3 \geq s + 2$. Ukažte dále, že tato podmínka není postačující pro to, aby tři množiny uvedených vlastností měly neprázdný průnik.

2. Je daná funkcia

$$V(x) = \frac{(p+4)x^2 + 4x + 1}{x^2 - 4x + 2p}$$

reálnej premennej x . Nájděte všetky celé čísla p , pre ktoré funkcia $V_p(x)$ nadobúda každú z hodnot $-2, -1, 0$.

3. Najdlhšou a najkratšou stranou dotýčnicového lichobežníka sú jeho základne. Dokážte!

4. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body B', C' jsou po řadě středy hran BD, CD . Označme R bod polopřímky opačné k polopřímce AB , pro který platí $AR = n \cdot AB$, kde n je přirozené číslo. Dále označme A' průsečík hrany AD s rovinou $B'C'R$. Vyjádřete objem čtyřstěnu $A'B'C'D$ pomocí objemu čtyřstěnu $ABCD$ a pomocí čísla n .

3. Kategorie C

1. a) Sestrojte graf funkce

$$y = [x + 2] + [2x - 1]$$

b) Určete všechna řešení rovnice

$$[x + 2] + [2x - 1] = [x]$$

Přitom symbol $[a]$ značí „celou část z čísla a “, tj. takové celé číslo b , pro které platí $b \leq a < b + 1$.

2. Určite všetky také kvadratické funkcie $f(x)$, ktoré pre všetky reálne čísla x splňujú podmienku

$$f(2x + 1) = 4f(-x).$$

3. a) Zjistěte kolikrát připadl, resp. připadne v letech 1601 až 2000 Nový rok na jednotlivé dny týdne.

b) Najděte stejné údaje pro léta 1801–2200. (Předpokládáme, že nedojde k reformě kalendáře.)

4. Ak pre dĺžky strán a uhlopriečok konvexného štvoruholníka $ABCD$ platí

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

potom je tento štvoruholník rovnobežníkom. Dokážte!

Přípravné úlohy kategorie Z

1. Nejmenší přirozené číslo x , pro které je $1260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

a) 1470, b) 1260^2 , c) 7350.

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

2. Zdeněk a Jirka bydlí v domech A, B na dvou navzájem kolmých ulicích; domy A, B jsou do křižovatky K obou ulic po řadě vzdáleny 500 m a 400 m. V témže okamžiku vyjedou oba chlapci na kolech od svého bydliště po ulicích AK, BK směrem ke křižovatce, kterou projedou.

Zdeněk jede průměrnou rychlostí 4 m/s, Jirka průměrnou rychlostí 3 m/s.

Za kolik vteřin od startu bude jejich vzdušná vzdálenost nejmenší a kolik metrů to bude?

3. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 = (S; r_1)$ a $k_2 = (S; r_2)$, kde $r_1 < r_2$. Na kružnici k_1 zvolíme dva různé body A, P a sestrojíme přímku kolmou k AP procházející bodem P . Průsečíky této přímky s kružnicí k_2 označme B, C .

Vypočtete

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$

pomocí r_1 a r_2 .

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Ke každému bodu D kružnice opsané trojúhelníku ABC ($D \neq A, D \neq B$) sestrojíme bod E souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB a bod F souměrně sdružený s bodem C podle přímky AD .

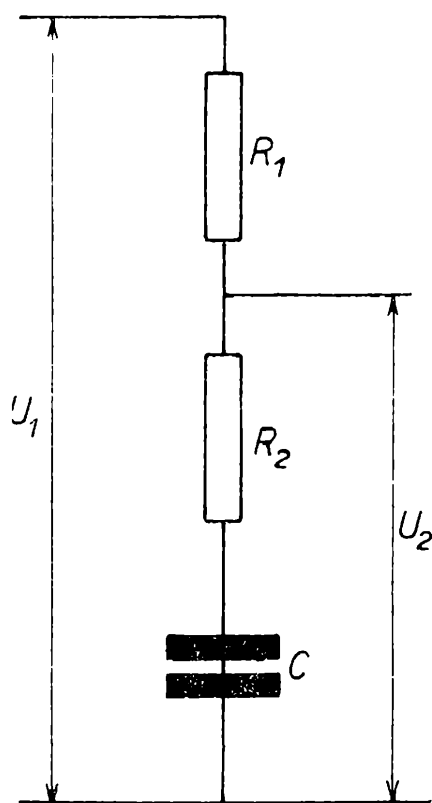
Vyšetřete geometrické místo a) bodů E ; b) bodů F

XIV. Ročník fyzikální olympiády

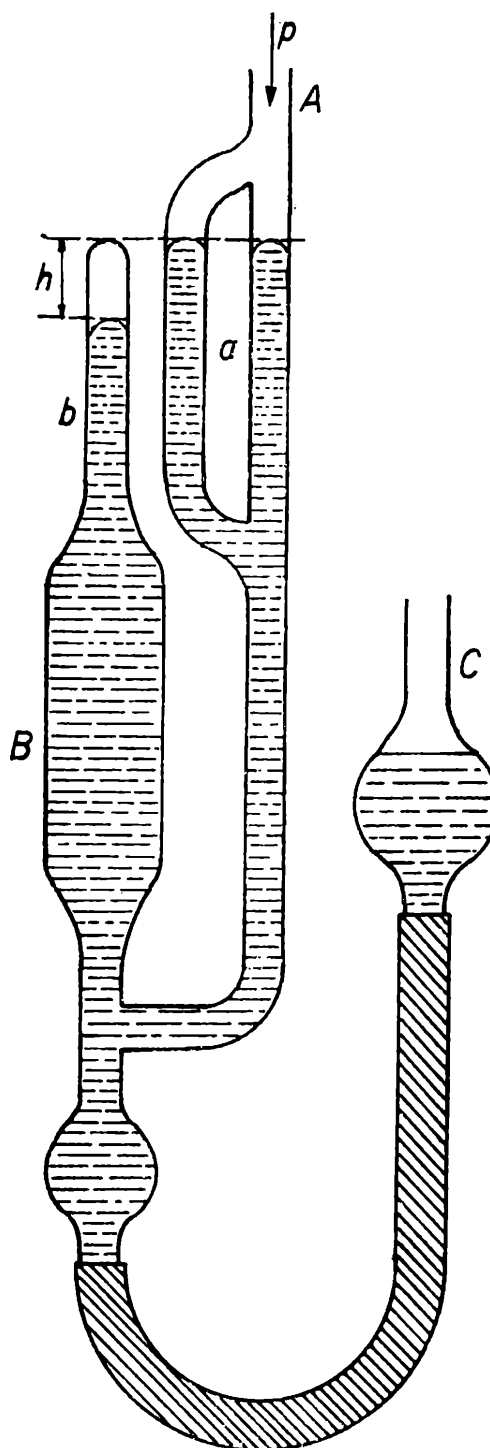
První tři soutěžní úlohy v jednotlivých kategoriích:

Kategorie A

1. V místnosti o výšce h je z podlahy svisle vzhůru vržen míč počáteční rychlostí v_1 . Při odrazu (od stropu a od podlahy) se rychlost v míče zmenší na $v' = kv$ ($k < 1$). Určete, kolikrát míč dosáhne stropu



Obr. 1



Obr. 2

Rozměry míče jsou vzhledem k výšce místnosti zanedbatelné. Odpor vzduchu neuvažujeme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 4,0 \text{ m}$, $v_1 = 20 \text{ m s}^{-1}$, $k = 0,90$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

2. Nádobu, ve které je uzavřen dokonalý plyn, dopadne z výšky h na dokonale nepružnou podložku, takže se okamžitě zastaví. Plyn v nádobě má molovou hmotnost M_m a hodnotu Poissonovy konstanty κ .

a) Stanovte změnu ΔT teploty plynu při dopadu nádoby.

b) Stanovte změnu Δv_k^2 (v_k je střední kvadratická rychlost molekul plynu).

Energii předanou stěnám nádoby a podložce při dopadu zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 510 \text{ m}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, a to pro dusík (N_2) a helium (He), považované za dokonalé plyny. Potřebné konstanty pro oba uvedené plyny vyhledejte v tabulkách.

3. Obr. 1 představuje kmitočtově závislý dělič napětí.

a) Stanovte obecně poměr $\beta = \frac{U_2}{U_1}$, jsou-li dány velikosti obou odporů a kapacita kondenzátoru.

b) Je-li dáno $R_1 = 80,0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20,0 \text{ k}\Omega$, stanovte kapacitu C kondenzátoru tak, aby při kmitočtu 400 Hz měl poměr β hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Pro dané hodnoty obou odporů a hodnotu kapacity kondenzátoru vypočítanou v části b) vypočítejte a graficky znázorněte veličinu β jako funkci kmitočtu f . Funkční hodnoty počítejte pro kmitočty $10, 20, 30, 50, 100, 200, 300, 400, 500, 1000, 2000, 3000, 5000, 10\,000 \text{ Hz}$.

Stupnici pro kmitočty volte logaritmickou.

Kategorie B

1. Rychlost proudění kouřových plynů na začátku komína kruhového průřezu je v_1 , teplota t_1 . Na konci komína mají plyny teplotu t_2 .

a) Určete rychlost v_2 proudění plynů na konci válcového komína.

b) Vnitřní poloměr komína na jeho začátku je r_1 , na konci r_2 ($r_2 < r_1$).

Určete poměr $k = \frac{r_2}{r_1}$ tak, aby rychlost proudění plynů na začátku a na konci komína byla stejná.

Předpokládáme, že tlak plynů je ve všech místech komína stejný. Plyny považujeme za dokonalé.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_1 = 10,0 \text{ m s}^{-1}$, $t_1 = 800^\circ\text{C}$, $t_2 = 300^\circ\text{C}$.

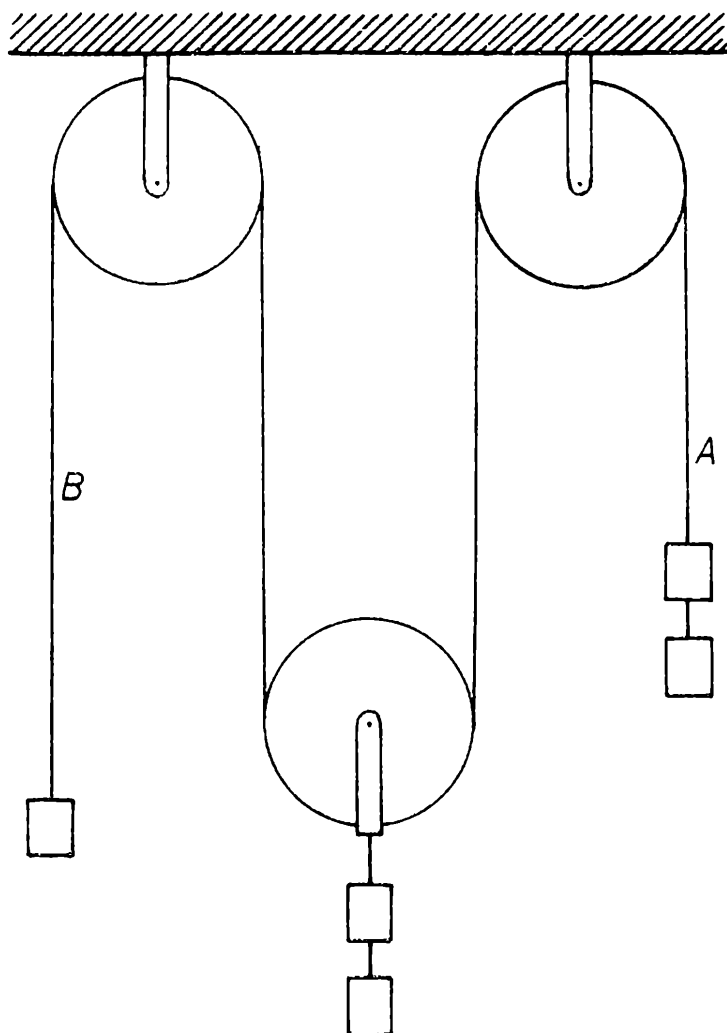
2. Kulička o poloměru r je v nejnižším bodě dutého kulového zrcadla. Vychýlíme ji z rovnovážné polohy a pustíme. Předpokládáme, že kulička při svém pohybu neklouže po povrchu zrcadla. Pro úhel φ spojnic středu kuličky se středem křivosti zrcadla v rovnovážné a krajní poloze kuličky platí $\sin \varphi \doteq \varphi$. Tření zanedbejte.

a) Dokažte, že kulička koná harmonický pohyb.

b) Stanovte poloměr křivosti R zrcadla, jestliže doba kmitu kuličky je T .

Moment setrvačnosti kuličky $J = \frac{2}{5} m r^2$.

3. Na obr. 2 je znázorněn přístroj, kterého se používá k měření malých tlaků (McLeodův vakuometr). K trubici A se připojí prostor, v němž je plyn o malém tlaku p .



Obr. 3

Změnou výšky zásobníku rtuti C lze dosáhnout toho, že hladina rtuti v přístroji klesne pod ústí trubice A do trubice B ; trubice B je pak vyplněna plynem o tlaku p . Zásobník C zdvihneme tak, aby hladina rtuti v porovnávací trubičce a byla v téže výšce jako konec měrné trubičky b . Rozdíl výšek hladin rtuti v trubičkách a, b je nyní h . Stanovte tlak plynu p , jestliže objem trubice B včetně trubičky b je V , vnitřní průměr trubičky b je d . Výsledný vztah upravte pro vyjádření tlaku v jednotkách N m^{-2} a v jednotkách torr.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $V = 130 \text{ cm}^3$, $h = 23 \text{ mm}$, $d = 1,1 \text{ mm}$.

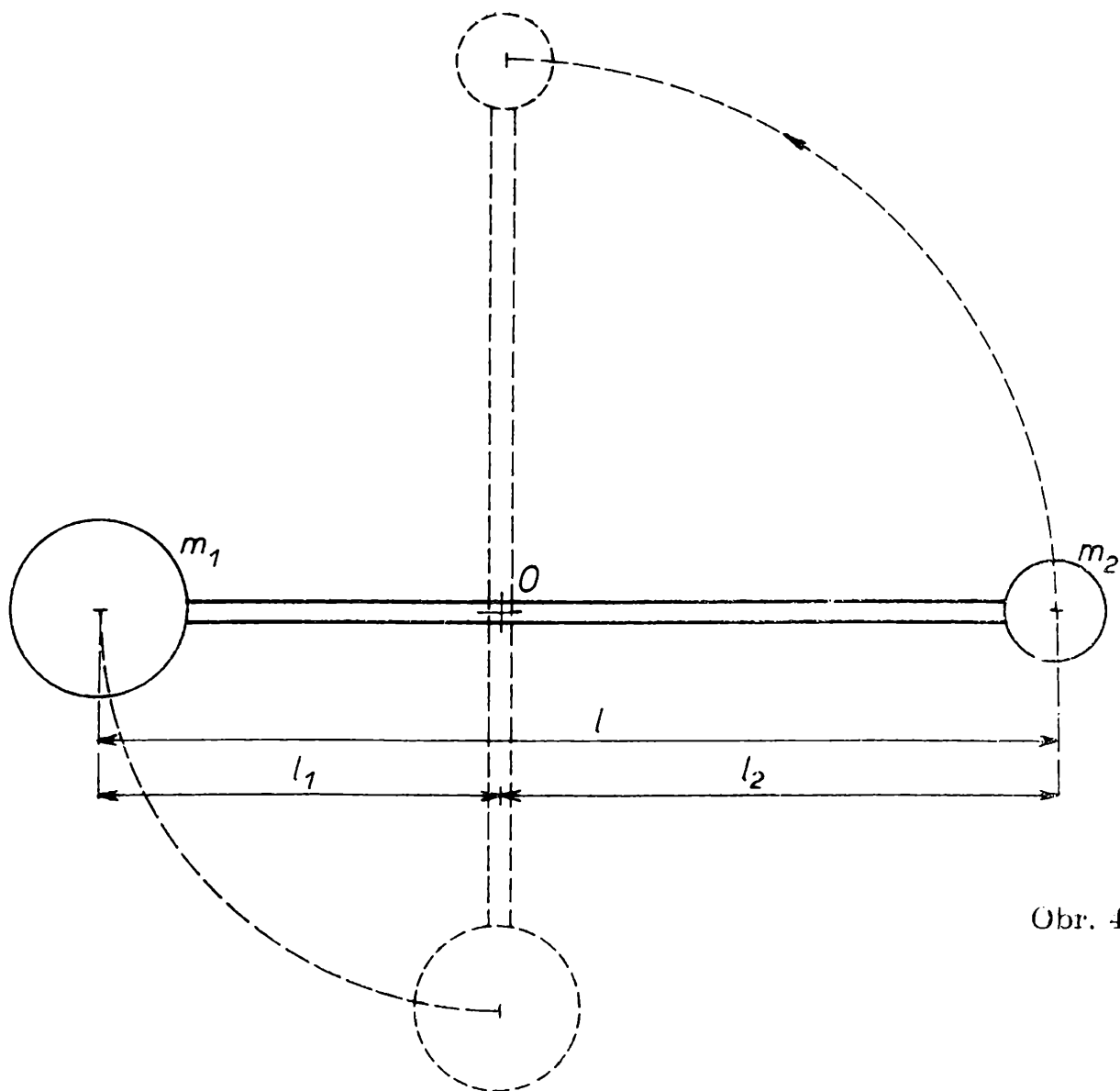
Kategorie C

1. Pět závaží o stejných hmotnostech m je rozmístěno v soustavě kladek podle obrázku 3. Hmotnost lana a kladek je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti závaží.

a) Určete zrychlení soustavy.

b) Určete sílu, kterou je napínáno lano v místě A a v místě B .

c) Jakou silou je namáhán čep pravé pevné kladky a levé pevné kladky? Jakými silami by byly namáhány čepy, kdyby soustava těles byla v klidu?



Obr. 4

2. Z vodorovné podlahy (1), která je vzhledem k povrchu Země v klidu, je vrženo svisle vzhůru těleso počáteční rychlostí v_0 . Vrh popisují dva pozorovatelé: Pozorovatel P_1 , který stojí na podlaze (1), a pozorovatel P_2 , který stojí na vodorovné podlaze (2) výtahu a spolu s ní koná rovnoměrně zrychlený pohyb svisle vzhůru se zrychlením a_2 . V okamžiku vrhu jsou podlahy (1) a (2) v téže vodorovné rovině a okamžitá rychlost podlahy (2) vzhledem k povrchu Země je v_2 .

a) Jak popíše pohyb tělesa pozorovatel P_1 od okamžiku vrhu do okamžiku návratu tělesa na podlahu (1)? Určete velikost okamžité rychlosti v jako funkci času, výšku vrhu, úhrnnou dobu pohybu tělesa.

b) Jak popíše pohyb pozorovatel P_2 od okamžiku vrhu do okamžiku, kdy těleso míjí podlahu (2)? Určete velikost okamžité rychlosti jako funkci času, výšku vrhu, tj. maximální vzdálenost tělesa od podlahy (2), úhrnnou dobu pohybu tělesa.

c) Po obecném vyřešení řešte úlohu ve zvláštním případě pro hodnoty $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$, $a_2 = 5 \text{ m s}^{-2}$, $v_2 = 5 \text{ m s}^{-1}$.

3. Dvě stejnorodé koule o hmotnostech m_1 a m_2 , $m_1 > m_2$, jsou upev-

něny na koncích velmi tenké válcové tyče, jejíž hmotnost je zanedbatelná vzhledem k hmotnostem m_1 a m_2 . Vzdálenost středů koulí je l . Soustava je otáčivá kolem vodorovné osy o procházející bodem O tyče kolmo k podélné ose tyče. Vzdálenost bodu O od středu koule o hmotnosti m_1 je l_1 , od středu koule o hmotnosti m_2 je l_2 , $l = l_1 + l_2$ (obr. 4).

a) Ve které poloze bodu O vzhledem ke středům koulí je soustava v rovnovážné poloze?

b) Poloha bodu O je taková, že se soustava silovým působením tíhového pole uvede z počáteční klidové polohy (1) do otáčivého pohybu kolem osy o v kladném smyslu. Určete velikost rychlosti v_1 koule o hmotnosti m_1 v nejnižší poloze a velikosti rychlosti v_2 koule o hmotnosti m_2 v nejvyšší poloze. Popište a odůvodněte pohyb soustavy po dosažení polohy (2).

c) Proveďte diskusi pohybu soustavy silovým působením tíhového pole pro různé polohy bodu O na tyči.

d) Po obecném vyřešení úlohy řešte ve zvláštním případě pro hodnoty $m_1 = 2,0 \text{ kg}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, $l = 1,00 \text{ m}$. Pro které polohy bodu O vzhledem ke středům koulí se soustava otočí z klidové polohy (1) podle obr. 4 ve smyslu kladném a pro které ve smyslu záporném do polohy (2)? Sestrojte tabulku a graf funkce $v_1 = f_1(l_1)$ a funkce $v_2 = f_2(l_2)$ ve shora vymezených oborech proměnných l_1 a l_2 . Pro grafy použijte milimetrového papíru.

Kategorie D

1. Hmotný bod se pohybuje po přímé dráze $AB = d$ z bodu A do bodu B . Na prvním úseku $d_1 = \frac{2}{3} d$ své dráhy se pohybuje průměrnou rychlostí $\bar{v}_1$, na zbytku dráhy průměrnou rychlostí $\bar{v}^2$.

a) Jak velkou průměrnou rychlost $\bar{v}$ má hmotný bod na dráze AB ?

b) Za jakou dobu t dorazí do bodu B ?

c) Jaký vztah je mezi veličinami $\bar{v}_1$ a $\bar{v}_2$, jestliže $\bar{v} = \bar{v}_1$?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\bar{v}_1 = 2,0 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{v}_2 = 4 \text{ m s}^{-1}$, $d = 12 \text{ m}$.

2. Hmotný bod se pohybuje po přímé dráze rovnoměrně zrychleným pohybem z bodu A do bodu B a urazí dráhu $s_1 = AB$ za dobu t_1 . V rovnoměrně zrychleném pohybu se stejným zrychlením a po téže přímce pokračuje i za bodem B a za další dobu t urazí dráhu $s = BC$. Rychlost hmotného bodu v bodě C je n -krát větší než v bodě B .

a) Určete zrychlení a hmotného bodu a dobu t_1 .

b) Vypočítejte rychlosti v_1 a v_2 v bodech B a C a dráhu $s_1 = AB$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t = 4,0 \text{ s}$, $s = 32 \text{ m}$, $n = 3$.

3. Po svislé přímce se pohybují dvě malé kuličky. Jedna padá volným

pádem z výšky h_1 nad zemským povrchem, druhá je vržena svisle dolů počáteční rychlostí v_0 z výšky h_2 nad zemským povrchem ($h_2 > h_1$). Obě kuličky se začnou pohybovat ve stejném okamžiku.

a) Za jakou dobu t_0 a v jaké výšce h nad zemským povrchem se obě kuličky srazí?

b) Jakou rychlostí v'_0 by musela být vržena druhá kulička, aby se obě setkaly na zemském povrchu?

Odpor vzduchu neuvažujeme a rozměry kuliček zanedbáváme vzhledem k výškám h_1 a h_2 .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h_1 = 25$ m, $h_2 = 27$ m, $v_0 = 1$ m s⁻¹, $g \doteq 10$ m s⁻².

Kategorie E

1. Koule o poloměru $r = 1,00$ cm o hmotnosti $m = 62,38$ g je složena ze dvou polokoulí. Jedna polokoule je z čistého zlata, druhá je z jiného kovu.

a) Určete kov, z něhož je druhá polokoule.

b) Na povrchu koule pozorujeme kružnici, která je hranicí mezi oběma polokoullemi. V jaké poloze se tato kružnice ustálí, dáme-li kouli na hladkou, vodorovnou skleněnou desku? Nakreslete náčrtek koule a v něm vyznačte polohu zlaté polokoule. Odůvodněte správnost náčrtku.

Hustotu ρ_1 zlata a hustotu ρ_2 druhého kovu najdete v tabulce F 7 v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro ZDŠ.

2. Deska zednického lešení má délku $d = 6,0$ m a tíhu $G = 60$ kp. Leží na podpěrách A, B. Podpěra A je od levého konce desky vzdálená o délku $a = 1,0$ m, podpěra B je od pravého konce desky vzdálená o délku $b = 1,5$ m. Po desce se má pohybovat zedník tíhy $G_1 = 80$ kp.

a) Nakreslete náčrtek lešení. Volte měřítko 1 m $\sim$ 2 cm.

b) Zjistěte, zda se může zedník postavit až na pravý nebo až na levý okraj desky.

c) Jestliže se zedník nemůže na některé straně desky postavit až na okraj desky, navrhněte takovou úpravu lešení, aby to bylo možné. Návrh zdůvodněte výpočtem.

Tloušťku desky vzhledem k ostatním jejím rozměrům zanedbáváme. Těžiště desky je uprostřed desky.

3. Uzavřená běžecká dráha stadiónu má délku $d = 390$ m. Trénují na ní dva běžci, o jejichž průměrných rychlostech v_1 , v_2 platí: $v_1 > v_2$. Startují-li současně z téhož místa v opačných směrech, setkají se poprvé za dobu $t_1 = 30$ s. Startují-li současně z téhož místa stejným směrem, rychlejší běžec ponejprv dohoní pomalejšího za dobu $t_2 = 13$ min 0,0 s.

a) Vypočtete rychlosti v_1 a v_2 běžců v $\frac{\text{m}}{\text{min}}$

b) Určete počet n_1 kol, které vykoná první běžec, a počet n_2 kol, které vykoná druhý běžec v druhém případě za dobu t_2 .

Z dějin telegrafie

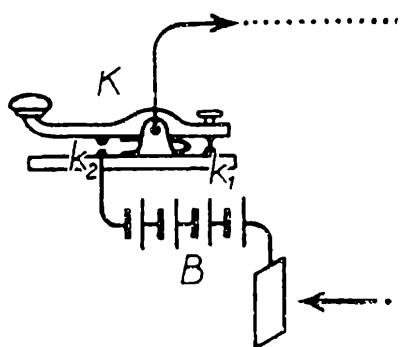
JOSEF KOTYK, Pardubice

Naši vnukové budou účastníky mezihvězdných výprav. Je to závratná představa. Na prahu nového věku lidstva bychom však neměli zapomínat, že epochální pokroky techniky, jejichž svědky se stali naši dědečkové — elektřina, telegraf aj. — nebyly o nic méně závratné. Odvěká touha člověka podávat do dálky zprávy způsobem co nejrychlejším a zvítězit tak nad prostorem a časem došla v devatenáctém století vynálezem elektrické telegrafie a radiotelefrafie svého splnění.

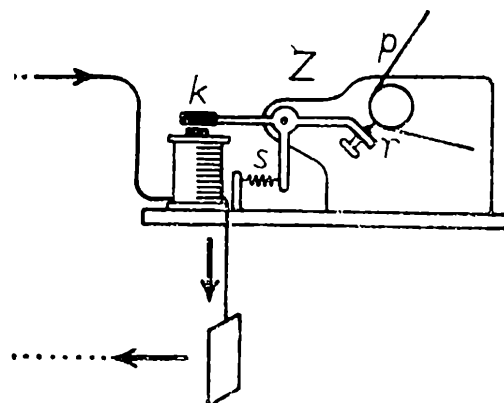
První elektrický (či spíše elektrochemický) telegraf sestrojil roku 1809 německý lékař Samuel Thomas Sömmering; použil k tomu elektrolytických účinků proudu. Pro každou značku bylo však třeba jiného drátu. Pro tuto složitost se myšlenka Sömmeringova v praxi neujala. O deset let později (v letech 1819 a 1820) dánský fyzik Hans Christian Oerstedt první zkoumal působení elektrického proudu na magnetku. Již po dalších deseti letech (roku 1830) navrhoval André Marie Ampère, aby se k telegrafování užilo výchylek magnetky, z nichž by bylo možno sestavit abecedu. Na tomto základě sestrojil ruský vynálezce Pavel Lvovič Šilling roku 1832 první telegraf elektromagnetický, který uskutečnil na lince Zimní palác — Ministerstvo spojů v Petrohradě. Roku 1833 spojili němečtí vědci Karl Friedrich Gauss a Wilhelm Weber v Göttingen podobně hvězdárnu s Fyzikálním ústavem. Jako přijímacího přístroje užili multiplikátoru; depeše četli tedy rovněž z výchylek magnetky.

Také elektrickým zvonkem lze telegrafovat smluvené značky, např. vysílat zvuky¹⁾ dlouhé a krátké (domácí telegraf). Kdyby na druhé stanici však nikdo nebyl, zpráva by nebyla zachycena. Tyto zkušenosti vedly k poznání, že by bylo proto lépe znaménka zapisovat. První úspěchy v tomto směru přinesly roku 1837 pokusy Karla Augusta

¹⁾ Přenos zvuku, tj. problém překonat vzdálenosti hlasem a sluchem, do dálky mluvit a slyšet, byl však rozřešen až o půl století později sestrojením telefonu (Alexander Graham Bell roku 1876) a mikrofonu (David Edwin Hughes v letech 1878 až 1879).



Obr. 1



Obr. 2

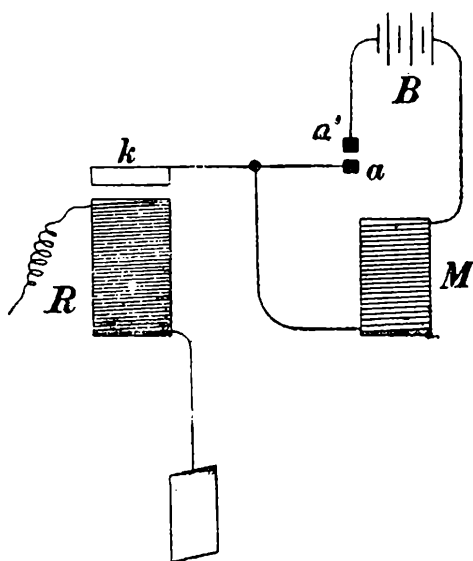
Steinheila; opatřil pól magnetky štětečkem, který tiskl při každé výchylce magnetky na proužek papíru, udržovaný v rovnoměrném pohybu hodinovým strojem, barevné tečky. Velký pokrok znamenal v témž roce rovněž učiněný objev Steinheilův, že místo dvou drátů, jež spojovaly dosud obě stanice, stačí drát jediný, spojí-li se konce drátů na obou stanicích vodivě se Zemí. Tím se ušetří 50 % vedení. Okolnost, že náklady na zřizování telegrafních linek podstatně klesly, velmi přispěla dalšímu šíření telegrafie. Vývoj pokročil mimo to tím, že Morse sestrojil také roku 1837 první model svého elektromagnetického přístroje zapisovacího.

Samuel Finley Breese Morse se narodil roku 1791 v Charlestownu (v Massachusetts, USA). Byl původně malířem a profesorem malířství v New Yorku. Na cestách po Evropě našel zálibu ve fyzice a oddal se výzkumům v oboru elektrotechniky; sestrojil zejména také telegrafický klíč aj. K myšlenkové podstatě elektromagnetického zapisovacího přístroje dospěl již roku 1832 na cestě z Londýna do Ameriky. V praxi užil místo hodinového péra závaží. Jeho první přístroj vážil — téměř 100 kilogramů! Mnohého zdokonalení bylo tedy třeba, než byl uveden na pohodlný tvar pozdější. Přes to již roku 1843 vybudoval Morse telegrafní vedení z Washingtonu do Baltimore. První telegram byl jeho soustavou vyslán a zapsán dne 27. května 1844. Morse působil pak jako profesor přírodních věd na Yale College v New Havenu. Zemřel v Poughkeepsie (USA) před 100 lety roku 1872. Roku 1871, ještě za jeho života, byl mu postaven pomník v New Yorku.

Ponechávaje popis zařízení a činnosti telegrafického klíče a Morseova zapisovacího přístroje podle připojených obrázků 1. a 2. (také procvičení značek Morseovy abecedy) zájmu čtenářů, dodám jen, že Morseův přístroj vyžadoval dosti silného proudu, aby jeho pisátko vytlačilo na proužek papíru telegrafované značky zřetelně. Užívání silných proudů v celém vedení bylo by však nehospodárné. Tato okolnost způsobila, že každá stanice byla záhy vybavena další součástí zvanou relais (čti relé; viz obr. 3). Slabý přespolní proud se přivádí do velmi jemného elektromagnetu R, který se zmagnetuje a přitáhne kotvu k; kontakt a se dotkne kontaktu a' a spojí místní baterii B s Morseovým

zapisovacím přístrojem M. Při telegrafování na veliké vzdálenosti rozdělila se celá trať na několik úseků AB, BC, CD, ...; proud z A se vedl do relais na stanici B, odkud místní proud se vedl do relais na stanici C. atd. Místní proud předposlední stanice se vedl do relais přijímací stanice, kde opět proud domácí baterie²⁾ uvedl v činnost zapisovací přístroj.

Morseovým přístrojem bylo možno telegrafovati 75 písmen za minutu. Rychleji pracovaly později stroje tiskací, např. typový telegraf, který sestavil Hughes roku 1855. Vysílací i přijímací stanice obsahovala kolo, na jehož obvodě byla na 28 zubech umístěna písmena, číslice a jiné značky (typy). Kola na obou stanicích se otáčela synchronně, tj. tak, že současně byly před proužkem papíru tytéž značky. Jestliže se na vysílací stanici zavedl stisknutím klávesy proudový impuls v okamžiku, kdy byla před proužkem papíru určitá značka, přitiskl se na obou stanicích současně proužek ke značce a na papír se otisklo totéž písmeno, číslice a pod. Hughesovým přístrojem bylo možno telegrafovati průměrně 150 písmen za minutu, pracoval tedy asi dvakrát rychleji než Morseův. Byl proto rychle zaváděn, nejprve v New Yorku, roku 1861 ve Francii a postupně i v dalších evropských státech, až časem vytlačil Morseův přístroj úplně z užívání.



Obr. 3

Ještě rychleji než Hughesovy telegrafy tiskací pracují stroje samostatné, automatické, např. rychlotelegrafy systému Wheatstoneova aj.

Složitější úpravou stanic podařilo se telegrafování brzy i jinak zrychlit.

²⁾ V našich zemích se užívalo zpravidla baterií článků Meidingerových; jejich kladným pólem je Cu v roztoku modré skalice, záporným Zn v řidším roztoku hořké soli. Průlinčité nádoby k oddělení obou elektrolytů není třeba. O stálost článku je postaráno vloženými krystaly. Elektromotorické napětí článku měří 0,96 V.

Málo se připomíná, že touto problematikou se zabývali úspěšně také badatelé čeští. Tak František Adam Petřina, profesor fyziky na universitě v Praze, doporučoval roku 1853 používat rozvětvených proudů a telegrafie vícenásobné, zejména dvou současných proudů opačného směru na témž proudovodiči. Systém duplexu (vícenásobné telegrafie dvojím stejnosměrným proudem), vypracovaný roku 1855 pražským rodákem Juliem Vilémem Gintlem, ředitelem rakouských telegrafů, je shodný s pozdějším Edisonovým patentem z roku 1874. Thomas Alva Edison (1847—1931), neplodnější vynálezce 19. století, sestrojil mimo to telegraf kvadruplexní, umožňující poslat ze dvou stanic po témž drátě současně čtyři telegramy, po dvou ve stejném směru.

K otázce rozšíření telegrafu připojuji několik informativních ilustrací číselných: Koncem 19. století činila délka telegrafních linek v Rusku 150 000 km, ve Francii 120 000 km, v Rakousku-Uhersku 75 200 km, ve Velké Británii 70 000 km, atd.³⁾ Za sto let po objevu Morseově bylo v ČSR 20 900 km telegrafních linek a Země byla obepjata sítí přes 10 miliónů km dlouhou, po které se myšlenky šířily téměř okamžitě ...

U telegrafů zámořských užívá se jako proudovodiče spojujícího obě stanice kabelu, jenž se klade na dno mořské. Podmořský kabel mezi Francií a Anglií položil na místě, kde později (dne 25. července 1909) Blériot první přeletěl průliv La Manche, John W. Brett ve dnech 25. až 27. září 1851. Kladení kabelu přes Atlantický oceán vyžádalo si několika výprav v letech 1857, 1858, 1865 a 1866; řada kabelů se mnohokrát přetrhla a ztratila. Teprve roku 1866 se dílo zásluhou Američana Cyruse W. Fielda podařilo.⁴⁾ Atlantický kabel měl průměr 27 mm a byl dlouhý 2436 km; vážil 2863 tun. „The great feat of the century“, nejslavnější čin století, se podle věšteckých slov Morseových zdařil ...

Kabel, položený roku 1880 z Irska do New Foundlandu, měl délku 2650 km a průměr měděného jádra 3,2 mm. Doporučuji čtenářům, aby vypočítali jeho odpor, jestliže měrný odpor mědi = $17 \cdot 10^{-1} \Omega \text{ cm}$. Učiníte-li tak, shledáte, že měří 5600Ω ; pochopíte pak, že proud se velmi zeslabí a stačí jen k tomu, aby na přijímací stanici přivodil vychýlení ukazatele galvanometru. Tyto výchylky značí pak tečky a čárky Morseovy

³⁾ Cituji ze sborníku „Devatenácté století slovem i obrazem“, (Nakl. Jos. R. Vilímek v Praze), díl II, sv. 1, tab. na str. 118, kde čtenáři mohou nalézt také informace další.

⁴⁾ Podrobněji pojednává o tom mistrovská miniatura „První slovo nad oceánem“ knihy Stefana Zweiga „Hvězdné hodiny lidstva“ (nakl. Mladá fronta, Praha 1971, edice KAPKA, sv. 123) na str. 121 až 139.

abecedy. Praxe se zároveň zařídila tak, že podmořský kabel je neustále nabit a telegrafování záleží jen ve změnách jeho náboje.⁵⁾

Do konce 19. století bylo položeno již přes 400 000 km podmořských kabelů.

Vynalezení telegrafů náleží mezi nejdůležitější objevy minulého století. V novější době se podařilo zdokonalit telegrafická zařízení tak, že lze přenášet i rukopisy, obrazy a fotografie.

Úsilí o největší úspornost vysílání zpráv do dálky vyvrcholilo také již v minulém století vynálezem bezdrátového přenášení Morseových značek (radiotelegrafie) užitím elektromagnetických vln, o nichž bylo již roku 1865 Maxwellem předpověděno a roku 1887 Hertzem experimentálně dokázáno, že mají stejnou podstatu a obdobné vlastnosti jako světlo. Paprsky světelné jsou tedy — první bezdrátovou telegrafií vesmíru! V „tajemné dílně boží“, jak Goethe velmi uctivě nazývá historii, děje se nezměrně mnoho všedního a lhostejného

O realizaci zázraku bezdrátového spojení pozemských stanic elektromagnetickými vlnami se nejvíce zasloužili Rus *Alexander Stěpanovič POPOV* (1859—1906) a Ital *Guglielmo MARCONI* (1874—1937). Deset let po objevných pracích Hertzových telegrafoval Marconi roku 1897 v Anglii na vzdálenost až 18 km, roku 1899 však již na vzdálenost 68 km; v letech 1901 a 1902 navázal bezdrátové telegrafní spojení mezi Evropou a Amerikou.

Náleží k půvabům dějinného vývoje, že nositelem zpráv se stal opět vlnivý děj, který se šíří rychlostí světla, jako v dobách telegrafie optické.⁶⁾ Můžete proto mít, milí čtenáři, dojem, že vývoj, kterým lidstvo prošlo, znamená snad v něčem — návrat zpět! Lidské poznání se podle známých slov Engelsových⁷⁾ vyvíjí vskutku po křivce velmi složité. Tvrdívá se, že jej lze výstižně znázornit spirálou. Na vývojové spirále lidstva⁸⁾ byla by radiotelegrafie svou vyspělou technikou ovšem jistě umístěna nad dřívější telegrafií optickou, v poloze vyšší.

⁵⁾ Kabel je v podstatě kondensátor. Jeho kapacitu lze počítat jako pro kondensátor deskový, volíme-li za plochu polepu aritmetický průměr vnitřního a vnějšího pláště kabelu. Učiňte tak v případě, že měděné jádro má průměr 5 mm a vrstva izolátoru tloušťku 1,5 mm. Relativní permitivita izolátoru = 1,88. Kapacitu kabelu stanovte např. pro úsek dlouhý 1 km. Jak velkým množstvím elektřiny nabije se tento kabel na potenciál 100 V?

⁶⁾ Skrovným dědictvím optické telegrafie zůstalo v praxi toliko užívání systémů semaforů v dopravnictví, signalisování ve vojenství aj.

⁷⁾ Bedřich Engels: „Dialektika přírody“. (Svoboda, Praha 1950).

⁸⁾ O vývojové spirále lidstva přinášejí poučení také některé učebnice, např. Fyzika pro 11. postup. ročník býv. jedenáctiletých středních škol, str. 286 aj.

0 muži, který objevil Velké nic

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc

V době, v níž člověk prostřednictvím nejmodernější techniky úspěšně proniká jak do vzdálených a do nedávna nedostupných oblastí vesmíru, tak i do nejjemnější vnitřní struktury látek, se musíme lehce pousmát nad zdánlivě bezvýznamnými objevy našich předchůdců. Kdopak by se dnes podíval tomu, že „těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou rovnou tíze kapaliny tělesem vytlačené“ nebo objevu, že „všechna tělesa padají na určitém místě Země se stejným zrychlením“, když můžeme v televizi na vlastní oči sledovat start mnohotunových kosmických lodí. Nebo kdo by se staral o to, že „dva souhlasné elektrické náboje se navzájem odpuzují“, když si můžeme doma pouhým stisknutím vypínače uvest do provozu řadu nejrůznějších elektrických spotřebičů. Rovněž tak nás neuchvátí zjištění, že světelný paprsek se láme někdy ke kolmici a někdy od kolmice, když je známo, že se v různých oborech již po léta používá běžně laserů jako zdrojů velmi intenzivních svazků koherentního světla. A o tom, jak groteskně působí pohled na první parní lokomotivu ve srovnání např. s konstrukcemi nadzvukových letounů, není třeba snad hovořit.

Ale ať se nám jeví všechny ony objevy a vynálezy minulých století jakkoli nedůležité a podružné, přesto dobře víme, jak často sehrály v historii vědy a techniky rozhodující úlohu. Jistě byste dovedli vyjmenovat řadu fyzikálních objevů, které v minulosti významně přispěly jak k odhalení důležitých přírodních zákonů, tak k rozvoji dalších oborů fyziky a techniky.

Mezi takovéto objevy patří i *objev atmosférického tlaku* a s ním související *objev vzduchoprázdna*. K těmto objevům, z dnešního hlediska velmi prostým, ale v tehdejší době uvádějícím svět v úžas, došlo kolem poloviny 17. století (tedy před více než 300 lety) téměř současně v Itálii a v Německu. V Itálii to byl zajisté všem studentům blízce známý *Torricelli* (kdopak by si nevzpomněl na Toricelliho pokus!), v Německu pak muž, jehož jméno sice neproniklo tak výrazně do učebnic fyziky, zato je všeobecně znám jeho slavný pokus, tzv. pokus s magdeburskými polokoulemi. Jde o muže jménem *Otto Guericke* (1602 až 1686), od jehož narození letos uplyne právě 370 let.

Otto Guericke patří k vynikajícím a všestranně činným osobnostem. Nejříve vystudoval práva (jeho otec byl totiž předsedou nejvyššího soudu v Magdeburku), pak se věnoval stavitelství, zvláště stavbě pevností a městských opevnění (tuto činnost si vynutilo období častých válek), přičemž se seznámil se základy přírodních věd a matematiky. Přestože téměř 50 let svého dalšího života úspěšně pracoval ve správě

města Magdeburku, jehož byl po léta váženým starostou, a přestože se zároveň věnoval diplomatickým službám, za něž byl dokonce povýšen císařem do šlechtického stavu (odtud pochází změna jeho jména Otto von Guericke), nepřestával současně pokračovat ve studiu přírodních věd. Svou houževnatostí a vynalézavostí, s níž přistupoval k přípravě a k provádění svých četných experimentů a výzkumů, si získal zasloužený obdiv a popularitu celého města i okolí.



Obr. 1. Pomník Otto Guericke v Magdeburku.

Dodnes je Otto Guericke pokládán nejen za nejvýznamnější historickou postavu města pokud jde o oblast politické činnosti, ale také za předního badatele a přírodovědce, který proslavil Magdeburk po celém světě. Snad právě proto je často nazýván „německým Galileiem“. O tom, jaké vážnosti se těší u občanů současného Magdeburku, svědčí důstojný pomník, postavený na jeho počest v historické části města (viz obr. 1).

Otto Guericke již od mládí trápila myšlenka na tehdy dosud nedorozšířený problém vzduchoprázdna. V té době se totiž všeobecně věřilo, že vzduchoprázdno v přírodě neexistuje. Říkalo se, že bůh a příroda mají před vzduchoprázdnem strach a hrůzu (horror vacui), z čehož se pak usuzovalo, že z čeho má bůh hrůzu, to přece nemůže trpět. K tomuto nesmyslnému tvrzení přispívalo vysvětlení tehdy již známého pokusu s pumpou: *táhneme-li píst pumpy vzhůru, za pístem vystupuje voda: tedy bůh a příroda nedopustí, aby v prostoru pod pístem nezůstalo „nic“*. Dnes již samozřejmě dávno víme, že vodu pod píst pumpy vhání nikoli bůh,

ale docela obyčejný atmosférický tlak, a jestliže se postaráme, aby tento tlak na vodu nemohl působit, pak přece jenom v prostoru pod pístem to „nic“ vznikne. A právě o vytvoření tohoto „nic“ a tím o vyvrácení tehdejšího nevědeckého názoru se pokusil magdeburský starosta Otto Guericke.

Své slavné experimenty zahájil poněkud prozaicky pokusem s pivním sudem. Pomocí hasičské stříkačky vyčerpával z pečlivě utěsněného sudu tekutinu a napjatě očekával, až se sud vyprázdní a zůstane v něm to, co hledal: vzduchoprázdno. Leč běda! Nějaká neznámá síla sud rozdrtila. Že by snad přece jen příroda měla strach z prázdného sudu? Poněvadž tomu Guericke nehodlal uvěřit, pokus mnohokrát opakoval. Nejprve s jinými pevnějšími sudy, stále však bez valného úspěchu. Pak si nechal vyrobit dutou silnostěnnou kovovou kouli se dvěma uzavíratelnými kohouty (koule měla objem 0,9 litru), naplnil ji vodou a pomocí své zdokonalené vodní pumpy opět čerpal. A hle, koule to vydržela. Po odčerpání vody muselo tedy v kouli zůstat jen vzduchoprázdno, to kýžené „Velké nic“. (Čtenář si jistě uvědomuje, že při tehdejších technickém vybavení pokusu mohlo jít pouze o vakuum velmi nedokonalé.) Otto Guericke pak popisuje další průběh pokusu takto: „*Když jsem otevřel druhý kohoutek, dral se vzduch takovou silou dovnitř, že by málem strhl člověka stojícího nablízku koule. Kdyby se člověk přiblížil k otvoru ústy, vyrval by mu dech. Kdyby položil na kohoutek ruku, mohla by mu být velkou silou ruka utržena.*“*)

Podobných pokusů připravil magdeburský starosta celou řadu, z nichž do dějin města a do dějin fyziky vešel *pokus s magdeburskými polokoulemi*. Tento slavný pokus, jehož detail je vyobrazen na kamenné desce Guerickeova pomníku (viz obr. 2), se konal 8. května 1654 v městě Řezně (Regensburg) za mimořádně slavnostních okolností. Před zraky shromážděných občanů města a německé šlechty, která se sem sjela z dalekého okolí, a za přítomnosti německého císaře předvedl, jak ani síla 16 koní nedokáže přemoci vnější atmosférický tlak. Ale nechme o tom vyprávět samotného autora pokusu: „*Dal jsem udělati dvě polokoule o průměru 67/100 magdeburského lokte (což odpovídá přibližně 37 cm). Polokoule k sobě dobře přiléhaly. Jedna měla kohoutek, jímž se mohl z dutiny vysát vzduch a jímž se mohlo také zabrániti přístupu vnějšího vzduchu. Na polokoulích byly železné kruhy, aby za ně mohli zapřáhnout koně. Pak jsem dal ušít z kůže vložku tvaru mezikruží, kterou jsem navlhčil voskem smíchaným s terpentýnovým olejem, aby nepropouštěla vzduch. Když jsem dal koženou vložku mezi obě polokoule a tyto jsem na sebe přitlačil, vyčerpал jsem rychle z dutiny vzduch. Poznal jsem pak, že obě polokoule byly k sobě tlačeny takovou silou, že 16 koní je nemohlo od sebe vůbec*

*) Z knihy od A. Kauffeldta *Otto von Guericke*, nakladatelství Urania, Lipsko 1954.



Obr. 2. Pokus s magdeburskými polokoulema na pomníku Otto Guericka.

odtrhnouti anebo jen stěží. Povedlo-li se koním konečně s vynaložením veškeré síly je od sebe oddělit, třesklo to jako rána z ručnice. Když se však otvorem v kohoutku umožnil vzduchu přístup do polokoulí, mohla se snadno oddělit rukou“.)*

Jak velká byla vůbec tlaková síla, působící na polokoule, které se marně od sebe snažilo odtrhnout spřežení 16 koní? To lze zjistit velmi jednoduchým výpočtem. Jestliže je tlak vzduchu $p = 1 \text{ kp/cm}^2$ a obsah kruhu vymezeného okrajem polokoule o průměru 37 cm přibližně $S = 1000 \text{ cm}^2$, pak obě polokoule byly k sobě přitlačovány silou $F = p S = 1 \text{ kp/cm}^2 \cdot 1000 \text{ cm}^2 = 1000 \text{ kp}$. Chceme-li nyní určit, jak velkou tažnou sílu by musel vyvinout k oddělení polokoulí jeden kůň, je třeba si uvědomit, že při pokusu táhlo 8 koní v jednom směru a 8 koní ve směru opačném. Poněvadž jedna skupina 8 koní byla zapřažena v podstatě jen ke zvýšení efektu (mohla by být totiž nahrazena třeba silným kulem zaraženým do země nebo hákem upevněným do zdi), překonávalo tlakovou sílu vnějšího vzduchu pouze 8 koní. To znamená, že na jednoho koně připadá průměrná tažná síla $1000 \text{ kp} : 8 = 125 \text{ kp}$. A jelikož je známo, že kůň zapřažený do vozu vyvíjí obvykle tažnou sílu kolem 80 kp, není divu, že na odtržení polokoulí tehdy celé spřežení nestačilo. Přitom je však nutno ještě uvážit, že uvedený výpočet by platil za předpokladu dokonalého vakua. Poněvadž tento předpoklad při pokusu s magdeburskými polokoulema z technických důvodů splněn být nemohl, je zřejmé, že celková vnější tlaková síla působící na polokoule a tedy i tažná síla koní byla o něco menší. Tyto skutečnosti si samozřej-

*) Z knihy J. Březiny *Výbor z fyzikální literatury*, vydané Československou grafickou unií v Praze roku 1937.

mě diváci tehdy vůbec neuvědomovali a snad si jich nebyl vědom ani strůjce pokusu, takže atraktivnost i sláva experimentu neutrpěly.

Na závěr poznamenáváme, že oba citované úryvky, v nichž Otto Guericke popisuje své pokusy, jsou jen nepatrnou částí objemného díla, které tento badatel po sobě zanechal. Je to latinsky psaná kniha s obširným názvem „*Otto von Guericke takzvané nové magdeburské pokusy se vzduchoprázdňem poprvé popsané profesorem matematiky na würzenburské universitě Kašparem Schottem*“, která vyšla v Amsterdamu v roce 1672, tedy právě před 300 lety.

RECENZE

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

Tento název dal dr. František Zítek své nové knížce, která se v únoru 1972 objevila na pultech našich knihkupectví. Vyšla ve známé edici Škola mladých matematiků, kterou vydává Ústřední výbor matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta a je to už 29. svazek této řady. Jak název napovídá, vybočuje tato publikace trochu ze středoškolské matematiky, ale je psána přístupnou formou s mnoha příklady, tabulkami a úlohami. Proto její četba nebude dělat velké potíže těm, kdo se chtějí dovědět trochu více, než jim dává střední škola.

Autor se na začátku zamýšlí nad postavením kombinatoriky ve středoškolské matematice. Všichni cítíme, že má tato část učiva trochu jiné postavení než např. planimetrie, nauka o řešení rovnic a další středoškolské partie. Kombinatorika se studentům často jeví jako tříšť náhodně vybraných úloh, kde se k řešení užívá obratných triků a každá úloha vyžaduje téměř svou speciální metodu. Na stránkách své knížky chce autor ukázat, že metoda vytvářících funkcí je jednou z užitečných pomůcek pro řešení kombinatorických problémů.

Publikace je rozdělena do tří částí. V první se mluví o vztazích mezi mnohočleny a jejich koeficienty, o binomických koeficientech, o Stirlingových číslech a dalších problé-

mech, jež jsou dosti blízké středoškolskému čtenáři. Druhá část knížky je věnována mocninným řadám, při čemž si ovšem autor neklade za úkol podat jejich systematickou teorii. Teprve ve třetí části, jež je jakýmsi jádrem celé práce, se zavádějí vytvářící funkce a ukazují se jejich kombinatorické aplikace. Pro čtenáře, který si z tohoto krátkého přehledu nedovede učinit představu o zaměření nové knížky, zde namátkou na dokreslení vybíráme dvě úlohy: I. Kolik existuje rozkladů čísla 11 na tři sčítance? II. Kolika různými způsoby lze umístit šest různých předmětů do tří přihrádek, má-li být v každé vždy sudý počet předmětů?

Brožura končí seznamem literatury a stručnými návody ke cvičením, jejichž řešení bylo v hlavním textu přenecháno čtenářům. Knížka má 148 stran a stojí 11 Kčs. Tiskových chyb je málo a čtenář si je většinou sám snadno opraví. Jen v několika případech by snad mohlo dojít k nedorozumění a proto vás prosíme, abyste si opravili tisková nedopatření, jež autor už nestihl korigovat. [Viz stranu 443]

Nová Zítkova knížka se jistě bude hodit všem, kdo si chtějí prohloubit matematické vzdělání. Doporučujeme ji řešitelům matematické olympiády a dalším zájemcům o matematiku.

Jiřina Sedláčková

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

nanejvýš	tout au plus
nanést	porter
nanést úsečku	porter un segment
napětí	tension <i>ž</i>
nárys	élévation principale; épure
	tracé <i>m</i>
narýsovat	tracer
následovat	suivre
násobek	multiple <i>m</i>
nejmenší společný násobek	le plus petit commun multiple
násobenec	multiplicande <i>m</i>
násobení	multiplication <i>ž</i>
násobitel	multiplicateur <i>m</i>
násobiti	multiplier
<i>a</i> násobeno <i>b</i>	<i>a</i> multiplié par <i>b</i>
násobný	multiple
<i>k</i> -násobný kořen	racine <i>ž</i> multiple d'ordre <i>k</i>
navzájem	mutuellement
ne	non
neboť	car
nedělitelný	indivisible
nedokazatelný	indémontrable, improuvable
nedostatek	défaut <i>m</i>
nedostupný	inaccessible
neeuclidovský	non euclidien, enne
negace	négation <i>ž</i>
negativní	négatif, ive
nehomogenní	inhomogène
nejbližší	le plus proche
nejistý	incertain, e
nejmenší	le plus petit
metoda nejmenších čtverců	méthode <i>ž</i> des moindres carrés
největší	le plus grand
nekonečně	infiniment
nekonečně malý	infiniment petit.
nekonečně velký	infiniment grand,
nekonečno	infini <i>m</i>
bod v nekonečnu	point <i>m</i> à l'infini
přímka v nekonečnu	droite <i>ž</i> de l'infini

nekonečný
 nelineárnost
 neměnnost
 neměnný
 neměřitelný
 nemožný
 němý
 nenulovost
 neomezený
 nepodmíněně
 nepohyblivý
 nepravdivý
 nepravidelný
 neprázdný
 nepřesnost
 nepřesný
 nepřímá úměrnost
 nepřímý důkaz
 nepřipustný
 nepřístupný
 nepříznivý
 nerovnoměrný pohyb
 nerovnost
 trojúhelníková nerovnost
 nerozhodnutelný
 nerozložitelný
 nerozvinutelná plocha
 neřešitelnost
 neřešitelný
 soustava rovnic je neřešitelná

 nesčíslný
 neslučitelný
 nesouměrný
 nesouměřitelný
 nesouvislý
 nespočetný
 nespojitost
 nespojitý
 nestejný
 nésti
 neúplný
 neurčený
 neurčitá
 neurčitý
 neutrální

infini, e
 non-linéarité ž
 invariance ž
 invariant, e; inchangeable
 non mesurable
 impossible
 muet, muette
 non-nullité ž
 illimité, e; non borné.
 absolument
 immobile
 faux, fausse
 irrégulier, ère
 non vide
 inexactitude ž
 inexact, e
 inversement proportionnel, elle
 démonstration ž apagogique
 inadmissible
 inaccessible
 infavorable
 mouvement *m* varié
 inégalité ž; inéquation ž
 inégalité triangulaire
 indécidable
 irréductible, indécomposable
 surface ž gauche
 incompatibilité ž
 incompatible; impossible
 le système d'équations est im-
 possible
 innombrable
 incompatible
 asymétrique
 incommensurable
 disjoint, e
 non dénombrable; indénombrable
 discontinuité ž
 discontinu, e
 inégal, e, aux
 porter
 incomplet, ète
 indéfini, e
 indéterminée ž
 indéterminé, e
 neutre