

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání za Zásluhy o výstavbu

Časopis pro studující škol všeobecně vzdělávacích i odborných

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, Jaroslav Bejsta, Petr Benda, doc. dr. Josef Dibelka, Stanislav Horák, doc. Jaroslav Chudý, prof. dr. Josef Korous, prof. Emil Kraemer, Oldřich Lepil, doc. dr. Cyril Palaj, CSc. Evžen Říman, CSc. Jiří Sedláček, CSc. Ladislav Šohnal, inž. dr. Václav Šindelář, prof. dr. Ján Vanovič, František Vencálek.

ROČNÍK 43

1964/65

*Vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze z pověření ministerstva školství
a kultury za odborné péče Jednoty československých matematiků a fyziků*

Matematika:

Bartoš Pavel: O jednej špecifickej vlastnosti pravouhlých trojuholníkov	1
Berka Otto: Dilatace	295
Galev Ljuben — Sofie: Množiny s neasociativními algebraickými operacemi	52
Haňková Bohuslava, Hrnčíř František: Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti	97, 150, 204
Havlíček Stanislav: Součty 2. a 3. mocnin přirozených čísel	345
Hejný Milan: Steinerov střed v trojúhelníku	337, 394
Horák Stanislav: Dodatek k článku Fr. Jiráska	197
Horák Stanislav: Hippokratovy měsíčky	49
Horák Stanislav: Souvislost mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice	241
Husová Helena: K jedné úloze Matematické olympiády	2
Janko Ladislav: Jednoduché pravidlo dělitelnosti sedmi	343
Jirásek František: Řešení geometrických úloh pomocí základních vlastností těžiště hmotných bodů	193
Kuřina František: Kruhová inverze	385, 483
Lacina Otakar: Praktické řešení kubické rovnice	243
Langr Josef, Šedivý Jaroslav: Zajímavosti z geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka	55, 99
Lanta Oldřich: Z geometrie trojúhelníka	246
Maňák Jaroslav: Kružnice devíti bodů	300
Maňák Jaroslav: Vybrané úlohy o minimech	248
Menšík Miroslav: Sférická geometrie	433
Metelka Josef: Univerzální kritérium dělitelnosti	340
Náhunková Jana: Jedna vlastnost pravoúhlého čtyřštěnu	148
Plajner Rudolf: Pythagorovy trojúhelníky o stejném obsahu	145, 202
Ponomarev K. K. — Moskva: Grafické znázornění druhých odmocnin z přirozených čísel	198
Potočný Vojtěch: O jednej vlastnosti strán niektorých trojuholníkov	293
Rohličková Iva: Co je teorie grafů?	289, 347
Zelenka Miloslav: Poznámka k článku K. K. Ponomareva	201

Deskriptivní geometrie:

Drs Ladislav, Jeništa Oldřich: Určité konstrukce elipsy a oválu	155
Horák Stanislav: Sestrojení přímky z daných odchylek	396
Hradecký František: O určitých geometrických místech	208, 252, 303
Kepr Bořivoj: O některých křivkách:	250, 308, 351, 399, 442

Fyzika:

Dlouhá Jarmila: Nízké teploty	256
Dlouhá Jarmila: Supratekutost a supravodivost	409, 447
Filip Miroslav: Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky	324, 374, 415
Chmela Pavel: Optický obraz v dalekohledu z hlediska geometrické optiky	320
Kolesníkov Vladislav: Grafické řešení obecné rovinné soustavy sil	212
Kunfalvi Rudolf — Budapešť: Několik příkladů ze soutěže Loránda Eötvöse v r. 1962	11, 69
Kupka Zdeněk: K pojmu setrvačná síla	160
Lepil Oldřich: Lissajousovy obrazce	263
Lepil Oldřich: Peltierův jev	315
Maršák Zlatěk, Kraus Ivo: Krystalická stavba pevných látek	404, 449
Peřina Alois: Pásmový čas a datovací hranice	62
Santholzer Vilém: Nukleární spád po zákazu jaderných výbuchů v ovzduší	103
Santholzer Vilém: Podstata scintilační spektrometrie	217
Santholzer Vilém: Struktura atmosféry odvozená z pohybu štěpných trosek	6
Skotnický Jozef: Význam Carnotova cyklu pro termodynamiku	358
Skyva Alois: Pokusy k představě povrchového napětí kapalin	367
Skyva Alois: Užití vakuu ve vědě a technice	271
Šindelář Václav: Styk dvou těles	
Šindelář Václav: Tvrdost a její měření	58, 107

Astronomie:

Andrle Pavel: O jednom „rozdílu“ mezi fyzikou a astronomií	420, 465
Grygar Jiří: Astronomické rekordy vzdáleností	168
Guth Vladimír: Uvidíme kosmickou loď?	455
Sehnal Ladislav: Umělé družice a kosmické rakety	174

Různé:

Horský Jan: Albert Einstein	361
Kotyk Josef: Galilei — otec principu relativnosti klasické mechaniky	237
Kotyk Josef: Z říše Inků	141
Machková Běla: Přijímací zkoušky na vysokých školách	335
Sedláček Jiří: Poznámka k jedné úloze MO	360
Zelenka Miloslav: Slovníček matematických výrazů	
	obálka č. 1—10
Zelinka Rudolf: K sedmdesátinám doc. J. Holubáře	236

Recenze:

Dubský Jaromír: Dvanáctý ročník Matematické olympiády	280
Holubář Josef: Český překlad Struikových Dějin matematiky	143
Redakce: V. B. Lidskij: Úlohy z elementární matematiky	380
Sedláčková Jiřina: Další přírůstky v knižnici MO	47
Sedláčková Jiřina: J. Holubář: Geometrická místa bodů v prostoru	476
Šedivý Jaroslav: Jiří Sedláček: Faktoriály a kombinační čísla	192
Šoler Klement: Dvě nové příručky pro fyziku	46
Vít Pavel: Matematická knižnice	48

Matematické a fyzikální zábavy:

Hofmanová Helena: Počítala na prstech	428
Hofmanová Helena: Problém města Kocourkova — řešení	376
Kašpar Emil: Spotřebuje se elektrický proud v elektrickém spotřebiči?	428
Koman Milan: Problém města Kocourkova	29
Koman Milan: Řešení úlohy o cyklistické dráze	222
Koman Milan: Řešení úlohy o zvoncích	137
Redakce: Nepřátel se nebojte, na množství nehleďte!	378
Ríman Evžen: Matematický problém	471
Sedláček Jiří: Největší dosud známé prvočíslo	283, 474
Setzer Ota: Doplnovačka	140, 473
Setzer Ota: Geometrické paradoxon	225, 284
Setzer Ota: Zajímavé číslo	139, 472
Šedivý Jaroslav: Kdo na tom vydělal?	283, 473
Šedivý Jaroslav: Průsečík výšek v méně známé roli	284, 472
Šedivý Jaroslav: Je šestka nevyhnutelná?	79, 471
Špačková Miloslava: Záhadný průměr	184, 427
Trávníček Stanislav: Čekání při místní dopravě	422

Úlohy k řešení:

17, 74, 114, 176, 221, 279, 328

Matematická a fyzikální olympiáda:

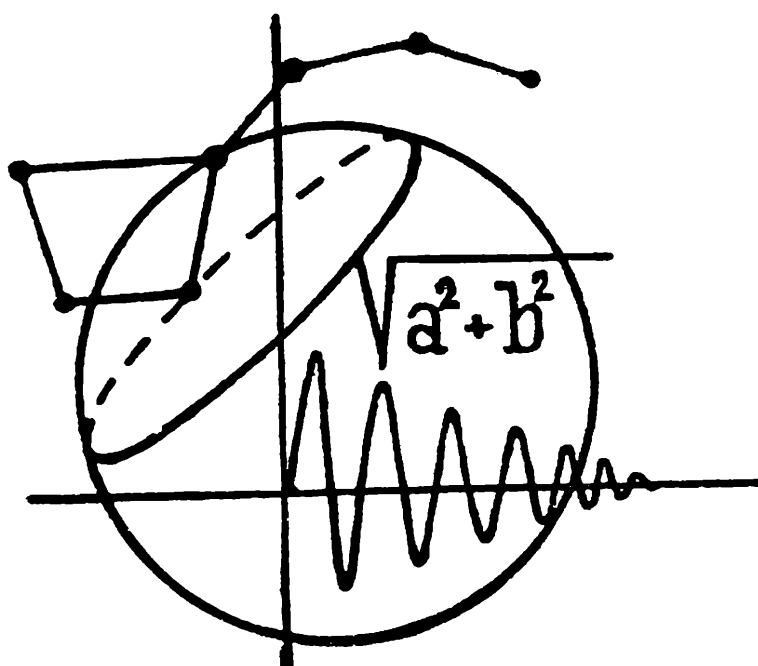
Hofman Konrád, Chytilová Marta: Vektorové znázornění střídavých proudů a symbolický počet	93, 123
Přípravné úlohy I. kola XIV. ročníku MO	30
Soutěžní úkoly XIV. ročníku MO	79
VI. ročník soutěže Fyzikální olympiády	33
Tesař Jan: Děje v plynech	184, 226
Tesař Jan: Zákon zachování hybnosti	88, 130
Zemánek Jaroslav: VI. mezinárodní matematická olympiáda	83

Redakční sdělení:

287

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



1

ROČ. 43

1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Září 1964

Číslo 1

Vedoucí redaktor doc. dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

P. Bartoš: O jedné specifické vlastnosti pravouhlých trojúhelníků	1
H. Husová: K jedné úloze Matematické olympiády	2
Prof. dr. V. Santholzer: Struktura atmosféry odvozená z pohybu štěpných trosek	6
Prof. R. Kunfalvi, Budapešť: Několik příkladů ze soutěže Loránda Eötvöse v roce 1962	11
CSc. J. Rajchl: Pozorujte bolidy	13
Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů	17
M. Toman: Problém města Kocourkova	29
Matematická olympiáda	30
Fyzikální olympiáda	33
Recenze	46
M. Zelenka: Rusko-český slovník (Pokračování)	3. a 4. strana obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

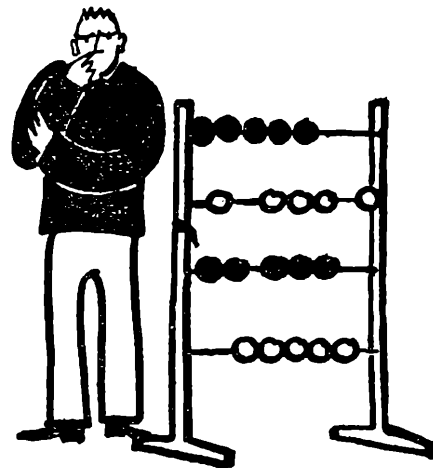
A-16*41456

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.

Matematika

P a v e l B a r t o š, Bratislava:

O jednej špecifickej vlastnosti pravouhlých trojuholníkov



Ide o takú vlastnosť, ktorú každý pravouhlý trojuholník má, ale ani jeden kosouhlý trojuholník nemá. Také špecifické vlastnosti pravouhlých trojuholníkov poznáte, napr.

1. Jeden vnútorný uhol je pravý.
2. Platia Euklidove vety a veta Pytagorova.
3. Stred opísanej kružnice leží na obvode trojuholníka (v strede prepony).
4. Ortocentrum (priesečník výšok) leží vo vrchole trojuholníka (vo vrchole pravého uhla) a iné.

Teraz dokážeme túto špecifickú vlastnosť pravouhlých trojuholníkov:

Nech a , b , c sú veľkosti strán trojuholníka. Čísla

$$x = \frac{c^2 - b^2}{a^2}, \quad y = \frac{c^2 - a^2}{b^2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \quad (1)$$

sú prirodzené čísla vtedy a len vtedy, keď trojuholník je pravouhlý a strana c je jeho prepona. Pritom $x = y = z = 1$.

Dôkaz. 1. Najprv dokážeme, že každý pravouhlý trojuholník vyslovenú vlastnosť má. Skutočne podľa Pytagorovej vety platí $c^2 = a^2 + b^2$, a preto

$$\frac{c^2 - b^2}{a^2} = 1, \quad \frac{c^2 - a^2}{b^2} = 1, \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

2. Treba dokázať, že ak trojuholník uvedenú vlastnosť má, je pravouhlý. Majme teda trojuholník so stranami a , b , c , pričom čísla x , y , z určené vzťahmi (1) sú prirodzené čísla. Musí byť $c > b$, $c > a$ a tak existuje číslo t , že platí

$$c^2 = a^2 + b^2 + t \quad (2)$$

(ak je trojuholník pravouhlý je $t = 0$, keď je kosouhlý je buď $t > 0$, buď $t < 0$). Podľa (1) a (2) potom platí

$$x = \frac{a^2 + t}{a^2}, \quad y = \frac{b^2 + t}{b^2}, \quad z = \frac{c^2 - t}{c^2},$$

odkiaľ vyplýva, že

$$t = a^2(x - 1) = b^2(y - 1) = c^2(1 - z).$$

Tu t nemôže byť kladné, v tom prípade by muselo byť $1 - z > 0$, teda $z < 1$, čo je nemožné, lebo z je prirodzené číslo. Ale t nemôže byť ani záporné, lebo v tom prípade by bolo $x - 1 < 0$, čiže $x < 1$, čo je opäť nemožné. Musí teda byť $t = 0$, čiže $x = y = z = 1$, čo dáva pravouhlý trojuholník s preponou c .

Tým je tvrdenie vety dokázané.

Úloha. Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka. Čísla

$$x = \frac{b^2 + c^2}{a^2}, \quad y = \frac{c^2 + a^2}{b^2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

sú prirodzené čísla vtedy a len vtedy, kde pomer veľkostí strán trojuholníka je alebo

$$1 : 1 : 1$$

(rovnostanný trojuholník), alebo

$$1 : 1 : \sqrt{2}$$

(rovnoramenný pravouhlý trojuholník), alebo

$$1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

(pravouhlý trojuholník, ktorý tvorí hrana kocky, jej stenová a telesná uhlopriečka).

Správne riešenie, ktoré pošlete redakcii, bude uverejnené.

H e l e n a H u s o v á, 5. tř. ZDŠ, Praha:

K jedné úloze Matematické olympiády

Redakce vítá příspěvek dvanáctileté autorky, který může být pobídkou i dalším mladým čtenářům k samostatné práci

V Matematické olympiádě kategorie C byla úloha: Rozhodněte, která z celých čísel od 0 do 11 nedostaneme jako zbytek při dělení (v oboru celých nezáporných čísel) druhé mocniny přirozeného čísla číslem dvanácti. V poznámce se doporučuje užít této věty:

V ě t a 1. Jsou-li d, n přirozená čísla, potom lze najít právě jednu dvojici celých nezáporných čísel k, z tak, že platí

$$n = kd + z,$$

kde $0 \leq z < d$.

Zobecnění této úlohy poskytuje řadu zajímavostí, z nichž některé zde ukáží:

V ě t a 2. Máme posloupnost druhých mocnin celých nezáporných čísel a dělíme je postupně přirozeným číslem $p > 1$. Všechny zbytky $z_k < p$ tvoří posloupnost opakujících se skupin čísel, přičemž

$$z_k = z_{k+p}.$$

D ů k a z. Máme dokázat, že

$$z_k = z_{k+p}.$$

Platí totiž

$$k^2 = l_k p + z_k, \quad (1)$$

kde $0 \leq z_k < p$

$$(k+p)^2 = l_{k+p} p + z_{k+p}, \quad (2)$$

kde $0 \leq z_{k+p} < p$.

Dále platí

$$(k+p)^2 = k^2 + 2kp + p^2.$$

Podle (1) je

$$\begin{aligned} (k+p)^2 &= l_k p + z_k + 2kp + p^2, \\ (k+p)^2 &= p(l_k + 2k + p) + z_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Z (1) a (3) plyne podle věty 1

$$z_k = z_{k+p},$$

což se mělo dokázat.

D e f i n i c e. O konečné posloupnosti čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ (n je přirozené číslo) říkáme, že je uspořádána symetricky, jestliže platí:

Je-li

$$n = 2k,$$

pak

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \dots, a_{k-1} = a_{k+1}, a_k = a_k.$$

Je-li

$$n = 2k + 1,$$

pak

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots, a_k = a_{k+1}.$$

V ě t a 3. Budiž $z_0, z_1, \dots, z_p$ konečná posloupnost zbytků menších než p , které dostaneme, když čísla $0^2, 1^2, 2^2, \dots, p^2$ dělíme přirozeným číslem $p > 1$. Pak konečná posloupnost

$$\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_p\}$$

je uspořádána symetricky.

Dokážeme tedy, že

$$z_s = z_{p-s},$$

kde $p \geq s$ a s je přirozené číslo.

D ů k a z. Podle věty 1 je

$$\begin{aligned} s^2 &= l_s p + z_s, \quad 0 \leq z_s < p, \\ (p-s)^2 &= l_{p-s} p + z_{p-s}, \quad 0 \leq z_{p-s} < p. \end{aligned} \quad (4)$$

Dále platí

$$(p-s)^2 = p^2 - 2ps + s^2. \quad (5)$$

Podle (4) a (5) je

$$\begin{aligned} (p-s)^2 &= p^2 - 2ps + l_s p + z_s, \\ (p-s)^2 &= p(p-2s+l_s) + z_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Podle (4) a (6) platí tedy

$$z_s = z_{p-s},$$

jak se mělo dokázat.

V ě t a 4. Je-li přirozené číslo tvaru $p = 4k$, kde k je přirozené číslo, pak konečná posloupnost zbytků

$$\{z_0, z_1, \dots, z_{2k}\}$$

menších než p je uspořádána symetricky.

D ů k a z. Je-li $s \leq 2k$, kde s je přirozené číslo, pak platí

$$z_s = z_{2k-s}.$$

Podle věty 1 je

$$s^2 = l_s p + z_s, \quad 0 \leq z_s < p, \quad (7)$$

$$(2k-s)^2 = l_{2k-s} p + z_{2k-s}. \quad (8)$$

Dále platí

$$(2k-s)^2 = 4k^2 - 4ks + s^2, \quad (9)$$

$$4k^2 = 4k \cdot k = pk,$$

$$(2k-s)^2 = p(k-s+l_s) + z_s.$$

Je tedy

$$z_s = z_{2k-s},$$

což jsme chtěli dokázat.

V ě t a 5. Buď dáno nezáporné číslo n a přirozené číslo p . Položme

$$n^2 = l_n p + z_n, \quad (10)$$

kde $0 \leq z_n < p$

$$(n+1)^2 = l_{n+1} p + z_{n+1}, \quad (11)$$

kde $0 \leq z_{n+1} < p$

$$(n+1)^2 - n^2 + z_n = bp + y, \quad (12)$$

kde $0 \leq y < p$.

Platí, že

$$z_{n+1} = y$$

D ů k a z, že

$$z_{n+1} = y .$$

Platí

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = (n^2 - z_n) + (2n + 1 + z_n) , \quad (13)$$

$$(n+1)^2 - n^2 + z_n = 2n + 1 + z_n .$$

Z (12) a (13) plyne

$$2n + 1 + z_n = bp + y . \quad (14)$$

Protože platí (11) a (14), bude

$$(n+1)^2 = p(l_n + b) + y , \quad (15)$$

kde $0 \leq y < p$.

Podle věty 1 a podle (11) je tedy

$$z_{n+1} = y$$

Tak např.: Máme vypočítat zbytek při dělení $584^2 : 329$ a víme, že zbytek při dělení $583^2 : 329$ je roven 32. Podle této věty 5 platí: Zbytek získáme, aniž dělení provedeme, takto: K rozdílu $584^2 - 583^2$, tj. k součtu jejich základů¹⁾, v našem případě k číslu 1167, přičteme daný zbytek a součet dělíme číslem 329. To je $1199 : 329 = 3$ (zb. 212). K témuž zbytku se dospěje, dělíme-li $584^2 : 329 = 341\,056 : 329 = 1036$ (zb. 212). Zbytek je v obou výpočtech stejný. První postup je snazší, protože počítáme s menšími čísly. Uplatní se zvláště při postupném zjišťování čísel z množiny zbytků.

V ě t a 6. Je dáno přirozené číslo n a dělitel $p > 1$. Položme

$$n = kp + z , \quad (16)$$

$$n^2 = lp + r , \quad (17)$$

$$0 \leq z < p , 0 \leq r < p . \quad (18)$$

Platí

1. Je-li $z^2 < p$, pak $r = z^2$.

2. Je-li $z^2 \geq p$, to znamená

$$z^2 = mp + s , \quad (19)$$

kde m je přirozené číslo a s celé číslo takové, že $0 \leq s < p$, pak $r = s$.

D ů k a z. 1. Podle (16) je

$$n^2 = k^2p^2 + 2kpz + z^2 = p(k^2p + 2kz) + z^2 .$$

Odtud podle (17) je

$$p(k^2p + 2kz) + z^2 = lp + r .$$

¹⁾ $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1 = a + a + 1$.

Podle věty 1 tedy máme

$$z^2 = r,$$

jak jsme měli dokázat.

2. Spojme (16) a (19), pak

$$n^2 = p(k^2p + 2kz + m) + s$$

Odtud podle (17) je

$$n^2 = p(k^2p + 2kz + m) + s = lp + r$$

a konečně podle věty 1 platí

$$r = s,$$

což jsme chtěli dokázat.

Z á v ě r. Nyní můžeme velmi jednoduše vyřešit olympiádní úlohu. Protože $12 = 4 \cdot 3$, podle věty 4 stačí dělit číslem 12 čísla 0^2 , 1^2 , 2^2 , 3^2 . Podle věty 6 jsou tedy zbytky pouze čísla 0, 1, 4, 9.



Fyzika

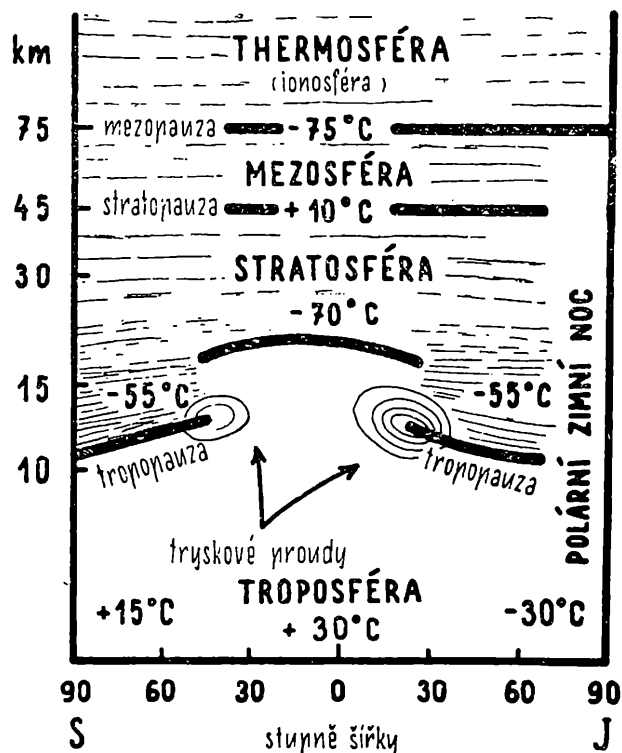
Prof. dr. Vilém Santholzer,
KU Hradec Králové:

Struktura atmosféry odvozená z pohybu štěpných trosek

Nukleární zkoušky, tj. pokusné výbuchy atomových a vodíkových pum v ovzduší, jsou zdrojem štěpných trosek. Jsou to radioaktivní částice, které se rozletí do troposféry a stratosféry a odtud dopadají na zemský povrch jako *radioaktivní spad*, který je možno zachycovat a měřit. Z výsledků měření aktivity spadu je možno odvozovat, jak se spad šíří v ovzduší, jak klesá ze stratosféry do troposféry a jaký „model“ atmosféry nejlépe vysvětluje velmi nápadný, každoročně se vyskytující jev silného *jarního zvýšení aktivity spadu*. Jarní zvýšení aktivity spadu se projevuje i tehdy, když rok předtím nebyly prováděny žádné pokusné výbuchy, jako např. v roce 1959.

Na obr. 1, který byl nakreslen podle posledního svazku publikací *Radiační komise při OSN* v New Yorku, je schematický náčrt struktury

atmosféry v červnu, kdy se projevují tzv. mezery v *tropopauze*¹⁾, jimiž radioaktivní spad klesá ze stratosféry do troposféry. V troposféře se tvoří mraky, vznikají zde atmosférické srážky a odehrává se turbulentní mísení. Stratosféra má stabilnější strukturu.



Obr. 1. Náčrt struktury atmosféry koncem jara. Jednotlivé části atmosféry jsou: troposféra, stratosféra, mezoféra a termosféra (ionosféra). Hraniční vrstvy mezi nimi jsou tropopauza, stratopauza a mezopauza.

Na obr. 1 na jedné ose jsou naneseny stupně šířky, na druhé (ve zkráceném měřítku) je výška nad Zemí. Obrázek vystihuje stav, kdy na severní polokouli začíná léto. Radioaktivní prach pod tropopauzou může být rychle přenášen tzv. tryskovými větrnými proudy, jak se po nukleárních zkouškách často stává. Tryskové proudy jsou naznačeny na obr. 1 v okolí *průlomu tropopauzy*. Název *průlom tropopauzy* je obrazný, neboť znamená vlastně pokles studeného stratosférického vzduchu a s ním i pokles štěpných trosek. Chladné vzduchové hmoty v zimě ve vysokých šířkách jsou též zásobárnou ozónu. Tento vzduch klesá v pozdní zimě a na jaře do nižší stratosféry v nižších šířkách. Tím je vysvětlováno zvyšování obsahu ozónu a s ním i štěpných produktů v pozdní zimě a na jaře. Po explozích velkých vodíkových pum zvyšování aktivity nukleárního spadu doznívalo následujícího roku až na začátku léta (obr. 5).

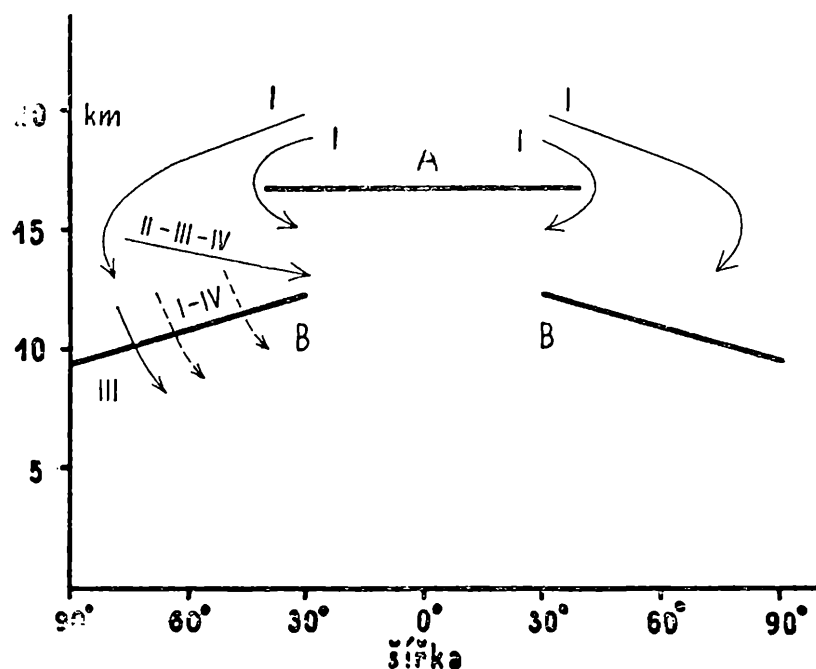
Je možno se domnívat, že teprve při ráži pumy nad 200 kilotun (tj. rovnocenné 200 000 tun TNT, trinitrotoluenu) jsou štěpné trosky vymrštěny nad tropopauzu v oblasti rovníkové, a nad 100 kilotun v oblasti polární. Menší pumy vytvoří pouze spad troposférický.

Na obr. 2 je schematicky naznačeno, jak se spad stratosférický, vytvořený následkem výbuchů nukleárních pum větší ráže, zvláště pum megatunových, dostává do troposféry. Průnik štěpných trosek nastává i tropopauzou mírného pásma, kde je tedy druhá „mezera“.

Na obr. 3 je zdokonalený model stratosféry do výšky asi 30 km (podle Goldsmitha a Browna z r. 1961). Vzduchové hmoty z rovníku

¹⁾ Tropopauza, hraniční vrstva mezi troposférou a stratosférou, na obr. 1 schematicky naznačená silnou čarou, je u nás ve výši kolem 11 km, v rovníkové oblasti kolem 17 km.

(0°), kde je naznačen nukleární výbuch, se záhy zatačejí k pólům a nedosahují velkých výšek. Meridionální proudění, tj. proudění ve směru poledníků je rychlé jen nad tropopauzou. Nahoře se zpomaluje, jak naznačují šipky *s*. Vzduchové hmoty ve vyšších oblastech, kde se tvoří ozón (O_3) setrvávají asi jeden rok. Během polární noci se přesunují a zásobují nižší stratosféru ozónem i štěpnými zplodinami z nukleárních výbuchů.



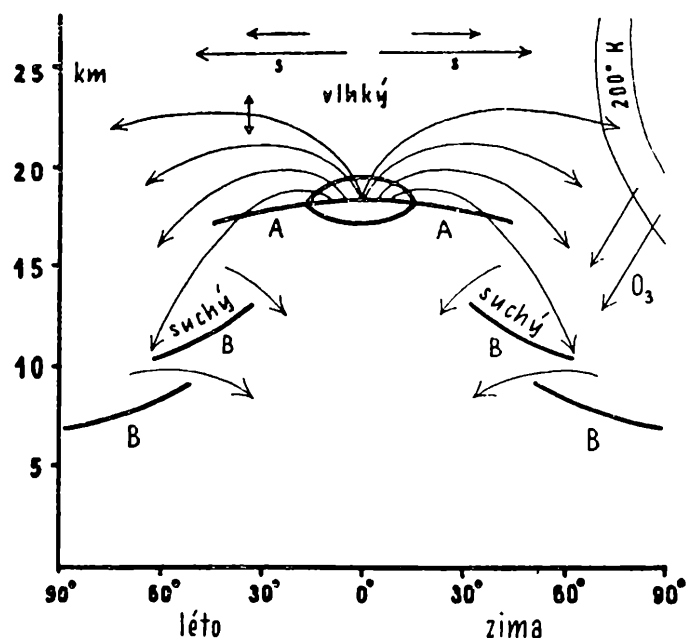
Obr. 2. Model atmosféry, v němž radioaktivní štěpné trosky vstupují ze stratosféry do troposféry hlavně mezerou mezi tropopauzou rovníkovou (A) a tropopauzou (B) mírného pásma (šipky I). Průnik štěpných trossek nastává však také zčásti tropopauzou v mírném pásmu (šipky I–IV).

Model atmosféry na obr. 3 má dvě mezery v tropopauze. Snaží se vystihnout skutečnost, že stratosféra nad 25 km nemá již velké pohyby vertikální a meridionální a obsahuje vlhký vzduch. Dokázaly to nukleární výbuchy prováděné v různých výškách. Když byl výbuch proveden v rovníkové oblasti v nízké stratosféře, radioaktivní zplodiny se dostaly do středních šířek za 1 až 2 měsíce. (Dlouhé šipky na obr. 3, které se zatačejí dolů.) Jiný pokus v rovníkové stratosféře ve výškách 30 až 80 km dokázal, že vzniklá radioaktivita se objevila nad USA až za 13 měsíců (krátké šipky *s* na obr. 3).

O příčině vlhkosti jsou zatím jen různé teorie. Tak např. vodní pára by mohla vznikat okysličováním protonů ze Slunce, takže by byla zčásti mimozemského původu.

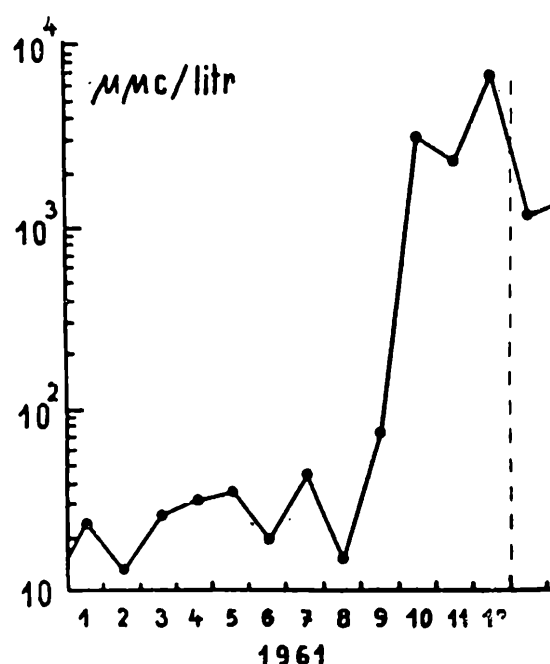
Model na obr. 3 se snaží vystihnout i výsledky měření koncentrace tritia (nejtěžšího izotopu vodíku H_3), radiouhlíku C_{14} , stroncia 90 aj. radioizotopů, takže dosud je nejlépe propracovaným modelem.

Na obr. 4 je graficky zaznamenáno náhlé stoupnutí troposférického spadu po zahájení megatunových výbuchů koncem r. 1961. Na obr. 4 jsou průměrné měsíční radioaktivity dešťů, které dobře vystihují radioaktivitu troposféry. Na ose radioaktivit je logaritmické měřítko, aby bylo možno vystihnout stoupnutí asi $1 \cdot 10^3$.



Obr. 3. Model stratosféry do výšky asi 30 km, který se snaží vystihnout nejen přítomnost různých radioizotopů ve stratosféře, ale i poměry vlhkosti a sezónní změny ozónu.

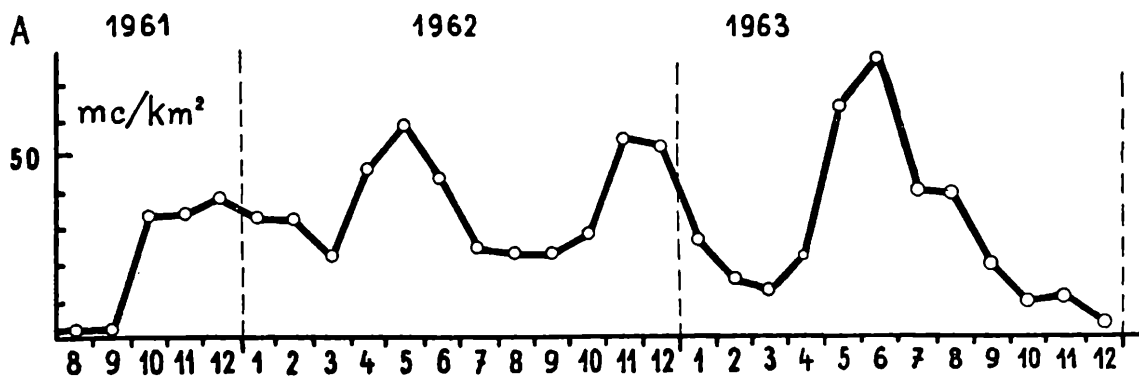
Obr. 4. Náhlé stoupnutí průměrné měsíční radioaktivity dešťových srážek následkem troposférického spadu vzniklého z megatunových jaderných zkoušek na podzim 1961. Aktivita je uvedena v miliontínách mikrocurie pro 1 litr = pikocurie/litr.



Na obr. 5 je histogram (časový průběh) měsíčních radioaktivit spadu od konce r. 1961 do konce r. 1963. Velmi nápadně se u nás projevilo jarní zvýšení aktivity spadu na jaře 1963, s maximem v červnu 1963, ačkoliv poslední nukleární výbuchy byly provedeny v létě 1962. Zdrojem štěpných trosek byl *stratosférický rezervoár*, který se uplatňuje dodnes, i když nyní dopadá na zemský povrch již jen nepatrné množství

radioaktivity. Nukleární výbuchy v ovzduší byly totiž moskevskou dohodou z 5. srpna 1963 zakázány.

Doba prodlevu štěpných trosek ve stratosférickém rezervoáru patrně vzrůstá se stoupající výškou výbuchu. V mezoféře (obr. 1) je asi 5 let, kdežto v nízké polární stratosféře jen asi 5 měsíců. Současná naše měření na katedře fyziky KU v Hradci Králové přispějí k řešení této otázky.



Obr. 5. Aktivita radioaktivního spadu sbíraného měsíčně v letech 1961–1963. Aktivita je uvedena v millicurie na $1 \text{ km}^2 = \text{mc/km}^2$. Na jaře 1962 a 1963 se objevilo nápadné zvýšení aktivity, způsobené jarním poklesem štěpných trosek ze stratosféry do troposféry, podle modelu naznačeného na obr. 2 a 3. Radioizotopy ve spadu na jaře 1962 a 1963 nebyly čerstvé, pocházely ze stratosférického rezervoáru.

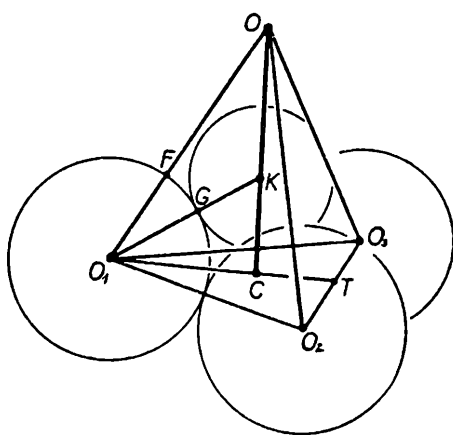
Doba prodlevu štěpných trosek v troposféře je zhruba asi 1 měsíc, jak dokazuje měření aktivity spadu po nukleárních zkouškách ryze troposférického charakteru, tj. výbuchů atomových pum menších ráží. Všechny tyto údaje mají praktický význam v tom, že podle nich je možno odhadnout radioaktivní „zátěž“ lidstva, tj. intenzitu ozařování. Zatím je zcela nepatrná, avšak pokračování v nukleárních zkouškách mohlo by znamenat vážné nebezpečí.

Závěrem je třeba uvést, že modely atmosféry jsou teprve v počátečním stavu vývoje a mnohé na nich bude opraveno a doplněno na základě dalších pozorování. Modely atmosféry nesmíme chápat jako stacionární, strnulé. Tropopauza, nad níž jsou nahromaděny radioaktivní zplodiny, se v mírných a polárních šířkách neustále vlní, protože je v úzkém vztahu s tlakovými útvary v troposféře. Tak je nutno chápat i tropopauzu na obr. 1 až 3.

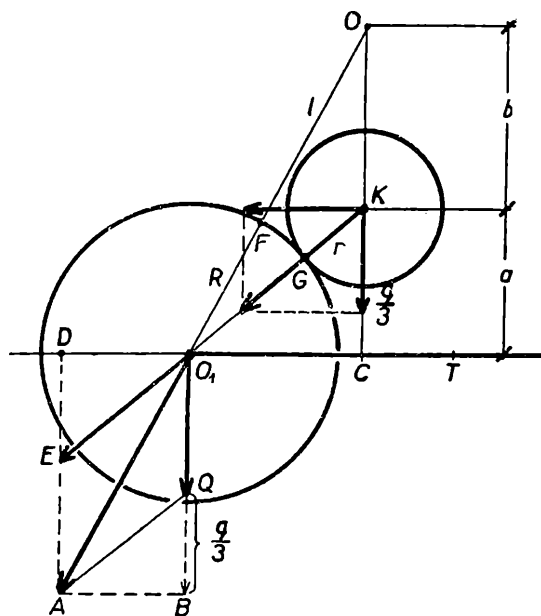
Několik příkladů ze soutěže Loránda Eötvöse v roce 1962

(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)

Fyzikální společnost Loránda Eötvöse v Budapešti pořádá každoročně soutěž pro studenty, kteří jsou před maturitou. Soutěž probíhá vždy na podzim, a to v Budapešti a v šesti provinčních městech. Účastníci soutěže mají během pěti hodin vyřešit tři příklady. Přitom je možno používat libovolných pomůcek, knih a tabulek. Příklady předpokládají znalost pouze středoškolské látky, ovšem též dobré fyzikální myšlení. Soutěž Loránda Eötvöse pořádá se již od roku 1916. Řada příkladů minulých ročníků byla publikována ve dvou svazcích. Každoročně se soutěže účastní asi 100 studentů. Dobré umístění v soutěži je opravdovým úspěchem. Ve výčtu těch, kteří se v dřívějších letech význačně umístili v této soutěži, našli bychom řadu osobností, které později vynikly v maďarském vědeckém životě.



Obr. 1



Obr. 2

V dalších odstavcích uvádíme zadání příkladů soutěže z roku 1962, a to i s diskusí a řešením.

Příklad 1. Tři koule (o poloměru $R = 5$ cm, tíhy $Q = 1$ kp) jsou zavěšeny na vláknech délky $l = 7,5$ cm. Horní konce vláken jsou upevněny ve společném bodě. Na tyto tři koule, jež se dotýkají, vložíme shora čtvrtou kouli (o poloměru $r = 2,5$ cm a tíze q). Má se určit největší tíha q této čtvrté koule, aby nepropadla mezi třemi zavěšenými koulemi. Tření přitom zanedbáváme.

Tamás Bártfai

Ř e š e n í. Nejprve si ujasněme geometrické podmínky (obr. 1). Těžiště tří velkých koulí tvoří rovnostranný trojúhelník s délkou strany $2R$. Výška tohoto trojúhelníka je $O_1T = R\sqrt{3}$. Závěsná vlákna tvoří hrany jehlanu, s délkami $O_1F + FO = R + l$. Výška jehlanu OC dělí výšku základny v poměru $2 : 1$, je tedy $O_1C = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$.

Těžiště malé koule K leží na výšce CO . Obr. 2 ukazuje kolmý řez O_1TO . Zřejmě platí

$$O_1K = O_1G + GK = R + r.$$

Všechny délky můžeme vypočítat. Např. vzdálenost těžiště malé koule nad základnou jehlanu (určenou třemi těžišti velkých koulí) je rovna

$$a = \sqrt{(R + r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2}$$

Vzdálenost KO středu malé koule od závěsného bodu vláken je dána vztahem

$$b = \sqrt{(R + l)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2} - \sqrt{(R + r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2}$$

Kulička s poloměrem menším nežli $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)R$ by propadla v každém případě mezi koulemi velkými, ať je jejich tíha jakákoliv. Uvažujeme-li celý případ bez tření, musí ležet úsečky O_1F a FO na společném paprsku, jinak by byl střed O_1 výše nežli středy O_2 a O_3 . Délka první úsečky je délkou poloměru velkých koulí, délka druhé úsečky je délkou závěsného vlákna.

Příklad může být řešen jen tímto způsobem: Dotýkají-li se vzájemně velké koule, aniž však na sebe silově působí, musí výslednice tíhy Q každé z velkých koulí a síly vyvozené tíhou malé koule na velkou kouli, spadat do směru prodlouženého vlákna, na němž je zavěšena velká koule. Třetina tíhy malé koule, jež svým působením připadá na každou ze tří velkých koulí, vyvozuje sílu EO_1 ve směru O_1K , k níž vektorově přičteme tíhu Q a dostaneme výslednici AO_1 ve směru vlákna.

Protože trojúhelník $\triangle EO_1D$ je shodný s trojúhelníkem $\triangle ABQ$, je síla

$$ED = BQ = \frac{q}{3}.$$

Z rovnosti úhlů plyne podobnost trojúhelníků ABO_1 a O_1CO (obr. 2) a z toho dále plyne

$$\frac{q}{3} : Q = a : b$$

a také

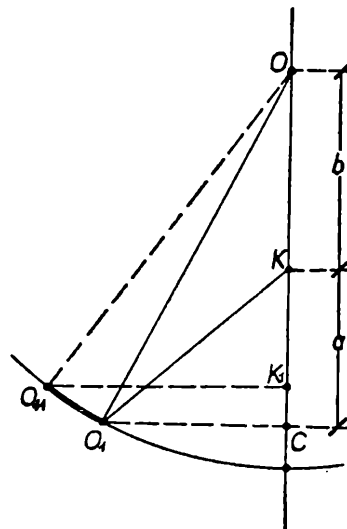
$$q = 3Q \cdot \frac{a}{b}.$$

Tato rovnice je řešením úlohy. Splňuje-li tíha malé kuličky tuto podmínku, budou ležet výslednice tíhy velkých koulí a složek tíhy malé koule vesměs ve směrech závěsných vláken. Byla-li by tíha malé koule větší, vykloní se výslednice vně a malá koule by propadla.

Je však třeba ještě přesněji vyšetřit podmínky děje. Co se stane, je-li tíha menší koule větší než $3Q \frac{a}{b}$ a větší koule se právě od sebe rozevírají; bude

proces dále pokračovat a menší koule propadne, nebo nastane snad nová rovnováha mezi koulemi a menší koule se někde mezi rozevírajícími se koulemi zastaví? Tato otázka je dosud otevřená. Musíme ji proto zodpovědět.

Když se velké koule rozestupují, pohybuje se K svisle dolů, O_1 pak po kruhu o poloměru $R + r$ vzhůru, přičemž vzdálenost $O_1K = R + r$ zůstává nezměněna (obr. 3). Takový pohyb můžeme sledovat mezi počáteční polohou O_1 a K až do konečné polohy O_{11} a K_1 , kdy oba tyto body leží na téže vodorovné přímce. Pak už malá koule rozhodně propadává. Z obrázku je zřejmé, že zatím co se velká koule pohybuje vzhůru a stejně tak i průměr C jejího středu do svislice, klesá K . Vzdálenost a se tedy zmenšuje a b se zvětšuje. Zlomek a/b se musí nutně zmenšovat, když velká koule půjde vzhůru. Z toho plyne, že je v takovém případě možná rovnováha jen při menší tíze menší koule, než jaké bylo počáteční q . Při neproměnném q nemůže tedy dojít k žádnému rovnovážnému stavu. Dosáhne-li tíha menší koule mezní



Obr. 3

hodnoty $3Q \frac{a}{b}$, rozestoupí se prostě velké koule a malá koule propadne.

Z hodnot zadaných v příkladě dostáváme $a = 4,78$ cm, $b = 6,30$ cm. $\frac{a}{b} = 0,759$. Tíha menší koule v mezním případě je $q = 2,276$ kp. Při větší tíze malá koule propadne.

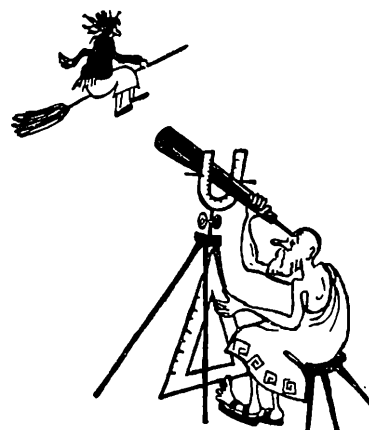
(Pokračování)

Astronomie

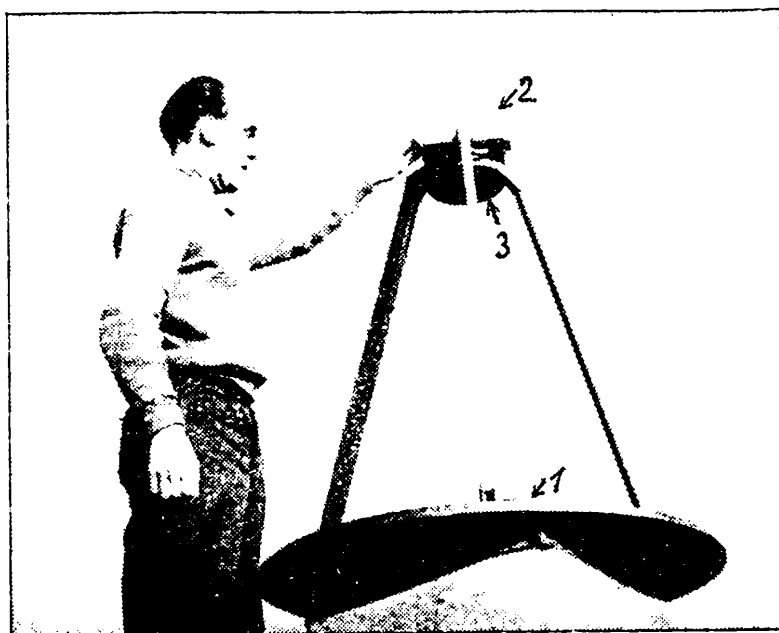
Josef Rajchl, CSc,
Astronomický ústav ČSAV, Ondřejov:

Pozorujte bolidy

Koncem minulého roku byl hvězdárnou v Ondřejově zaveden na území naší republiky nový pozorovací program. Týká se pozorování velmi jasných meteorů, jak říkáme *bolidů*. Impuls k zavedení tohoto programu dalo cenné a ve světě dosud ojedinělé vyfotografování přeletu velmi jasného meteoru v r. 1959 ze dvou stanic, jehož zbytky



byly pak podle fotografií nalezeny jako známé Příbramské meteority. Snaha zachytit co nejvíce takových případů vedla pracovníky hvězdárny v Ondřejově k realizaci programu tzv. celooblohových komor.



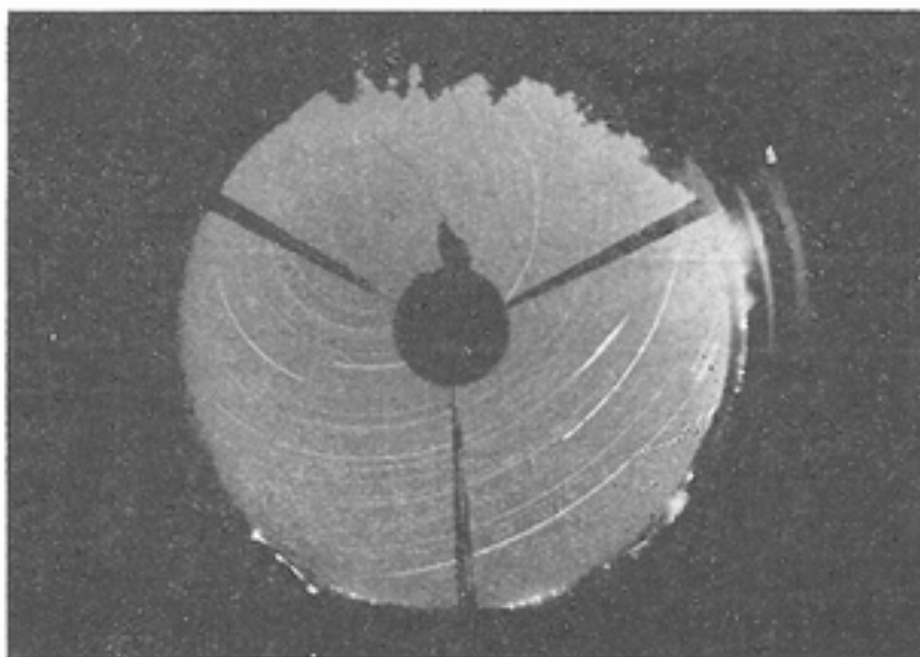
Obr. 1

Velmi jasné meteory, jasnější obvykle než 10. hvězdné velikosti vyvolávají při svém průletu ovzduším celou řadu světelných, zvukových a elektrických efektů, které dosud nemohly být podrobněji studovány. Rovněž fyzikální procesy, odehrávající se v rázové vlně, která je vyvolána přeletem tělesa letícího nadzvukovou rychlostí, je třeba dnes podrobněji sledovat i při vyšších, právě meteorických rychlostech (tj. 10 až 70 km/s). Takové rázové vlny vznikají např. i při návratu umělých kosmických těles na Zemi. Zde je však můžeme sledovat jen při podstatně nižších rychlostech. Jinou takovou otázkou je zjištění, jak musí být velké a tím při dané rychlosti jasné původní meteorické těleso, aby z něho dopadl na zemský povrch meteorit určitého rozměru. Podobně problém tvaru a rozložení drah těchto těles ve sluneční soustavě, jejich vznik a stáří v souvislosti s působením kosmického a korpuskulárního záření Slunce, to vše teprve čeká na rozřešení.

Program celooblohových komor má za cíl zvýšit pravděpodobnost vyfotografování přeletu bolidů. Je známo, že právě těch neobyčejně jasných meteorů létá méně než středně jasných. Často ještě příznivé pozorovací podmínky jsou jen na některých místech území, jinde vadí pozorování oblačnost. Tak např. nedávno nalezený meteorit v Ústí nad Orlicí dopadl ve dne a zatím se nám přihlásil pouze jediný svědek, který na Moravě pozoroval jeho přelet jako jasného meteoru. Na většině našeho území nebyl prakticky pozorovatelný pro nepříznivé počasí.

Proto komory rozmístujeme na různá místa. Zatím je v provozu pět stanic na území naší republiky, umístěných buď na lidových hvězdárnách, nebo na stanicích meteorologické služby. Na každé stanici je jedna komora, která se skládá ze zrcadla o průměru 36 cm (viz 1 na obr. 1), které zobrazuje celou oblohu (obr. 2, přerušovaná čára je meteor, obloučky jsou stopy hvězd) na kinofilmové políčko fotoaparátu, umístěného nahoře (2 na obr. 1). Systém se podobá komorám užívaným v zahraničí k fotografování polárních září. Navíc však ještě před objektivem rotuje malá clonka (3 na obr. 1), která slouží k určení rychlosti meteoru. Stanice jsou od sebe vzdáleny 80 až 120 km. V budoucnu počítáme asi s 20 takovými stanicemi na území ČSSR. Chtěli bychom tuto síť rozšířit i na okolní evropské státy. Na americkém kontinentě podobný program zahájila již hvězdárna Harvardské university.

Naše komory pracují za jasného počasí v novoluní a v období první a poslední čtvrti Měsíce. Jejich možnosti jsou tedy omezeny. Nezachytí nám bolidy při měsíčním úplňku a za denního světla. A víme, že často právě v těchto obdobích dojde k přeletu neobvykle jasných meteorů. V takových případech se musíme opřít o méně přesná, avšak důležitá pozorování náhodných svědků. Právě 14. února t. r., 20 minut před zahájením provozu našich stanic, tedy ještě za denního světla došlo k přeletu velmi jasného meteoru nad územím naší republiky. Dostali

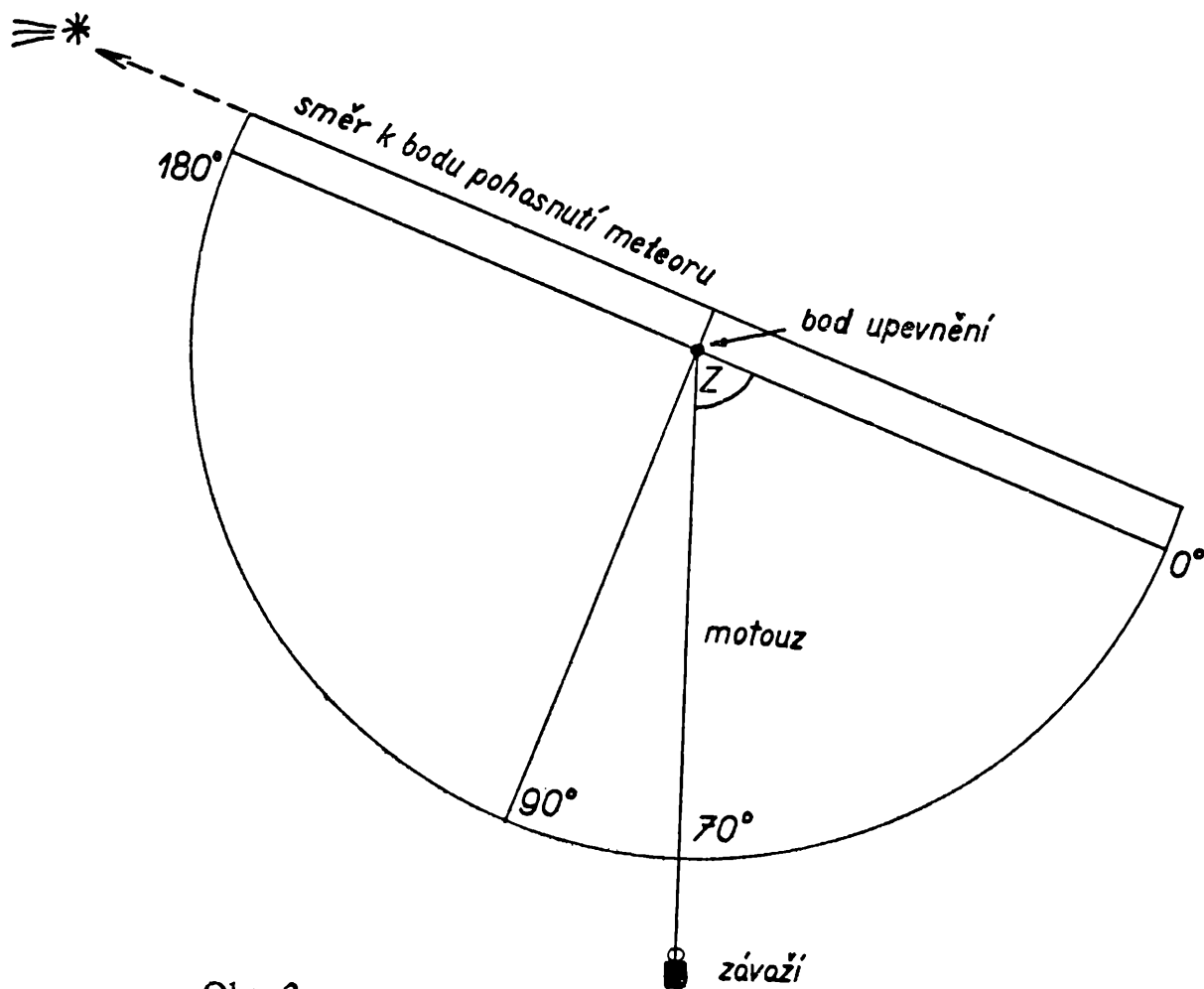


Obr. 2

jsme stovky pozorování, avšak řada z nich si všímala pro nás celkem nepodstatných znaků, např. barvy.

Zastavme se u takových pozorování trochu podrobněji. Především si řekneme, jaký cíl mají tato pozorování. Jde nám především o to, abychom z nich mohli určit oblast, nad kterou meteor pohasl a kde

se tedy dá očekávat eventuální dopad meteoritů. Stačí tedy všimnout si skutečně jen neobvykle jasných meteorů, které ve dne obvykle zanechávají kouřové stopy, jejichž jasnost není menší, než jasnost čtvrti Měsíce. U takových meteorů je třeba si všimnout směru a výšky míst, kde meteor začal svítit a kde pohasl. Je nutno do pozorování uvést, zda byl pozorován bod pohasnutí, anebo meteor zmizel za dům, za les apod. Polohu bodu pohasnutí je nejlépe si zapamatovat vůči okolním předmětům, např. střechám domů, stromům, komínům a současně je také třeba si zapamatovat stanoviště, odkud jsme těleso pozorovali.



Obr. 3

Pak totiž je možno kdykoliv na místo přijít a znovu si všechny údaje ověřit. Rozhodně je lépe si místa zapamatovat a přizvat pracovníky hvězdárny, aby si ostatní změřili sami, než uvádět nejisté údaje. Kdo si troufá, může měření provést sám, a to směr k místu pohasnutí změří buzolou a výšku třeba pomocí úhlooměru (obr. 3) tak, že si na něj připevní zatížený motouz, který vytváří svislou ručičku a podél rovné hrany úhlooměru hledí do místa pohasnutí. Ručička pak ukáže na stupnici přímo hodnotu úhlové vzdálenosti místa od zenitu z . Pro hrubé udání směru však stačí i určení směru na okolní osady, kopce apod.

Důležité je rovněž všimnout si aspoň přibližně času, kdy byl meteor pozorován, poněvadž je možné, že ten den jich třeba letělo více. Tak 14. února mimo uvedený meteor letěl ještě jeden ráno a dva další večer. Podstatné je též povšimnout si, zda přelet byl provázen hučením, šuměním, ranami (kolika), praskáním apod. Někdy je možno i pozorovat rozpad tělesa během letu na několik kusů, a tak určit i jednotlivé konce svícení různých odštěpků. Údaje o barvě pro nás nemají prakticky cenu; rovněž konstatování, že meteor musel spadnout velmi blízko, je obvykle přehnané. Ovšem jsou i případy, kdy se lidé přímo stanou svědky dopadu meteoritu do jejich blízkosti. Pak je třeba takový případ ohlásit, a to buď hvězdárně v Ondřejově, nebo mineralogickému oddělení Národního muzea v Praze a pokud možno postarat se, aby do příjezdu pracovníků ústavu zůstalo místo dopadu neporušeno. Rozhrabávání půdy a podobné zásahy znehodnotí mnohdy úplně jediný zdroj informací o letu meteoru, kterým jsou tvar, poloha, hloubka jámy, vytvořené dopadem meteoritu. Neboť nejsou vždy k dispozici fotografická nebo vizuální pozorování přeletu meteoru, jehož zbytkem byl dopadlý meteorit.

Řešení úloh

loňské soutěže Rozhledů



Příklady pro novou soutěž nalezne čtenář v dalších číslech spolu s udáním termínů k jejich odevzdání.

Fyzika:

1. Svazek částí nakloněných rovin ($p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ - obr. 1) má stejný průmět $a = 0,5$ m do vodorovné roviny. Po rovinách necháme smýkat nějaké těleso, přitom smykavý pohyb uvažujeme bez tření. Pohyb děje se ve všech případech z klidu, vždy po celé délce nakloněné roviny, a to pouze tíhovými účinky ($g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$).

Máme určit:

1. Jaký musí být úhel sklonu (s rovinou horizontální) jedné z rovin, aby doba pohybu tělesa po ní byla rovna $t = 0,6$ s.

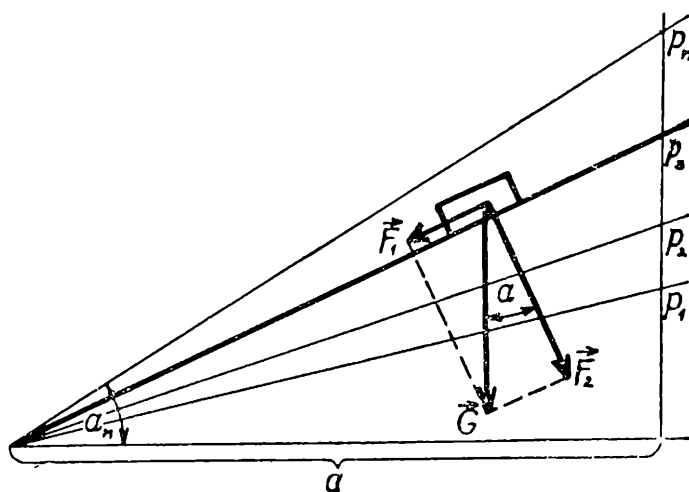
2. Při jakém úhlu α_m byla by doba smýkání nejmenší?

Václav Šindelář

(Došlo 16 řešení)

Řešil Karel Henc, 2. b, SVVŠ, Brno, Koněvova ul.:

1. Váha tělesa se na nakloněné rovině rozkládá na dvě složky: tlakovou F_2 , která je rušena pevností nakloněné roviny, a pohybovou F_1 , která způsobuje pohyb tělesa. Tyto složky jsou navzájem kolmé. Platí:



Obr. 1

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G},$$

$$F_1 = G \sin \alpha.$$

Pohyb tělesa je rovnoměrně zrychlený. Je charakterizován zrychlením a' . Je tedy z 2. Newtonova pohybového zákona

$$F_1 = ma', \quad G = mg$$

a z toho

$$ma' = mg \sin \alpha,$$

$$a' = g \sin \alpha.$$

Pro pohyb rovnoměrně zrychlený platí

$$s = \frac{a'}{2} t^2,$$

kde s je délka nakloněné roviny. Platí však

$$\cos \alpha = \frac{a}{s}, \quad s = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Dosadíme:

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 \cdot 4 \cos \alpha$$

$$4a = gt^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$4a = gt^2 \cdot \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4a}{gt^2}.$$

Provedeme rozměrovou zkoušku. Goniometrické funkce nemají fyzikální rozměr, musí tedy pravá strana vztahu být také bez rozměru.

$$\frac{m}{m \cdot s^{-2} \cdot s^2} = 1.$$

Rozměrová zkouška souhlasí, dosadíme tedy číselné hodnoty $a = 0,5 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, $t = 0,6 \text{ s}$,

$$\sin 2\alpha = \frac{4a}{gt^2} = \frac{2}{9,8 \cdot 0,36} = \frac{1}{4,9 \cdot 0,36} = \frac{1}{1,764} = 0,5669;$$

$$2\alpha = 34^\circ 32'; \quad 2\alpha' = 145^\circ 28';$$

$$\alpha = 17^\circ 16'; \quad \alpha' = 72^\circ 44'.$$

Doba smykání bude $t = 0,6 \text{ s}$ při úhlu $\alpha = 17^\circ 16'$, nebo $\alpha' = 72^\circ 44'$.

2. Vyjdeme ze vztahu $4a = gt^2 \sin 2\alpha$, odvozeného v 1. části. Z něho vyplývá

$$t^2 = \frac{4a}{g \sin 2\alpha} \Rightarrow t = 2 \sqrt{\frac{a}{g \sin 2\alpha}}.$$

Je to vlastně zápis, že čas je funkcí úhlu 2α . Víme, že geometrický význam derivace je směrnice tečny ke grafu funkce v libovolném bodě. Jestliže má funkční hodnota nabýt maxima nebo minima, musí se tedy rovnat směrnice tečny ke grafu čili derivace funkce nule, čili $t' = 0$;

$$t' = \sqrt{\frac{g \sin 2\alpha_m}{a}} \cdot \left(-\frac{a \cos 2\alpha_m}{g \sin^2 2\alpha_m} \right),$$

$$\sqrt{\frac{g \sin 2\alpha_m}{a}} \cdot \left(-\frac{a \cos 2\alpha_m}{g \sin^2 2\alpha_m} \right) = 0.$$

Aby měly zlomky význam, musí platit $\sin^2 2\alpha_m = 0$, čili také $\sin 2\alpha = 0$, neboť hodnoty a, g jsou různé od nuly. Potom ale nemůže být první zlomek, a tedy ani odmocnina z něho rovna nule, čili musí platit

$$-\frac{a \cos 2\alpha_m}{g \sin^2 2\alpha_m} = 0.$$

Zlomek je roven nule, je-li čitatel roven nule:

$$a \cos 2\alpha_m = 0.$$

Platí zřejmě, že $a = 0$, tedy $\cos 2\alpha_m = 0$, $2\alpha_m = 90^\circ$. Řešení $2\alpha_m = 270^\circ$ nemá význam, protože by byl úhel α_m větší než 90° . Je tedy

$$\alpha_m = 45^\circ$$

Zjistíme dobu smykání pro tento úhel

$$t = 2 \sqrt{\frac{a}{g \sin 2\alpha_m}} = 2 \sqrt{\frac{0,5}{9,8 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{4,9}} = 0,45 \text{ s}.$$

Vidíme, že funkce nabývá v tomto bodě minima; jiná extrémní hodnota neexistuje, protože rovnice měla jediné řešení. Ostatní hodnoty jsou větší, protože pak by část první neměla řešení, když předpokládá čas 0,6 s. Z toho vyplývá, že doba smykání je nejmenší při úhlu sklonu nakloněné roviny 45° , a to asi 0,6 s.

2. Vypočtete momenty setrvačnosti plného válce vzhledem k osám o_i rovnoběžným s podélnou osou válce o . Plný rotační válec je z lehké slitiny hustoty $\rho = 2,69 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, jeho průměr je $d = 5 \text{ cm}$, délka $l = 5 \text{ cm}$. Kolmá vzdálenost os $oo_i = a_i$ je 1 cm, 2 cm, 4 cm, 10 cm, 100 cm. Zachyťte graficky na logaritmickém papíře závislost velikosti momentu setrvačnosti daného válce na vzdálenosti a_i . Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho rotační ose je roven $J_o = \frac{1}{8} m \cdot d^2$. Moment setrvačnosti J_i pro jiné osy, rovnoběžné s rotační (podélnou) osou válce vypočteme pomocí Steinerovy věty $J_i = J_o + m \cdot a_i^2$, kde m je hmotu tělesa a a_i kolmá vzdálenost obou os.

Václav Šindelář

(Došlo 13 řešení)

Řešila Jitka Kůrková, 3.b, SVVŠ, Praha 5-Hlubočepy Žvahov:
Momenty setrvačnosti vypočteme podle vzorce

$$J_i = J_o + m \cdot a_i^2 = \frac{1}{8} m d^2 + m \cdot a_i^2 = m \left(\frac{d^2}{8} + a_i^2 \right).$$

Potřebujeme si ještě zjistit hmotu válce

$$m = V \cdot \rho = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 \cdot l \doteq 0,264 \cdot \text{kg}.$$

Nyní dosazujeme dané hodnoty do vzorce:

$a_i = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$	$J_i \doteq 1,089 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$a_i = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$	$J_i \doteq 1,881 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$a_i = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}$	$J_i \doteq 5,049 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$a_i = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$	$J_i \doteq 27,225 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$a_i = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$	$J_i \doteq 2640,825 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Vyjadřme tuto závislost graficky. Nezávisle proměnnou, vzdálenost a_i , nanášíme na osu x , závisle proměnnou, velikost momentů setrvačnosti, na osu y .

Pro jednodušší zakreslení si můžeme upravit základní vztah takto:

$$J_i = m \left(\frac{d^2}{8} + a_i^2 \right) = m \cdot a_i^2 + \frac{m d^2}{8},$$

po dosazení

$$\begin{aligned} J_i &= m \cdot a_i^2 \cdot 10^{-4} + 0,825 \cdot 10^{-4} \\ J_i &= 10^{-4} (m \cdot a_i^2 + 0,825) \end{aligned}$$

(a_i dosazujeme v $10^{-2}m$).

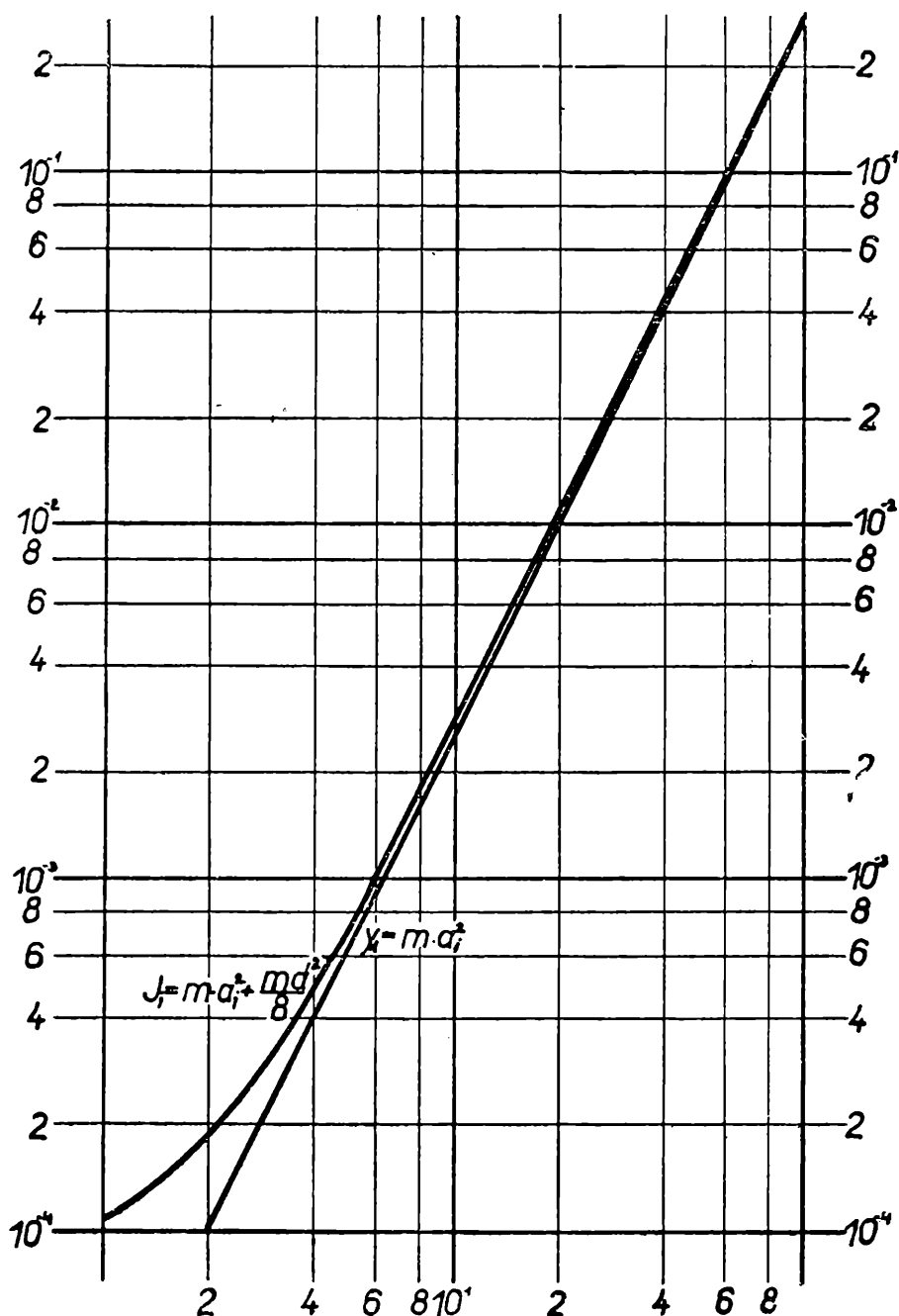
Grafem $m \cdot a_i^2$ bude v logaritmické síti přímka (obr. 2)

$$y_1 = \log(m \cdot a_i^2)$$

$$y_1 = 2 \log a_i + \log m ;$$

jestliže zvolíme za $\log a_i = x$, $\log m = q$, dostáváme

$$y_1 = 2x + q ,$$



Obr. 2

což je rovnice lineární závislosti, jejímž grafem je přímka. Tu sestojíme snadno pomocí dvou bodů, např.

$$x = 2 \text{ cm}$$

$$x = 100 \text{ cm}$$

$$y_1 = 1,056 \cdot 10^{-4}$$

$$y_1 = 2640 \cdot 10^{-4} .$$

Všechny body této přímky potom musíme posunout o $0,825 \cdot 10^{-4}$.

Dostaneme křivku, která je grafem rovnice $J_i = m \left(\frac{d^2}{8} + a_i^2 \right)$

Obr. 2. Grafické vyjádření závislosti velikosti momentu setrvačnosti daného válce na kolmé vzdálenosti os.

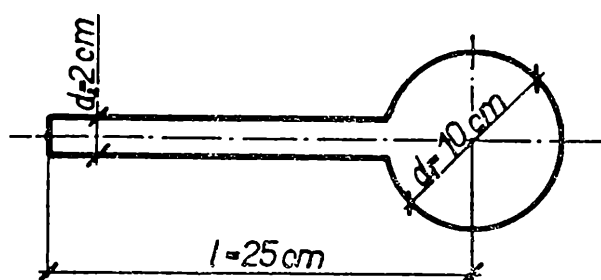
3. Plné homogenní těleso nakreslené na obr. 3 (jakési kladivo) uchopíme za držadlo a odhodíme od sebe tak, že se bude při svém pohybu také otáčet kolem nějaké osy, kolmé k podélné ose tělesa. Určete průsečík této volné osy s podélnou osou tělesa. Celé těleso je z téhož materiálu, např. ze železa.

Václav Šindelář

(Došlo 9 řešení)

Řešil Petr Horňák, 3., SVVŠ, Hranice okr. Přerov:

1. G r a f i c k y. Sečteme vektory $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, působící v těžištích T_1 (přibližně střed koule) a T_2 (průsečík podélné a příčné osy válce obr. 4), s pomocnými složkami $\vec{F}$, $\vec{F}'$ na výslednice $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ a ty pak v bodě T' na výslednici $\vec{R}$, jejíž vektorová přímka protíná podélnou osu tělesa o_1 v těžišti tělesa T . Pro vektory $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ platí:



Obr. 3

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{\frac{3}{4} \pi r_1^3 \rho g}{\pi r_2^2 v \rho g} = \frac{4 r_1^3}{3 r_2^2 v},$$

přičemž G_1 je váha kulové části a G_2 válcové části tělesa. Pomocné složky $\vec{F}$, $\vec{F}'$ jsou stejně velké a působí na ose tělesa o_1 opačným směrem.

Po dosazení za poloměr koule $r_1 = 5$ cm, poloměr válce $r_2 = 1$ cm a výšky válce $v = 20,16$ cm (změřena v náčrtu a převedena do příslušného měřítka) dostaneme

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} = \frac{4 \cdot 5^3}{3 \cdot 1^2 \cdot 20,16} = \frac{8,28}{1}.$$

Složky $\vec{F}$, $\vec{F}'$ volíme rovny třem. Vektorová přímka výslednice $\vec{R}$ splývá s volnou osou tělesa o_2 a těžiště tělesa T je hledaný průsečík.

2. P o č e t n ě. Budeme předpokládat, že již hledaný průsečík známe. Kulová část tělesa působí v těžišti T momentem M_1

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3 \cdot x$$

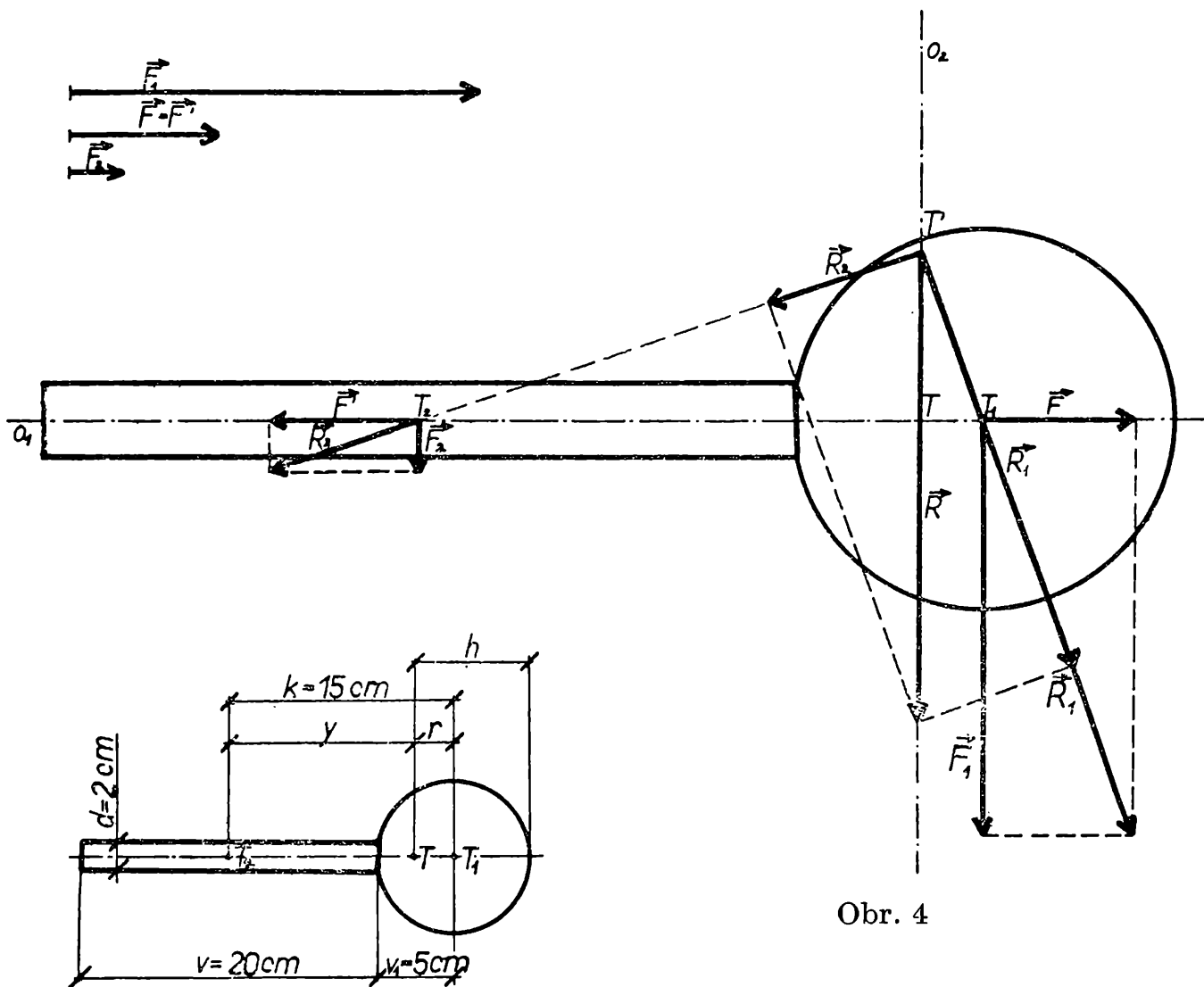
a válcová část momentem $M_2 = \pi r_2^2 v y$

Oba momenty se rovnají, proto platí rovnice

$$\frac{4}{3} \pi r_1^3 x = \pi r_2^2 v y .$$

Z obr. 5 plyne:

$$x + y = k .$$



Obr. 5

Řešením těchto rovnic obdržíme

$$x = \frac{2 r_2^2 v k}{2 (4 r_1^3 + 3 r_2^2 v)} \quad (1)$$

a po dosazení podle obr. 5

$$x = \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 20 \cdot 15}{2 (4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 20)} ,$$

$$x \doteq 1,6 \text{ cm} .$$

Vzdálenost h průsečíku T na podélné ose k těžšímu konci tělesa je

$$\begin{aligned} h &\doteq r_1 + x = 5 + 1,6 \\ h &\doteq 6,6 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Vzdálenost průsečíku volné a podélné osy tělesa od jeho těžšího konce je podélné ose rovna $h = 6,6 \text{ cm}$.

P o z n á m k a. Protože zanedbáváme složitější výpočty s kulovou úsečí v místě spojení válce s koulí, není obecný vztah (1) přesný. Vypočítaná i naměřená hodnota x souhlasí.

4. Rychlost střel lze určovat také tzv. balistickým kyvadlem. Je to bedna s pískem, zavěšená na čtyřech dlouhých drátech, vesměs stejné délky. Vstřelíme-li do ní např. kulku z pušky, která v ní uvízne, vykývne bedna ze své klidné, rovnovážné polohy, ve směru přiletivšího projektilu. Z výkyvu lze jednoduše vypočítat rychlost střely. Náš příklad zaměříme na toto zařízení.

Je dáno balistické kyvadlo (obr. 6) s hmotou bedny $m_2 = 250 \text{ kg}$ a délkou závěsů $l = 2 \text{ m}$. Střela, která vnikne rychlostí c_1 (horizontálního směru) do bedny kyvadla, má hmotu $m_1 = 8 \text{ g}$. Přitom se bedna vykývne o (horizontálně měřenou) délku $s = 1,38 \text{ m}$.

Máme vypočítat:

- rychlost střely před nárazem na balistické kyvadlo,
- počáteční rychlost kyvadla, kterou se po vniknutí střely začne vychylovat ze své rovnovážné polohy.

P o z n á m k a. Tíhové zrychlení volíme rovno $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Neuvažujeme nežádoucí pasívní odpory při pohybu kyvadla.

Václav Šindelář

(Došlo 16 řešení)

Řešil Jaroslav Dittrich, 2.a, SVVŠ, Praha 6-Na Zatlance:

Sledujeme jeden závěs kyvadla. Bod, ve kterém je závěs upevněn, označme O . Klidovou polohu bodu, ve kterém je k závěsu připevněna bedna, označme A , jeho polohu při maximální výchylce B . Průsečík vodorovné roviny, vedené bodem B , s přímkou OA označme C .

V trojúhelníku OBC je

$$\begin{aligned} l^2 &= s^2 + (l - h)^2 \\ h_{1,2} &= l \pm \sqrt{l^2 - s^2} \end{aligned}$$

Musí platit: $s < l$, $s^2 < l^2$, $l^2 - s^2 > 0$, $\sqrt{l^2 - s^2} > 0$, $l + \sqrt{l^2 - s^2} > l$. Dále musí být $h < l$. Proto je

$$h = l - \sqrt{l^2 - s^2}$$

Kritická energie střely je rovna změně potenciální energie bedny při maximální výchylce proti klidové poloze

$$\frac{1}{2} m_1 c_1^2 = (m_1 + m_2) gh .$$

Po dosazení z (1)

$$\frac{1}{2} m_1 c_1^2 = (m_1 + m_2) g (l - \sqrt{l^2 - s^2})$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot 2 g (l - \sqrt{l^2 - s^2})}. \quad (2)$$

Protože hmota střely je proti hmotě bedny zanedbatelná, můžeme psát

$$c_1 = \sqrt{2 \frac{m_2}{m_1} g (l - \sqrt{l^2 - s^2})}. \quad (3)$$

Kyvadlo se zpočátku pohybuje zrychleně a počáteční rychlost je nulová. Maximální rychlost c_2 , které kyvadlo dosáhne, určíme podle zákona zachování hybnosti. Je

$$m_1 c_1 = (m_1 + m_2) \cdot c_2,$$

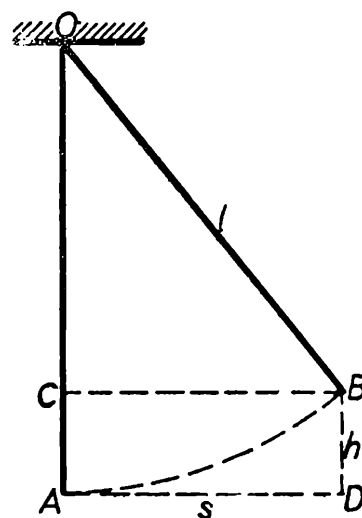
po úpravě a dosazení z (2) .

$$c_2 = \sqrt{2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} (l - \sqrt{l^2 - s^2}) g}$$

Zanedbáme-li ve jmenovateli m_1 , je

$$c_2 = \sqrt{2 \frac{m_1}{m_2} g (l - \sqrt{l^2 - s^2})}$$

Pro uvedené hodnoty je $c_1 \doteq 585 \text{ m/s}$, $c_2 \doteq 0,019 \text{ m/s}$.



Obr. 6

5. Ve válcové nádobě je uprostřed dna otvor o průměru $d = 3 \text{ cm}$. Do nádoby shora počne přitékat voda stálého, ale neznámého průtočného (výtočného) objemu. Přestože voda, jež je nahoře do nádoby přiváděna, odtéká z ní spodním otvorem, ustálí se hladina v nádobě na výši $h = 1,25 \text{ m}$. Máme určit průtočný objem vody přiváděný shora do nádoby, je-li výtokový součinitel pro spodní otvor roven $\mu = 0,8$.

Výtokový součinitel u nějakého otvoru je určen poměrem skutečného a teoretického objemu, vytékajícího tímto otvorem. Tíhové zrychlení volně přibližně rovno $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Václav Šindelář

(Došlo 15 řešení)

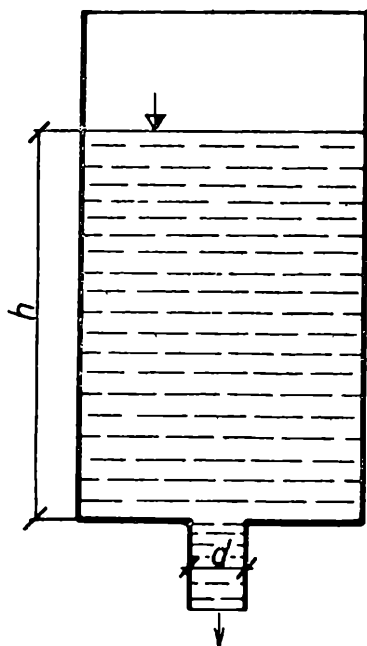
Řešil Jiří Pechouš, II. a, SVVŠ, Písek:

Ú v a h a. Ustálí-li se hladina kapaliny na určité výši, musí se průtočný objem přiváděný rovnat průtočnému objemu odváděnému. Vypočtu tedy odváděný objem a tím vypočtu i objem přiváděný (obr. 7).

Výtoková rychlost kapaliny se vypočte ze vzorce:

$$v = \sqrt{2 h g}.$$

Teoretický průtočný objem (podíl objemu kapaliny, která proteče otvorem za čas t , a tohoto času t) je tedy číselně roven objemu kapaliny která proteče otvorem za jednotku času. Tedy:



Obr. 7

průtočný objem

$$Q'_v = S \quad v = S \sqrt{2hg},$$

skutečný průtočný objem

$$Q_v = \mu S \sqrt{2hg} = \mu \pi r^2 \sqrt{2hg}.$$

Číselně

$$\begin{aligned} Q_v &= \mu \pi r^2 \sqrt{2hg} = \\ &= 0,8 \quad 3,14 \quad 0,015^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10} = \\ &= 0,000 \, 565 \, 2 \cdot 5 = 0,002 \, 826 \, \text{m}^3 \, \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Průtočný objem vody přiváděný shora do nádoby je při daných podmínkách roven $0,002 \, 826 \, \text{m}^3 \, \text{s}^{-1}$, to znamená asi 2.826 litru za sekundu.

6. Malé průtočné objemy kapalin a plynů se často v praxi měří tzv. plovákovými měřidly (průtokoměry). Ty sestávají z vertikální kuželové trubice, mírně se rozšiřující směrem vzhůru, v níž je umístěn kovový plováček rotačního tvaru. Proudí-li tekutina trubicí směrem vzhůru, je plováček nadzdvížen odporem proudění a na příslušný průtočný objem lze usuzovat z výšky, ve které se plováček ustavil v trubicí. Princip přístroje je patrný z obr. 4, str. 80, roč. 1963—64. Aby bylo možno na přístroji z polohy plováčku, který se vznáší v proudu tekutiny, přímo číst okamžitý průtočný objem, je svislá trubice opatřena stupnicí, na které se pak čte v místě, kam až dosahuje horní okraj plováčku. Stupnice se získá experimentálním ověřováním (ocejchováním) přístroje. Je-li zapotřebí na hotovém přístroji určit některé hlavní rozměry svislé měrné kuželové trubice, je zpravidla nutno použít nějaké nepřímé metody, protože vyjma délky l nelze např. průměry $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$ změřit přímo. U jednoho takového přístroje máme ze změřených hodnot vypočítat:

a) Průměry trubice spodní d_1 a horní d_2 , je-li známa délka trubice $l = 500 \, \text{mm}$, kuželovitost trubice je rovná $k = 0,008$ a činila-li hmota rtuti, kterou byla trubice po celé délce l vyplněna, $m = 9,347 \, \text{kg}$. Hustotu rtuti zde bereme rovnou $\rho = 13,5 \cdot 10^3 \, \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Kuželovitostí rozumíme poměr

$$k = \frac{d_2 - d_1}{l}.$$

b) Jaké relativní chyby bychom se dopustili, kdybychom vnitřní objem kuželové trubice počítali z přibližného vztahu

$$V = \frac{1}{2} \pi l (r_1^2 + r_2^2)$$

Při tomto výpočtu známe $l = 480$ mm, $d_1 = 2r_1 = 6,5$ mm a $d_2 = 2r_2 = 8,0$ mm.

Václav Šindelář

(Došlo 11 řešení)

Řešil Jaroslav Příhoda, 2.a, SVVŠ, Čakovice:

Jsou-li $d_2 = 2r_2$, $d_1 = 2r_1$ průměry podstav a l výška trubice tvaru rotačního komolého kužele, platí o objemu trubice vzorec

$$V = \frac{\pi l}{12} (d_2^2 + d_2 d_1 + d_1^2) \quad (1)$$

Je-li kapalinou hmoty m a hustoty ρ zcela vyplněna naše trubice, vypočteme objem trubice ze vztahu

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (2)$$

Porovnáním (1), (2) platí

$$\frac{\pi l}{12} (d_2^2 + d_2 d_1 + d_1^2) = \frac{m}{\rho},$$

neboli

$$d_2^2 + d_2 d_1 + d_1^2 = S,$$

kde

$$S = \frac{12 m}{\pi l \rho}.$$

Ve spojení rovnice (3) se vztahem

$$\frac{d_2 - d_1}{l} = k \quad (5)$$

dostáváme soustavu rovnic, ze které již snadno vyjádříme neznámé veličiny d_2 , d_1 ($d_2 > d_1$).

Z rovnice (5) vyplývá

$$d_2 = kl + d_1 \quad (7)$$

a po dosazení odtud do rovnice (3) platí

$$(kl + d_1)^2 + (kl + d_1) d_1 + d_1^2 = S,$$

neboli

$$\begin{aligned} k^2 l^2 + 2 k l d_1 + d_1^2 + k l d_1 + d_1^2 + d_1^2 &= S, \\ 3 d_1^2 + 3 k l d_1 + k^2 l^2 - S &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Kořeny rovnice (8) jsou $d_1 = \frac{-3 kl \pm \sqrt{12 S - 3 k^2 l^2}}{6}.$

Fyzikální význam má jedině kořen

$$d_1 = \frac{-3 kl + \sqrt{12 S - 3 k^2 l^2}}{6}. \quad (9)$$

Potom podle (7) dostáváme

$$d_2 = kl + \frac{-3kl + \sqrt{12S - 3k^2l^2}}{6},$$

čili

$$d_2 = \frac{3kl + \sqrt{12S - 3k^2l^2}}{6}. \quad (10)$$

Vztahy (9), (10) jsou obecným řešením úlohy.

Zbývá provést výpočet pro hodnoty $k = 0,008 = 8 \cdot 10^{-3}$, $l = 500 \text{ mm} = 5 \cdot 10^2 \text{ mm}$, $m = 9,374 \text{ kg} = 937 \text{ g}$, $\rho = 13,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 13,5 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$. Ze vztahu (4) vyplývá

$$S = \frac{12 \cdot 9374 \text{ [g]}}{\pi \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ [mm]} \cdot 13,5 \cdot 10^{-3} \text{ [g/mm}^3\text{]}} = \frac{12 \cdot 9374}{\pi \cdot 6,75} \text{ [mm}^2\text{]};$$

logaritmicky vypočítáme $S \doteq 5305 \text{ [mm}^2\text{]}$.

Ze vztahu (9) pak vyplývá

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-3 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^2 + \sqrt{12 \cdot 5305 - 3 \cdot 8^2 \cdot 10^{-6} \cdot 5^2 \cdot 10^4}}{6} = \\ &= \frac{-12 + \sqrt{63612}}{6} \doteq 40 \text{ [mm]}. \end{aligned}$$

Ze vztahu (10) dostaneme

$$d_2 \doteq \frac{12 + 252,19}{6} \doteq 44 \text{ [mm]}.$$

Spodní průměr trubice je $d_1 = 40 \text{ mm}$, horní průměr trubice je $d_2 = 44 \text{ mm}$ (počítáno s přesností na desetiny mm).

b) Teoreticky je objem trubice V roven přesně

$$V = \frac{\pi l}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2).$$

Kdybychom určili přibližný objem trubice V^* ze vztahu

$$V^* = \frac{\pi l}{2} (r_1^2 + r_2^2),$$

neboli

$$V^* = \frac{\pi l}{8} (d_1^2 + d_2^2),$$

dopustili bychom se relativní chyby

$$\varepsilon = \frac{V - V^*}{V} = 1 - \frac{V^*}{V} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{\pi l}{8} (d_1^2 + d_2^2)}{\frac{\pi l}{12} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)} = 1 - \frac{3 (d_1^2 + d_2^2)}{2 (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}.$$

Z toho vidíme, že relativní chyba nezávisí na výšce trubice, nýbrž jen na průměrech jejích podstav.

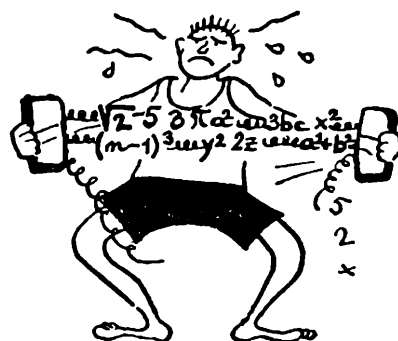
Pro dané veličiny $d_1 = 6,5$ mm, $d_2 = 8,0$ mm, $l = 480$ mm vychází

$$\varepsilon = 1 - \frac{3 (6,5^2 + 8^2)}{2 (6,5^2 + 6,5 \cdot 8 + 8^2)} \doteq -0,0072 = -7,2^{00}/_0.$$

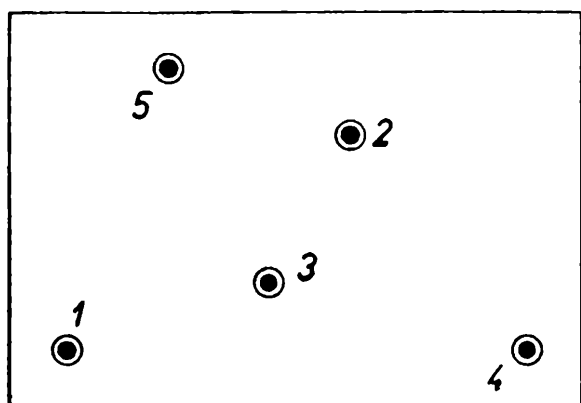
Matematické zábavy

Mil an K o m a n, Praha:

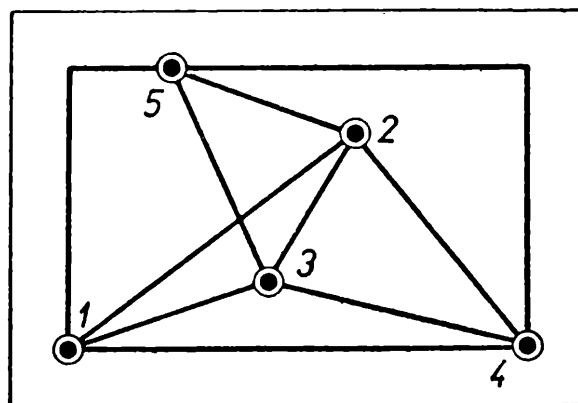
Problém města Kocourkova



Městská rada v Kocourkově se rozhodla, že na paměť pěti nejzasloužilejších starostů města postaví v nově budovaném parku každému z nich pomník. Když byly sochy rozmístěny (obr. 1), byl městskému zahradníkovi uloženo upravit v parku cesty tak, aby každé dvě sochy spojovala jediná cesta, která by nevedla kolem žádné jiné sochy. Přitom bylo požadováno, aby se cesty pokud možno nekřížily.



Obr. 1

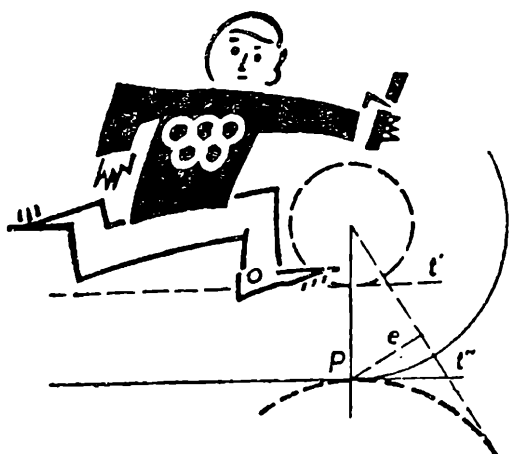


Obr. 2

Zahradník se svého úkolu zhostil, jak ukazuje obr. 2. Je vidět, že v parku vznikla jediná křižovatka cest. Síť cest požadované vlastnosti lze provést ovšem i mnoha jinými způsoby. Může se použít různě zakřivených cest, mohou se i sochy jinak rozmístit. Dá se však dokázat,

že vždy vznikne jedna křižovatka. Zahradník tedy svou úlohu již lépe splnit nemohl.

Vaším úkolem je rozřešit, jak by se podobný problém řešil v případě, že by se v parku „galerie“ významných starostů zvětšila na 6, 7, po případě i více pomníků. Řešení zašlete redakci.



Matematická olympiáda

Přípravné úlohy I. kola XIV. ročníku MO

Milí přátelé,

uveřejňujeme texty přípravných úloh I. kola letošního ročníku Matematické olympiády. Žádáme vás, abyste s nimi seznámili žáky našich škol. Účastník olympiády musí svému učiteli matematiky odevzdat písemně vypracovaná řešení *prvních tří úloh do 15. listopadu 1964* a řešení zbývajících trojice *do 15. prosince t. r.* Z toho čtyři řešení musí být správná, aby řešitel byl zařazen do soutěže I. kola.

O úpravě písemných řešení se žák poradí se svým učitelem matematiky nebo s referentem MO na škole. Ti mu ukáží, jak má asi vypadat žákovské řešení. Jako vzor může např. sloužit řešený příklad ve školské učebnici, nebo řešené příklady v brožurách edice *Škola mladých matematiků*, které jsou v žákovských knihovnách školy jako dar ministerstva školství a kultury. Odtud si je účastníci MO budou půjčovat a budou je podrobně studovat. Brožury jim též budou sloužit při přednáškách a konzultacích, které pro olympioniky v průběhu školního roku uspořádají krajské výbory MO spolu s pobočkami Jednoty čs. matematiků a fyziků. Informace poskytne žákům učitel matematiky.

Přípravné úlohy nejsou obtížnější než běžné školské příklady. Chtějí řešitele upozornit na některé někdy opomíjené partie matematiky, ozřejmit mu některé pojmy apod. Řešitel se má na nich především cvičit v psaní matematického textu. Učitele pak žádáme, aby tuto práci svých žáků sledovali a poučovali je zvláště o účelnosti obvyklého postupu řešení, což platí zvláště o geometrických konstruktivních úlohách. Zkušenost ukazuje, že ani nejvyspělejší žáci nezachovávají obvyklou formu postupu řešení, s níž se mohou seznámit v každé učebnici. To se pak projevuje v řadě nedostatků v žákovských řešeních.

Žádáme všechny, jimž leží na srdci zdar práce našich žáků, aby nepodceňovali žádnou z akcí, které se konají v rámci olympiády. V tomto směru jistě olympiádě pomohou jak ředitelé škol a učitelé matematiky, tak i pracovníci složek ČSM. Nynější nepříznivá situace ve výkonech našich žáků nutně vyžaduje všestrannou pomoc.

Kategorie A.

1. Dekadický zápis přirozeného čísla a dekadický zápis jeho páté mocniny končí touž cifrou. Dokažte!

2. Součet čtverců nad stranami rovnoběžníka je roven součtu čtverců nad jeho uhlopříčkami. Dokažte!

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(a^2 - b^2)x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^2 - b^2 = 0$$

o neznámé x , kde a, b jsou daná reálná čísla. Stanovte podmínku řešitelnosti vzhledem k číslům a, b .

4. Řešte rovnici

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cos x.$$

5. V rovině jsou dány vedlejší úhly $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOP$ a uvnitř úhlu $\sphericalangle NOP$ je dán bod Q .

Bodem Q vedte přímku, která s polopřímkami OM , ON omezuje trojúhelník, jehož obvod je roven danému kladnému číslu $2s$.

6. Jsou-li a, b taková dvě komplexní čísla, že součet $a + b$ je reálné kladné číslo a že platí $a + \bar{a} > b + \bar{b}$, potom platí $|a|^2 > |b|^2$. Dokažte!

Poznámka: $\bar{a}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu a .

Kategorie B.

1. Řešte soustavu rovnic

$$x = a + ky, \quad y = b + kz, \quad z = c + kx$$

o neznámých x, y, z . Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným reálným číslům a, b, c, k .

2. Udejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka, který má tyto vlastnosti: Výška a těžnice při jednom vrcholu trojúhelníka dělí úhel trojúhelníka na tři shodné úhly.

3. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y = \sqrt{(1+x)|1-x|}$ a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $y + x = |y - x|$.

Výpočtem pak řešte soustavu rovnic

$$y = \sqrt{(1+x)|1-x|}, \quad y + x = |y - x|.$$

4. Každé dvě z hran OA, OB, OC čtyřstěnu $OABC$ stojí navzájem kolmo. Dokažte, že potom druhá mocnina obsahu stěny ABC je rovna součtu druhých mocnin obsahů každé ze zbývajících tří stěn.

5. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A .

Dvěma odlišnými metodami řešte úlohu: Sestrojte trojúhelník ABC vepsaný kružnici k tak, aby úhly $\sphericalangle CAB, \sphericalangle ABC$ měly dané velikosti. Udejte podmínky řešitelnosti!

6. Řešte nerovnost

$$\frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} \leq 1$$

Kategorie C.

1. Dokažte, že výraz

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-x)} + \frac{x^2}{(x-a)(x-b)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-x)},$$

pokud má smysl, nezávisí na čísle x .

2. Je dána polorovina ABP a uvnitř úsečky AB je dán bod M . Dále je dán úhel velikosti γ .

V polorovině ABP sestrojte trojúhelník ABC takový, aby úhel $\sphericalangle BCA = \gamma$ a aby osa tohoto úhlu procházela bodem M .

3. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y sestrojte graf funkce

$$y = |x + 2| - |x - 2|.$$

4. Zlomek

$$\frac{7^n + 1}{3^n + 1},$$

kde n je liché přirozené číslo, lze vždy zkrátit číslem 4. Dokažte!

5. Zmenšíme-li poloměr i výšku rotačního kužele o p %, o kolik procent se zmenší jeho objem?

6. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod A , jehož vzdálenost od středu S je $v < r$.

Bodem A vedte přímku, která od kružnice k oddělí čtvrtkružnici. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům r, v .

Kategorie D.

1. Tahem krále na šachovnici rozumějme tah ze zvoleného pole na některé pole k němu sousední (až 8 možností); přitom tah z pole A na pole B je jiný než tah z pole B na pole A .

Kolik takových tahů lze na prázdné šachovnici udělat?

2. Je dána přímka AP a mimo ni bod B ; dále je dána úsečka délky d . Na polopřímce AP sestrojte bod X takový, že platí vztah

$$AX + BX = d.$$

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

3. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1, r = 10 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2, r = 10 \text{ cm})$, kde $S_1S_2 = 10 \text{ cm}$.

Vypočtete délku x poloměru kružnice, která má s každou z daných kružnic vnitřní dotyk a vedle toho se dotýká přímky S_1S_2 ; na základě výpočtu proveďte konstrukci.

4. Dokažte, že číslo:

a) $3^7 + 7^7$ je dělitelné deseti, aniž mocniny počítáte¹⁾.

b) $20193^7 + 3027^7$ je dělitelné číslem 270.

5. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , jestliže je dáno:

a) Součet základny a jednoho ramene a dále je dán úhel při základně.

Pokyn: Uvažujte trojúhelník BCD , kde D je bod polopřímky CA a platí $CD = AB + AC$

b) Rozdíl ramene a základny (v tomto pořadí) a dále je dán úhel proti základně.

Pokyn: Vyhledejte vhodný pomocný trojúhelník.

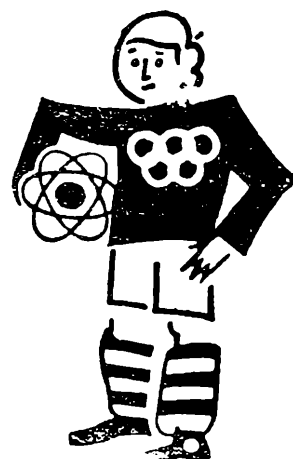
¹⁾ Sledujte jen jednotky mocnin $3^2, 3^3, \dots, 7^2, 7^3$,

6 Najděte všechna čísla p , pro která zlomek

$$\frac{(3p - 2)^2 - (2p - 3)^2}{(2p - 1)^2 - (3p - 4)^2}$$

nemá smysl Pak vypočtete všechna čísla p , pro která je zlomek roven nule.

Fyzikální olympiáda



VI. ročník soutěže Fyzikální olympiády

Žákům středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol

Ministerstvo školství a kultury, Jednota československých matematiků a fyziků a Československý svaz mládeže pořádají ve školním roce 1964/65 šestý ročník soutěže Fyzikální olympiády (FO).

Pokyny pro žáky soutěžící ve všech čtyřech kategoriích budou obsaženy ve dvou letácích. Tyto letáky pro kategorii A, B, C a pro kategorii D vydá na počátku školního roku Státní pedagogické nakladatelství a budou rozeslány na školy.

Řešené úlohy prvního kola odevzdají soutěžící žáci svému učiteli fyziky v těchto termínech:

1. V kategoriích A, B, C úlohu první až třetí do 30. listopadu 1964, úlohu čtvrtou až šestou do 10. ledna 1965 a úlohu sedmou až devátou nejpozději do 15. února 1965.

2. V kategorii D úlohu první až třetí do 30. listopadu 1964, úlohu čtvrtou až šestou do 31. ledna 1965 a úlohu sedmou až devátou nejpozději do 31. března 1965.

Ústřední výbor Fyzikální olympiády přeje všem soutěžícím žákům hodně zdaru.

Úlohy pro 1. kolo VI. ročníku FO

Všechny úlohy řešte pokud možno nejprve obecně, pak teprve číselně.

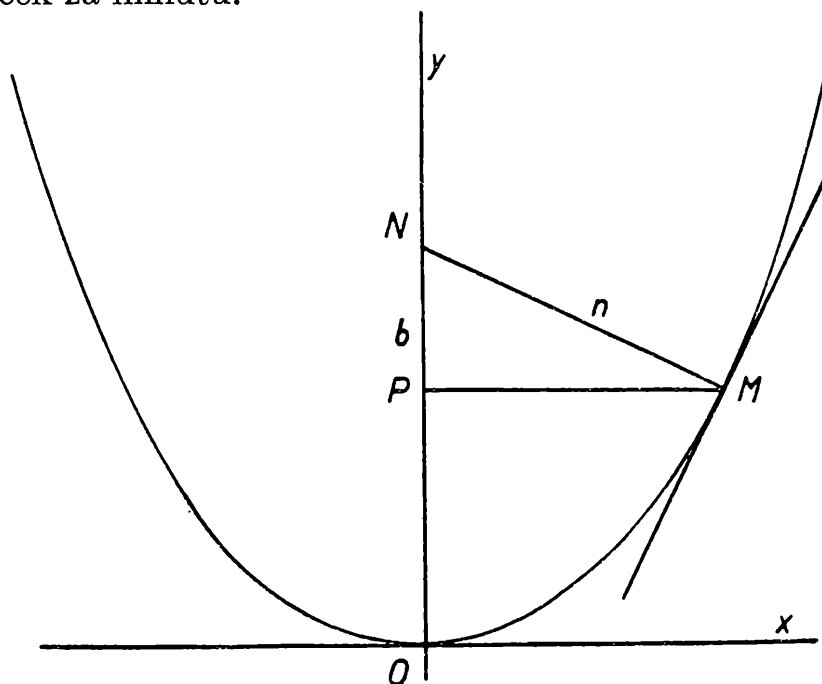
Kategorie A

1. Z bodu, který se nachází ve výšce h nad zemským povrchem, jsou současně a všemi směry ležícími v téže vertikální rovině, vymrštěny stejnou počáteční rychlostí v_0 kuličky. Dokažte, že všechny kuličky se nacházejí v každém okamžiku na kružnici.

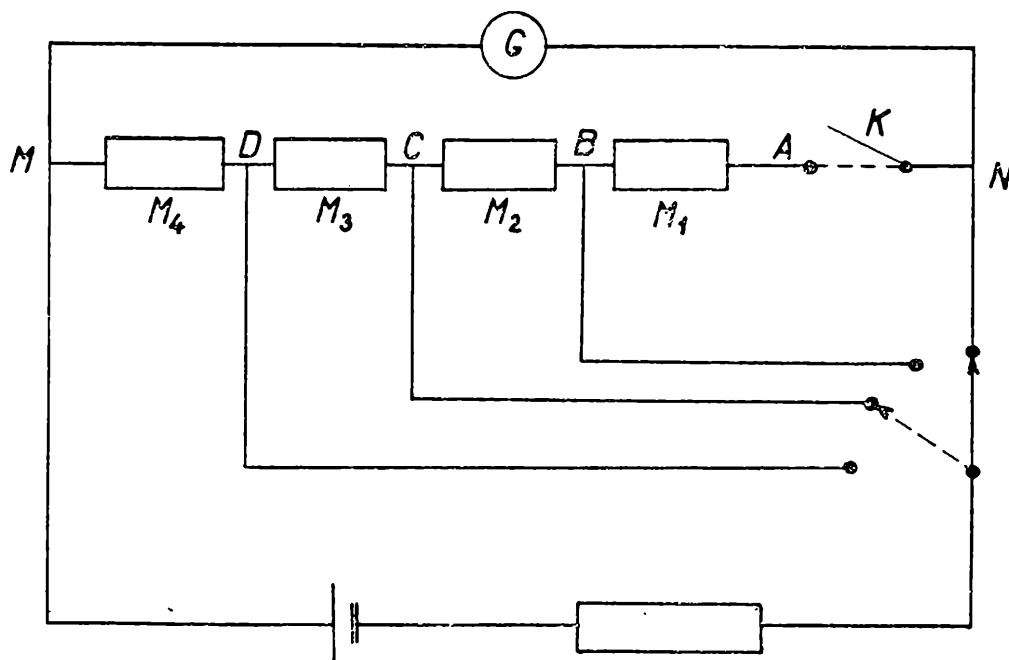
Jaký je poloměr té kružnice a jaký pohyb koná její střed?

Pohyb se děje v homogenním gravitačním poli. Odpor vzduchu zanedbáme.

2. Jeden druh otáčkoměrů je trubice s vnitřním poloměrem r , naplněná kapalinou do výšky h . Kapalina je v trubici uzavřena. Otáčí-li se kapalina stejnou úhlovou rychlostí ω jako trubice, vytvoří povrch kapaliny plochu rotačního paraboloidu (obr. 1). Podle polohy vrcholu paraboloidu lze měřit počet k otáček za minutu.



Obr. 1



Obr. 2

Stanovte vztah, podle něhož lze zhotovit stupnici udávající k . Subnormála $PN = b$ paraboly je pravoúhlý průmět normály $n = MN$ na osu paraboly. Délka subnormály paraboly $b = p$, kde p značí parametr paraboly (obr. 1).

Objem rotačního paraboloidu je $V = \frac{1}{2} \pi x^2 y$.

3. Dva kondenzátory o kapacitách C_1 a C_2 jsou spojeny za sebou a baterie je nabita na napětí U . Kondenzátory přepojíme paralelně, aniž bychom je vybili.

a) Dokažte, že v prvním případě je elektrická energie baterie větší než v případě druhém a určete rozdíl obou energií.

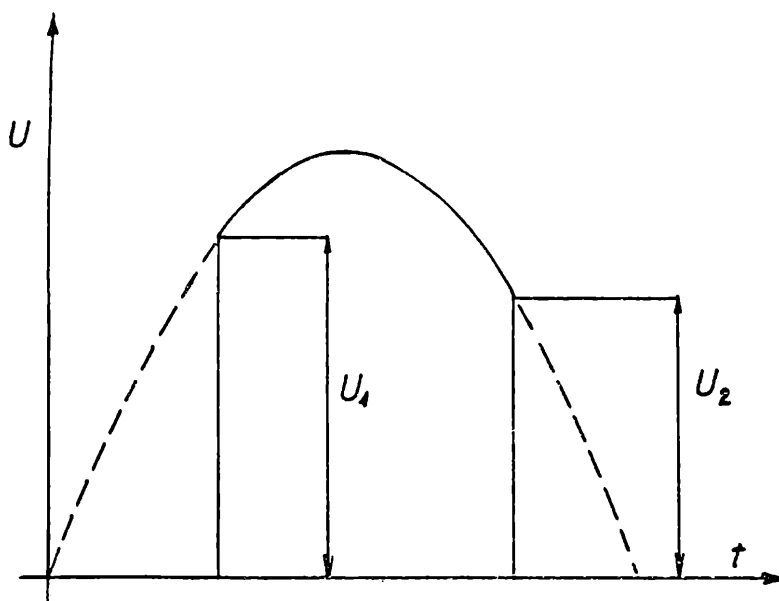
b) V jakou formu energie se přeměnil přebytek elektrické energie při změně zařazení kondenzátorů?

c) Jak veliký by byl rozdíl elektrické energie baterií při obou způsobech zařazení kondenzátorů, kdyby $C_1 = C_2$?

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $C_1 = 9\mu\text{F}$, $C_2 = 6\mu\text{F}$, $U = 1200\text{ V}$.

4. Na obr. 2 je schematicky znázorněn galvanometr o odporu R s citlivostí $z\ \mu\text{A}$ nadílek. Ke galvanometru lze klíčem K připojit bočník s odpory r_1, r_2, r_3, r_4 .

Obvod, ve kterém chceme měřit proud, připojíme vždy ke zdířce M a do některé ze zdířek N (bočník je přitom klíčem K odpojen) nebo A, B, C, D (bočník je zapojen).



Obr. 3

Jaké musí být odpory r_1, r_2, r_3, r_4 , má-li citlivost galvanometru při přepojení ze zdířky N do zdířky A klesnout n -krát, n^2 -krát při přepojení do zdířky B , n^3 -krát při přepojení do zdířky C a n^4 -krát při přepojení do zdířky D ?

Počítejte nejprve obecně a potom pro $n = 10$, $z = 10\ \mu\text{A}$ na dílek, $R = 100\ \Omega$.

Jaké budou měrné rozsahy, má-li stupnice galvanometru 60 dílků?

5. Doutnavka má zápalné napětí U_1 , zhasací $U_2 < U_1$ (obr. 3).

a) Při jakém efektivním napětí U střídavého proudu se rozsvítí?

b) Po jakou část periody svítí, je-li připojena k síti o efektivním napětí U_3 ?

Řešte nejprve pokud možno obecně, potom číselně pro hodnoty $U_1 = 80\text{ V}$, $U_2 = 70\text{ V}$, $U_3 = 120\text{ V}$.

6. V uzavřeném obvodu střídavého proudu (obr. 4) je dáno U, R, L, C .

a) Stanovte impedanci Z obvodu.

b) Jaká je podmínka rezonance? Jaký je rezonanční odpor?

Rezonance nastává, je-li jalová (imaginární) složka impedance rovna nule.

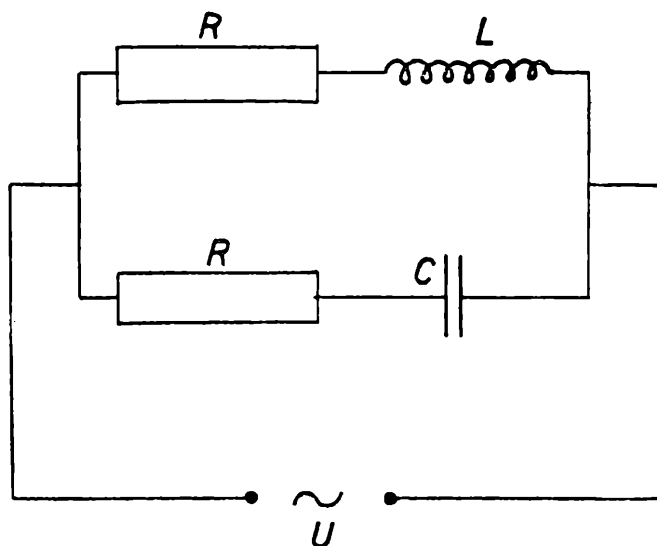
c) Stanovte proudy I_1, I_2, I při rezonanci; proudy I_1 a I_2 rozdělte na složku reálnou a složku imaginární a dokažte, že imaginární složky proudů I_1 a I_2 jsou stejně veliké, ale opačného znaménka.

7. Vypočítejte odpor drátěné krychle, jejíž každá hrana má odpor r , jestliže je zdroj stejnosměrného napětí připojen

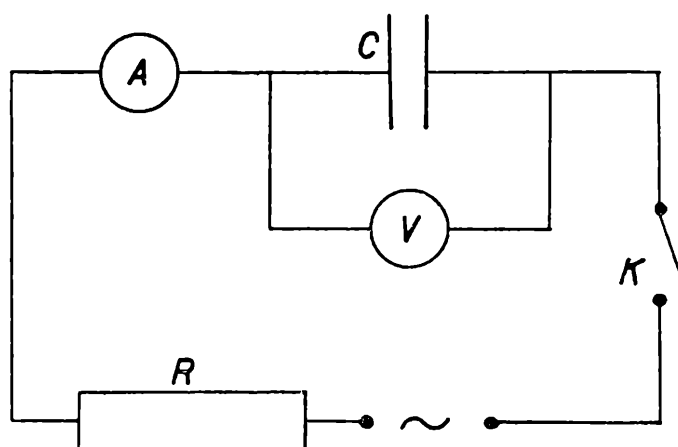
a) ke středům dvou protilehlých hran,

b) ke dvěma protějším vrcholům.

Přechodové odpory v uzlech zanedbejte.



Obr. 4



Obr. 5

8. Dvě homogenní ocelové kuličky jsou zavěšeny na vláčknech tak, že jsou jejich těžiště ve stejných vzdálenostech l od bodů závěsu a nitě jsou napjaty ve svislém směru, jestliže se kuličky dotýkají. Hmoty kuliček jsou m_1 a $m_2 < m_1$. Lehčí kuličku vychýlíme o úhel $\alpha = 90^\circ$ při napjatém vlákně v rovině určené oběma závěsy (v klidové poloze kuliček) a uvolníme.

a) Jak vysoko nad vodorovnou rovinu σ , proloženou těžištěm těžší kuličky, vystoupí obě kuličky po rázu, jsou-li dokonale pružné?

b) Co se stane, vychýlíme-li obdobným způsobem těžší kuličku a uvolníme ji?

c) Jaký je poměr hmot kuliček, jestliže po rázu obě vystoupí do stejné výšky?

9. Stanovte kapacitu kondenzátoru metodou

- a) přímou,
- b) můstkovou.

Potřeby: Zdroj střídavého napětí; posuvný reostat R ; kondenzátor kapacity několika μF , jehož kapacitu budete určovat; sada kondenzátorů o známých kapacitách; dva avometry; spínač K proudu; Wheatstoneův můstek; přívodní dráty.

a) *Návod.* 1. Sestavte obvod podle naznačeného schématu (obr. 5). Proud budete měnit posuvným reostatem R . Měření provádějte např. při napětí $U = 22\text{ V}$ s avometem upraveným na rozsah napětí 30 V. Odpor avometu je v tomto případě $3 \cdot 10^4\ \Omega$.

2. Měření proveďte pětkrát pro různé hodnoty I ; naměřené hodnoty I a U zaznamenejte do vhodně upravené tabulky a vypočítejte kapacitu podle zjednodušeného vzorce $I = C\omega U$.

3. Za hledanou hodnotu C volte aritmetický průměr všech pěti vypočítaných hodnot.

4. Uvažte, zda je odpor avometu při rozsahu 30 V dostatečně veliký, abyste mohli použít uvedeného zjednodušeného vzorce.

b) *Návod* najdete v učebnici Zdeněk Horák, Praktická fyzika, str. 434, čl. 65. 2 (SNTL, Praha 1958). Místo bzučáku a telefonu můžete také užít zdroje střídavého napětí a citlivého ampérmetru. Proveďte pět měření a hodnotu hledané kapacity určete podle návodu v odst. 3a.

Kategorie B

1. Od vlaku úhrnné hmoty m , jedoucího stálou rychlostí v po vodorovné přímé trati, se odtrhl poslední vůz hmoty m_1 a po projetí dráhy d se zastavil.

V jaké vzdálenosti od vozu bude vlak v okamžiku, kdy se vůz zastavil, je-li výkon lokomotivy stálý, tření žádné části vlaku nezávisí na rychlosti a třecí síla je přímo úměrná hmotě pohybující se části vlaku?

2. Na rtuti plave kovový kvádr tak, že jeho boční stěny jsou kolmé k vodorovnému povrchu rtuti. Teplota celé soustavy (kvádr a rtuť) se zvýší z t_1 na t_2 .

a) Určete, jak se změní výška části kvádru nad povrchem rtuti.

b) Vyjádřete podmínku, kdy kvádr při ohřátí z teploty t_1 na teplotu t_2 klesne hlouběji do rtuti a kdy vystoupí výše.

Úlohu řešte nejprve obecně a potom pro soustavy rtuť-ocel a rtuť-hliník.

Hustota rtuti při 0°C je $\rho_r = 13,6 \cdot 10^3\text{ kg m}^{-3}$, hustota oceli při téže teplotě $\rho_o = 7,80 \cdot 10^3\text{ kg m}^{-3}$, hustota hliníku při 0°C je $\rho_h = 2,69 \cdot 10^3\text{ kg m}^{-3}$; součinitel teplotní objemové roztažnosti rtuti $\beta = 18,2 \cdot 10^{-6}\text{ deg}^{-1}$, součinitel délkové teplotní roztažnosti oceli je $\alpha_o = 12 \cdot 10^{-6}\text{ deg}^{-1}$ a hliníku $\alpha_h = 23,7 \cdot 10^{-6}\text{ deg}^{-1}$; teplota $t_1 = 0^\circ\text{C}$, $t_2 = 100^\circ\text{C}$.

3. Dřevěná nádoba s pískem o celkové hmotě m_1 leží na vodorovné kovové desce. Střela o hmotě m_2 , směřující do těžiště nádoby, vletí ve vodorovném směru rychlostí v do nádoby a uvázne v ní. Nádoba se při tom posune o vzdálenost s .

a) Jak velká je rychlost střely? Součinitel vlečného tření nádoby po desce je f .

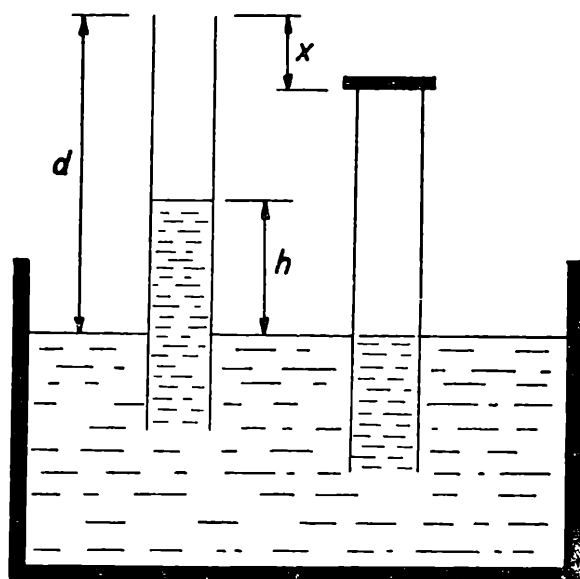
b) Jaká část kinetické energie střely se přemění při zabrzdění střely v nádobě na jiné druhy energie než je energie kinetická?

Řešte nejprve obecně a potom číselně pro hodnoty $m_1 = 25\text{ kg}$, $m_2 = 0,02\text{ kg}$, $s = 0,08\text{ m}$, $f = 0,25$.

4. Voda vystoupí ve svislé kapiláře, ponořené do nádoby s vodou do výšky h ; neponořená část kapiláry má délku d . Volný konec kapiláry uzavřeme a kapiláru ponoříme do vody tak hluboko, aby povrch vody v kapiláře byl ve stejné výši jako povrch vody v nádobě (obr. 6).

O jakou délku x je nutno kapiláru ponořit.

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $d = 21 \text{ cm}$, $h = 8,0 \text{ cm}$. Barometrický tlak $b = 10^6 \text{ Nm}^{-2}$, tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

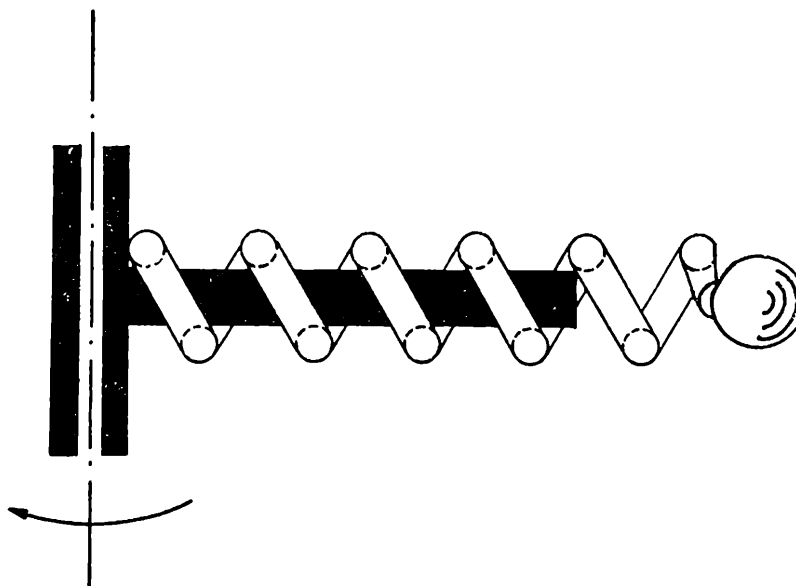


Obr. 6

5. Pružina je navlečena na tyč, která je připevněná kolmo k čepu. Jeden konec pružiny je připevněn k čepu, na druhém je upevněno těleso o hmotě m . Délka nezatížené pružiny je d (obr. 7). Napínáme-li ji tažnou silou F_0 , prodlouží se o délku Δl . Soustava tyč, pružina a těleso vykonává otáčivý pohyb okolo svislé osy o . Hmotu pružiny a tření mezi tyčí a pružinou zanedbáme.

a) Najděte vztah mezi prodloužením pružiny a úhlovou rychlostí, s kterou se soustava otáčí okolo osy.

Vypočítejte prodloužení pružiny, je-li frekvence otáčivého pohybu f .



Obr. 7

b) Při jaké frekvenci se pružina prodlouží na dvojnásobek?

c) Jakou hodnotu musí mít frekvence, aby odstředivá síla působící na pružinu byla rovna n -násobku váhy tělesa?

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $m = 0,01 \text{ kg}$, $d = 0,2 \text{ m}$, $\Delta l = 0,01 \text{ m}$, $F_0 = 0,125 \text{ N}$, $f = 5 \text{ Hz}$, $n = 10$.

6. Dvě stejné válcovité nádoby A , B o výšce h a o podstavě velikosti S jsou postaveny vedle sebe na vodorovné desce a jsou spojeny těsně u dna krátkou trubičkou. Nádobu B je uzavřená, do otevřené nádoby A nalijeme vodu.

a) Kolik vody je možno maximálně do takto postavených nádob nalít, považujeme-li teplotu t_1 soustavy za stálou?

b) Na jakou hodnotu t_2 je nutno zvýšit teplotu soustavy, aby vzduch úplně vytlačil vodu z nádoby B?

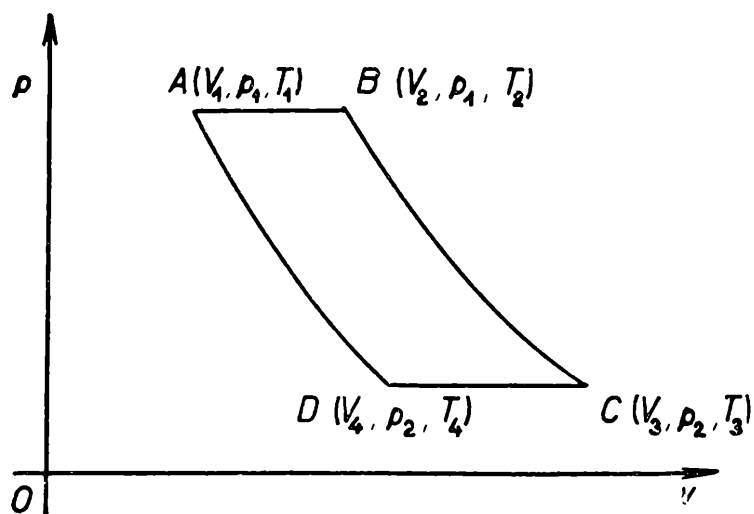
Tlak vodních par, teplotní roztažnost vody a nádob nebudeme uvažovat.

Řešte nejprve obecně a potom číselně pro hodnoty $h = 0,8 \text{ m}$, $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, $t_1 = 20^\circ \text{C}$. Barometrický tlak $b = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$, tíhové zrychlení $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

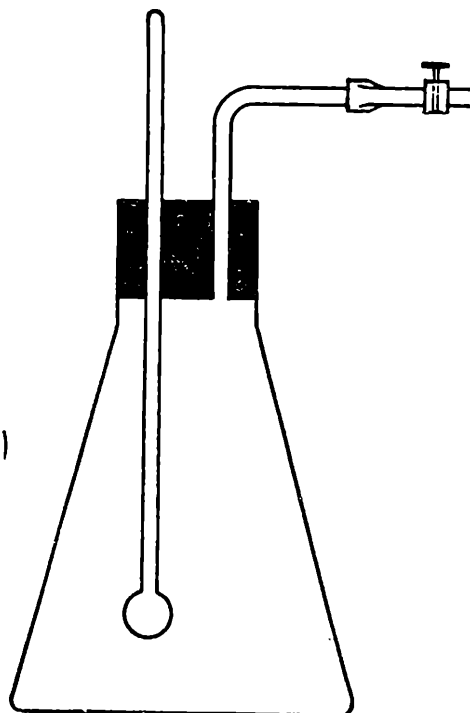
7. Kompresor dodává objem V vzduchu za minutu při stálém tlaku p a teplotě ϑ_1 . Vzduch se ochlazuje ve spirálovém trubkovém chladiči vodou. Teplota vzduchu vystupujícího z chladiče je ϑ_2 . Voda vstupující do chladiče má teplotu ϑ_3 , při výstupu z chladiče má teplotu $\vartheta_4 > \vartheta_3$.

Jak veliký objem vody se spotřebuje za dobu t v chladiči?

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $V = 1,5 \text{ m}^3$, $p = 8 \text{ at}$, $\vartheta_1 = 207^\circ \text{C}$, $\vartheta_2 = 47^\circ \text{C}$, $\vartheta_3 = 12^\circ \text{C}$, $\vartheta_4 = 28^\circ \text{C}$, $t = 1 \text{ h}$. Měrné teplo vzduchu při stálém tlaku je $c_p = 0,24 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, poměrná molekulová hmota vzduchu $\mu = 28,84$.



Obr. 8



Obr. 9

8. Stanovte účinnost kruhového děje složeného z těchto změn (obr. 8)

1. izobarické expanze,
2. adiabatické expanze,
3. izobarické komprese,
4. adiabatické komprese.

Účinnost porovnejte s účinností Carnotova cyklu.

9. Určete součinitele teplotní objemové roztažnosti vzduchu.

Potřeby. Skleněná baňka (asi 250 cm^3), gumová zátka s dvěma otvory, teploměr, skleněná trubička ohnutá do pravého úhlu s gumovou hadičkou a tlačítkem, váhy, nádoba s horkou vodou, vařič, větší skleněná nádoba se studenou vodou.

Návod.

1. Skleněnou baňku uzavřete gumovou zátkou, kterou prochází teploměr a skleněná trubička s gumovou hadičkou a tlačítkem (obr. 9). Tlačítko necháte otevřené a zvážíte baňku s příslušenstvím. Její hmota je m_1 .

2. Baňku ponoříte do horké vody až po zátku a počkáte, až se teplota vzduchu v baňce ustálí. Zaznamenáte příslušný údaj t_1 teploměru a potom uzavřete tlačku.

3. Baňku ponoříte do nádoby se studenou vodou hrdlem obráceným dolů a otevřete tlačku. Voda vnikne do baňky, neboť po ochlazení se v ní zmenšil tlak vzduchu. Když se ustálí teplota, zaznamenáte si její hodnotu t_2 . Potom uvedete baňku, stále ponořenou hrdlem pod hladinu vody v nádobě, do takové polohy, aby povrchy vody v baňce i v nádobě byly ve stejné rovině a uzavřete tlačku. Jaký tlak bude mít po uzavření tlačky vzduch v baňce? Co udává objem vody, která vnikla do baňky?

4. Baňku vyjmete z vody, osušíte a zvážíte. Naměřenou hmotu označíte m_2 .

5. Baňku s celým příslušenstvím zcela naplníte vodou z nádoby, osušíte ji a znovu zvážíte. Naměřenou hmotu označíte m_3 . Teplota vody t'_2 v baňce se bude lišit jen málo od teploty t_2 , takže platí $t'_2 = t_2$.

6. Za teploty t_1 měl horký vzduch v baňce objem

$$V_1 = \frac{m_3 - m_1}{\rho}, \quad (1)$$

kde ρ značí hustotu vody za teploty t_2 . Odůvodněte. Totéž množství vzduchu mělo po ochlazení na teplotu t_2 objem

$$V_2 = \frac{m_3 - m_2}{\rho} \quad (2)$$

Odůvodněte.

Poměr

$$\frac{V_1}{V_2} = k = \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} \quad (3)$$

Vzduch objemu V_1 , uzavřený v baňce při teplotě t_1 , změnil po ochlazení na teplotu t_2 svůj objem na V_2 izobaricky. Odůvodněte.

Pokládáme-li vzduch za dokonalý plyn, pak platí $V_1 = V_0 (1 + \gamma t_1)$ a $V_2 = V_0 (1 + \gamma t_2)$. Z těchto rovnic určete se zřetelem ke vztahu (3)

$$\gamma = \frac{k - 1}{t_1 - kt_2} \quad (4)$$

7. Dosadte do rovnic (3) a (4) naměřené hodnoty a vypočítejte hodnotu γ .

Kategorie C.

1. Těleso padající volným pádem má v bodě A své dráhy okamžitou rychlost v_1 a v bodě B rychlost $v_2 > v_1$.

Určete vzdálenost d bodů A a B a dobu t , za kterou vykoná těleso dráhu AB . Tíhové zrychlení je $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešte nejprve obecně a potom číselně pro hodnoty $v_1 = 40 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 70 \text{ m s}^{-1}$.

2. V průmyslovém závodě se dopravuje uhlí vozíky po nakloněné rovině délky d vzhůru. Celková hmotnost vozíku s uhlím je m , úhel nakloněné roviny s vodorovnou rovinou je α . Vozík je tažen silou rovnoběžnou s nakloněnou rovinou tak, že se pohybuje se zrychlením a .

a) Jak velká tažná síla působí na vozík?

b) Jak velká mechanická práce se vykoná při dopravě jednoho vozíku?

c) Jak veliký je přírůstek kinetické energie vozíku v nejvyšším místě dráhy?

d) Jaký je výkon motoru, kterým je vozík tažen vzhůru?

Tření zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $d = 25 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $a = 1 \text{ m s}^{-2}$, $m = 3,2 \text{ t}$, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

3. Na vodorovné hladké rovině jsou dvě stejně velké homogenní koule z různého materiálu o hmotách m_1 a $m_2 < m_1$. Lehčí koule se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v_2 směrem k těžší kouli, která je v klidu a narazí na ni tak, že bod nárazu leží na spojnici středů obou koulí. Po rázu se koule pohybují jako jedno těleso rychlostí v .

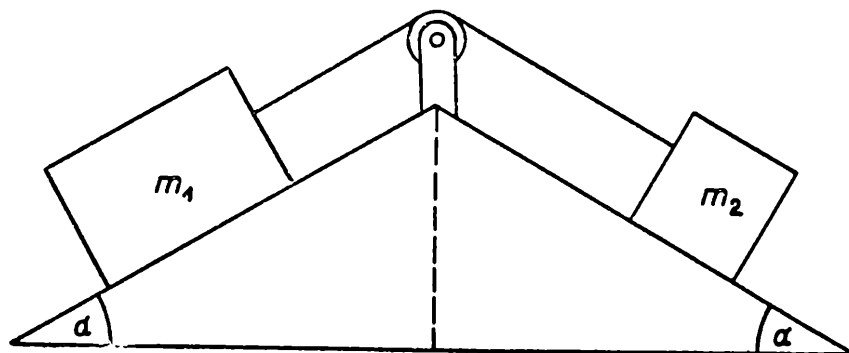
a) Určete rychlost v .

b) Jakou rychlostí a jakým směrem by se koule po rázu pohybovaly, kdyby byly dokonale pružné?

Tření, odpor vzduchu a otáčení koulí zanedbejte. Řešte obecně, potom pro hodnoty $v_2 = 2 \text{ m s}^{-1}$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$.

4. Tři dělníci nesou homogenní desku všude stejné tloušťky, která má tvar obráceného trojúhelníka. Podpírají ji ve vrcholech.

Dokažte, že každý z nich podpírá desku stejnou silou.



Obr. 10

5. Bedna má tvar krychle; její těžiště je v průsečíku tělesových úhlopříček. Bednu můžeme přemístit do vzdálenosti d buď převrácením přes hranu nebo tak, že ji táhneme po zemi.

Součinitel vlečného tření bedny o zem je f . Tření při převrácení bedny je zanedbatelně malé.

a) Při kterých hodnotách f se vykoná při přemísťování bedny překlápěním větší práce než při posouvání po zemi?

b) Jakou hodnotu musí mít f , aby práce vykonaná při obou způsobech přemísťování byla stejně veliká?

6. Dvě tělesa jsou vržena z bodu A svisle vzhůru se stejnou počáteční rychlostí v_0 v časovém intervalu τ za sebou.

a) Za jak dlouho od okamžiku, kdy bylo vrženo druhé těleso, a v jaké výšce nad bodem A , se obě tělesa srazí?

b) Jakou podmínku musí splňovat v_0 , aby úloha při daném τ byla reálnou?

c) S jak velikou vzájemnou rychlostí se obě tělesa srazí?

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $v_0 = 24,5 \text{ m s}^{-1}$, $\tau = 0,5 \text{ s}$, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

7. Dvě hladké nakloněné roviny svírají s vodorovnou rovinou úhel α ; jsou k sobě postaveny výškami tak, že jejich průřez tvoří rovnoramenný trojúhelník (obr. 10). Ve společném vrcholu je upevněna lehce otáčivá kladka, přes níž je vedeno lano. Na koncích lana jsou přivázána závaží o hmotách m_1 a $m_2 < m_1$, která leží na nakloněných rovinách.

a) Určete zrychlení a směr, kterým se soustava pohybuje.

b) Určete tažnou sílu, kterou je napínáno lano.

Hmotu kladky a lana i tření zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $m_1 = 0,3 \text{ kg}$, $m_2 = 0,2 \text{ kg}$; tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

c) Řešte úlohy a) b) pro $m_1 = m_2$, jestliže jedna nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha_1 = 30^\circ$ a druhá $\alpha_2 = 45^\circ$; $m_1 = m_2 = 0,4 \text{ kg}$.

8. Dvě hvězdy, které tvoří společně dvojhvězdu, se pohybují ve velké vzdálenosti od jiných těles o velikých hmotách navzájem relativně po kružnicích.

Jaké jsou jejich dráhy vzhledem k ostatním hvězdám, jejichž vlastní pohyby neuvažujeme,

a) jsou-li hmoty obou těles stejně veliké;

b) je-li hmota jedné z nich dvakrát větší než hmota druhá;

c) je-li hmota jedné hvězdy značně velká ve srovnání s hmotou druhé hvězdy?

d) Určete poměr rozměrů drah a poměr dráhových rychlostí v úlohách a), b), c).

e) Sestrojte k úlohám a), b), c) náčrtky.

Dvě tělesa, která na sebe navzájem působí gravitačními silami, obíhají kolem společného těžiště.

9. Určete tuhost pružiny a závislost její potenciální energie na prodloužení.

Potřeby. Pružina s ukazatelem, dřevěné měřítko s milimetrovou stupnicí, stojany na upevnění pružiny a měřítka, milimetrový papír.

Návod. Pružina prodloužená o délku s je napjata silou F , která je přímo úměrná prodloužení pružiny s , takže platí

$$F = ks \quad (1)$$

kde k je konstanta pro danou pružinu charakteristická a nazývá se t u h o s t p r u ž i n y.

Síla napínající pružinu koná práci A po dráze s , která se projeví jako přírůstek potenciální energie napjaté pružiny. Velikost této práce nemůžeme počítat podle vzorce $A = Fs$, označíme-li písmenem F sílu, kterou je napjata pružina při prodloužení o délku s . Podle vztahu (1) se totiž během napínání měnila velikost napínající síly od nejmenší hodnoty $F_0 = 0$ (při nenapjaté pružině) až po největší hodnotu F (při prodloužení pružiny o délku s).

Práci A můžeme však vypočítat, předpokládáme-li, že po celé délce s působila na pružinu jistá průměrná konstantní síla F_p , která způsobila stejné prodloužení pružiny jako skutečně působící proměnná síla. Protože velikost síly, která napíná pružinu, roste rovnoměrně s prodloužením pružiny, je velikost průměrné síly rovna aritmetickému průměru sil, působících na počátku a na konci dráhy s . Proto je potenciální energie napjaté pružiny

$$W_p = A = F_p s = \frac{1}{2} F s$$

a dosadíme-li za F ze vztahu (1), je

$$W_p = \frac{1}{2} ks^2 \quad (2)$$

Otázky.

1. Jaký fyzikální význam má tuhost pružiny?

2. Jak označíme jednotku tuhosti pružiny?

3. Vyjádřete větou závislost velikosti potenciální energie napjaté pružiny na prodloužení pružiny.

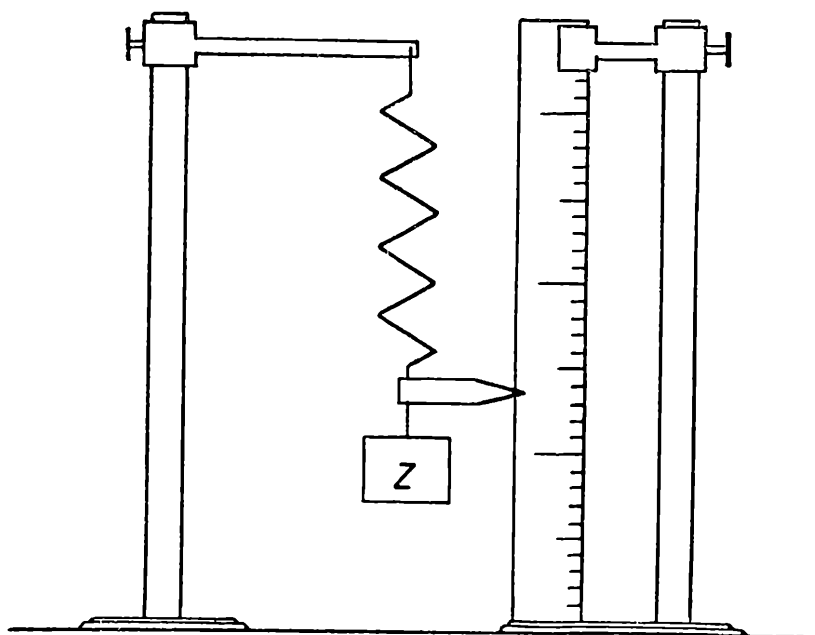
Měření. 1. Zavěste na háček stojanu pružinu s ukazatelem. Aby se pružina narovнала, zavěste na její spodní konec lehké závaží s háčkem. Závaží nechte na pružině během měření trvale připevněné a s jeho tíhou nepočítejte. Zjistěte údaj, který ukazuje ukazatel na vertikálně postaveném měřítku a zapište jej na příslušné místo v třetím sloupci tabulky k síle $F = 0$ (obr. 11).

2. Napínejte pružinu postupně závažími o hmotách m , $2m$, $3m$... Za m zvolte vhodnou hmotu podle užití pružiny, např. $m = 5$ g. Při každém zatížení pružiny zjistíte údaj ukazatele na stupnici měřítka a запиšte jej do třetího sloupce tabulky k příslušné síle pružnosti. Proveďte aspoň 5 měření.

Tabulka

Měření	Síla F [p]	Údaj ukazatele [cm]		Střední hodnota obou údajů [cm]	Prodloužení s [cm]	$\frac{F}{s}$ [p cm ⁻¹]	W_p [p cm]
		při rostoucím zatížení	při klesajícím zatížení				
1.	0						
2.							

3. Po zavěšení posledního závaží ubírejte postupně závaží po m (5 g) a údaje ukazatele na měřítku při klesajícím zatížení zaznamenejte do čtvrtého sloupce tabulky k příslušným silám pružnosti. Údaj ukazatele při největším užitém zatížení запиšte do třetího i čtvrtého sloupce tabulky.



Obr. 11

4. Z naměřených hodnot v sloupci druhém, třetím a čtvrtém vypočítejte střední hodnoty obou údajů ukazatele na stupnici prodloužení pružiny, hodnotu podílu $\frac{F}{s}$ a velikost potenciální energie napjaté pružiny W_p . Vypočítané hodnoty запиšte na příslušná místa tabulky.

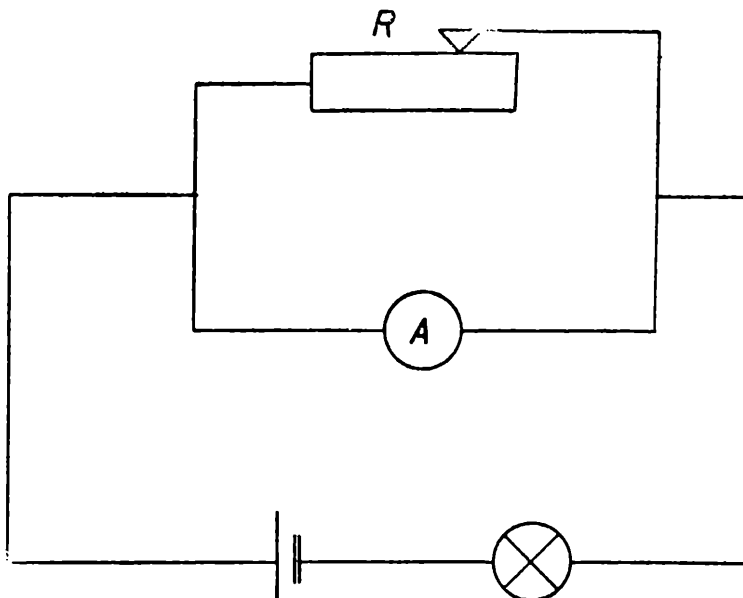
5. Dá se soudit se zřetelem k přípustné velikosti chyb vznikajících měřením, že podíl $\frac{F}{s}$ má konstantní hodnotu?

6. Určete tuhost pružiny jako aritmetický průměr hodnot uvedených v předposledním sloupci stupnice.

7. Sestrojte ve vhodném měřítku na milimetrový papír graf závislosti síly F na prodloužení s pružiny a graf závislosti potenciální energie W_p na prodloužení s pružiny.

Kategorie D

1. Na hladkém ledě rozsáhlého rybníka byla určena tři stanoviště A , B , C pro tři bruslaře a cíl D . Cíl D pólí spojnicí stanovišť A a C , spojnice stanovišť B s cílem D je kolmá na spojnici AC . Přitom $AD = BD = CD = 100$ m. Dráha předepsaná pro bruslaře ve stanovišti A je půlkružnice nad úsečkou AD , dráha pro bruslaře ve stanovišti B je složena ze dvou stejných půlkružnic nad úsečkou BD (půlkružnice mají poloměr BD a jsou na různých stranách úsečky BD), dráha pro bruslaře ve stanovišti C je složena ze tří stejných půlkružnic nad spojnicí CD (půlkružnice mají poloměry BD a jsou



Obr. 12

střídavě na jedné a druhé straně spojnice CD). Všichni bruslaři vyjedou ze svých stanovišť současně. Bruslař ze stanoviště A pojede stálou rychlostí $5,0$ m/s.

Jakou stálou rychlostí musí projet svou dráhu bruslař ze stanoviště B , aby dosáhl cíle o $2,0$ s později než bruslař ze stanoviště A . Jakou stálou rychlostí musí projet svou dráhu bruslař ze stanoviště C , aby dostihl cíle o $4,0$ s později než bruslař ze stanoviště A ?

2. Nákladní auto s nákladem o celkové váze 2500 kp se pohybuje rovnoměrným pohybem po přímé cestě, která na každých 100 m délky stoupá o 14 m.

Vypočítejte výkon auta, pohybuje-li se rychlostí $v = 18$ km/h (k tření nepřihlížíme).

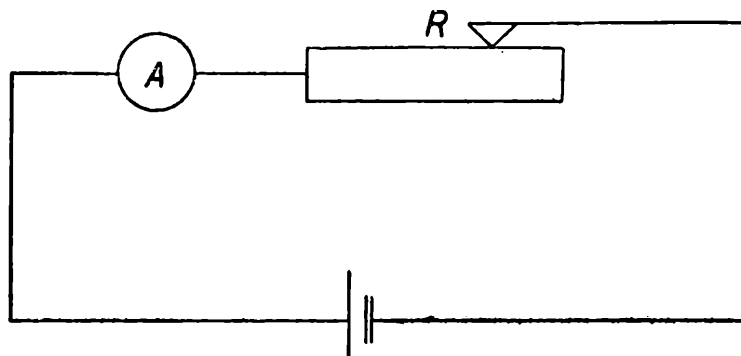
3. Krychli z lipového dřeva váhy 10 kp zvedneme poprvé ve vzduchu do výše $0,75$ m. Po druhé ji úplně ponořenou pod hladinu rybníka vtlačíme do hloubky o $0,75$ m větší. Měrná váha lipového dřeva je $\rho = 450$ kp/m³.

Která z obou prací na uvedených drahách je větší a kolikrát je větší? O jakou hodnotu se obě práci liší?

4. Na misku rovnoramenných vah položíme nádobu s vodou a dřevěný špalíček; na druhé misce je vyvážíme.

Poruší se rovnováha, dáme-li špalík do vody v nádobě?

b) Na miskách rovnoramenných vah jsou dvě stejné nádoby po okraj naplněné vodou. V jedné z nich plove dřevěný špalík. Je na vahách rovnováha?

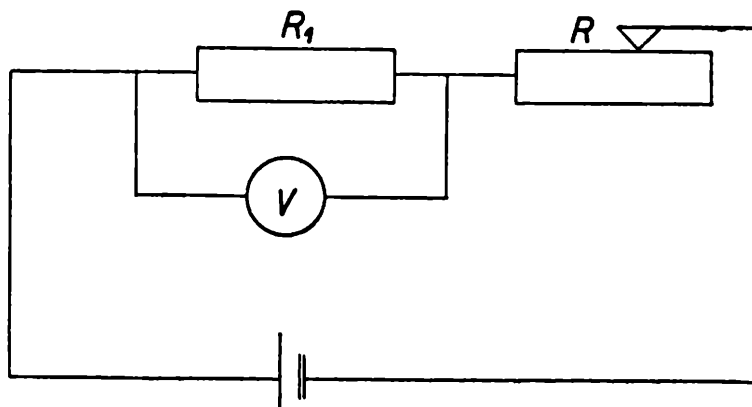


Obr. 13

c) Na misku rovnoramenných vah položíme nádobu s vodou a na druhé misce ji vyvážíme. Poruší se rovnováha, jestliže ponoříme do vody prst tak, že se nádoby nedotýkáme?

d) Na misku vah postavíme nádobu s vodou a na závěs misky upevníme nit se zavěšeným závažím tak, že závaží je nad povrchem vody v nádobě; na druhé misce vyvážíme.

Poruší se rovnováha, jestliže snížíme závaží na niti tak, aby bylo ponořeno do vody a nedotýkalo se stěn ani dna nádoby? Vysvětlete a ověřte výsledky pokusem.



Obr. 14

5. Na pozorovatelně v blízkosti děla bylo zjištěno, že dělová střela dopadla na zem za 15,0 s po záblesku u hlavní. Zadunění střely při dopadu bylo na pozorovatelně slyšet 36 s po záblesku.

Určete vzdálenost místa dopadu od pozorovatelně a průměrnou rychlost střely ve vodorovném směru. Rychlost zvuku je $c = 340 \text{ m/s}$.

6. Kolik tepla se musí dodat 5,0 kg ledu teploty -4°C , aby se proměnil

ve vodu 10,0 °C teplou? Měrné teplo ledu je $0,50 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}}$, měrné teplo vody $1,0 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}}$ a skupenské teplo tání ledu $80 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$.

7. Žárovka na napětí 120 V svítila s plným výkonem při průchodu proudu 0,50 A.

Jak veliký odpor jí musíme předřadit při zapojení na síť 220 V, aby svítila s plným výkonem?

8. K odporu $R_1 = 36 \Omega$ byl připojen neznámý odpor R_x takový, že jejich výsledný odpor $R = 12 \Omega$. Celkový proud po zapojení byl $I = 5,0 \text{ A}$.

Nakreslete schéma zapojení, určete odpor R_x , napětí na obou odporech a proudy, které jednotlivými odpory procházejí.

9. Na obrázcích 12, 13 a 14 jsou schematicky nakresleny tři elektrické obvody. Popište je a vysvětlete, jak se změní proud nebo napětí zaznamenané měřicím přístrojem, jestliže se zvětší odpor té části reostatu, která je zařazena do obvodu.



Recenze

Dvě nové příručky pro fyziku

Protože se dnes učebnice na školách půjčují zdarma, avšak nejsou ve volném prodeji, mají studenti potíže při přípravě k závěrečným zkouškám, k přípravě ke studiu na vysokých školách a k přijímacím pohovorům. Tento nedostatek odstraní soubor příruček, které vydává Státní nakladatelství technické literatury v Praze. Během dubna 1964 mají vyjít první dvě příručky autorského kolektivu Říman, Slavík, Šoler:

1. *Fyzika* (příručka pro zájemce o studium na vysokých školách).
2. *Příklady z fyziky* (příručka pro zájemce o studium na vysokých školách).

Příručky shrnují středoškolskou látku a podávají poněkud v širším rozsahu některé moderní partie fyziky (kvantová fyzika, atomistika, polovodiče). V první příručce je podán přehled látky, v druhé je provedena její aplikace na řešení konkrétních úloh. Přitom je v každé kapitole podán přehled základních vztahů a vzorců, řada ukázkově řešených příkladů a větší počet dalších úloh k procvičení. Příručky budou ve všech prodejnách KNIHA a jejich cena bude asi 10 Kčs.

Upozorňujeme na tyto příručky studenty i ostatní zájemce o studium na vysokých školách technických, protože jim značně usnadní přípravu.

K. Šoler

Další přírůstky v knižnici MO

V Rozhledech se už několikrát psalo o brožurkách se společným názvem *Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů*, které vydává Matematický ústav ČSAV v nakladatelství Mladá fronta. Jsou to knížky kapesního formátu a písmena MO na jejich obálce nám připomínají, že jsou určeny jako pomocný text pro řešitele matematické olympiády. S úspěchem je ovšem mohou číst i ostatní středoškolští studenti nebo i dospělý čtenář, který si chce prohloubit své znalosti ze středoškolské matematiky.

Dnes upozorňujeme čtenáře Rozhledů na dva nové svazečky, jež mají pořadová čísla 7 a 8. Svazek 7. napsal J a r o s l a v Š e d i v ý pod názvem *O podobnosti v geometrii*. V pěti kapitolách se tu přístupným způsobem čtenáři setkají s důležitým úsekem středoškolské geometrie. Knížka má 80 stran, 53 obrázků a stojí 3 Kčs.

8. svazek knižnice *Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů* napsal Jiří V á ň a. Název *O rovnicích s parametry* nám napovídá, že jde o tematiku, která se často vyskytuje v příkladech matematické olympiády. Knížka se zabývá lineárními rovnicemi o jedné neznámé, soustavami lineárních rovnic a rovnicemi kvadratickými.

V rozřešených příkladech podává autor vždy shrnutí diskuse a své úvahy přibližuje čtenáři tím, že využívá grafického znázornění. Knížka, kterou odborně revidoval doc. Jan Vyšín, má 64 stran, 11 obrázků a stojí 2 Kčs.

Obě knížky jsou jistě dobrým obohacením matematických knihovniček našich studentů.

* * *

Dále si všimněme svazku devátého, který napsal doc. J a n V y š í n a který má název *Konvexní útvary*. Autor rozvrhl látku do šesti kapitol s dodatkem a pro lepší orientaci připojil ke knížce rejstřík. Tematicky se tento svazek týká elementární geometrie. Vychází se z definice konvexního útvaru jakožto množiny bodů (na přímce, v rovině nebo v prostoru), kde úsečka spojující libovolné dva body útvaru patří celá tomuto útvaru. Také útvar složený z jediného bodu se pokládá za konvexní. Čtenář pozná nejprve jednoduché i složitější případy konvexních útvarů (polorovina, kruh, čtyřstěn, rotační kužel apod.); v dalším výkladu se seznámí s hranicí konvexního útvaru. Má-li přímka p s rovinným útvarem společný aspoň jeden hraniční bod a leží-li tento útvar celý v jedné polorovině vyřazené přímkou p , pak p se nazývá *o p ě r n o u p ř í m k o u ú t v a r u*.

V knížce se studují některé vlastnosti opěrných přímek konvexního útvaru v rovině a pak se provádějí obdobné úvahy o opěrných rovinách

konvexního útvaru v prostoru. Snad znáte úlohu, v níž se má daný trojúhelník rozdělit přímkou na dvě části téhož obsahu. Ve Vyšínově knížce se můžete seznámit i s jinými úlohami tohoto druhu, kde se např. konvexní útvar rozděluje dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části téhož obsahu.

Poslední kapitola je věnována větě Hellyově a některým jejím důsledkům. Hellyovou větou rozumíme toto zajímavé tvrzení:

Jsou-li dány čtyři konvexní útvary v rovině, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod, pak všechny čtyři útvary mají aspoň jeden společný bod.

Z tohoto stručného nástinu je patrné, že knížka obsahuje velké množství materiálu. Ten je přístupně zpracován v příkladech a úlohách. Brožura má 96 stran, 52 obrázků a stojí 3 Kčs.

Doporučujeme ji nejen řešitelům MO, ale i všem čtenářům, kteří se zajímají o elementární geometrii.

Jiřina Sedláčková

Matematická knižnice

Upozorňujeme znovu na dosud vyšlé svazky *Matematické knižnice*, redigované prof. E. Kraemerem, kterou vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislavě.

1. Jan Vyšín: *Metodika řešení matematických úloh*. Vydání 1., Praha 1962; 172 stran, 41 obrázků, cena Kčs 7,70.

2. Josef Metelka: *Matematické stroje - kybernetika*. Vydání 1., Praha 1962; 162 stran, 36 obrázků, cena Kčs 4,40.

3. Juraj Bosák: *Rovnice a nerovnosti*. Vydání 1., Bratislava 1963; 168 stran, cena Kčs 4,—.

4. Jiří Kůst: *Sférická trigonometrie*. Vydání 1., Praha 1964; 241 stran, 88 obrázků, cena Kčs 9,50.

Uvedené publikace *Matematické knižnice* jsou určeny žákům i učitelům na školách všeobecně vzdělávacích i odborných. Každý svazek pojednává informativním způsobem o určité části matematiky s případným použitím v praxi. U čtenářů se předpokládají znalosti nejvýše středoškolské úrovně.

Pavel Vít

Slovníček

matematických výrazů

продолжение	pokračování
проектирование, параллельное	promítání, rovnoběžné
проекция	průmět
проекция аксонометрическая, вертикальная, горизонтальная, диметрическая, изометрическая, с числовыми отметками, триметрическая, фронтальная кавальерная	průmět axonometrický, nárys, půdorys, dimetrie, izometrie, kótovaný průmět, trimetrie, kosoúhlý průmět
произведение	součin, dílo
произвольный	libovolný
промежуток	interval (časový, číselný)
пропорциональность	úměrnost
пропорциональный	úměrný
пропорция	úměra
простое число	prvočíslo
простой делитель	prvočinitel
пространство	prostor
противоположный	opačný, protilehlý
противное, доказательство противного	pro- spor, důkaz sporem
противоречие	spor
против часовой стрелке	proti smyslu pohybu hodinové ručičky
процент, m.	procento
прямая	přímka
прямая несобственная, образующая, пересечения	přímka nevlastní, tvořící, průsečnice
прямолинейный	přímočarý
прямо пропорциональный	přímo úměrný
прямой	pravý (úhel)
прямоугольник	obdélník
прямоугольный треугольник	pravoúhlý trojúhelník
пункт	bod (ve smyslu část článku, odstavec)
пучок	svazek (přímek, rovin)
пятизначной	pětimístný

P

равенство
 равнобедренный треугольник
 равносторонний треугольник
 равняется
 радиан
 радикал
 радиус
 раз
 разбивать, разбить
 развернуть
 развертка

 развертывающий
 раздел
 разделенный
 разлагать, разложить
 размер
 различаться
 разность
 разрез топографической поверхности
 разрешимый
 разряд
 раскрывать, раскрыть
 располагаться
 рассматривать, рассмотреть
 рассмотрение
 расстояние
 рассуждение
 растяжение
 расходиться
 расходящийся
 расчет
 ребро
 результат
 решение
 решить
 ромб
 ромбоид
 ряд, m.

rovnost, shodnosť
 rovnoramenný trojúhelník
 rovnostranný trojúhelník
 rovná se
 radián
 odmocnínko
 poloměr
 krát
 rozdělit, rozložit (na dílky)
 rozvinout
 rozvinutí, síť tělesa
 (plášť + podstavy)
 rozvinutelný
 část, oddíl, partie
 dělený, vydělený
 rozložit (číslo na sčítance)
 rozměr, dimenze
 lišit se
 rozdíl, difference
 profil topografické plochy
 řešitelný
 řád číslice
 odstranit (závorky)
 ležet, být umístěn
 vyšetřovat, zkoumat
 vyšetřování, zkoumání
 vzdálenost
 úvaha
 dilatace, prodloužení (na př. afinní)
 divergovat
 divergentní
 výpočet, vyúčtování, rozpočet
 hrana
 výsledek
 řešení, vyřešení, rozhodnutí
 řešit, rozhodnout se
 kosočtverec
 kosodélník
 řada

C

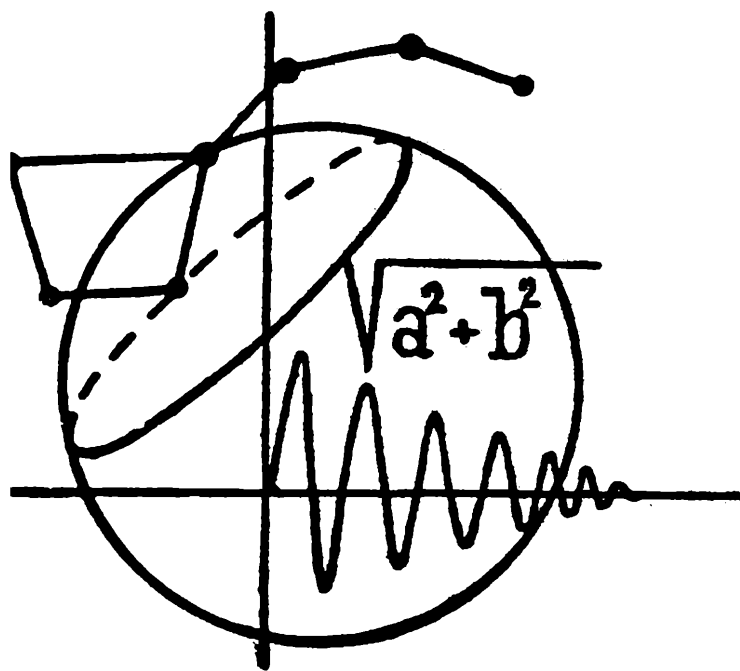
сборник задач
 сведение
 свободный член уравнения
 свойство
 выше
 связка
 связный
 связь, ž.

sbírka úloh
 poznatek, informace
 absolutní člen rovnice
 vlastnost
 více než
 svazek, trs (přímek, rovin)
 souvislý
 souvislost

{ Pokračování }

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



2

ROČ. 43

1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Říjen 1964

Číslo 1

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

S. Horák, st.: Hippokratovy měsíčky	49
L. Galev Sofie: Množiny s neasociativními algebraickými operacemi	52
Inž. dr. J. Langr, J. Šedivý: Zajímavosti z geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka	55
Inž. dr. V. Šindelář: Tvrdost a její měření	58
A. Peřina: Pásmový čas a datovací hranice	62
Prof. R. Kunfalvi, Budapešť: Několik příkladů ze soutěže Loránda Eötvöse v roce 1962 (Dokončení)	69
Úlohy k řešení	74
J. Šedivý: Je šestka nevyhnutelná?	79
Matematická olympiáda	79
J. Zemánek: VI. mezinárodní matematická olympiáda	82
J. Tesař: Zákon zachování hybnosti	88
K. Hofman, dr. M. Chytilová: Vektorové znázornění střídavých proudů a symbolický počet	93
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

A-16*41539

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.

Matematika

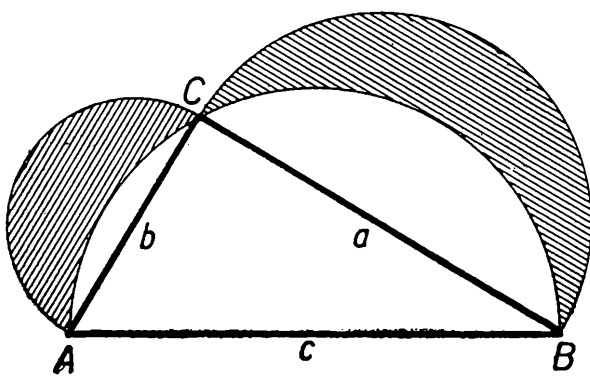
Stanislav Horák, ČVUT, Praha:

Hippokratovy měsíčky

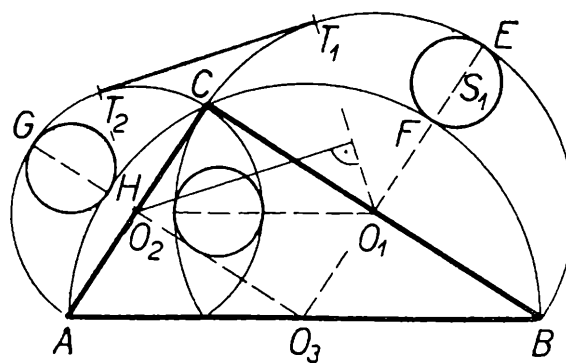


Nad přeponou a nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka ABC jsou sestrojeny půlkružnice, jak je provedeno v obr. 1. Tím vzniknou Hippokratovy měsíčky (v obr. jsou vyšrafovány). Platí tu známá věta, že *součet jejich obsahů je roven obsahu trojúhelníka ABC* . Důkaz tohoto tvrzení je velmi jednoduchý. Označíme-li a, b, c délky odvěsen a přepony, pak obsah Hippokratových měsíčků je

$$P = \frac{ab}{2} + \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi b^2}{4} - \frac{\pi c^2}{4} = \frac{ab}{2}$$



Obr. 1



Obr. 2

Toto je vcelku známá věc. Jsou tu však ještě jiné zajímavé vztahy a těch si v tomto článku všimneme.

Věta 1. *Kružnice největšího poloměru vepsané do Hippokratových měsíčků jsou navzájem shodné a jejich poloměr je roven polovině poloměru kružnice vepsané danému trojúhelníku.*

Důkaz (obr. 2). Kružnice největšího poloměru, která je vepsána měsíčku nad odvěsnou BC , má střed S_1 a dotýká se půlkružnic v bodech

E, F ; její poloměr je x . I platí (O_1, O_2, O_3 jsou středy půlkružnic, které omezují Hippokratovy měsíčky)

$$2x = EF = O_3O_1 + O_1E - O_3F = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a + b - c}{2}$$

Podobně pro poloměr y kružnice vepsané do měsíčku nad odvěsnou AC platí

$$2y = HG = O_3O_2 + O_2G - O_3H = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a + b - c}{2}.$$

Tím je první část věty dokázána. Ještě dokážeme tvrzení o velikosti poloměru. Je-li P obsah libovolného trojúhelníka (nemusí být pravoúhlý), pak při obvyklém označení je poloměr ϱ vepsané kružnice dán vzorcem

$$\varrho = \frac{P}{s}$$

Poněvadž pro pravoúhlý trojúhelník je

$$P = \frac{a \cdot b}{2}, \quad s = \frac{a + b + c}{2},$$

můžeme vzorec pro ϱ upravovat

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ab(a + b - c)}{(a + b + c)(a + b - c)} = \\ &= \frac{ab(a + b - c)}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{a + b - c}{2}, \end{aligned}$$

což souhlasí s vyslovenou větou.

V ě t a 2. Kružnice největšího poloměru, jež je vepsána do plochy omezené kružnicemi $\left(O_1; \frac{a}{2}\right), \left(O_2; \frac{b}{2}\right)$, je shodná s kružnicemi z věty 1.

D ů k a z (obr. 2) přenechávám čtenářům.

V ě t a 3. Součet Hippokratových měsíčků je roven čtverci tečny společné kružnicím $\left(O_1; \frac{a}{2}\right), \left(O_2; \frac{b}{2}\right)$.

D ů k a z (obr. 2). Budeme počítat délku $t = T_1T_2$ společné tečny:

$$t^2 = O_1O_2^2 - \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{4} = \frac{ab}{2},$$

jak jsme měli dokázat.

V ě t a 4. Kružnice největšího poloměru, která má s kružnicemi $\left(O_1; \frac{a}{2}\right), \left(O_2; \frac{b}{2}\right)$ vnější dotyk, je shodná s kružnicí vně vepsanou, která se přepony dotýká ve vnitřním bodě.

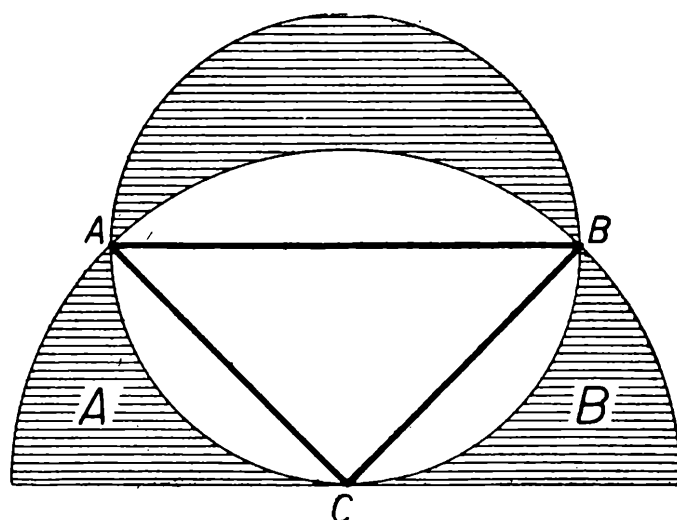
D ů k a z. Poněvadž střed uvažované kružnice leží na přímce O_1O_2 , je její poloměr roven výrazu

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{a + b + c}{4} = \frac{s}{2}.$$

Poloměr vně vepsané kružnice, která se přepony dotýká ve vnitřním bodě, je (P je obsah daného trojúhelníka)

$$= \frac{P}{s - c} = \frac{ab}{a + b - c} = \frac{ab(a + b + c)}{(a + b - c)(a + b + c)} = \frac{s}{2}$$

jak jsme měli dokázat.



Obr. 3

V ě t a 5. Průměr kružnice největšího poloměru, která s kružnicí $\left(O_1; \frac{a}{2}\right)$ má vnější dotyk a s kružnicí $\left(O_2; \frac{b}{2}\right)$ vnitřní dotyk, je roven poloměru u kružnice vně vepsané a dotýkající se odvěsny AC ve vnitřním bodě.

D ů k a z, který je velmi jednoduchý, přenechávám opět čtenářům.

Cvičení. Trojúhelník ABC v obr. 3 je pravoúhlý, rovnoramenný. Dokažte:

a) že obsah měsíčku nad přeponou AB je roven obsahu trojúhelníka ABC;

b) že součet obsahů ploch **A**, **B** je roven obsahu trojúhelníka ABC.

Množiny s neasociativními algebraickými operacemi

(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)

V článku *Množiny s algebraickými operacemi*¹⁾ jsou na příkladech ilustrovány některé pojmy moderní algebry týkající se asociativních a komutativních operací. Moderní algebra však zná i neasociativní a nekomutativní operace.

V tomto článku uvedeme na jednoduchých příkladech z množiny E celých nezáporných čísel $0, 1, 2, \dots$ a její podmnožiny K_n nezáporných zbytků $0, 1, 2, \dots, n-1$ získaných při dělení celých nezáporných čísel přirozeným číslem $n > 1$, některé pojmy moderní algebry, související s *neasociativními* a *nekomutativními operacemi*.

Algebraické operace se nejčastěji zadávají v multiplikativním tvaru (tj. ve tvaru násobení). Znamení „ $\cdot$ “ se používá jako znaku operace a výsledek se nazývá *součin*. Tak např. $A \cdot B$ může znamenat mocninu A^B . V dalším budeme pro označení algebraických operací používat pouze multiplikativního tvaru.

Algebraická operace se nazývá *neasociativní*, existují-li aspoň tři prvky A, B, C množiny, na níž byla operace zavedena, pro které

$$(A \cdot B) \cdot C \neq A \cdot (B \cdot C).$$

V takovém případě se trojice prvků A, B, C nazývá *neasociativní*.

Algebraická operace na nějaké množině se nazývá *nekomutativní*, existují-li aspoň dva prvky A, B , pro které

$$A \cdot B \neq B \cdot A;$$

dvojice prvků A, B se nazývá *nekomutativní*.

Označujme tedy mocninu A^B znakem $A \cdot B$. Pak $(3 \cdot 2) \cdot 2$ znamená $(3^2)^2$, což se rovná $3^{2 \cdot 2} = 81$ a $3 \cdot (2 \cdot 2)$ znamená $3^{2^2} = 81$. Podobně $(2 \cdot 3) \cdot 2 = (2^3)^2 = 2^6 = 64$, avšak $2 \cdot (3 \cdot 2)$ je $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

Z těchto dvou příkladů je vidět, že umocňování je neasociativní operace v E , protože $(2 \cdot 3) \cdot 2 \neq 2 \cdot (3 \cdot 2)$, i když tytéž prvky v jiném pořadí tvoří asociativní trojici $3, 2, 2$, pro níž $(3 \cdot 2) \cdot 2 = 3 \cdot (2 \cdot 2)$. Umocňování není ani komutativní operace, protože $3 \cdot 2$ je 3^2 , zatímco $2 \cdot 3$ znamená 2^3 , tj. $3 \cdot 2 = 9$, kdežto $2 \cdot 3 = 8$.

¹⁾ Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1963—4, č. 3 a 4.

Množina obsahující aspoň jeden prvek, na níž byla zavedena algebraická operace, se nazývá *grupoid*. Přitom tato operace může být i neasociativní. Asociativními grupoidy jsou např. *pologrupy* a *grupy*, které byly probírány v článku *Množiny s algebraickými operacemi*.

Množina E celých nezáporných čísel $0, 1, 2, 3, \dots$ je tedy grupoidem pro algebraickou operaci umocňování.

Smluvme se, že v mocnině, jejíž základ i exponent je celé nezáporné číslo, ponecháme pouze číslici označující jednotky. Podle toho budeme 2^4 považovat za rovné šesti a ne, jak víme, $2^4 = 16$, tedy při zápisu v multiplikativním tvaru je $2 \cdot 4 = 6$. Rovněž tak klademe $3^4 = 1$, $5^3 = 5$, $7^2 = 9$, nebo v multiplikativním tvaru $3 \cdot 4 = 1$, $5 \cdot 3 = 5$, $7 \cdot 2 = 9$. Takto se následující Cayleyho tabulkou definuje na množině K_{10} nezáporných zbytků $0, 1, 2, \dots, 9$ získaných při dělení celých nezáporných čísel deseti nová operace „umocňování“

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	6	2	4	8	6	2
3	1	3	9	7	1	3	9	7	1	3
4	1	4	6	4	6	4	6	4	6	4
5	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	1	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	1	7	9	3	1	7	9	3	1	7
8	1	8	4	2	6	8	4	2	6	8
9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9

Platí-li pro nějaké dva prvky A, B dané množiny vztah $A \cdot B = A$, nazývá se prvek A *levou nulou* prvku B a prvek B *pravou jednotkou* prvku A . Naopak, jestliže $A \cdot B = B$, nazývá se A *levou jednotkou* prvku B a B *pravou nulou* prvku A . Tak např. z Cayleyho tabulky pro novou operaci „umocňování“ v K_{10} je zřejmé, že prvky 4 a 9 jsou levými nulami prvků 1, 3, 5, 7 a 9, a prvky 3 a 7 pravými jednotkami prvků 4 a 9.

Je-li nějaký prvek jednostrannou nulou nebo jednotkou pro všechny prvky grupoidu, nazýváme ho *jednostrannou nulou* nebo *jednotkou* grupoidu. Prvky 1, 5 a 9 jsou tedy pravými jednotkami a prvek 0 levou nulou grupoidu K_{10} .

Z Cayleyho tabulky pro algebraickou operaci „umocňování“ v K_{10} je zřejmé, že dokonce existují trojice stejných prvků asociativních, ale i neasociativních. Např. $(2 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot (2 \cdot 2)$, ale $3 \cdot (3 \cdot 3) \neq (3 \cdot 3) \cdot 3$.

Poslední případ nastává, jestliže $A \cdot A = B$ je různé od A a dvojice prvků A, B není komutativní, tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Vidíme tedy, že K_{10} je neasociativní grupoid pro operaci „umocňování“ zadanou uvedenou Cayleyho tabulkou.

V množině K_8 s prvky 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, které jsou nezápornými zbytky získanými při dělení celých nezáporných čísel osmi, může se také zavést nová algebraická operace „umocňování“. K tomu stačí, abychom mocninu, jejímž základem a exponentem jsou dvě z výše uvedených čísel, položili rovnu zbytku vzniklému při vydělení této mocniny osmi; např. $3^2 = 1$ namísto $9 = 8 + 1$, $7^3 = 7$ místo $343 = 336 + 7$, $2^4 = 0$ místo $16 = 2 \cdot 8 + 0$, nebo v multiplikativním tvaru $3 \cdot 2 = 1$, $7 \cdot 3 = 7$, $2 \cdot 4 = 0$. Tak dostaneme novou algebraickou operaci „umocňování“ s Cayleyho tabulkou

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	0	0	0	0	0
3	1	3	1	3	1	3	1	3
4	1	4	0	0	0	0	0	0
5	1	5	1	5	1	5	1	5
6	1	6	4	0	0	0	0	0
7	1	7	1	7	1	7	1	7

S takto definovanou operací „umocňování“ je množina K_8 grupoidem, a to neasociativním. Prvky 0 a 1 jsou levými nulami a 1 je pravou jednotkou grupoidu K_8 .

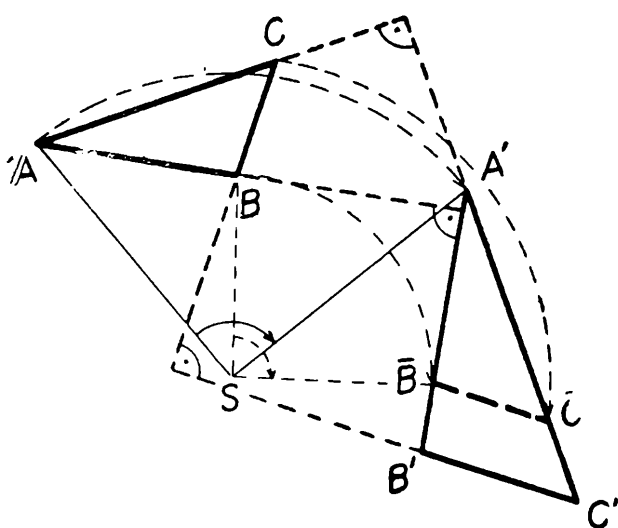
Pro každou množinu K_n nezáporných zbytků získaných při dělení celých nezáporných čísel přirozeným číslem $n > 1$ můžeme tedy dostat operaci „umocňování“ způsobem, který byl proveden již výše. Ani tak se však nevyčerpá celá rozmanitost množin s algebraickými operacemi, jimiž se zabývá moderní algebra.

Jaký podivuhodný svět se před námi otevírá, jaké bohatství operací, jak zajímavé vlastnosti mají již základní a nejjednodušší z nich.

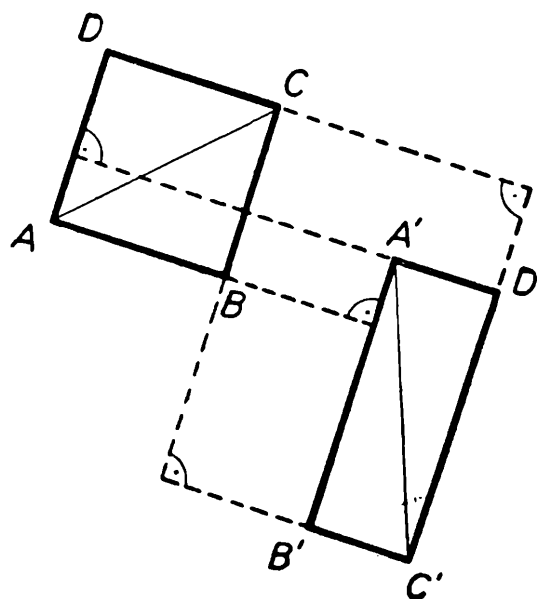
Přeložili Praga Přidalová a Miloslav Zelenka

Zajímavosti z geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka

V dubnu r. 1960 zemřel inž. dr. J. Langr, který přispíval do našeho časopisu již od jeho založení. Shromáždil velké množství poznatků z geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka a na základě jich formuloval řadu úloh uveřejněných v rozmezí šedesáti let (!) v našich i zahraničních časopisech. V tomto článku zpracoval J. Šedivý několik zajímavostí, které zanechal inž. dr. Langr ve své rukopisné pozůstalosti.



Obr. 1



Obr. 2

Čtenářům je jistě dobře známa tato věta o podobnosti trojúhelníků:

Jsou-li trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ dány v takové poloze, že je $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$, $CA \perp C'A'$, pak je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Na obr. 1 je zobrazena taková dvojice trojúhelníků ABC , $A'B'C'$. Důkaz věty lze provést tak, že trojúhelník ABC otočíme o pravý úhel, aby bod A přešel do bodu A' . Body B , C přejdou po takovém otočení do bodů $\bar{B}$, $\bar{C}$ ležících na přímkách $A'B'$, $A'C'$, přičemž je $\bar{B}\bar{C} \parallel B'C'$. Pak je zcela zřejmé, že je $\triangle A'\bar{B}\bar{C} \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ABC \cong \triangle A'\bar{B}\bar{C}$, a tedy $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Uvedené věty se velmi často používá; také my jí později několikrát použijeme. Zamysleme se nyní nad tím, jak zobecnit větu pro čtyřúhelníky. Nesmíme usuzovat ukvapeně. Na obr. 2 je $A'B' \perp AB$, $B'C' \perp BC$, $C'D' \perp CD$, $D'A' \perp DA$, ale o podobnosti čtverce $ABCD$ a obdélníka $A'B'C'D'$ nemůže být řeč. Kolmost odpovídajících si stran čtyřúhelníků nezaručuje podobnost čtyřúhelníků.

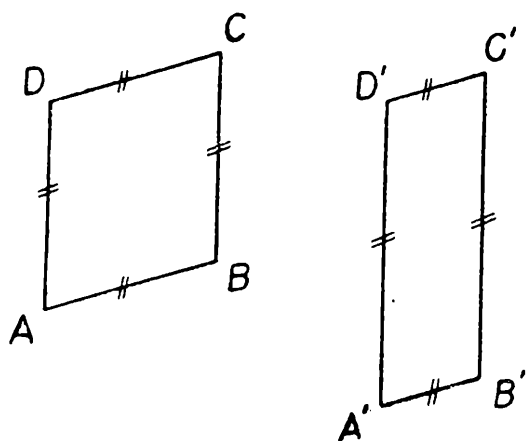
Čtyřúhelníky $ABCD$, $A'B'C'D'$ můžeme prohlásit za podobné právě tehdy, je-li $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$, $\triangle CDA \sim \triangle C'D'A'$ a $\triangle DAB \sim \triangle D'A'B'$.

Na obr. 2 není zřejmě $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, proto není ani čtyřúhelník $ABCD$ podobný čtyřúhelníku $A'B'C'D'$.

Podobnost dvou čtyřúhelníků $ABCD$, $A'B'C'D'$, jejichž odpovídající si strany jsou navzájem kolmé, můžeme zaručit jen tehdy, je-li také $AC \perp A'C'$ a $BD \perp B'D'$. Tehdy jsou podle věty uvedené v prvním odstavci článku navzájem podobné každé dva odpovídající si trojúhelníky ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$ atd.).

Nahradíme-li ve všech dosavadních úvahách o trojúhelnících a čtyřúhelnících vztah kolmosti úseček vztahem rovnoběžnosti úseček, dostaneme vesměs správné věty. Platí:

Jsou-li trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ dány v takové poloze, že je $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$, pak je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



obr. 3

Nakreslíte-li si vhodný obrázek, ihned zjistíte, že jde o dva stejno-
lehlé (a proto podobné) trojúhelníky.

Rovnoběžnost odpovídajících si stran dvou čtyřúhelníků také nezaručuje podobnost čtyřúhelníků, jak je zřejmo z obr. 3. Platí však věta:

Jsou-li dány dva čtyřúhelníky $ABCD$, $A'B'C'D'$ v takové poloze, že je $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $DA \parallel D'A'$, $AC \parallel A'C'$, $BD \parallel B'D'$, pak jsou oba čtyřúhelníky podobné.

Důkaz věty je snadný, neboť z uvedených podmínek rovnoběžnosti vyplývá, že je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$, $\triangle CDA \sim \triangle C'D'A'$, $\triangle DAB \sim \triangle D'A'B'$, a tedy i čtyřúhelník $ABCD$ je podobný čtyřúhelníku $A'B'C'D'$

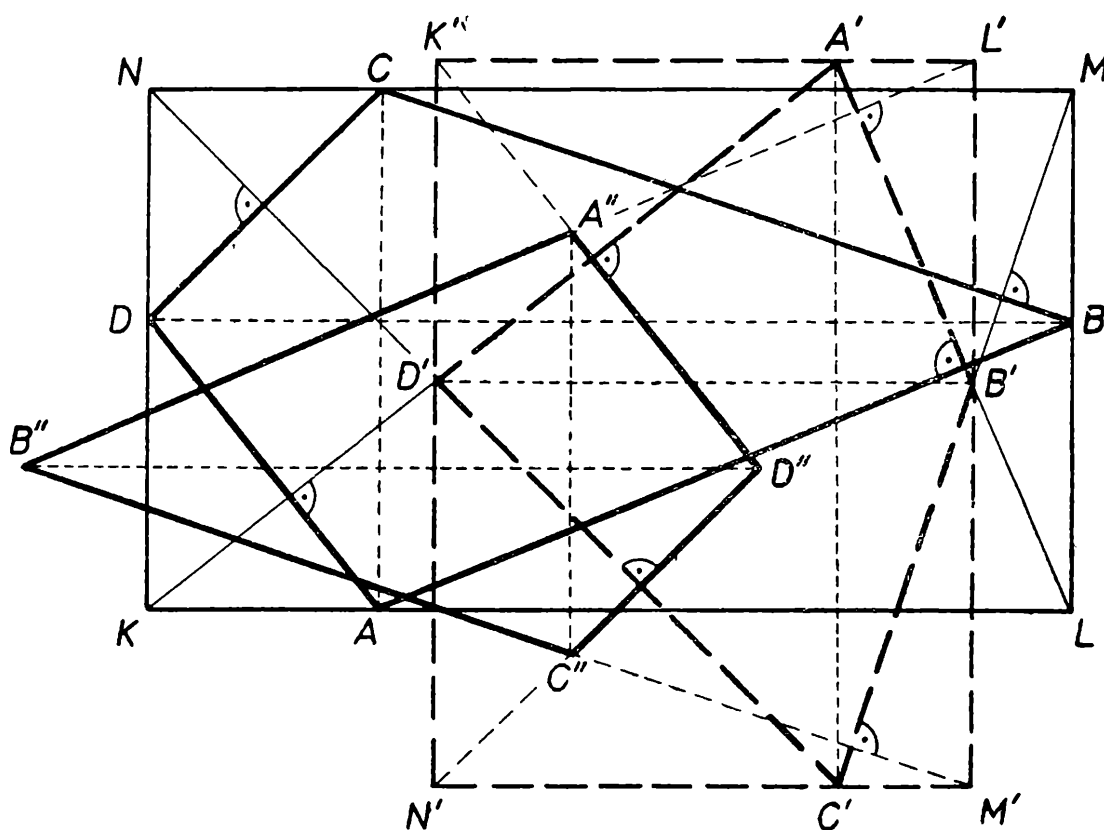
*

Inž. dr. Langr popsal ve svém rukopise zajímavý případ konstrukce dvou podobných čtyřúhelníků. Na obr. 4 je zobrazen obdélník $KLMN$ a jemu vepsaný vypuklý čtyřúhelník $ABCD$. Každý z vrcholů A , B , C , D leží na jiné straně obdélníka a úhlopříčky AC , BD jsou rovnoběžné se stranami obdélníka. Vedme body K , L , M , N po řadě kolmice ke stranám DA , AB , BC , CD (přeponám pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy K , L , M , N). Průsečík kolmic vedených ke stranám AB , AD označme písmenem A' a obdobně další průsečíky písmeny B' , C' , D' . Někdy dostaneme $A' \equiv B' \equiv C' \equiv D'$,¹⁾ jindy čtyři různé body A' , B' , C' , D' .

¹⁾ Např. v případě, kdy jsou body A , B , C , D středy stran čtverce $KLMN$.

Vznikne-li vypuklý čtyřúhelník $A'B'C'D'$, nemusí být podobný čtyřúhelníku $ABCD$. Jde však o velmi zajímavou dvojici čtyřúhelníků jejich odpovídající strany jsou navzájem kolmé ($AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$, $CD \perp C'D'$, $DA \perp D'A'$), ale odpovídající si úhlopříčky jsou rovnoběžné ($AC \parallel A'C'$, $BD \parallel B'D'$).

Opišme čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ obdélník $K'L'M'N'$ ($K'L' \parallel KL$, $L'M' \parallel LM$, $M'N' \parallel MN$, $N'K' \parallel NK$) a zopakujme celou konstrukci v tomto případě „čárkovaných“ čtyřúhelníků. Získáme čtyřúhelník $A''B''C''D''$, jehož strany jsou kolmé k odpovídajícím stranám čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ (je $A''B'' \perp A'B'$, $B''C'' \perp B'C'$, $C''D'' \perp C'D'$, $D''A'' \perp D'A'$), ale jeho úhlopříčky jsou rovnoběžné s odpovídajícími úhlopříčkami čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ (je $A''C'' \parallel A'C'$, $B''D'' \parallel B'D'$).



Obr. 4

Platí tedy

1. $AB \perp A'B'$, $A'B' \perp A''B''$, proto je $AB \parallel A''B''$ a obdobně $BC \parallel B''C''$, $CD \parallel C''D''$, $DA \parallel D''A''$.

2. $AC \parallel A'C'$, $A'C' \parallel A''C''$, proto je $AC \parallel A''C''$ a obdobně $BD \parallel B'D'$.

Uvedli jsme již, že tyto vztahy rovnoběžnosti postačí k tomu, abychom prohlásili, že čtyřúhelníky $ABCD$, $A'B'C'D'$ jsou podobné (dokonce i stejnohlelé).

Provedte si sami důkaz tvrzení, že při popsané konstrukci bodů A' , C' je $AC \parallel A'C'$. Označíte-li si patu kolmice z A' a přímku KL písmenem

A'_1 , můžete dokázat, že je $\triangle KA'A'_1 \sim \triangle DAK$. Je-li bod C'_1 patou kolmice vedené bodem C' k přímce MN , je také $\triangle NC'C'_1 \sim \triangle DCN$. Vhodným postupem můžete dokázat, že je $KA'_1 = NC'_1$ a $AC \parallel A'_1C'_1$.

Dvojice čtyřúhelníků $ABCD$, $A'B'C'D'$ má ještě další zajímavé vlastnosti:

1. Průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $ABCD$ je souměrný s průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ podle středu obdélníka $KLMN$.

2. Úhly u odpovídajících si vrcholů těchto čtyřúhelníků jsou výplňkové ($\sphericalangle ABC + \sphericalangle A'B'C' = 180^\circ$ atd.).

(Pokračování)

Fyzika



Inž. Dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, Praha:

Tvrдост a její měření

Definice. Rozdělení metod

Tvrдост je veličinou technickou. Fyzikálně nelze tvrдост přesně a jednoduše definovat. *Prakticky rozumíme tvrдостí odolnost nějaké pevné látky, kterou má tato látka proti vnikání jiného pevného tělesa. Ježto styk dvou těles je možný jen jejich povrchy, hovoříme o tvrдостi zpravidla jako o vlastnosti povrchu (povrchové vrstvy) vyšetřovaného tělesa.*

Tvrдост je vlastností všech pevných látek, tedy nejen pevných z hlediska fyzikálního (tj. látek makrokryсталických a mikrokryсталických), ale i přechlazených kapalin (látek submikroskopických), jakými jsou např. skla nebo různé umělé látky, případně i části rostlinných nebo živočišných organismů, např. dřevin, kostí apod.

Protože je tvrдост jedním z důležitých parametrů pro posuzování dynamické odolnosti různých těles (dílců) zvláště v technické praxi, je měření tvrдостi velmi důležitým metrologickým oborem.

Zvlášť význačnou vlastností je tvrдост u fyzikálně pevných těles a z těchto opět především u kovů.

Tvrдост kryсталických látek je v dobré shodě s charakterem kryсталové mřížky. U látek s molekulovou mřížkou, v níž jsou molekuly vzájemně vázány poměrně malými kohesními silami, je tvrдост menší než u látek s pevnější iontovou mřížkou, nebo dokonce u látek s mřížkou atomovou (s vazbou kovalentní nebo kovovou). U kovů je podle B e n e d i c k s e

shoda mezi jejich tvrdostí a mírou hustoty uložení atomů. Mírou této hustoty je podle něho atomová koncentrace kovu, kterou rozumí podíl jeho hustoty a relativní atomové hmotnosti.

Všechny metody měření tvrdosti vycházejí z její již dříve uvedené praktické definice, podle které tvrdostí rozumíme odolnost jednoho tělesa proti vnikání jiného pevného tělesa. U všech metod je tedy nejdůležitějším elementem tzv. v n i k a c í t ě l e s o, na které působíme nějakou silou, kolmou k vyšetřovanému místu povrchu. Podle způsobu působení této síly a pohybu vnikacího tělesa vzhledem k povrchu, dělíme nejčastěji v praxi používané metody do tří skupin, a to na *metody vnikací, vrypové a odrazové*.

U *metod vnikacích* hodnotíme tvrdost z některých geometrických vlastností vtisku, který vznikne ve zkoumaném povrchu působením tlakové síly na vnikací těleso přesně definovaných rozměrů (např. kuličku, kužel, jehlan apod.) zhotovené z vhodného tvrdého materiálu (z kalené oceli, tvrdých kovů nebo diamantu).

U *metod vrypových* určujeme tvrdost zpravidla ze šířky vrypu, který způsobí na hladce vybroušeném vyšetřovaném povrchu diamantové tělísko předepsaných tvarů, zatížené určitým závažím. Tělískem je při měření pohybováno rovnoběžně s vyšetřovaným povrchem. Do této skupiny patří i *M o h s o v a m e t o d a*, podle níž se určuje tvrdost srovnáváním s nerosty, tzv. *M o h s o v y s t u p n i c e t v r d o s t i*.

U *metod odrazových*, u kterých se nechá na vyšetřovaný povrch dopadnout tělísko určitého tvaru a hmotnosti, se hodnotí tvrdost z výšky odskoku tohoto tělíska, jež je menší nežli výška, z níž bylo tělísko vypuštěno (uvolněno). Výška odskoku je menší proto, že se část energie pohybujícího se tělíska spotřebuje na vytvoření důlku při jeho dopadu na vyšetřovaný povrch.

Metody vnikací

Protože nejčastěji je určována tvrdost u kovů, probereme si nejprve hlavní metody měření u těchto materiálů. Na konci tohoto odstavce se zmíníme také o metodách měření tvrdosti u nekovů.

Nejběžnějšími vnikacími metodami měření tvrdosti kovů jsou *metody Brinellova, Rockwellova a Vickersova*.

a) Nejstarší z této skupiny je *Brinellova metoda* uvedená poprvé na světové výstavě v Paříži v r. 1900. Vnikacím tělesem je kalená ocelová kulička průměru $D = 10,5$ mm nebo 2,5 mm (obr. 1). Přitlačná síla, působící při měření na vnikací kuličku volí se podle druhu vyšetřovaného materiálu jako určitý násobek druhé mocniny průměru kuličky. Důvodem je, že pro úměrnost poměrů při měření musíme při x -násobném zmenšení průměru kuličky zmenšit přitlačnou sílu x^2 -krát, tedy ve stejném poměru jako se změní průřez kuličky. Zmenšíme-li např. D dvakrát, musíme použít čtvrtinového zatížení F .

Používá se těchto sil F (v kilopondech):
 $30 D^2$, $10 D^2$, $5 D^2$, $2,5 D^2$ nebo $1,25 D^2$. Síla se volí taková, aby průměr
důlku na zkoumavém povrchu byl v mezích asi $d = (0,25 \text{ až } 0,5) D$.
Přehled tlakových sil pro různé průměry kuliček s hlavními obory po-
užití je v tabulce I.

Tvrdost podle Brinella, která se značí HB, se vyjadřuje podílem půso-
bící tlakové síly F a plochy důlku (tvaru kulového vrchlíku)

$$HB = \frac{F}{\frac{1}{2} \pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})} \quad (1)$$

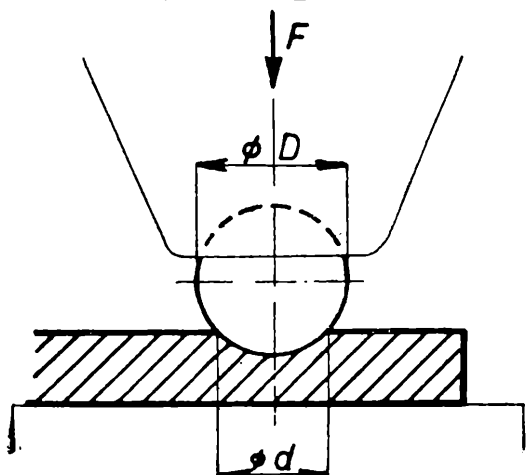
kde F je v kilopondech a D i d v milimetrech.

Podle definice je hlavní jednotkou

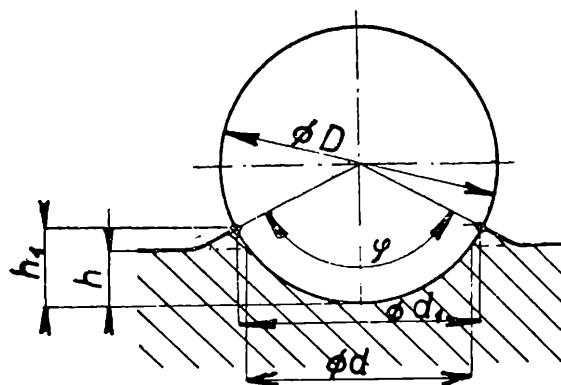
$$(HB) = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ newton na } 1 \text{ čtverečný metr},$$

vedlejší jednotkou běžně používanou v technické praxi

$$(HB) = 1 \text{ kp} \cdot \text{mm}^{-2} = 1 \text{ kilopond na } 1 \text{ čtverečný milimetr}.$$



Obr. 1. Principiální schéma měření tvrdosti podle Brinella.



Obr. 2. K tvrdoměrné metodě Brinellově.

Je-li při psaní výsledku zřejmo, o jaký druh tvrdosti se jedná, neuvádí se za číselnou hodnotou zpravidla jednotka.

V praxi nepočítáme podle vztahu (1), nýbrž používáme zvláštních tabulek, které udávají tvrdosti odpovídající určitému průměru kuličky a určitému zatížení. Teoreticky by pro určování tvrdosti mohlo být použito kuličky libovolného průměru, zatěžovaného libovolnou silou. Protože však naměřená tvrdost závisí ve velké míře na některých podmínkách, provázejících měření, jsou průměry kuliček i zatížení normalizovány, jak je patrné z tabulky I. Přesněji srovnatelné výsledky obdržíme jen měřením při týchž hodnotách D a F , jistou úlohu hraje přitom i druh vyšetřovaného materiálu. Musíme uvést dva hlavní vlivy, jež znesnadňují srovnatelnost výsledků měření. Při vtlačování kuličky se materiál trvale deformuje a zpevňuje, takže vlastně neměříme tvrdost původního povrchu, nýbrž již zpevněného materiálu. Kromě toho se materiál při vtlačování kuličky částečně vymačkává na strany a vytvoří

kolem vlastního důlku jakýsi val (límeček) (obr. 2), takže při proměřování důlku neurčujeme vlastně průměr d , nýbrž málo větší průměr d_1 . První vliv tvrdost zdánlivě zvětšuje, druhý ji zdánlivě zmenšuje. Oba vlivy se tedy z části kompenzují. Při menších zatíženích převládá vliv první, při větších zatíženích vliv druhý.

Pro srovnatelnost výsledků je důležitá i doba t , po níž zatížení při měření působí. Čím je měkký materiál, tím se volí delší zatěžovací doba t . Běžná zatěžovací doba je 30 s, v oceli tvrdosti $HB = 140 \text{ kp} \cdot \text{mm}^{-2}$ stačila by doba 10 sekund. U velmi měkkých materiálů (např. olovo, zinek, kompozice) nechá se zatížení působit déle než 30 s.

U výsledků měření se zpravidla připojují hlavní podmínky při měření, a to v tomto pořadí

průměr kuličky /zatěžující síla/ zatěžovací doba,

např. 10/3000/30, což značí $D = 10 \text{ mm}$, $F = 3000 \text{ kp}$ a $t = 30 \text{ s}$.

Tabulka I.

(Podle prof. V. Jareše: Metalografie neželezných kovů)

síla F	Poměr kuličky D			Používá se v mezích HB	Obor použití
	10 mm	5 mm	2,5 mm		
	Tlaková síla F (kp) pro příslušný průměr D				
$30 D^2$	3000	750	187,5	140 až 600	oceli (kromě ocelí kalených), litina
$10 D^2$	1000	250	62,5	45 až 200	měď a její sliti- ny, nikl a jeho slitiny, slitiny hliníku
$5 D^2$	500	125	31,2	23 až 100	zinek a jeho sli- tiny, kompozice, slitiny hořčíku
$2,5 D^2$	250	62,5	15,6	11 až 50	hliník, stříbro, zlato a jiné měkké kovy
$1,25 D^2$	125	31,2	7,8	5 až 25	nejměkkší kovy

Průměr důlku se měří dvakrát, a to ve dvou směrech vzájemně na sebe kolmých a z obou takto získaných hodnot se vypočte aritmetický průměr. Průměr se měří zpravidla mikroskopem. Tvrdost se neurčuje pouze z jediného vtisku, nýbrž se provádí vtisků více, minimálně dva. Měření se provádí na rovné hladké ploše, většinou připravené broušením. Na spodní straně vzorku se nesmějí ukázat po zatěžování stopy po vtlačování

kuličky. Tloušťka vzorku má být proto zpravidla větší nežli D . Rovněž vzdálenost vtisku od kraje vzorku nesmí být příliš malá. Minimálně má činit (1 až 2) D . Z jednotlivých naměřených hodnot se získá konečný výsledek takovým výpočtem, kterým se určí nejpravděpodobnější hodnota s příslušným krajním rozptylem (krajní chybou, tolerancí). Měření tvrdosti se provádí na zvláštních strojích *t v r d o m ě r e c h*, z nichž běžná provedení jsou s nepřímým zatěžováním (pomocí pákového převodu), u *e t a l o n o v ý c h t v r d o m ě r ů* bývá pak zatěžování přímé, vyžadující ovšem velká závaží. Protože lze snadněji a rychleji měřit hloubku důlku nežli jeho průměr, existují i takové Brinelovy tvrdoměry, jež určují tvrdost z hloubky h (viz obr. 2). Stupnice těchto přístrojů je však vynesena přímo v hodnotách tvrdosti podle Brinella.

(Pokračování)

A l o i s P e ř i n a, Brno:

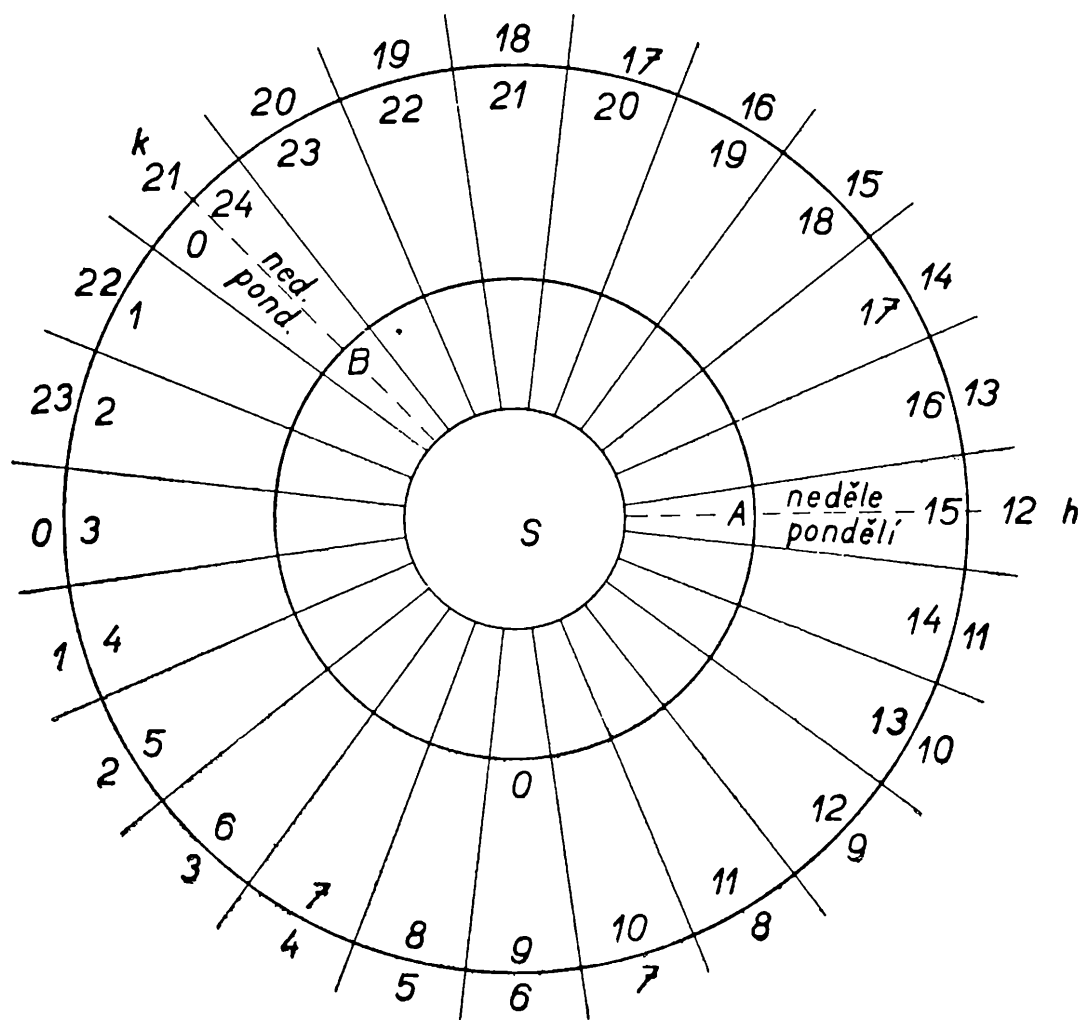
Pásmový čas a datovací hranice

Čtenářům tohoto článku je jistě známo, že povrch zeměkoule je rozdělen na 24 časová pásma ohraničená poledníky vzdálenými vzájemně 15 délkových stupňů. Tato časová pásma jsou číslována postupně od západu k východu obdobně jako poledníky čísla 0, 1, 2, ... 23. Pásmo označené nulou, tj. 0. pásmo, je současně 24. pásmem. Poloha pásem na povrchu zeměkoule je neproměnlivá stejně jako poledníků. V každém pásmu platí místní čas poledníku probíhajícího středem pásma bez ohledu, jak je uvažované místo od řídicího poledníku vzdáleno, a takto upravený čas se nazývá *časem pásmovým*. Čas 0. pásma je určován místním časem poledníku greenwichského a nazývá se *časem světovým*. Jeho západní hranici tvoří poledník $7^{\circ}30'$ záp. délky, východní poledník $7^{\circ}30'$ vých. délky podle Greenwiche. Čas 1. pásma je dán místním časem poledníku 15° v. d. a sahá od $7^{\circ}30'$ k poledníku $22^{\circ}30'$ v. d. Nazývá se *středoevropským* a platí na celém území ČSSR. S ním sousedí na východě 2. časové pásmo zvané *východoevropské* a tak postupně dále. V každém pásmu sousedícím východně je v témž okamžiku pásmový čas o hodinu vyšší, při čemž minuty a sekundy jsou při tom ve všech pásmech stejné, takže vzájemné přepočítávání datovacích údajů je jednoduché.

Na obrázcích č. 1 a č. 2 je naznačen severní pól S a rozhraničovací poledníky. Čísla pásem jsou zaznamenána na vnější straně kruhu, znázorňujícího jistou zeměpisnou rovnoběžku, kdežto čísla na straně vnitřní označují celé hodiny místních časů řídicích poledníků, když na všech je ve zvoleném okamžiku jejich místní čas, a tím i pásmový čas dán celou hodinou. To je kvůli jednoduchosti. Tato čísla se ovšem s dobou plynule

mění, zatím co pořadová čísla pásem se nemění. Na obr. 1 je znázorněno rozložení pásmových časů pro okamžik, kdy místní čas poledníku greenwichského, a tím i pásmový čas 0. pásma je dán datovacím označením pondělí 3 hodiny, na obr. 2. pondělí 12^h. Podrobněji bude o těchto obrázcích pojednáno dále. Z politických a praktických důvodů odchyľují se hranice některých pásem více nebo méně od poledníků, které by měly být hraničními, protože případně sledují blízká rozhraní mezi politickými

DATOVACÍ HRANICE

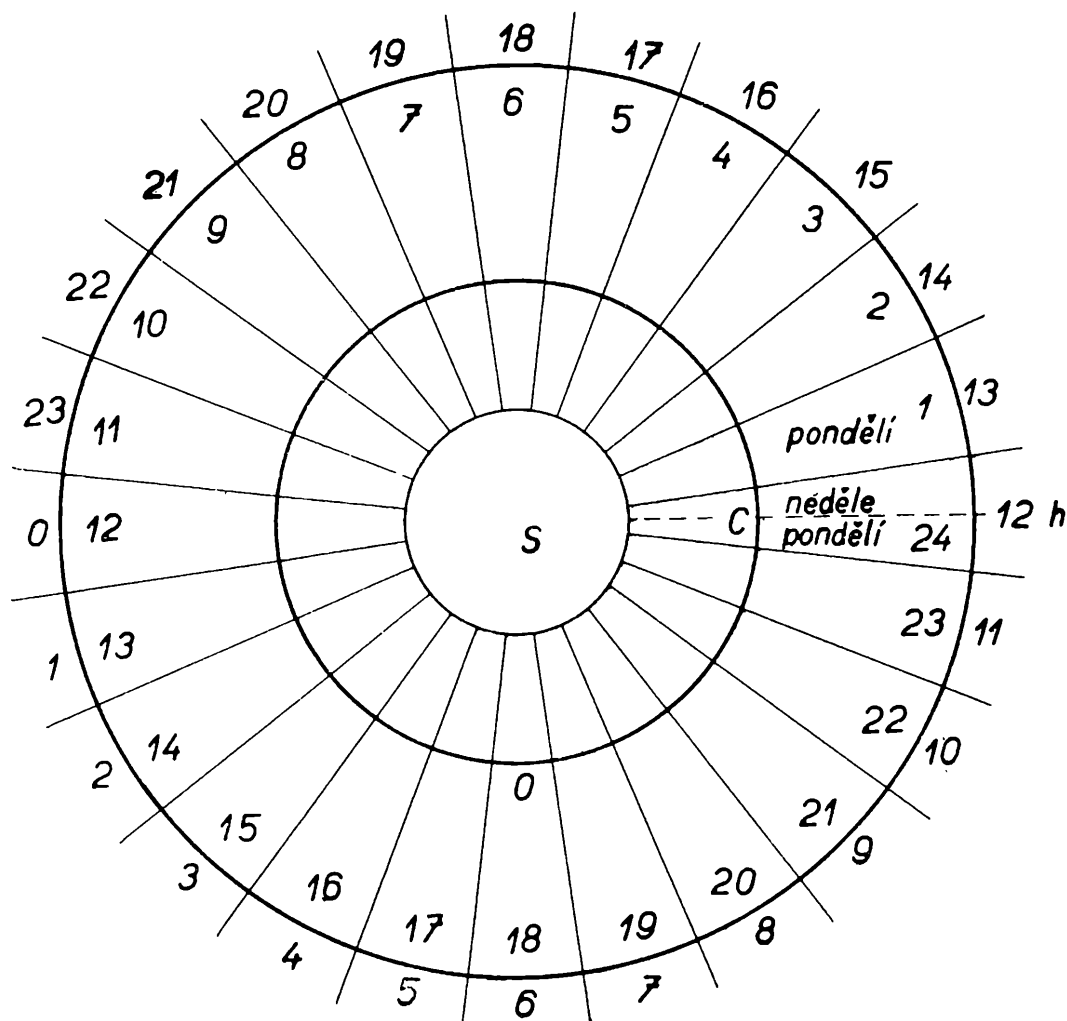


Obr. 1

celky, blízké říční toky, zejména velké železniční tratě apod. Jako příklad uvádíme, že v SSSR bylo kromě jiných upraveno rozhraní mezi 2. a 3. časovým pásmem, aby neprotínalo území Moskvy a aby tak bylo dosaženo jednotného času ve všech částech hlavního města. Stalo se tak posunutím normální hranice, kterou je poledník 37°30', v. d. poněkud k východu. Kromě úprav hranic některých pásem dochází někde k tomu, že pásmo se neřídí místním časem poledníku probíhajícího středem příslušného pásma. V takových případech čas v pásmu užívaný nazýváme

smluveným nebo dekretem pásmovým časem. Jako příklad uvádíme, že dekretem čas byl zaveden na celém území SSSR, kde všechny pásmové časy jsou posunuty o hodinu kupředu, což připomíná tzv. letní čas, kterého bylo užíváno přechodně u nás za války. To se posledně stalo podle dekretu Rady lidových komisařů dne 16. června 1930. Dne 9. února 1931 byla pak doba platnosti této úpravy prodloužena do odvolání. Proto se dnes obyvatelstvo SSSR řídí místním časem náležejícím poledníku probíhajícímu středem pásma sousedícího

DATOVACÍ HRANICE



Obr. 2

na východě. Tato úprava umožňuje Sovětskému svazu lepší využití denního světla, účelnější hospodaření elektrickým proudem, a tím rovnoměrnější zatížení elektráren. Důsledkem zmíněných úprav např. také je, že v Moskvě předbíhají hodiny náš středoevropský čas o 2 hodiny. Kromě toho má moskevský čas širší význam, protože se podle něho řídí železniční řády celého SSSR. Světový význam má čas 0. pásma v astronomii. V zásadě je však zavedení pásmového času na celé zeměkouli přijato a dodržováno.

Zachováme-li pravidlo, že pásmové časy téhož okamžiku jsou v pásmech sousedících východně o hodinu vyšší, dojdeme k neudržitelnému výsledku, jak se čtenář snadno přesvědčí, když si načrtne jednoduchý diagram 24 časových pásem a zapíše do každého časový údaj určitého libovolně zvoleného okamžiku. Zvolíme-li např. okamžik, když v našem 1. pásmu platí datum pondělí 10 hod., přijde do 2. pásma pondělí 11 hod. a tak postupně dále. Do 15. pásma přijde tak záznam pondělí 24^h, čili úterý 0^h, do 16. pásma úterý 1^h a tak postupně dále, až se po projití všech pásem vrátíme do 1. pásma, avšak s datem úterý 10^h, ačkoli už v něm je počáteční záznam pondělí 10^h. To je ovšem výsledek nemožný, protože jednomu pásmu nemohou náležet dvě různá data, která se v tomto případě liší o den. Obdobně tomu je, vpisujeme-li do jednotlivých pásem data ve sledu opačném. Začneme-li opět 1. pásmem se stejným datem jako poprvé, vyjde pro 16. pásmo pondělí 0^h čili neděle 24^h, pro 15. pásmo neděle 23^h a postupně dále, až se vrátíme do 1. pásma s datem neděle 10^h. Spor tím ještě vzrostl, protože pro týž časový okamžik vycházejí 3 různá data, Aby k takovým nesrovnalostem nedocházelo, bylo mezinárodní dohodou ustanoveno, že poledník 180° v. d. bude tzv. *datovací hranicí*, která je v našich obrázcích označena písmenem *h*. Její význam je v tom, že ve 12. pásmu, jehož středem prochází, je v západní polovině datum o den vyšší než v polovině východní, takže cestovatel, postupující od východu k západu, chce-li zachovávat datování, náležející příslušným polohám na zeměkouli (zeměpisným délkám), zvýší při překročení datovací hranice *h* datum o den, což znamená zvýšení průběžného čísla i změnu jména dne s tím související při nezměněném údaji hodin, minut a sekund. Naopak při překročení této hranice ve směru od západu k východu se datum o den sníží. Na rychlosti, s níž se překračování hranice *h* děje, ovšem nezáleží. Prakticky se provádějí tyto úpravy dat až o nastávající půlnoci tak, že při postupu od východu k západu se o půlnoci vynechají (vytrhnou z denního kalendářního bloku) 2 dny, při postupu od západu k východu se platnost dne, který by měl právě skončit, prodlouží o další 24 hodiny. Při zachovávání tohoto pravidla nedojde nikdy k nesrovnalostem jako v příkladech dříve uvedených. Dbáme-li ho, vychází při návratech do počátečního 1. pásma původní datum pondělí 10^h, jak se čtenář po zakreslení datovací hranice a provádění změn dat z toho plynoucích ve svém diagramu snadno přesvědčí.

Ačkoli výklad o významu datovací hranice *h* je snadno pochopitelný, přece se tu a tam vyskytují nesprávné výklady a dohady. Namítá se totiž, že bezvýjimečné zachovávání pravidla o změnách při překračování datovací hranice *h* by vedlo k nemožným důsledkům v některých zvláštních případech. Tvrdívá se, že cestovatel, který by překračoval datovací hranici *h* jen směrem od západu k východu několikrát po sobě, by musel při každém překročení o den omládnout, že by to mohl opakovat libovolně dlouho a tak dosáhnout popřípadě až takového omlazení, že by

vlastně neměl být ještě na světě. K tomu by při platnosti pravidla o změnách dat i v tomto případě, mohlo prý dojít, protože by prý stačilo dbát, aby při cestování bylo protínáno všech 360 poledníků stále jen stejným směrem od západu k východu. Stačily by oběhy kolem jednoho z pólů po zeměpisné rovnoběžce k němu co nejbližší a tedy krátké, což je v naší době vyspělé a mnohostranné dopravní techniky a cestovní výzbroje jen otázkou podřadnou. Při opačném směru pohybu by prý cestovatel naopak stárl a stárl. Kosmonaut, který by ve svém sputniku potřeboval k průletu kolem zeměkoule např. 80 min, proťal by nad povrchem zemským všechny poledníky tímž směrem 18krát za den, takže při letu směrem od západu k východu by za každý den letu omládl o 18 dní. Ukážeme, že takové mínění je nesprávné, že pravidlo o změnách datování při překračování datovací hranice h platí i v těchto případech.

Provedeme myšlenkový pokus. Předpokládejme, že by se cestovatel pohyboval velkou rychlostí, např. $100\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, přičemž k jakýmkoli komplikacím působeným atmosférou nebo jinými příčinami nepřihlížíme. Tu by i oběh kolem zeměkoule nad rovníkem trval jen zlomek sekundy, takže rozložení dat v jednotlivých časových pásmech by se během jednoho oběhu prakticky nezměnilo. Je zřejmé, že při těchto úvahách není třeba brát zřetel na Einsteinovu dilataci času.

Sledujme nyní časový průběh takového pohybu na obr. 1, přičemž předpokládáme, že se oběh koná po jisté zeměpisné rovnoběžce narýsované silněji vytaženou kružnicí se startem v okolí bodu 0, ležícího v 6. datovacím pásmu v pásmovém čase pondělí 9^h. Tu mohou nastat dva případy. Pohyb se koná

- a) ve směru otáčení zeměkoule, tj. od západu k východu,
- b) ve směru opačném, tj. od východu k západu.

a) Na své cestě vstoupí cestovatel do 12. pásma s datem pondělí 15^h (ke zlomku sekundy nepřihlížíme), které se při překročení datovací hranice h v bodě A změní na neděli 15^h, a v dalších pásmech nabývá postupně hodnot neděle 16^h, 17^h, ..., až v 21. pásmu vzroste na neděli 24^h, čili pondělí 0^h [bod B] a během dalšího pohybu na pondělí 1^h, 2^h, ..., až cestovatel vstoupí do východního 6. pásma [bod 0] s datem shodným s datem startu. Ve skutečnosti by se ovšem objevil rozdíl rovný zlomku sekundy.

b) Cestovatel vstupuje postupně do pásem 5., 4., ... 0., 23., až vstoupí do 21. pásma s datem pondělí 0^h, čili neděle 24^h [bod B] a při průchodech dalšími pásmy se data snižují, až vstoupí do 12. pásma s datem neděle 15^h, které se při překročení datovací hranice h v bodě A změní na pondělí 15^h. Při dalším pohybu prochází postupně pásmy 11., 10., 9., ... s daty pondělí 14^h, 13^h, 12^h, ..., až vstoupí do 6. pásma startu [bod 0] s počátečním datem pondělí 9^h. Ve skutečnosti by se ovšem objevil rozdíl v hodnotě zlomku sekundy.

V žádném z těchto příkladů nedošlo ke sporu, ani k tomu, že by cestovatel omládl nebo zestárl o celý den. Výklad, že k něčemu takovému při zachovávání pravidla o změně data na datovací hranici h by mohlo dojít, je tedy nesprávný. Vzniká povrchním uvažováním. Bere se v úvahu jen hranice h , která bývá na mapách vyznačena a nedbá se, že k opakovanému překročení této hranice je třeba překročit také datovací hranici k , která na mapách vyznačena není a být nemůže, protože je pohyblivá a také vyznačena být nemusí, protože při jejím přecházení dochází jen k plynulé změně jména a průběžného čísla dne beze skoku. V případě a) se na datovací hranici h mění pondělí na neděli, na symbolické hranici k ve 21. pásmu se tato změna kompenzuje. Obdobně je tomu v případě b). Cestovatel nejprve změní ve 21. pásmu beze skoku na pohyblivé datovací hranici k [bod B] průběžné číslo i jméno dne z pondělí na neděli a při překročení datovací hranice h [bod A] skokem neděli na pondělí, a tím i průběžné číslo dne, čímž se opět první změna kompenzuje.

Uvažujme ještě případ, kdy se cestovatel pohybuje rychlostí, s níž se otáčí zeměkoule, avšak proti směru jejího otáčení. V tomto případě zůstává cestovatel stále ve stejné vzdálenosti od pohyblivé datovací hranice k , takže při procházení jednotlivými pásmy se jeho datum nemění, až při přechodu datovací hranice h vzroste datum o den, s nímž pak jak se dalo očekávat, dorazí do místa startu. Ani v tomto případě pravidlo o datovacích změnách na hranici h neselhává. Tím je dokázáno, že toto pravidlo platí bez výjimky.

Zamysleme se ještě nad skutečností známou z dějin zámořských objevů. Když se vracel zlomek Magellanovy výpravy, která první obeplula zeměkouli, v červenci r. 1522 do Španěl na lodi Victoria, která zůstala jediná z původního počtu pěti lodí, zjistili námořníci při zastávce na Kapverdských ostrovech ke svému překvapení i zděšení, vzhledem k nesprávnému dodržování nedělí a svátků, že jejich pečlivě vedený lodní kalendář je o den pozadu za skutečností.

Naopak, v oblíbeném dobrodružném románu J. Vernea *Cesta kolem světa* za osmdesát dní zjišťuje s radostným překvapením hlavní hrdina Fileas Fogg po návratu do Anglie po ukončení cesty kolem zeměkoule vykonané směrem od západu k východu, že je neděle a ne pondělí, jak se domníval, že přece jen vyhrál vysokou sázku, a tak se zachránil před finančním zhroucením. Příčiny těchto omylů tkví v tom, že cestovatelé nezůstávali ve spojitosti s daty platnými na příslušných zeměpisných délkách, nýbrž počítali dny podle střídání světlých částí dní a nocí. Při takovém počítání dní při poměrně velmi malých rychlostech pohybů vzhledem k otáčení zeměkoule nepostihnou cestovatelé, kteří se pohybují od východu k západu, že jejich dny jsou o něco delší, protože se pohybují směrem zdánlivého pohybu Slunce, takže jich napočítají méně, než je jich ve skutečnosti. Naopak,

při cestování ve směru od západu k východu, nepostřehnou, že jejich dny jsou o něco kratší, takže jich napočítají více. V obou případech činí při ukončení cesty kolem zeměkoule celkový rozdíl právě 24 hodiny. Pokud se týče románu J. Vernea, nutno podotknout, že takový omyl, jaký se stal Foggovi, je v dnešní době možný jen v románě. Je však také zřejmo, proč při pohybech, které se dějí velkými rychlostmi vzhledem k otáčení zeměkoule, jako jsou kosmické lety, rádio, telefonní a telegrafní styk aj., se upouští od pásmového datování a používá se jediného, vhodně voleného pásma. V mezimárodním styku zpravidla času světového jako v astronomii, což je čas 0. pásma, jak již bylo řečeno. Podle zvláštní potřeby lze tento čas bez obtíží okamžitě přepočíst na datum platící v kterémkoli pásmu. Kosmonauti na sovětských sputnicích volí k tomu čas moskevský.

Na obr. 2 jsou všechna datovací pásma pokryta pondělím, neboť datum neděle 24^h je totožné s datem pondělí 0^h. Takové rozložení se opakuje v příslušném okamžiku každého dne. Vidíme, že ve východní polovině 12. pásma je 0 hodin, v západní 24 hodiny příslušného dne. Tu den končí, tam teprve začíná. Můžeme si proto ihned zodpovědět otázku, kde začíná určitý den pro zeměkouli jako celek: Je to v západní polovině 12. datovacího pásma, protože když v něm den již končí, ve východní polovině teprve začíná. Proto můžeme datovací hranici h pokládat za práh, na němž nastupuje nový den cestu kolem zeměkoule, když předcházející tam končí. Vítají tedy nástup nového dne, Nový rok o silvestrovské půlnoci a jiné významné dny nejdříve obyvatelé sovětské Čukotky, Nového Zélandu, pak obyvatelé Kamčatky a Austrálie a tak postupně další, jejichž bydliště jsou západněji. Jako poslední jsou obyvatelé Aljašky a Sandwichských ostrovů. Znění silvestrovských novoročních přípitků postupuje rychlostí 15 délkových stupňů za hodinu od západní poloviny 12. datovacího pásma směrem proti otáčení zeměkoule a zazní naposledy po 24 hodinách ve východní polovině tohoto pásma. Pro úplnost poznamenáváme, že v astronomii užívaný tzv. Besselův rok začíná pro hvězdáře působící na kterémkoli místě zeměkoule současně, protože jeho začátek je určen okamžikem, kdy rektascence středního Slunce nabývá hodnoty 18^h 40^{min}, nezávislým na stanovišti pozorovatele. Kolísá nepatrně kolem silvestrovské půlnoci 0. datovacího pásma. Roku 1963 připadl na 1. leden 1^h 44^{min} světového času, tj. 2^h 44^{min} našeho času středoevropského.

Protože v naší době se stávají obvyklými i dopravní lety přes póly, stávají se tyto významné zeměpisné body také elementy datovacími, totiž hraničními datovacími body. Na obr. 2 vidíme, že při průletu nad severním pólem se cestovatel dostává do datovacího pásma, v němž platné datum se liší od předcházejícího o 12 hod. Při přeletu z polokoule východní na západní se datum o 12 hodin snižuje, při přeletu ze západní na východní polokouli zvyšuje zcela obecně, protože se tím bere v úvahu

i různost dat v západní a východní polovině 12. datovacího pásma. Nezáleží však na tom, děje-li se přelet přes pól severní nebo jižní při změnách tohoto druhu.

Prof. Rudolf Kunfalvi, Budapešť:

Několik příkladů ze soutěže Loráda Eötvöse v roce 1962

(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)
(Dokončení)

Uvedený příklad se může objevit i v jiném rovněž zajímavém znění:

Tři kulové balónky poloměru R jsou upevněny na třech vláknech stejné délky l . Účinný vztlak každého z balonů je Q kp. Máme vypočítat největší tíhu q koule poloměru r , aby nepropadla mezi balónky, když ji na ně položíme (obr. 4).

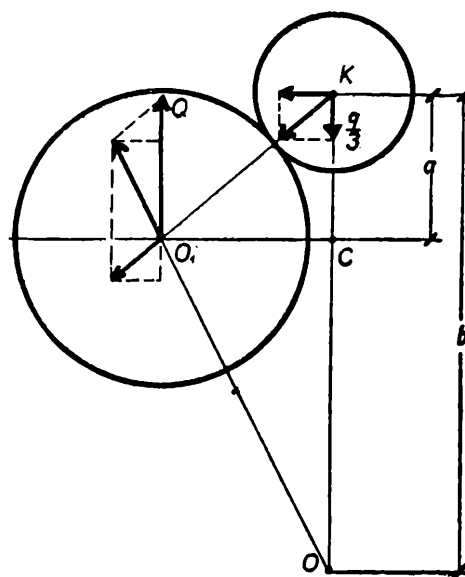
Podmínkou rovnováhy je opět, aby výslednice vztlaku u každého ze tří balónků a příslušné části (v daném případě třetiny) tíhy vložené koule ležela ve směru vláken, jimiž jsou balónky připoutány. I zde najdeme příslušné trojúhelníky a pro rovnováhu dostaneme opět podmínku

$$q = 3Q \frac{a}{b},$$

kde a a b jsou vzdálenosti od středu K vložené koule (respektive KC a KO , obr. 4). Pro tyto vzdálenosti dostáváme

$$a = \sqrt{(R+r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2}$$

$$b = \sqrt{(R+l)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2} + \sqrt{(R+r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2}$$



Obr. 4

Pohybuje-li se K dolů, zmenší se a i b a tak není hned zřejmé, jakých hodnot nabude poměr $\frac{a}{b}$. Jsou možné tři případy:

Je-li $R+r < R+l$, pak bude $\frac{a}{b}$ menší, bude-li vložená koule se pohybovat dolů. Dosáhne-li tíha koule mezní hodnoty $3Q \frac{a}{b}$, anebo bude větší, nežli

je tato hodnota, nemůže již nastat žádná další rovnováha a koule mezi balónky propadne.

Je-li $R + r = R + l$, pak bude $\frac{a}{b} = 0,5$ pro každou polohu K . Dosáhne-li zatížení q hodnotu $q = 1,5 Q$, pak bude vložená koule na balóncích v rovnováze v každé poloze.

V případě $R + r > R + l$ dostanou se kulové balónky do otevřené stabilní polohy, jakmile tíha q právě překročí hodnotu $3Q \frac{a}{b}$. Děj můžeme sledovat ovšem jen potud, pokud by se horní koule nedotkla bodu O .

Z popsaného zadání je možno odvodit další úlohy. Například:

1a. Tři koule s poloměrem $R = 3$ cm a tíhou $Q = 1$ kp jsou zavěšeny na stejně dlouhých vláknech (délky $l = 7,5$ cm) upevněných v jednom bodě. Doprostřed na tyto koule vložíme čtvrtou kouli o poloměru $r = 2,5$ cm a tíze $q = 0,6$ kp. Máme vypočítat sílu, kterou na sebe velké koule vzájemně působí (tlačí)! (Řešení: $F = 0,222$ kp).

1b. Tři koule s poloměrem $R = 5$ cm a tíhou $Q = 5$ kp jsou zavěšeny na stejně dlouhých vláknech (délky $l = 9$ cm) upevněných v témže bodě. Doprostřed na koule vložíme další kouli o poloměru $r = 3,9$ cm. Přitom čtvrtá vložená koule se dotýká tří závěsných vláken a vychyluje je tak z původního přímého směru. Dotyk je po délce asi 2 cm, což odpovídá středovému úhlu 30° . Délka části vláken mezi koulemi je 3 cm, mezi čtvrtou koulí a závěsným bodem mají části vláken délku 4 cm. Jaká může být největší tíha malé koule (q), aby nepropadla mezi velkými koulemi? Tření přitom neuvažujeme.

Ř e š e n í. V mezích $q = (0 \text{ až } 0,78)$ kp nestane se po vložení čtvrté koule nic, v rozmezí $q = (0,78 \text{ až } 9,72)$ kp stojí spodní koule od sebe, ve vzájemné vzdálenosti rostoucí s tíhou vložené koule a při $q > 9,72$ kp vložená koule propadne.

1c. Tři koule s poloměrem $R = 5$ cm visí na stejně dlouhých vláknech ($l = 7,5$ cm), která jsou upevněna ve stejném bodě. Tíhy koulí jsou $Q_1 = 2$ kp, $Q_2 = 3$ kp, $Q_3 = 6$ kp. Mají se vypočítat polohy koulí, síly, kterými koule na sebe vzájemně působí a síly napínající vlákna.

Ř e š e n í. $F_1 = 2,22$ kp, $F_2 = 3,34$ kp, $F_3 = 6,67$ kp; $F_{12} = 0,485$ kp, $F_{23} = 1,332$ kp, $F_{31} = 0,888$ kp.

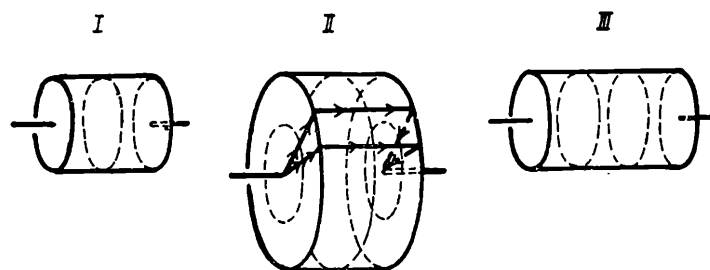
P ř í k l a d 2. Z homogenního plechu téže tloušťky jsou zhotoveny tři duté přímé rotační válce. Průměr prvního je 5 cm a jeho výška je rovněž 5 cm. Druhý válec má průměr 10 cm a výšku 5 cm. Průměr třetího válce je 5 cm a jeho výška 7,5 cm. Vyšetřujeme elektrický odpor těchto válců, když je měřicí obvod připojen ke středům protilehlých kruhových základů. Který z válců má největší a který má nejmenší odpor?

Frigyes Károlyházi

Řešení. Ve všech třech případech se pohybují elektrony v základnách válců radiálně a v pláštích ve směru povrchových přímk (obr. 5). Jde tedy o sériové zapojení základů a pláště. Potíž je ve výpočtu odporu kruhových základů, u nichž průřez směrem od středu roste. Tloušťka plechu je všude stejná, takže ji lze zahrnout i s měrným odporem do jediného součinitele a na místo průřezu můžeme nadále brát pouze délky koncentrických, respektive koaxiálních kružnic.

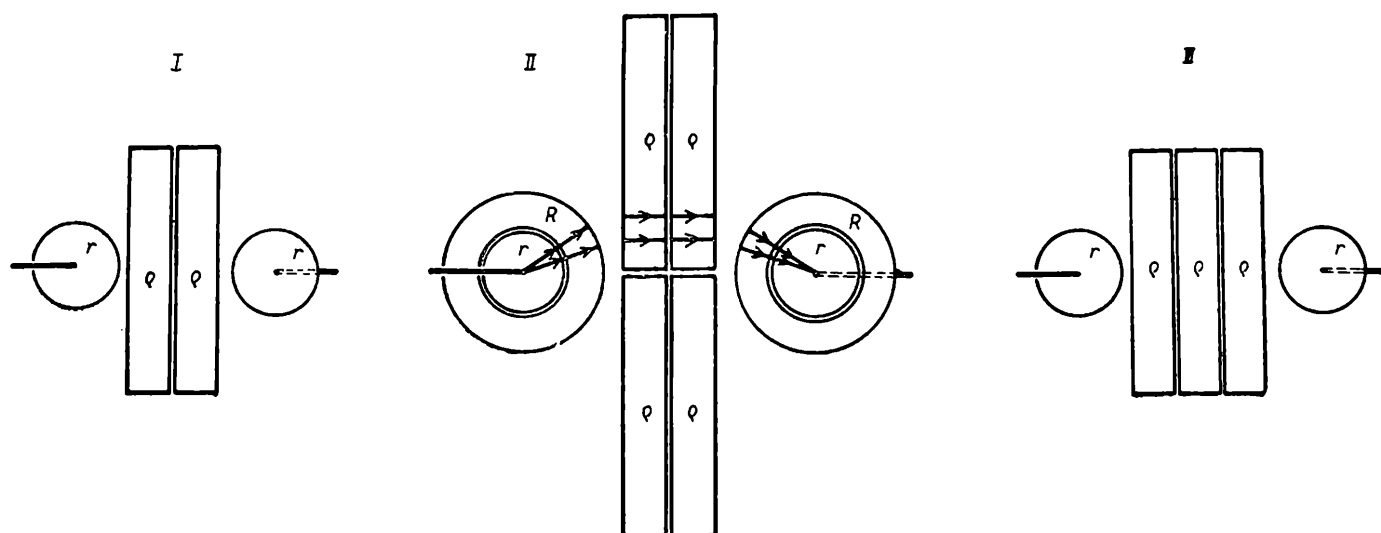
Další obtíží je neurčitost odporu mezi přívody u základen válců. Kdyby přívod byl totiž bodový, jak je v zadání, musel by být odpor tohoto spoje nekonečně velký. Z textu však plyne, že přívod elektrického proudu na všechny tři válce je proveden stejným způsobem, a tedy je odpor ve všech třech případech stejný, i když jej neznáme. Protože však máme určit jen pořadí válců co do jejich odporů, můžeme odpor v místě přívodů považovat u všech tří válců za stejný aditivní člen a vyloučit jej tedy z dalších výpočtů.

Dále postupujeme takto: Rozdělíme si plochy všech tří vodičů na díly



Obr. 5

(obr. 6). Válec *I* sestává ze dvou kruhů (o poloměrech 2,5 cm) a ze dvou stejných obdélníků s celkovým odporem 2ρ . U válce *II* jde proud nejprve malými kruhy (o poloměrech 2,5 cm), pak kruhovým mezikružím (o poloměrech 5 cm a 2,5 cm), čtyřmi stejnými obdélníky o celkovém odporu ρ a pak opět mezikružím a malým kruhem ke druhému přívodu. Podobně válec *III* sestává ze dvou kruhů (s poloměry 2,5 cm) a ze tří stejných obdélníků s celkovým odporem 3ρ . Obdélníky tvořící části pláště jednotlivých válců tvoří vlastně odpory zapojené v sérii.



Obr. 6

Lze jednoduše usoudit, že válec *III* má větší odpor nežli válec *I*. Jak je tomu však s válcem *II*? Abychom stanovili pořadí, vynechejme stejné části u všech tří válců: jeden obdélník s odporem ρ a dva malé kruhy, na nichž jsou přívody k válcům. Přitom je třeba připomenout, že je zřejmé, že odporově je plášť druhého válce ekvivalentní polovině pláště válce prvního. Na obr. 7 zůstává pořadí válců ovšem totéž jako bylo v zadání úlohy: z prvního válce zůstává jediný obdélník, z válce *III* dva obdélníky a z válce *II* dvě

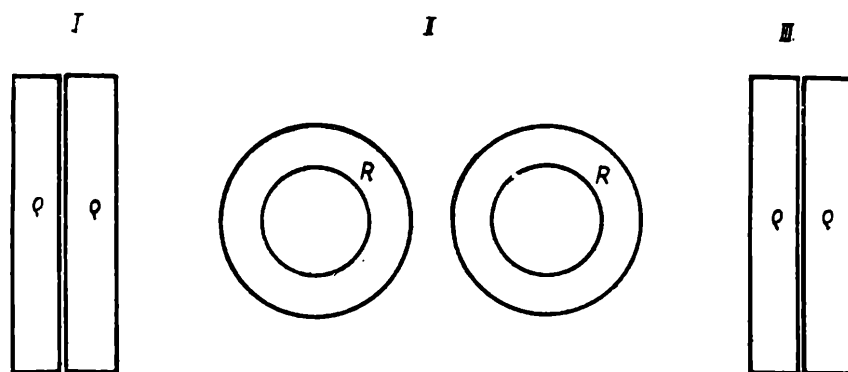
mezikruží. Porovnejme nyní odpor mezikruží s odporem obdélníka. Zapojíme-li dvě mezikruží do série, zdvojnásobí se délka vedení, což můžeme vykompenzovat pouze zdvojnásobením průřezu. Při téže tloušťce stěn je průřez v mezikruží dvojnásobný na vnějším obvodu proti obvodu vnitřnímu, který je stejně dlouhý, jako je delší strana rovnoběžníku. Protože tedy při zdvojnásobení délky (při sériovém zapojení dvou mezikruží) nezdvójnasobí se ve všech místech průřez, plyne z toho, že elektrický odpor dvou v sérii spojených mezikruží musí být větší než odpor jediného pravoúhelníka, tedy

$$R_I < R_{II}$$

Pokud jde o vodiče *II* a *III* postačí porovnat odpor jediného mezikruží s odporem jediného pravoúhelníka, protože odporové pořadí bude stejné, jako bychom uvažovali dva pravoúhelníky a dvě mezikruží.

Mezikruží a pravoúhelník představují vodiče stejné délky, a proto jejich průřezy udávají jejich odpory. Delší strany pravoúhelníku rovnají se obvodu vnitřního kruhu v mezikruží; má tedy mezikruží na vnějším obvodu větší průřez. Proto musí být odpor R mezikruží bezpodmínečně menší než odpor ϱ pravoúhelníka

$$R < \varrho,$$



Obr. 7

z čehož plyne, že válec *II* má menší odpor nežli válec *III* ($R_{II} < R_{III}$).
Pořadí tří daných válců co do elektrických odporů je tedy

$$R_I < R_{II} < R_{III}$$

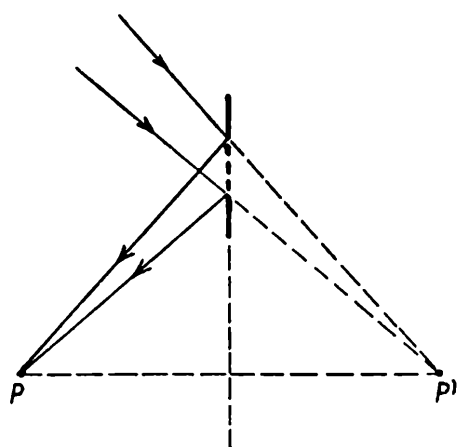
Příklad 3. Ze vzdálenosti 300 m pozorujeme v kulatém okně s poloměrem 1 m odražené sluneční paprsky. Jak maximálně dlouho trvá tento jev?

Mikulás Vermes

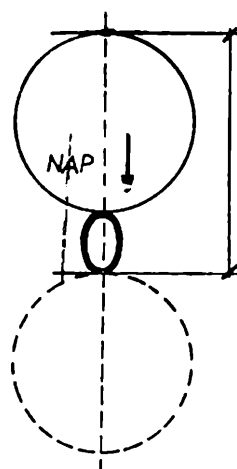
Řešení. Odlesk v okně pozorujeme tak dlouho, pokud odražené sluneční paprsky vstupují do našeho oka. Pozorovatele v P nahradíme zrcadlovým obrazem P' . Pak můžeme zadat podmínky úlohy tak, že je nutno, abychom v P' viděli oknem o průměru 1 m body slunečního kotouče. Z našeho postavení vidíme kruhové okno jako elipsu s délkou hlavní osy rovnou 1 m. Ze vzdálenosti 400 m jeví se nám kolmá délka 1 m v zorném úhlu $\frac{1}{400}$ rad = 8,6'. Zorný úhel Slunce je 30', jak snadno vypočteme z průměru o vzdáleností.

Maximální trvání odlesku dostaneme z délky zdánlivého pohybu středu Slunce podél hlavní osy elipsy (obr. 9). Odlesk trvá, pokud Slunce neurazí úhlovou dráhu rovnou

$$8,6' + 30' = 38,6'$$



Obr. 8



Obr. 9

Rychlost zdánlivého pohybu Slunce můžeme vypočítat z doby mezi dvěma po sobě následujícími kulminacemi, tj. ze 24 hodin, které se rovnají 86 400 sekund.

Je-li Slunce na nebeském rovníku (21. března a 21. září) a opíše-li poloměr měřený od našeho pozorovacího místa ke Slunci úhel $360^\circ = 21600'$, vypočteme snadno úhlovou rychlost

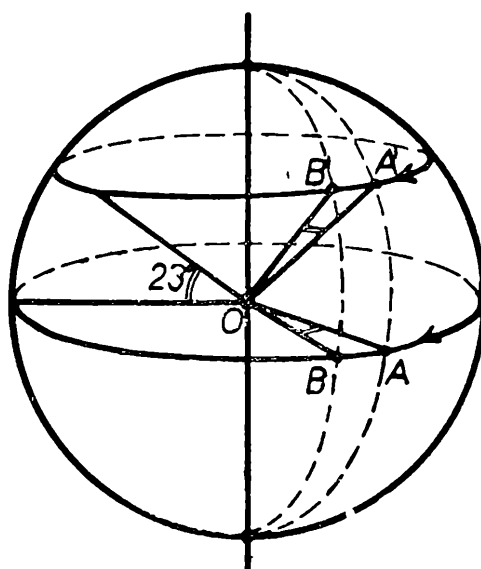
$$\frac{86400}{21600} = 0,25 \text{ úhlových minut za sekundu (obr. 10).}$$

Slunce nestojí však stále na rovníku. Ve dnech 21. června a 21. prosince je od rovníku nejvíce vzdáleno, a to o 23° . Tehdy ovšem neopíše za 24 hodin dráhu $2\pi R$ rovnou délce rovníku, nýbrž kruhovou dráhu $2\pi r$ odpovídající příslušné šířce. Průvodič vedoucí ke Slunci pohybuje se v této době jinou úhlovou rychlostí, která je v poměru $\frac{r}{R} = \cos 23^\circ$ menší než hodnota

$$0,25 \cdot \cos 23^\circ = 0,25 \cdot 0,92 = 0,23 \text{ úhlových minut za sekundu.}$$

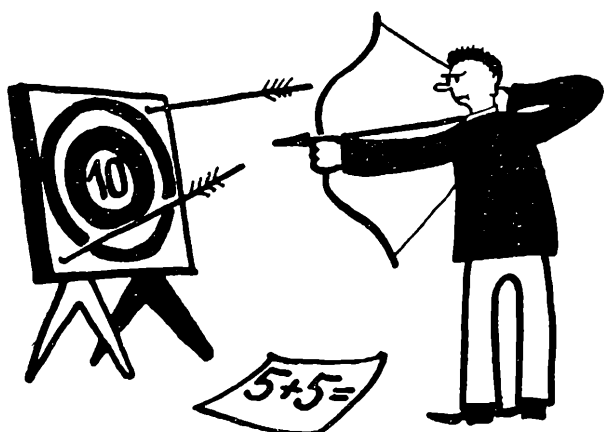
Nejmenší úhlová rychlost Slunce, s níž musíme počítat, chceme-li určit nejdelší dobu trvání odlesku je rovna

$$38,6 : 0,23 = 167,8 \text{ s} = 2'/47,8 \text{ s.}$$



Obr. 10

Přeložil inž. Dr. V. Šindelář



Úlohy k řešení

Řešitelům soutěže Rozhledů

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních vypisuje tradiční soutěž v řešení úloh z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Pokyny řešitelům: Úlohy řešte samostatně, logicky správně, věcně, vyhněte se zbytečným frázím, užívejte jen zavedených termínů a označení. Piše čitelně perem nebo strojem po jedné straně formátu A4, každou úlohu na zvláštní list. V pravém dolním rohu každého listu uveďte své plné jméno, jméno školy i třídu a svou podrobnou adresu. Na poslední uvedenou úlohu napište i jméno svého učitele příslušného předmětu.

Po skončení a zhodnocení soutěže otiskneme jména všech správných řešitelů. Nejlepší z nich odměníme knižními cenami, eventuálně otiskneme jejich fotografie. Víťame ovšem i ojedinělá řešení žáků nižších tříd. Mimo soutěž nám mohou zaslat řešení též čtenáři — nestudenti, ovšem bez nároku na některou z odměn.

Proti minulým létům se loni zvýšil počet slovenských řešitelů, v což doufáme i letos. Naše soutěž nijak nesouvisí s matematickou nebo fyzikální olympiádou.

Řešení všech úloh zašlete do 31. prosince 1964 na adresu: *doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.*

Matematika

1. Jano vraví Paľovi: Keby som mal trikrát toľko peňazí, ako skutočne mám, vydal by som 55 Kčs, zostalo by mi menej ako keď takto utratím 15 Kčs. Prezradím ti, že drobných nemám. Uhádni, koľko mám peňazí!

Pavel Bartoš

2. Sestrojte trojúhelník, který je určen těžnicemi t_a , t_b a úhlem γ .

Karel Drábek

3. Rovnice

$$2x^5 - 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 36x - 27 = 0$$

$$2x^3 + x^2 - 22x + 24 = 0$$

mají jeden společný kořen. Určete jej i zbývající kořeny kubické rovnice.

Jan Fráňa

4. Nech je $n \geq 3$ prirodzené. V rovine buďte dané body $A_1, A_2, \dots, A_n$, z ktorých žiadne tri neležia na priemke. Potom existuje kružnica k týchto vlastností: a) aspoň tri z bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ ležia na kružnici k ;

b) žiadny z bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ neleží zvonka kružnice k .
Dokážte!

Milan Hejný

5. Je dán trojúhelník ABC .

a) Určete množinu všech bodů M , které leží uvnitř trojúhelníka ABC a kterými lze vést přímky PQ protínající úsečky AC, BC v bodech P (na AC), Q (na BC), takových, že platí vztahy

$$PM = AP, \quad QM = BQ$$

b) Dokažte, že přímky PQ se dotýkají kružnice a určete její střed a poloměr.

Josef Holubář

6. Nutná a postačující podmínka pro to, aby kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

byly funkce $\sin$ a $\cos$ téhož úhlu α , je

$$p^2 = 1 + 2q \tag{2}$$

Dokažte!

Stanislav Horák

7. Najděte pět nejmenších prvočísel $p > 2$, pro něž je neurčitá rovnice

$$x^3 - y^3 = p$$

řešitelná přirozenými čísly.

Stanislav Horák

8. Je dán čtverec $ABCD$ a bod X , který je vnitřním bodem trojúhelníka ABC a jeho poměr vzdáleností od stran AB, BC, AC je $m : n : p$. Zjistěte vzdálenost bodu X od vrcholu D .

Stanislav Horák

9. Do kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha < \pi$ vepište rovnoramenný trojúhelník s vrcholem ve středu oblouku tak, aby jeho obsah byl největší. Řešte bez užití diferenciálního počtu.

Jaromír Hroník

10. Vyšetřete, kterou číslicí v desítkové soustavě může končit kombinační číslo $\binom{n}{4}$ pro $n = 4, 5, 6, 7, \dots$

Jiří Sedláček

11. Je dán obecný čtyřúhelník $ABCD$ a přímka p , která protíná strany AB, CD ve vnitřních bodech E, F . Body A, B veďte kružnici k_1 a body C, D kružnici k_2 tak, aby průsečíky M, N kružnic k_1, k_2 ležely na přímce p .

Ota Setzer

12. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y , která splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= \cos (x + y) \\ \sin x + \sin y &= \sin (x + y) .\end{aligned}$$

Jaroslav Zemánek

Deskriptivní geometrie

1. Je dána kulová plocha o středu O a poloměru r . Vepište do ní 5 shodných kulových ploch (poloměr ρ), jež se jí dotýkají a z nichž jedna se dotýká čtyř ostatních shodných koulí, z těch pak každá se dotýká tří z ostatních čtyř.

Určete poloměr ρ . Zobrazte ve sdružených průmětech!

Ema Kasková

2. Jsou dány tři přímky a, b, c , z nichž každé dvě jsou spolu mimoběžné. Sestrojte kvádr $ABCD A' B' C' D'$ tak, aby vrchol A ležel na přímce a , vrchol B na přímce b , hrana $A' B'$ na c a aby podstava $ABCD$ byla čtverec.

Stanislav Horák

3. Jsou dány tři přímky a, b, c navzájem rovnoběžné, ale neležící v téže rovině a rovina τ s danými přímkami různoběžná. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká daných přímek i dané roviny. Podejte nejprve prostorové řešení a pak proveďte v promítání na dvě k sobě kolmé průmětny pro případ: $a \equiv [P (-4; 6; 0), N (6,5; 0; 12, 5)]$, $b \equiv [R (-1; 11; 0)]$, $c \equiv [M (9,5; 0; 7)]$, $\tau \equiv \pi$.

Stanislav Horák

4. Narýsujte elipsu ze známých středů S_A, S_B, S_C, S_D oskulačních kružnic ve vrcholech A, B, C, D . Kosočtverec $S_A S_C S_B S_D$ má delší úhlopříčku $S_C S_D$.

Ota Setzer

Fyzika

1. Anténa televizního přijímače může kromě přímých signálů vysílačky zachytit i vlny, odražené od okolních předmětů (tovární hala, plynojem). Jejich zachycení se projeví vznikem slabšího obrazu, který je na obrazovce vzhledem k základnímu obrazu vodorovně posunut.

Z velikosti posunutí je možno zjistit — obdobně jako u radaru — vzdálenost předmětu. Naše televize vysílá za sekundu 50 půlobrazů (střídavě jsou kresleny liché a sudé řádky), tedy 25 úplných obrazů o 625 řádcích. Na jeden obraz však nepřipadá celá pětadvacetina sekundy. 24 % tohoto časového úseku připadá na pomocné signály a teprve ve zbývajícím čase se paprsek pohybuje po obrazovce při kreslení obrazu.

Na základě těchto údajů vypočtete vzdálenost mezi anténou přijímače a odrážejícím předmětem, je-li šířka obrazovky 30 cm a posunutí obrazů 5 cm. Předpokládejte, že elektronový paprsek se pohybuje po obrazovce vodorovně.

František Janáček

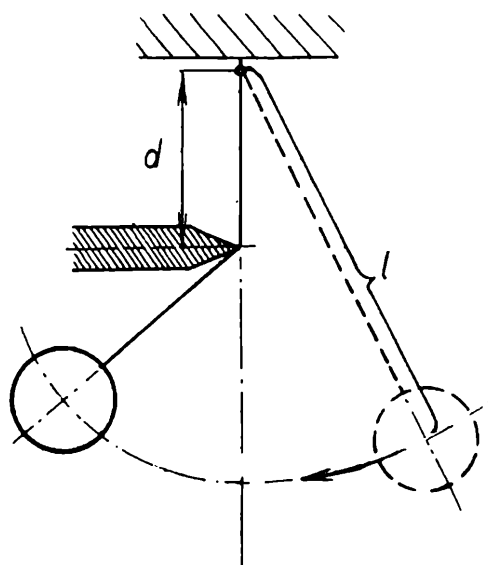
2. Vypočtete: a) Na jakou vzdálenost by se musel přiblížit k Zemi Měsíc, aby se jeho oběžná doba zrychlila na dva dny? (Oběžná doba Měsíce $T = 27,3$ dne; střední vzdálenost Měsíce $a = 384\,400$ km.)

b) Tíhové zrychlení na povrchu Měsíce! Poměr hmot Měsíce a Země jest $m : M = 1 : 81$, poměr poloměrů $r_M : R_Z = 0,27$, tíhové zrychlení na zemském povrchu je $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Otakar Julák

3. Je dáno kyvadlo naznačené na obr. 1, jež můžeme zhruba pokládat za kyvadlo matematické. Délka závěsu kyvadla je $l = 1,5$ m, výšková odlehlost hrany, jež při výkyvu na levo zkrátí závěs, je od místa závěsu $d = 0,54$ m. Máme vypočítat periodu (dobu dvoukyvu) daného kyvadla. Kývání uvažujeme v malých úhlových výchylkách kolem klidové rovnovážné polohy. Odpory neuvažujeme. Tíhové zrychlení volíme $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Václav Šindelář



Obr. 1

4. Víme, že valení rotačního (obecně libovolného) válce po rovině můžeme považovat za rotaci okolo okamžitých os o , jimiž jsou povrchové přímky, v nichž se válec právě dotýká roviny. Ověřte si správnost tvrzení vypočtením celkové kinetické energie valícího se válce pouze z okamžité rotace. Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho podélné rotační ose je roven $J_o = \frac{1}{8} md^2$. K řešení použijeme Steinerovu větu $J_i = J_o + ma_i^2$, podle níž vypočteme moment setrvačnosti J_i vzhledem k rovnoběžné ose vzdálené o a (vůči rotační ose). Přitom m značí hmotu tělesa (válce).

Václav Šindelář

5. Ve dvou nádobách vzájemně od sebe oddělených jsou uzavřeny dva různé plyny při téže teplotě T . V jedné nádobě je 8 gramů kyslíku (molekulová hmota $\mu_1 = 32$), ve druhé je 8 gramů kysličníku uhličitého (molekulová hmota $\mu_2 = 64$). Tlak kyslíku je roven $p_1 = 1,1$ at, tlak kysličníku uhličitého je $p_2 = 1,5$ at.

Máme vypočítat, jaký bude výsledný společný tlak p směsi obou plynů v nádobách, spojíme-li obě nádoby. Oba plyny přitom pokládáme za dokonalé.

Poznámka. Stavová rovnice dokonalého plynu (pro 1 grammolekulu) je běžně známa:

$$p \cdot V = R \cdot T,$$

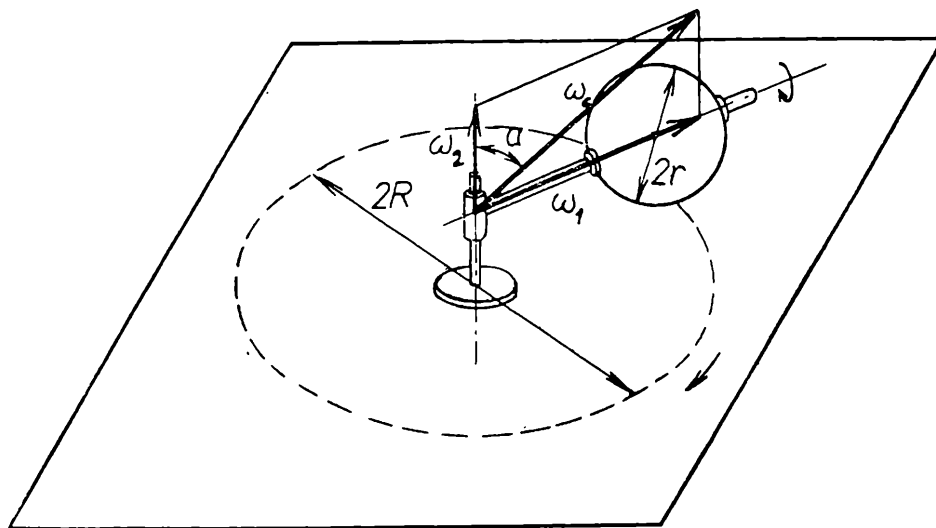
kde R je plynová konstanta, jež se rovná $R = 8316,9$ joulu.

Nezúčastňuje-li se termodynamického děje celý kilomol plynu, nýbrž jen m kilogramů, musíme počítat ze stavové rovnice ve tvaru

$$pV = nRT,$$

kde $n = \frac{m}{\mu}$ (zde značí μ molekulovou hmotu).

Václav Šindelář



Obr. 2

6. Koule poloměru $r = 0,2$ m valí se rychlostí $v = 1$ m . s⁻¹ po vodorovné rovině kolem pevné vertikální osy. Vzdálenost středu koule od této osy je $R = 0,5$ m (obr. 2). Materiálem koule je ocel ($\rho = 7,8 \cdot 10^3$ kg . m⁻³).

Vypočtete: a) celkovou kinetickou energii koule (přitom zanedbáváme hmotu ramene, jímž je koule vázána k vertikální ose),

b) celkovou úhlovou rychlost koule co do velikosti i směru.

Poznámka. Moment setrvačnosti J koule vzhledem k libovolné ose procházející jejím středem (těžištěm) je roven

$$J = \frac{2}{5} mr^2$$

kde m je hmota koule a r její poloměr.

Václav Šindelář

Matematické zábavy

J a r o s l a v Š e d i v ý, Praha:

Je šestka nevyhnutelná?

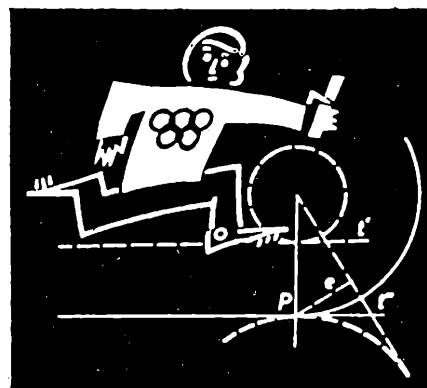
Zvolte si libovolná tři po sobě následující přirozená čísla, z nichž poslední je dělitelné třemi. Sečtěte je a v získaném součtu sečtěte jednotlivé cifry. Nedostali jste ještě šestku? Sečtěte tedy cifry posledního vypočítaného čísla. Teď už jistě vyšla šestka většině z vás. *Lze dokázat, že po konečném počtu kroků, tj. výpočtů ciferných součtů, dospějeme k jednocifernému součtu, kterým je číslo šest.*

Pokuste se o svůj vlastní důkaz. Využijte věty, že každé přirozené číslo dává při dělení devíti týž zbytek, jaký dostaneme při dělení jeho ciferného součtu devíti. Svá řešení pošlete redakci. Nejlepší řešení opět otiskneme.

Matematická olympiáda

Soutěžní úlohy

XIV. ročníku MO



Uveřejňujeme soutěžní úlohy I. kola XIV roč. Matematické olympiády. Žádáme čtenáře, aby s nimi laskavě seznámili žáky i učitele. Termín k odevzdání první trojice těchto úloh je 15. ledna 1965 a termín pro druhou trojici je 28. února 1965.

Kategorie A

1. Vypočtěte součet všech možných součinů xy , jejichž činitelé x, y jsou navzájem různá čísla vybraná z přirozených čísel $1, 2, \dots, n$, kde n je dané přirozené číslo.

[Lze užít vzorce: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$].

2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1; M je střed strany AB . Do trojúhelníka ABC je vepsán rovnostranný trojúhelník XYZ tak, že body X, Y, Z leží po řadě uvnitř stran BC, CA, AB a tak, že úsečky XZ, CM mají společný bod U .

- Vyjádřete vzdálenost MU pomocí vzdálenosti MZ .
- Dokažte, že bod U každého z trojúhelníků XYZ náleží jisté úsečce MT délky $\frac{1}{3} CM$.

3. Je dána funkce proměnné x

$$y = x^2 - 4|x - 1| - p,$$

kde p je parametr.

Určete p tak, aby příslušná funkce nabyla hodnoty 1 právě pro tři různé hodnoty x .

4. Místnost má tvar krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky 1. Označme M střed stěny $BCC'B'$. Svítící bod probíhá tělesovou úhlopříčkou DB' . Přitom se vržený stín úsečky AM pohybuje a probíhá postupně jistou část stěn a podlahy místnosti.

Vyšetřte, z kterých obrazců se tato část skládá, a rozhodněte, zda její obsah je větší než obsah podlahy místnosti.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a . Dále jsou dány dva kruhy K_1, K_2 se středy A, B a o poloměrech 1 a kruh K_3 se středem C a o poloměru $r = \frac{1}{2}$. Bod M je takový bod trojúhelníka ABC , ze kterého je vidět kruhy K_1, K_2, K_3 pod zornými úhly téže velikosti.

Vypočtěte vzdálenosti MA, MB, MC a proveďte diskusi vzhledem k číslu a .

6. Najděte všechna čísla x , pro něž platí nerovnosti

$$0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$\cos 2x \geq \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - x \right)$$

Kategorie B

1. Řešte nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1$$

2. Dokažte, že číslo 48 je dělitelem čísla

$$n^2 (n + 1)^2 (n - 1) (n - 2)$$

pro každé přirozené číslo $n > 2$.

3. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky stran AB, AC a platí-li $\sphericalangle BCA = 3 \sphericalangle ABC$. Stanovte podmínku řešitelnosti.

4. Deltoid $ABCD$ má osu souměrnosti AC a oba jeho úhly při vrcholech B, D jsou pravé.

Vypočtěte poloměr kružnice vepsané deltoidu pomocí délek jeho stran.

5. Do dutého rotačního válce, který spočívá na vodorovné rovině, je vepsána koule K o poloměru 1. Tato koule se dotýká jednak dolní podstavy, jednak pláště válce podél kružnice. Ve zbývajícím prostoru mezi

dolní podstavou a koule K spočívají na dolní podstavě shodné kuličky, které se dotýkají jak pláště válce, tak koule K .

Kolik lze nejvýše takových kuliček do zmíněného prostoru umístit?

6. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A ; vně kružnice k je dán bod B . Označme A' libovolný bod ležící vně kružnice k , B' bod souměrně sdružený s bodem B podle osy úsečky AA' . Jaký útvar vyplní všechny takto vzniklé body B' ?

Kategorie C

1. Je dána rovnice s neznámou x :

$$\frac{x+a}{b+c} + \frac{x+b}{c+a} + \frac{x+c}{a+b} = \frac{1}{6};$$

přitom reálná čísla a, b, c splňují podmínku $a + b + c = 0$.

- Dokažte, že rovnice má kořen a vyjádřete jej pomocí čísel a, b, c .
- Dokažte, že kořen rovnice a číslo abc jsou téhož znamení.

2. Nad danou úsečkou AB jsou sestrojeny v téže polorovině vyřetě přímku AB kruhové oblouky o_1, o_2 , ze kterých je úsečka AB vidět po řadě pod zornými úhly velikostí 120° a 60° . Bodem A je vedena taková přímka, která má s oblouky o_1, o_2 po řadě další společné body X_1, X_2 .

Vyšetřte množinu středů Y všech takových úseček X_1X_2 .

3. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} px + 2y &= 3, \\ 2x + py &= p - 1 \end{aligned}$$

o neznámých x, y .

Proveďte zkoušku dosazením a proveďte diskusi vzhledem k parametru p .

4. Je dán trojúhelník OO_1O_2 .

Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bod O byl středem kružnice trojúhelníku ABC vepsané a aby body O_1, O_2 byly po řadě středy kružnic trojúhelníku ABC vně vepsaných ke stranám BC, CA . Proveďte diskusi.

5. Ve vodorovné rovině je dán rovnostranný trojúhelník $S_1S_2S_3$ o straně délky 2. V každém z jeho vrcholů spočívá na rovině $S_1S_2S_3$ jedna ze tří shodných koulí o poloměru $r \leq 1$.

Vyšetřte konstruktivně i výpočtem poloměr koule, která se všech tří daných koulí dotýká vně a mimoto se dotýká roviny $S_1S_2S_3$. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem k danému číslu r .

6. Tři druhy plechovek se součástkami byly dopravovány v bedně. Plechovky měly váhy 0,8 kg, 1,5 kg, 2 kg a po řadě objemy 1,5 dm³, 4 dm³, 5 dm³. Celková váha zásilky (bez váhy bedny) byla 3,3 q; objem vnitřku bedny byl 0,78 m³. Plechovek každého druhu bylo alespoň 50 kusů. Z těchto údajů vypočítejte, kolik plechovek každého druhu bylo v zásilce.

Kategorie D

1. Dopravní síť města se skládá ze tří trolejbusových linek. Celková délka trolejového vedení je 14 km. Jednotlivé linky mají po řadě délky 5,7 km, 5,8 km a 6,9 km. První a druhá linka mají společný úsek délky

1,8 km. Druhá a třetí linka mají společný úsek délky 2,3 km. Třetí a první linka mají společný úsek délky 2,7 km.

Rozhodněte, zda existuje úsek společný všem třem linkám; jestliže ano, pak vypočítejte jeho délku. Načrtněte, jak asi vypadá plánec všech tří tratí a vepište do něho délky jednotlivých úseků.

2. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a vně této kružnice je dán bod A , z něhož je ke kružnici k sestrojena tečna AT s dotykovým bodem T .

Uvnitř úsečky AT sestrojte takový bod X , aby platilo $AX = XY$, přičemž Y je průsečík úsečky SX s kružnicí k .

3. Rozhodněte, které z obou čísel

$$a = 639^9, b = 638^9 + 638^8$$

je větší. Své rozhodnutí odůvodněte.

4. Druhou mocninu přirozeného čísla N dělíme číslem 12. Zjistěte, jaký zbytek (tj. některé z celých čísel 0, 1, 2, ..., 11) přitom může vyjít. Jsou pouze čtyři možnosti.

(Pokyn. Každé přirozené číslo N lze psát ve tvaru $N = 12k + z$, kde k je celé nezáporné číslo a o celém čísle z platí $0 \leq z < 12$.)

5. Je dána polokružnice k se středem S o průměru AB . Označme x vzdálenost libovolného bodu X polokružnice k od přímky AB . Na polopřímce SX sestrojme bod Y takový, aby $SY = x$.

Vyšetřte geometrické místo bodů Y .

6. Najděte všechna celá čísla p , pro která je výraz

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2 - 2p + 1} - \frac{p^3 + 1}{(p - 1)^3} \right] (p^2 - 2p + 1) + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1}$$

roven celému číslu.



J a r o s l a v Z e m á n e k, student, Praha:

VI. mezinárodní matematická olympiáda

VI. mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala v červenci 1964 v Moskvě. Zúčastnilo se jí 73 studentů z devíti zemí a to Bulharska (B); Československa (ČS), Jugoslávie (Y), Maďarska (H), Mongolska (M), Německé demokratické republiky (D), Polska (P), Rumunska (R), Sovětského svazu (S). Byli to nejlepší mladí matematikové (středošk-

láci) jednotlivých zemí. Mezi nimi bylo sedm děvčat (po dvou z Jugoslávie, Mongolska, NDR a jedno z ČSSR). V čele každé z devíti zúčastněných delegací byli vedoucí delegát a jeho zástupce. Vedoucím československé delegace byl s. R. Zelinka a pedagogickým průvodcem s. F. Zítek CSc., oba pracovníci Matematického ústavu ČSAV. Soutěž řídila Mezinárodní komise (MK), kterou tvořili vedoucí delegáti; této komisi předsedal akad. A. I. Markuševič, vicepresident Akademie pedagogických věd RSFSR. Ke zdaru celé akce přispěli svým dílem také někteří sovětští vysokoškolští pracovníci a studenti moskevské university. Olympiáda proběhla za podpory a pod záštitou ministerstva osvěty RSFSR.

Československá delegace přibyla do Moskvy v úterý 30. června ve večerních hodinách. Ve čtvrtek 2. července večer už byli všichni účastníci v Moskvě. Ubytování a stravování bylo zajištěno v příjemném prostředí moskevské Lomonosovovy státní university na Leninských horách. Každý účastník olympiády dostal od pořadatelů pěkný odznak VI. MMO.

V pátek 3. července dopoledne jsme si prohlédli moskevský Dům pionýrů. Odpoledne se konalo zahajovací slavnostní shromáždění všech účastníků VI. MMO. Nejprve promluvil předseda MK akad. A. I. Markuševič; uvítal všechny přítomné, řekl několik slov o matematice a připomněl historii matematických olympiád. Pak vystoupil polský delegát prof. M. Czyzykowski, zástupce země, která uspořádala V. MMO. Závěrem akad. Markuševič popřál všem olympionikům hodně úspěchů v nastávající soutěži.

Vlastní soutěž VI. MMO byla rozdělena do dvou částí. Do každé z nich byly zařazeny tři soutěžní úlohy, na jejichž řešení měli soutěžící čtyři hodiny čistého času. Obě písemné zkoušky proběhly v sobotu a v neděli 4. a 5. července v posluchárně č. 02 university. Uvádíme české texty soutěžních úloh.

První práce

(4. července 1964)

Úloha 1. a) Určete všechna celá kladná čísla n , pro která je číslo $2^n - 1$ dělitelné sedmi.

b) Dokažte, že neexistuje žádné celé kladné číslo n , pro které je číslo $2^n + 1$ dělitelné sedmi.

Úloha 2. Jsou-li a , b , c délky stran libovolného trojúhelníka, potom platí

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc;$$

dokažte.

Úloha 3. Do trojúhelníka ABC se stranami o délkách a , b , c vepíšeme kružnici a sestrojíme k ní tři nové tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníka. Každá z těchto tečen utíná od trojúhelníka ABC po jednom trojúhelníku.

Do každého z těchto tří nových trojúhelníků vepíšeme kružnici.
Vypočtete součet obsahů všech čtyř vepsaných kruhů.

Druhá práce
(5. července 1964)

Úloha 4. Sedmnáct osob si navzájem dopisuje, každá z nich se všemi ostatními. V celé korespondenci, se objevují celkem jen tři různá témata. Každá dvojice osob si spolu dopisuje pouze o jednom z těchto témat.

Dokažte, že existují alespoň tři osoby, které si navzájem píší o témže tématu.

Úloha 5. V rovině je dáno 5 bodů. Mezi přímkami, které spojují vždy dva z těchto bodů, neexistují žádné dvě, které jsou navzájem rovnoběžné nebo kolmé nebo splývající.

Každým z daných bodů vedeme kolmice ke všem spojnicím zbývajících čtyř bodů.

Určete maximální počet průsečíků, které mohou mít navzájem tyto kolmice.

Úloha 6. V daném čtyřstěnu $ABCD$ spojíme vrchol D s těžištěm D_0 trojúhelníka ABC . Rovnoběžky k přímce DD_0 , vedené body A, B, C , protínají po řadě roviny BCD, CAD, ABD v bodech A_0, B_0, C_0 .

Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_0B_0C_0D_0$.

Platí tento výsledek i v případě, kdy D_0 je libovolný bod uvnitř trojúhelníka ABC ?

Žákovská řešení soutěžních úloh hodnotila MK body. Za bezvadná řešení uvedených úloh bylo možno získat po řadě tyto počty bodů: 7, 7, 6, 6, 7, 9; celkem tedy nejvýše 42 bodů. Za nedostatky nebo chyby v řešení se body strhávaly. Po provedeném hodnocení všech soutěžních prací rozhodla MK o udělení cen nejúspěšnějším řešitelům; přihlíželo se k celkovému počtu bodů, které žák získal celkem svými řešeními šesti soutěžních úloh. Byly uděleny ceny tří stupňů: *I. cena* (za 38-42 dosažených bodů), *II. cena* (za 31-36 dosažených bodů) — přesně 37 bodů neměl nikdo, *III. cena* (za 27-30 dosažených bodů). Vítězi VI. MMO byli prohlášeni právě ti účastníci, kteří byli vyznamenáni cenami.

V neděli 5. července odpoledne se uskutečnila autobusová projížďka po Moskvě. V následujících dnech jsme navštívili Leninskije Gorki, Výstavu úspěchů národního hospodářství SSSR, Kreml a jiná místa v Moskvě. V úterý večer zhlédli účastníci olympiády představení Čajkovského baletu Labutí jezero ve Sjezdovém paláci v Kremlu.

Mezinárodní komise stanovila 35 nejúspěšnějších olympioniků vítězi VI. MMO a udělila jim 7 prvních cen, 9 druhých cen a 19 třetích cen. Českoslovenští studenti získali čtyři ceny: dvě druhé a dvě třetí. Přehled o počtu cen, které získaly jednotlivé země, dává tabulka č. 1; tabulka č. 2 informuje o počtu bodů, které získali jednotlivci a družstva.

Ve středu 8. července večer se konala za přítomnosti všech účastníků VI. MMO slavnostní večeře. Akad. Markuševič přednesl přípitky za matematiku, za přátelství mezi národy, za štěstí mládeže, na zdraví všech spolupracovníků matematické olympiády. S. Zelinka připil na zdraví našich hostitelů, našich milých sovětských přátel. Rumunská delegace věnovala všem účastníkům upomínkové dárky. Večeře měla velmi radostný a přátelský průběh, jako vůbec celá VI. mezinárodní matematická olympiáda.

Závěrečné slavnostní shromáždění všech účastníků VI. MMO se konalo ve čtvrtek 9. července v aule Lomonosovovy státní univerzity na Leninských horách. Shromáždění pozdravili předseda MK prof. A. I. Markuševič a ministr osvěty RSFSR E. Afanasenko. Jménem zahraničních účastníků promluvil prof. W. Engel z NDR (VII. MMO bude uspořádána patrně v NDR) a žák L. Gerencsér z Maďarska. Vítězové dostali na slavnosti diplomy s vyznamenáním I. nebo II. nebo III. stupně. Všichni ostatní studenti dostali diplom účastníka. Diplomy podepsali ministr osvěty RSFSR a předseda MK, který je olympionikům slavnostně předával. Všichni účastníci VI. MMO obdrželi od pořadatelů upomínkové dárky. Sovětská televize pořídila reportáž z tohoto zasedání. Také v novinách se objevilo několik zpráv o MO. Plného počtu 42 bodů získal sovětský žák David Bernštejn; jeho bratr byl absolutním vítězem IV. MMO, konané v r. 1962 v ČSSR.

Ve čtvrtek a v pátek se delegace rozjížděly do svých vlastí. Československá delegace se vrátila do Prahy letadlem v pátek 10. července dopoledne.

VI. mezinárodní matematická olympiáda byla nejen matematickou soutěží, ale také umožnila přátelské ano i dojemné setkání mladých matematiků zemí socialistického tábora, takže, myslím, splnila dobře své poslání. Vždyť jsme se sešli nejen proto, abychom vyřešili jistý počet soutěžních úloh, ale také proto, abychom se navzájem poznali a spřátelili. Někteří studenti se účastnili již V. MMO v r. 1963 v Polsku; tím bylo jejich opětné setkání radostnější. Měli jsme si toho mnoho co říci. Navázaná přátelství budeme dále rozvíjet a upevňovat. Sovětští hostitelé velmi přispěli ke zdaru celého díla i k tomu, že se nám v jejich zemi opravdu líbilo. Vzpomínky na Mezinárodní matematickou olympiádu jsou jistě pro každého účastníka nezapomenutelné.

Je nutno vysoce ocenit ušlechtilou práci všech organizátorů a spolupracovníků matematické olympiády, kteří obětovali mnoho svého času i sil tomu, abychom my, studenti, mohli soutěžit a účastnit se těchto olympiád; všem upřímně děkujeme.

Na olympiádách, jichž jsem se zúčastnil, jsem dostal na památku řadu dárků, uznání a diplomů, které mi vždy budou připomínat nejkrásnější chvíle z mládí. A příštím matematickým olympiádám přeji hodně zdaru.

Tabulka 1. Přehled o počtu cen získaných jednotlivými zeměmi

	Země									Celkem cen
	S	H	P	R	ČS	D	B	Y	M	
Cena										
I.	3	3	1	0	0	0	0	0	0	7
II.	1	1	1	2	2	1	0	1	0	9
III.	3	1	3	3	2	2	3	1	1	19
Celkem družstvo	7	5	5	5	4	3	3	2	1	35

Tabulka 2. Přehled o počtu bodů, které získali jednotliví žáci

Země	B	ČS	D	H	M	P	R	S	Y
Žák č.									
1.	30	28	29	35	26	39	16	36	16
2.	27	36	31	24	22	1	33	39	29
3.	24	13	25	21	26	26	30	42	24
4.	23	30	24	41	26	30	21	30	7
5.	23	36	27	26	27	31	24	30	18
6.	18	14	20	39	14	30	27	38	17
7.	30	19	15	28	15	28	30	25	13
8.	23	18	25	39	13	24	32	29	31
Celkem	198	194	196	253	169	209	213	269	155

Na závěr uvádíme jmenný seznam vítězů VI. mezinárodní matematické olympiády.

Diplom I. stupně získali:

G. Archipov (S), D. Bernštejn (S), J. Matijasevič (S), L. Gerencsér (H), L. Lovász (H), J. Pelikán (H), T. Figiel (P).

Diplom II. stupně získali:

P. Bureš (ČS), T. Marcisová (ČS), W. Klamt (D), M. Orłowski (P), I. Berkes (H), A. Vinea (R), O. Byske (R), V. Crumov (Y), V. Aleksejev (S).

Diplom III. stupně získali:

C. Mižiddorž (M), M. Znojil (ČS), J. Zemánek (ČS), M. Titze (D), M. Brandt (D), Z. Słobodski (P), W. Patkaniowski (P), K. Nowiński (P),

A. Eškenazi (B), S. Bilčev (B), V. Zaimov (B), E. Makai (H), T. Spircu (R), E. Popescu (R), M. Cherciu (R), S. Verščaj (Y), A. Eloreňsov (S), B. Ivlev (S), A. Vilenkin (S).

* *

*

Pořadí družstev 1963:

- | | |
|-------------|--------------|
| 1. S. (271) | 5. ČS. (151) |
| 2. H. (234) | 6. B. (145) |
| 3. R. (191) | 7. D. (140) |
| 4. Y. (162) | 8. P. (134) |

Pořadí družstev 1964:

- | | |
|-------------|-------------|
| 1. S. (269) | 6. D. (196) |
| 2. H. (253) | 7. ČS (194) |
| 3. R. (213) | 8. M. (169) |
| 4. P. (209) | 9. Y. (155) |
| 5. B. (198) | |

Red.



Pavel Bureš,
Brno

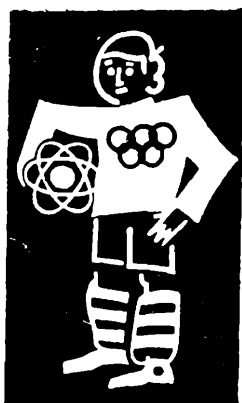


Tamara Marcisová.
Bratislava



Jaroslav Zemánek,
Praha

Redakce blahopřeje našim soutěžícím a otiskuje fotografie odměněných (pokud je mohla získat).



Fyzikální olympiáda

J a n T e s a ř, Praha:

Zákon zachování hybnosti

Téma k prostudování pro první kolo VI. ročníku FO v kategorii C.

Hybnost

Narazí-li pohybující se těleso na jiné těleso nebo na pevnou stěnu, působí na ně silou. Velikost této síly závisí na hmotě tělesa, které způsobuje náraz, na rychlosti tohoto tělesa vzhledem k druhému tělesu a na době, po kterou trvá působení prvního tělesa na druhé.

Kdyby např. narazila na pevnou stěnu stejně velikou rychlostí dvě různě hmotná tělesa, jež působí na stěnu po stejnou dobu, působilo by těleso o větší hmotě na stěnu tolikrát větší tlakovou silou, kolikrát je jeho hmota větší než hmota druhého tělesa. Kdyby na stěnu narazila dvě tělesa o stejných hmotách různou rychlostí a působila by na ni při nárazu stejně dlouho, tlačilo by rychlejší těleso na stěnu tolikrát větší tlakovou silou, kolikrát je jeho rychlost vzhledem k pevné stěně větší než rychlost druhého tělesa.

Velikost silového působení tělesa na jiné těleso v daném časovém intervalu je přímo úměrná součinu hmoty tohoto tělesa a jeho rychlosti vzhledem k druhému tělesu. Proto přisuzujeme tělesu o hmotě m , které se pohybuje rychlostí v , fyzikální veličinu p , která se nazývá *hybnost*. Platí tedy vztah

$$p = m v . \quad (1a)$$

Hmota je veličina skalární, rychlost je vektor. Násobíme-li vektor skalárem, je veličina určená jejich součinem vektor, který má souhlasný směr a orientaci jako násobený vektor. Označíme-li velikost vektoru hybnosti p a velikost vektoru rychlosti v , pak platí rovnice (1a). Chceme-li vyznačit vektorový charakter hybnosti, píšeme¹⁾

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad (1b)$$

Jednotkou hybnosti je $[p] = 1 \text{ kg m/s}$.

Koná-li těleso rovnoměrný přímočarý pohyb, koná ho setrvačností

¹⁾ Skaláry značíme v tisku kurzívou, např. hmotu m , objem V , vektory polotučně, např. sílu $\mathbf{F}$, rychlost $\mathbf{v}$, hybnost $\mathbf{p}$.

bez působení síly a jeho rychlost je stálá. Protože také hmota pohybujícího se tělesa je konstantní veličina, můžeme zákon setrvačnosti vyjádřit rovnicemi

$$p = \text{konst.} \quad (2a)$$

nebo vektorově

$$\mathbf{p} = \text{konst.} \quad (2b)$$

Hybnost tělesa, na které nepůsobí žádné jiné těleso silou (vnější síla), zůstává při pohybu konstantní.

Tento poznatek lze vyjádřit i jinak. Má-li totiž hybnost tělesa konstantní velikost a směr, pak se vektor hybnosti tělesa nemění a proto se nemění ani velikost hybnosti. Označíme-li změnu jakékoliv veličiny řeckým písmenem Δ , lze uvedené poznatky vyjádřit rovnicemi

$$\Delta \mathbf{p} = m \Delta \mathbf{v} = 0 \quad (3a)$$

a

$$\Delta p = m \Delta v = 0 \quad (3b)$$

Nepůsobí-li na těleso, které je v klidu nebo v pohybu, žádná vnější síla, nemění se hybnost tělesa.

Působí-li na těleso vnější síla, mění se rychlost tělesa, těleso koná nerovnoměrný pohyb a rovnice (2) a (3) neplatí.

Impuls síly

Začne-li působit síla na pevné těleso, které se nachází v klidu, buďto těleso deformuje, nebo je uvede do pohybu s určitým zrychlením. Působení vnější síly na těleso se tedy projeví buď deformačními účinky (statickými) nebo účinky pohybovými.

Působí-li na totéž těleso stejně velká síla jednou delší dobu, podruhé kratší dobu, jsou deformační nebo pohybové účinky síly na těleso tolikrát větší, kolikrát delší dobu síla na těleso působí.

Působí-li na totéž těleso dvě nestejně velké síly po stejně dlouhou dobu, pak větší síla deformuje těleso tolikrát více, nebo mu udělí zrychlení tolikrát větší, kolikrát má větší hodnotu než síla menší.

Jsou tedy účinky vnější síly, působící na totéž těleso, přímo úměrné velikosti této síly a době, po kterou síla na těleso působí.

Proto můžeme účinky vnější síly na těleso měřit součinem síly a doby, po kterou síla na těleso působí. Tato fyzikální veličina, kterou značíme I , se nazývá *impuls síly*. Poněvadž síla je veličina vektorová a čas veličina skalární, je impuls veličina vektorová a její vektor má souhlasný směr a orientaci jako vektor síly.

Účinek síly na těleso se tedy vyjadřuje impulsem síly, který je vektorově definován rovnicí

$$\mathbf{I} = \mathbf{F} t \quad (4a)$$

a jeho velikost má hodnotu

$$I = F t. \quad (4b)$$

Jednotkou impulsu je

$$[I] = \text{N s} = \text{kg m/s}.$$

Veliký účinek na těleso může mít podle rovnic (4) i malá síla působící dlouhou dobu. Dopadají-li často na totéž místo na kameni kapky vody působící při dopadu na kámen jen malou tíhovou silou, vyhloubí po dlouhé době v kameni veliký důlek, i když na kámen nepůsobí chemicky.

I velmi krátce působící síla může mít na těleso velké účinky, je-li veliká. Při střelbě puškou veliká tlaková síla rozpínajících se plynů vzniklých hořením paliva, která působí jen velmi malý zlomek vteřiny, udělí střele ohromné zrychlení, takže střela opustí hlaveň rychlostí o velikosti sta metrů za vteřinu.

Impuls síly a hybnost

Působí-li na těleso o hmotě m , které je v klidu, konstantní síla F , pak koná těleso pohyb rovnoměrně zrychlený a dosáhne za čas t , po který síla na těleso působí, rychlosti $v = a t$, kde a značí zrychlení pohybu tělesa.

Rovnici (1) lze v tomto případě upravit na tvar

$$p = m v = m a t$$

a rovnici (4) na tvar

$$I = F t = m a t = p. \quad (5a)$$

Z posledních dvou rovnic je patrné, že vektor hybnosti má stejný směr a orientaci jako vektor zrychlení tělesa a že totéž platí pro vektor impulsu. Lze tedy rovnici (5a) psát i vektorově

$$\mathbf{l} = \mathbf{p} = m \mathbf{a} t. \quad (5b)$$

Vzorce (5) platí jen v tom případě, že jde o pohyb na jehož počátku je těleso v klidu a měříme-li čas od okamžiku, kdy se těleso začalo pohybovat.

Jestliže konstantní síla $\mathbf{F}$ začne působit v čase t_1 a končí své působení v čase t_2 od začátku pohybu tělesa, působí celkem po dobu

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Byla-li v čase t_1 rychlost pohybujícího se tělesa $\mathbf{v}_1$ a v čase t_2 rychlost $\mathbf{v}_2$, je

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}$$

Za dobu Δt se změní hybnost z hodnoty $\mathbf{p}_1$ na hodnotu $\mathbf{p}_2$ o

$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m \mathbf{v}_2 - m \mathbf{v}_1 = m \Delta \mathbf{v} = \mathbf{F} \Delta t = \mathbf{l}$,
takže je

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t, \quad (6a)$$

pro velikosti platí

$$p_2 - p_1 = F \Delta t ,$$

čili při přímočarém pohybu

$$F \Delta t = m (v_2 - v_1) = m \Delta v , \quad (6b)$$

kde $m \Delta v$ značí změnu hybnosti, kterou způsobí síla F , působící po dobu Δt na těleso o hmotě m , jestliže těleso mělo na počátku časového intervalu Δt rychlost v_1 a na konci v_2 .

Impuls síly a změna hybnosti mají stejnou velikost a stejný směr i orientaci. Také jejich rozměry jsou stejné. Přesto nesmíme obě veličiny zaměňovat. Jedna z nich je příčinou a druhá následkem. Při dopadu tělesa na pevnou stěnu je změna jeho hybnosti příčinou vzniku impulsu síly, která působí deformaci pevné stěny. Při střelbě z pušky způsobí naopak impuls síly rozpínajících se plynů, vzniklých hořením paliva, změnu hybnosti střely i pušky.

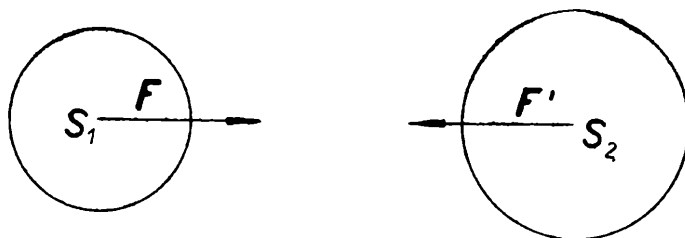
Impuls síly se rovná změně hybnosti pohybujícího se tělesa.

To platí i tehdy, jestliže je těleso v klidu v okamžiku, kdy na ně začala působit síla.

Soustava těles

Silové působení těles je vzájemné (obr. 1).

Působí-li jedno těleso na druhé silou (akce), působí druhé těleso na první stejně velikou silou (reakce).



Obr. 1

Akce a reakce mají stejný směr, jsou však opačně orientovány a současně vznikají a současně zanikají. Tyto vlastnosti akce a reakce vyplývají z třetího Newtonova pohybového zákona, který se dá vyjádřit rovnicí

$$F = - F'$$

kde F značí velikost akce a F' velikost reakce. Násobíme-li obě strany velikostí Δt doby, po kterou na sebe obě tělesa působí, dostaneme rovnici

$$F \Delta t + F' \Delta t = 0$$

Veličina $F \Delta t$ je impuls síly, kterým působí první těleso na druhé, takže platí

$$F \Delta t = m_2 \Delta v_2 ,$$

kde $m_2 \Delta v_2$ značí změnu hybnosti druhého tělesa. Obdobně platí

$$F' \Delta t = m_1 \Delta v_1 ,$$

kde $F' \Delta t$ značí velikost impulsu síly, kterou druhé těleso působí na těleso první, a $m_1 \Delta v_1$ je změna hybnosti prvního tělesa.

Platí tedy rovnice

$$\Delta \mathbf{p} = m_1 \Delta \mathbf{v}_1 + m_2 \Delta \mathbf{v}_2 = 0 \quad (7a)$$

a

$$\Delta p = m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0 , \quad (7b)$$

kde znaménko $+$ značí v první rovnici vektorový, v druhé rovnici algebraický součet změny hybnosti obou těles.

Dvě tělesa, která na sebe vzájemně působí akcí a reakcí tvoří *soustavu dvou těles*. Nepůsobí-li na soustavu dvou těles žádná jiná síla (vnější), nazývá se tato soustava *uzavřená (izolovaná) soustava dvou těles*.

V izolované soustavě dvou těles platí rovnice (7).

Často se setkáváme s případem, že na sebe působí navzájem více těles než dvě. Pak mluvíme o soustavě těles.

Názvem soustava těles označujeme soubor k těles, která pokládáme za jeden celek. Takovou soustavou těles je např. sluneční soustava. Také každé těleso je soustavou těles, neboť je složeno z částic, např. z molekul, které vzhledem k jejich malým rozměrům pokládáme za hmotné body.

Celková hmota soustavy těles (hmotných bodů) je rovna součtu hmot všech těles (hmotných bodů) patřících do soustavy a také celková hybnost soustavy je rovna součtu hybností všech těles (hmotných bodů) soustavy.

Pohyby těles uvnitř soustavy způsobují síly, které působí na jednotlivá tělesa. Tyto síly mohou být způsobovány tělesy nacházejícími se mimo soustavu a do soustavy nepatřícími. Takovýmto silám říkáme *vnější síly*. Vnější síly mohou jednotlivé body v soustavě přemísťovat a působit deformaci soustavy nebo mohou uvést soustavu jako celek do pohybu. *Vnější síly tedy mohou změnit celkovou hybnost soustavy.*

Soustava, na kterou nepůsobí žádná vnější síla, se nazývá *uzavřená (izolovaná) soustava těles*.

V uzavřené soustavě těles existují jen síly, kterými na sebe vzájemně působí tělesa patřící do soustavy. Tyto síly se nazývají *síly vnitřní*.

Vnitřními silami jsou např. soudržné (kohézní) síly, kterými na sebe navzájem působí molekuly tělesa, gravitační síly, kterými na sebe vzájemně působí tělesa sluneční soustavy, síly mezi tělesy nabitými elektrickými náboji, síly působící vzájemně mezi Zemí a tělesy na zemském povrchu apod.

Každá dvě tělesa (hmotné body) soustavy působí na sebe navzájem akcí a reakcí. Proto platí pro jejich hybnosti rovnice

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 + m_2 \Delta \mathbf{v}_2 = 0 .$$

Protože tato rovnice platí pro kteroukoli dvojici vnitřních sil soustavy, platí i pro celou soustavu, takže pro změnu hybnosti $\Delta \mathbf{p}$ uzavřené soustavy těles platí rovnice

$$\Delta \mathbf{p} = m_1 \Delta \mathbf{v}_1 + m_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \Delta \mathbf{v}_n = 0. \quad (8)$$

Rovnice (8) je zobecněním rovnice (7a) a nazývá se *zákon zachování hybnosti*. Dá se vyjádřit větou:

Celková hybnost uzavřené soustavy těles (hmotných bodů) zůstává během pohybu (a ovšem i za klidu) konstantní.

Srovnáváme-li rovnici (8) s rovnicí (3), vidíme, že zákon setrvačnosti, vyjádřený rovnicí (3) nebo (2), je zvláštním případem zákona zachování hybnosti.

(Pokračování)

K o n r á d H o f m a n, České Budějovice
a d r. M a r t a C h y t i l o v á, Praha:

Vektorové znázornění střídavých proudů a symbolický počet

Téma k prostudování pro první kolo šestého ročníku FO v kategorii A.

Závislost střídavého proudu a střídavého napětí na čase je dána rovnicemi

$$i = I_m \sin \omega t \qquad u = U_m \sin (\omega t + \varphi),$$

které mají obdobný tvar jako závislost výchylky jednoduchého kmitavého pohybu na čase $y = A \sin (\omega t + \varphi)$. Průběh střídavého proudu a napětí je tedy harmonický děj.

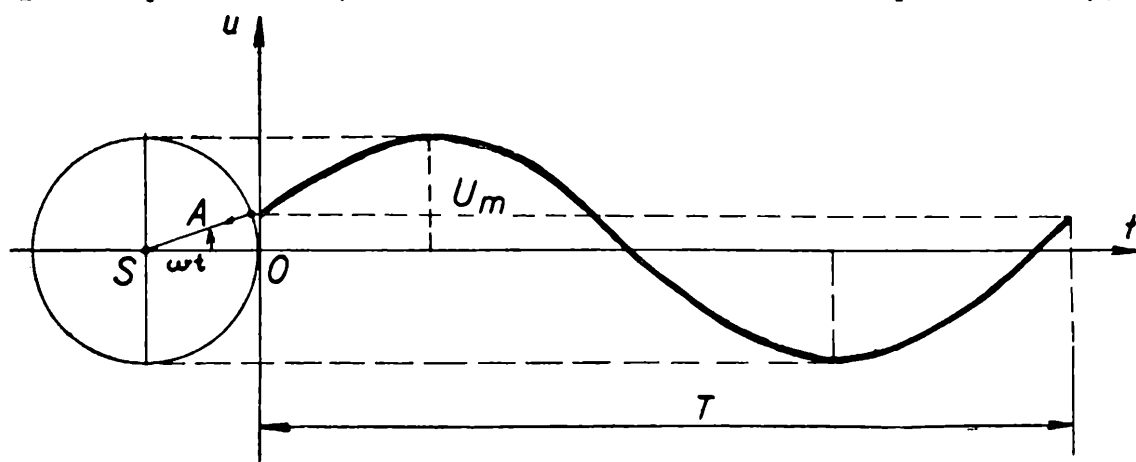
Časovým rozvinutím střídavého proudu nebo střídavého napětí je sinusoida, kterou získáme, nanášíme-li na osu x čas t a na osu y okamžité hodnoty příslušné veličiny. Okamžité hodnoty střídavého napětí získáme jako pravoúhlé průměty průvodiče $OA = U_m$, který se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω , do osy y . Příslušná sinusoida je určena točivým vektorem $\mathbf{SA}$, jehož velikost $SA = U_m$, počáteční fáze φ a úhlovou rychlostí otáčivého vektoru ω , kterou pro harmonický děj nazýváme *ú h l o v o u f r e k v e n c í*. Na obr. 1 je znázorněno časové rozvinutí střídavého napětí $u = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$. Vektory jsou na všech obrázcích značeny podtržením.

Otáčení vektorů nemůžeme znázornit graficky. Můžeme určit jen polohu točivého vektoru v čase t , např. v čase $t = 0$. Takový vektor se nazývá *časový vektor* a značí se $\mathbf{A}$.

Při sčítání nebo odčítání střídavých proudů nebo střídavých napětí platí pro časové vektory stejná pravidla jako pro vektory. Máme-li sčítat např. dvě střídavá napětí

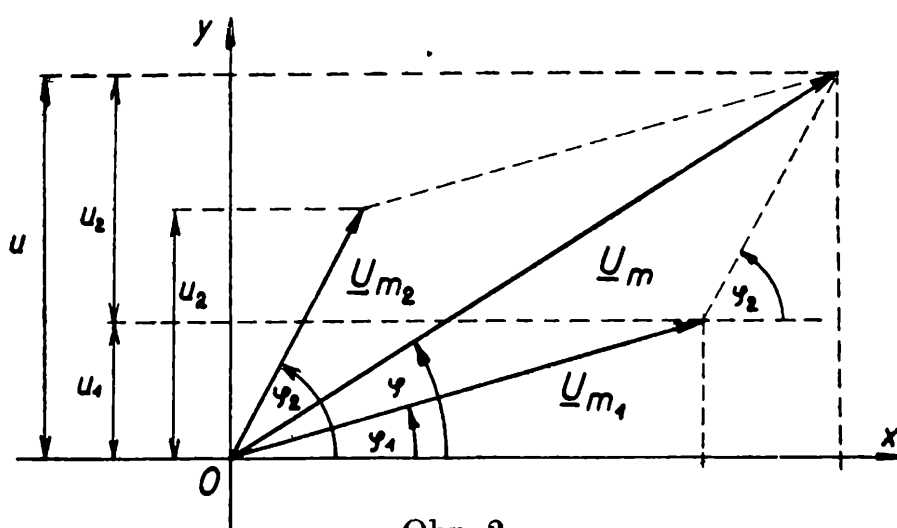
$$u_1 = U_{m_1} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_{m_2} \sin(\omega t + \varphi_2),$$



Obr. 1

sčítáme v časovém rozvinutí algebraicky okamžitá napětí. Okamžitá napětí v čase $t = 0$ jsou průměty vektorů $\underline{U}_{m_1}$ a $\underline{U}_{m_2}$ do osy y . Z obr. 2 je patrné, že výsledné okamžité napětí $u = u_1 + u_2$ je dáno průmětem výsledného vektoru $\underline{U}_m$ do osy y .



Obr. 2

Poněvadž oba točivé vektory mají stejnou úhlovou rychlost, nemění se při otáčení jejich vzájemná poloha, nemění se ani velikost výsledného vektoru (znázorněná v libovolném čase úhlopříčkou téhož rovnoběžníka), který se otáčí se stejnou úhlovou rychlostí jako složky. Výsledné napětí je proto opět sinusové

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Z obr. 2 určíme pro velikost vektoru $\underline{U}_m$

$$U_m^2 = U_{m_1}^2 + U_{m_2}^2 + 2 U_{m_1} U_{m_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

pro počáteční fázi φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{m_1} \sin \varphi_1 + U_{m_2} \sin \varphi_2}{U_{m_1} \cos \varphi_1 + U_{m_2} \cos \varphi_2}.$$

Zpravidla nás nezajímají okamžité ani vrcholové hodnoty, ale hodnoty efektivní U a I a fázové posuvy. Pracujeme proto s časovými vektory, jejichž velikost je určena efektivními hodnotami

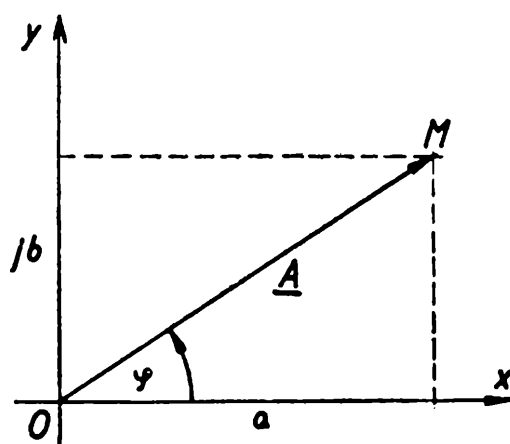
$$U = U_m \sqrt{2}, \quad I = I_m \sqrt{2}.$$

Symbolický počet zavádí pro točivé a časové vektory matematické *symboly* a pomocí těchto symbolů řeší obvody střídavých proudů.

Obrázek 3 představuje Gaussovu rovinu komplexních čísel. Každý bod roviny M je určen komplexním číslem $a + jb$, kde $j = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka; naopak každému komplexnímu číslu odpovídá určitý bod Gaussovy roviny.

Koncový bod vektoru $\mathbf{A}$ je jednoznačně určen komplexním číslem $a + jb$; poněvadž všechny vektory mají počáteční bod v bodě O , je každý vektor určen komplexním číslem $a + jb$. Pokládáme proto komplexní číslo $a + jb$ za matematický symbol vektoru $\mathbf{A}$ a píšeme

$$\mathbf{A} = a + jb.$$



Obr. 3

Symbolický počet používá pravidel platných pro počítání s komplexními čísly.

Velikost vektoru $\mathbf{A}$, kterou značíme A , je zároveň absolutní hodnotou příslušného komplexního čísla

$$A = |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pro úhel φ , který svírá vektor $\mathbf{A}$ s kladně orientovanou reálnou osou, platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$. Úhel φ je argumentem komplexního čísla $a + bj$.

Každý symbol má složku reálnou a složku imaginární. Reálné složky můžeme algebraicky sčítat na reálné ose x , imaginární složky na imaginární ose y .

Jsou-li dány dva vektory

$$\mathbf{A}_1 = a_1 + jb_1, \quad \mathbf{A}_2 = a_2 + jb_2,$$

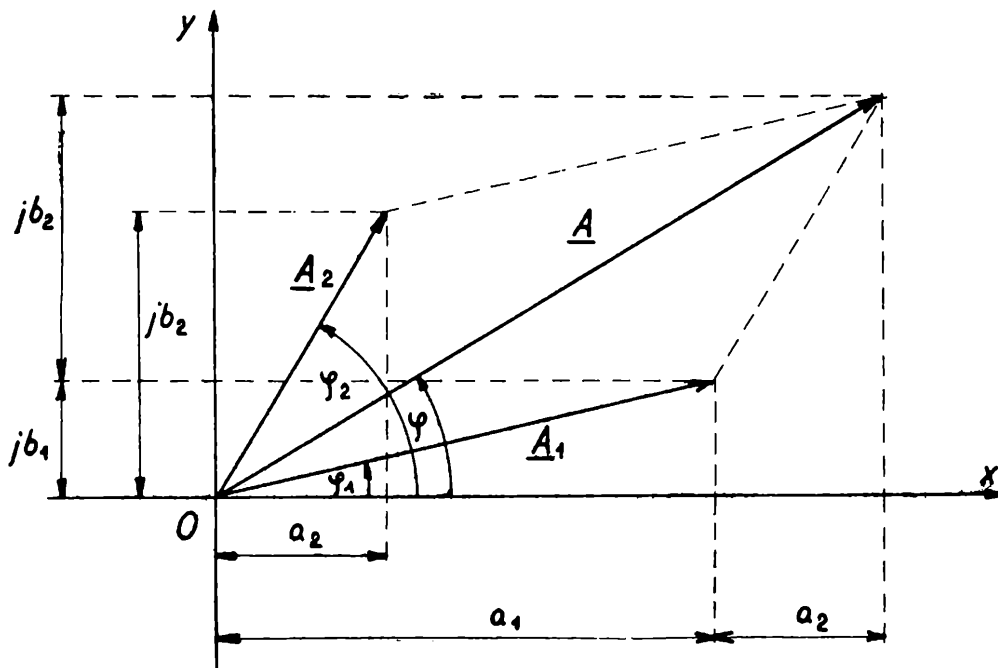
pak pro jejich součet platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

Podle obr. 4 je

$$A = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}.$$

Násobíme-li vektor $\mathbf{A} = a + jb$ imaginární jednotkou j , dostáváme $j\mathbf{A} = ja - b$; je to vektor $\mathbf{A}$ otočený o úhel $+\frac{\pi}{2}$. Násobíme-li vektor $\mathbf{A} = a + jb$ zápornou imaginární jednotkou $-j$, dostáváme $-j\mathbf{A} =$



Obr. 4

$= -ja + b$; je to vektor $\mathbf{A}$ otočený o $-\frac{\pi}{2}$. Dělíme-li vektor $\mathbf{A} = a + jb$ imaginární jednotkou j , dostáváme $\frac{\mathbf{A}}{j} = \frac{a}{j} + b = -ja + b$; je to opět vektor $\mathbf{A}$ otočený o úhel $-\frac{\pi}{2}$.

1. Jednoduché obvody střídavého proudu

Jednoduché obvody střídavého proudu jsou obvody, v nichž se vyskytuje jen odpor R , nebo jen indukční odpor $L\omega$ (induktance) nebo jen kapacitní odpor $\frac{1}{C\omega}$ (kapacitance).

Tyto obvody jsou uvedeny v učebnici fyziky pro 3. roč. SVVŠ. Výsledky zopakujeme a vyznačíme je graficky a symbolicky.

1.1. Je-li v obvodu střídavého proudu jen odpor R , je střídavé napětí s proudem ve stejné fázi a Ohmův zákon platí pro hodnoty okamžité, vrcholové i efektivní

$$u = Ri, \quad U_m = RI_m, \quad U = RI$$

(Pokračování)

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

сдвиг
сегмент
сэгментная поверхность
секанс
сектор круговой, шаровой
секунда
секущая
семейство
середина
сеть
сечение
сжатие
символ
симметрично, симметричный
симметрия
симметрия осевая, центральная
синус
система, десятичная система
ния
скаляр
складывать
скобки
скобки квадратные, круглые, фигур-
ные
скрещивающиеся прямые
слагаемое
слагать
след
следовательно
следовать
следствие
сложение
сложное отношение
сложное число
слой, т.

posunutí
úseč kruhová, kulová
vrchlík
sekans
výseč kruhová, kulová
vteřina
sečna
soustava, soubor, množina, systém
střed
sít
řez
zkrácení (na př. afinní)
symbol
souměrně, souměrný
souměrnost, symetrie
souměrnost osová, středová
sinus
soustava, desítková soustava

skalár
sčítat
závorky
závorky lomené, okrouhlé, složené

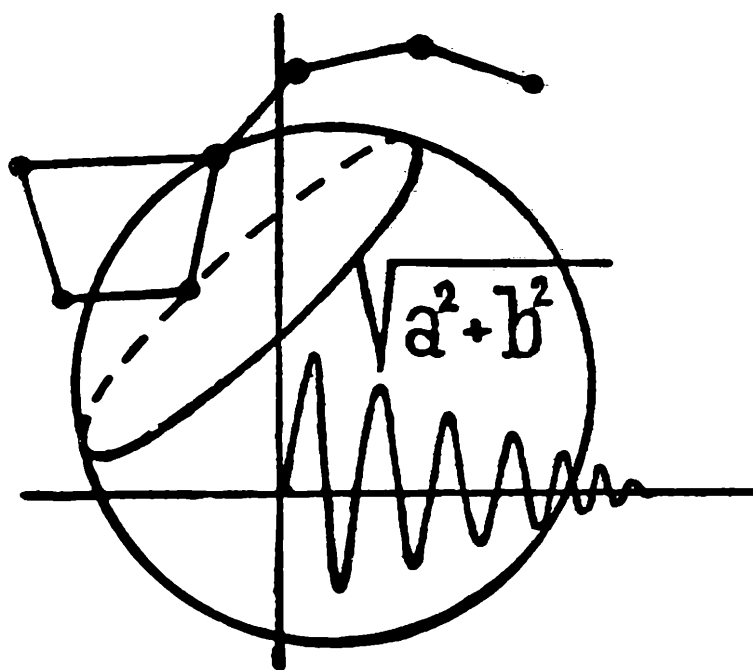
mimoběžky
sčítanec
sčítat
stopa, stopník
tedy, tudíž
následovat, plynout
důsledek
sčítání
úměra
číslo složené
vrstva

случай	případ, náhoda
смежный	přiléhající, sousedící, sousední
смещение	posunutí, pohyb
собственный	vlastní (v konečnu)
совместить	sloučit, splynout, ztotožnit
совместная система	řešitelná soustava
совокупность	souhrn
совпадать, совпасть	splývat
содержаться	být obsažen
соединение	spojení, sjednocení
сокращать	krátit
сомножитель	součinitel
соответственно	respektive, po řadě
соответствие	souhlas, odpovídání si (dvou prvků)
соответствовать	odpovídat si
соответствующий	příslušný
соотношение	poměr
сопоставление	porovnání
сопоставить, сопоставлять	srovnávat, porovnávat
соприкасаться	dotýkat se
соприкасающаяся окружность	oskulační kružnice
сопряженный	sdružený
составлять	sestavovat, tvořit, skládat
состоять	skládat se, být
сотая; шесть сотых	stá, setina; šest setin
сотый	stý
сочетание	kombinace
сохранять	uchovávat, podržet (vlastnost)
спираль, ž.	spirála
сравнение	kongruence
среднее арифметическое, геометри- ческое	aritmetický, geometrický průměr
средний	střední
старший член	člen mnohočlenu obsahující nejvyšší mocninu
степень	stupeň, mocnina
стереометрия	stereometrie
столбец, столбик	sloupec
сторона	strana
стремиться	blížit se, konvergovat
строка	řádek
субнормаль, ž.	subnormála
сумма	součet
существенный	podstatný
существование	existence
существовать	existovat
сфера	kulová plocha
сходимость	konvergence
сходство	shoda, analogie
счисление	počítání, počet

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



3

ROČ. 43

1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Listopad 1964

Číslo 3

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

CSc. B. Haňková, F. Hrnčíř: Fribonacciova čísla a jejich vlastnosti	97
Inž. dr. J. Langr, J. Šedivý: Zajímavosti z geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka (Dokončení)	99
Prof. dr. V. Santholzer: Nukleární spád po zákazu jaderných výbuchů v ovzduší	103
Inž. dr. V. Šindelář: Tvrdost a její měření (Dokončení)	107
Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů	114
K. Hofman, dr. M. Chytilová: Vektorové znázornění střídavých proudů a symbolický počet (Dokončení)	123
J. Tesař: Zákon zachování hybnosti (Dokončení)	130
M. Koman: Řešení úlohy o zvoncích	137
O. S.: Zajímavé číslo	139
O. S.: Doplnovačka	140
J. Kotyk: Z říše Inků	141
Recenze	143
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. strana obálky

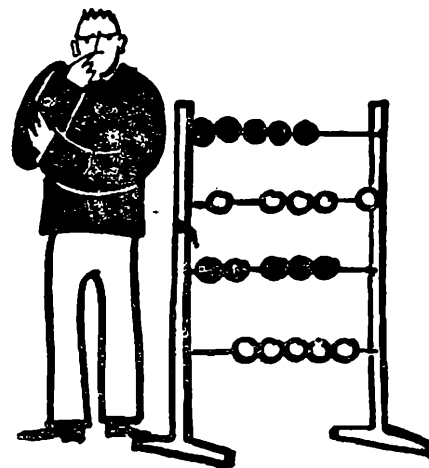


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jin. dříšská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

A-04*41498

Matematika

Bohuslava Haňková CSc., ČVUT,
František Hrnčíř, studující ČVUT, Praha:



Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti

Starověká historie je bohatá na vynikající matematiky. Mnohé výsledky starověké matematiky do dneška vyvolávají nadšení nad důvtipem jejich autorů a jména Euklida, Archiméda a Herona jsou známa každému vzdělanému člověku. Naproti tomu ve středověku se matematika vyvíjela velmi pomalu a vynikajících matematiků bylo v té době málo. Tím větší význam pro nás má dílo *Liberaacci*, napsané r. 1202 výborným italským matematikem *Leonardem z Pisy*, který je více znám pod přezdívkou *Fibonacci* (čti Fibonači). Je to zkrácené *filius Bonacci*, tj. syn Bonacciův. Kniha *Liberaacci* obsahuje téměř všechny aritmetické a algebraické poznatky tehdejší doby a měla velký význam pro rozvoj matematiky v západní Evropě během několika příštích století. Pozoruhodné je, že právě prostřednictvím této knihy se Evropané seznámili s arabskými číslicemi. Byla to také jedna z prvních knih v Evropě, která užívala desetinné číselné soustavy.

Látka, kterou obsahuje *Liberaacci*, je v knize objasněna na velkém počtu úloh. Jednou z nich je „úloha o králících“, z níž vyrostla celá teorie Fibonacciových čísel, která — ač stará již přes 700 let — zůstává až do dneška jednou z nejzajímavějších partií elementární matematiky.

„Úloha o králících“ je formulována takto: Každý dospělý pár králíků má každý měsíc zase jeden pár mladých králíků. Nově narození králíci dospějí během dvou měsíců a zase každý pár má jeden pár mladých králíků. Začneme-li jedním párem, máme:

- | | |
|----------|--|
| 1. měsíc | jeden pár; |
| 2. měsíc | ještě jen jeden pár (než králíci dospějí); |
| 3. měsíc | 2 páry (jeden pár starých a jeden pár mladých); |
| 4. měsíc | 3 páry (mladé králíky má jen pár, s nímž jsme začínali, druhý pár jsou králíci ještě nedospělí); |
| 5. měsíc | 5 párů (ke třem párům z minulého měsíce přibudou mladí králíci od původního páru a páru, narozeného ve třetím měsíci); |

6. měsíc 8 párů (z pěti párů mají potomky tři páry) atd.

Všimněme si posloupnosti čísel a_n , udávajících počet párů králíků v jednotlivých měsících:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \quad (1)$$

V této posloupnosti se každý člen rovná součtu dvou předcházejících členů, tedy pro každé $n > 2$ je

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \quad (2)$$

Takové posloupnosti, kde každý člen je určen jako nějaká funkce členů předcházejících, se v matematice často vyskytují a nazývají se *rekurentní posloupnosti*¹⁾.

Ještě je třeba poznamenat, že podmínka (2) nestačí k úplnému určení naší posloupnosti. Můžeme sestavit libovolný počet různých číselných posloupností, které vyhovují této podmínce, např.

$$\begin{array}{l} 2, 5, 7, 12, 19, 31, \\ 1, 3, 4, 7, 11, 18, \quad . \\ -1, -5, -6, -11, -17, \quad \text{atd.} \end{array}$$

Abychom mohli určit libovolný člen posloupnosti (1), musíme kromě podmínky (2) znát ještě první dva členy této posloupnosti. Potom pomocí rovnice (2) můžeme postupně vypočítat člen s libovolným, předem určeným indexem. Určíme-li tedy $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, bude podle (2)

$$\begin{aligned} a_3 = a_2 + a_1 = 2, \quad a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3, \quad a_5 = a_4 + a_3 = 5, \\ a_6 = 8, \quad a_7 = 13, \end{aligned}$$

což je naše uvažovaná posloupnost Fibonacciových čísel.

Posloupnost Fibonacciových čísel není známa jen matematikům, nýbrž i botanikům. Bylo zjištěno, že listy na větvičkách jsou rozloženy po šroubovici. Přitom úhel, o který je další list na větvičce posunut, je zcela typický pro každou rostlinu. Tento úhel se obvykle vyjadřuje ve tvaru zlomku, který udává, jakou část kružnice daný úhel tvoří. Tak např. u lípy je to $\frac{1}{2}$, u buku $\frac{1}{3}$, u dubu $\frac{2}{5}$, u topolu $\frac{3}{8}$, u jívy $\frac{5}{13}$ atd. Nejčastější úhly tohoto rozložení, a to nejen listů, ale i větví a květů, jsou (v částech kružnice) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{21}$. Vidíme, že v čitatelích i jmenovatelích jsou Fibonacciova čísla.

Fibonacciova čísla mají mnoho zajímavých vlastností. Uvedeme si některé z nich.

(Pokračování)

¹⁾ Také např. známá geometrická posloupnost s obecným členem $a_n = a_1 q^{n-1}$ je dána rekurentně vztahem $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

Zajímavosti z geometrie trojúhelníka a čtyřúhelníka

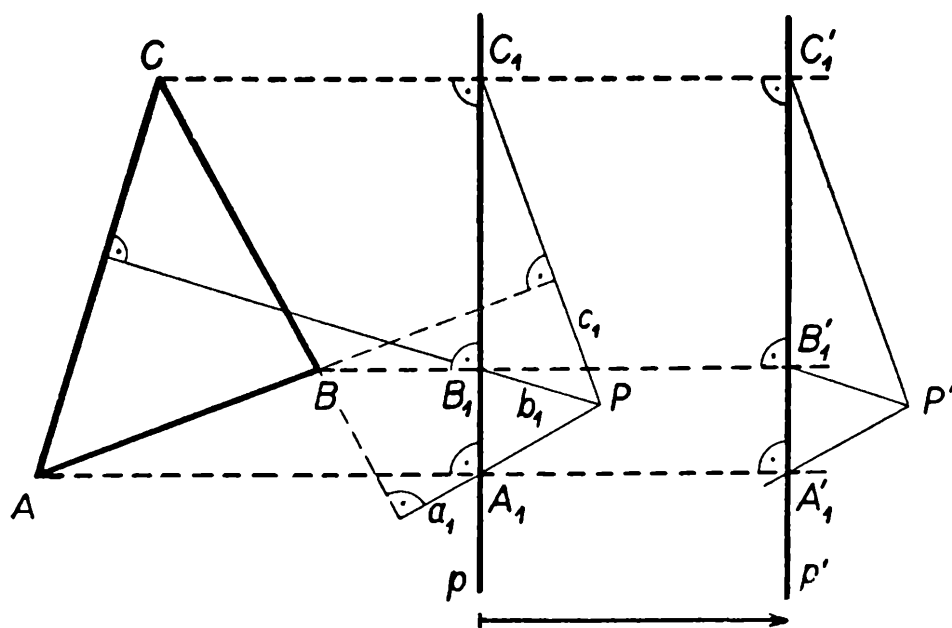
(Dokončení)

Další zajímavostí, o které chtěl dr. Langr napsat čtenářům Rozhledů je pojem *ortopólu přímky vzhledem k trojúhelníku*. Známe *ortocentrum trojúhelníka* neboli *průsečík výšek*. Pojem *ortopólu* je jistým zobecněním pojmu *ortocentra*, jak dále uvidíme.

Podějme konstruktivní definici *ortopólu přímky p vzhledem k trojúhelníku ABC* :

Nechť je dán trojúhelník ABC a přímka p ležící v jeho rovině (obr. 5).

Ortopólem přímky p vzhledem k trojúhelníku ABC nazveme bod P sestrojený takto:



Obr. 5

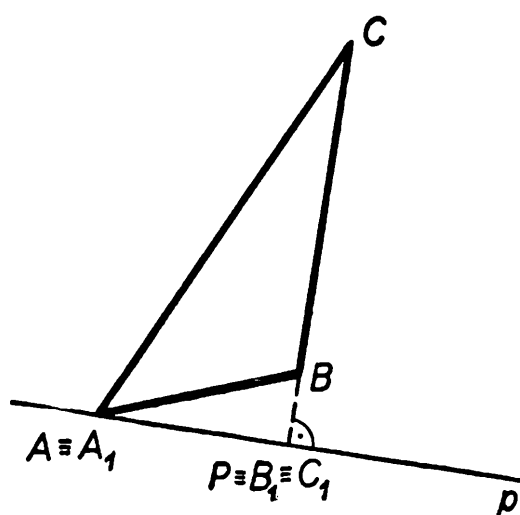
1. Sestrojíme paty kolmic z bodů A, B, C k přímce p - body A_1, B_1, C_1 .
2. Sestrojíme přímky a_1, b_1, c_1 procházející po řadě body A_1, B_1, C_1 a kolmé k BC, CA, AB .
3. Společný bod přímek a_1, b_1, c_1 označíme jako P .

Jako u každé konstruktivní definice musíme i zde dokázat existenci bodu P , protože je spíše překvapující než zřejmé, že se přímky a_1, b_1, c_1 protnou v jediném bodě. V případě, kdy je $p \equiv AB, BC$ nebo CA , pře-

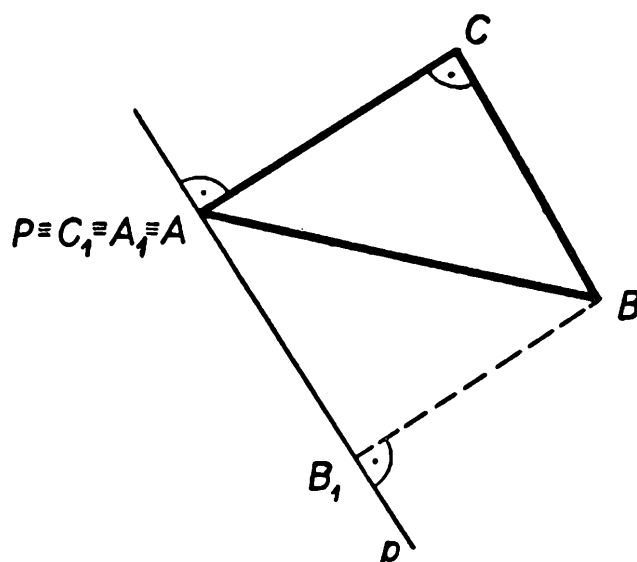
svědčíme se konstrukcí snadno, že ortopólem těchto přímek je průsečík výšek trojúhelníka.

Z obr. 5 je také zřejmé, že z existence ortopólu přímky p plyne existence ortopólu přímky $p' \parallel p$. Všechny body a přímky použité při konstrukci ortopólu P' přímky p' získáme posunutím příslušných bodů a přímek z konstrukce bodu P ve směru kolmém k p . Zatím tedy máme dokázanu existenci ortopólu každé přímky rovnoběžné s některou stranou trojúhelníka.

Vidíme, že postačí dokázat existenci ortopólu jediné přímky každého směru. V každém směru různoběžném se stranami trojúhelníka lze nalézt aspoň jednu přímku, která prochází vrcholem ostrého úhlu a nemá kromě vrcholu s trojúhelníkem žádný jiný společný bod (styčná přímka trojúhelníka). V dalších úvahách se proto omezíme na styčné přímky trojúhelníka, které procházejí vrcholem A jeho ostrého úhlu.



Obr. 6a



Obr. 6b

Je-li styčná přímka p kolmá k BC , pak bude $B_1 \equiv C_1$, $A_1 \equiv A$. Konstrukcí ortopólu získáme bod $P \equiv B_1 \equiv C_1$ (obr. 6a). Stejně dokážeme existenci bodu P v případě, kdy $p \perp AC$ (obr. 6b) nebo $p \perp AB$.

Zbývá tedy provést důkaz v případě, kdy styčná přímka p prochází vrcholem ostrého úhlu a není kolmá k žádné straně trojúhelníka, ani rovnoběžná s některou stranou. Pak jsou každé dva z pěti bodů A, B, C, B_1, C_1 navzájem různé a přímka p protíná přímku BC v bodě O různém od B_1, C_1 (obr. 7 a 8). Rozhodující je ještě poloha průsečíku výšek V trojúhelníka.

Nechť je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B (obr. 7). Pak je $V \equiv B$ a $\triangle B_1OB \sim \triangle C_1OC$, odtud

$$\frac{OB}{OC} = \frac{BB_1}{CC_1} \quad (1)$$

Je $AB \perp CV$, $BO \perp VR$, $OA \perp RC$, proto je také $\triangle ABO \sim \triangle CVR$ a platí

$$\frac{OA}{OB} = \frac{RC}{RV} = \frac{CC_1}{VP''}. \quad (2)$$

Obdobně můžeme zdůvodnit, že je $\triangle ACO \sim \triangle B_1P'B$ a platí

$$\frac{OA}{OC} = \frac{BB_1}{BP'} = \frac{BB_1}{VP'}. \quad (3)$$

Jednoduchým výpočtem ze vztahů (1), (2), (3) lze dokázat, že je $VP' = VP''$. Protože všechny sestrojené body leží v polorovině BCA , leží body P' , P'' na polopřímce VA a je proto $P \equiv P''$. Existence ortopólu libovolné přímky roviny vzhledem k pravoúhlému trojúhelníku je tedy dokázána.

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý nebo tupohlý (obr. 8), je $V \neq B, C$ a přímka BB_1 protíná přímku a_1 v bodě $Q \neq B$. Ostatní úmluvy o označení bodů zůstanou v platnosti. Stejnými úvahami jako v případě pravoúhlého trojúhelníka dokážeme platnost vztahů (1) a (2). Místo vztahu (3) však odvodíme vztah (3') z podobnosti trojúhelníků ACO , BQV .²⁾ Je $AC \perp BV$, $CO \perp VQ$, $OA \perp QB$, proto je $\triangle ACO \sim \triangle BVQ$ a platí

$$\frac{OA}{OC} = \frac{QB}{QV} = \frac{BB_1}{VP'}. \quad (3')$$

Zcela stejným výpočtem jako v případě pravoúhlého trojúhelníka dokážeme, že je $VP' = VP''$, a konečně i $P' \equiv P''$.

Teprve nyní máme dokázáno, že každé přímce v rovině trojúhelníka ABC lze přiřadit právě jeden bod roviny jako její ortopól vzhledem k trojúhelníku ABC . Toto přiřazení je vlastně zobrazením v rovině, při kterém zobrazujeme množinu přímek do množiny bodů. Již tím je toto zobrazení zvláštní, má však celou řadu jiných pozoruhodných vlastností. Tak např. přiřazuje jeden bod až třem různým přímkám, jak je patrné na průsečíku výšek, který je ortopólem všech tří stran trojúhelníka. Určete sami ortopóly výšek trojúhelníka! Jakou vlastnost mají ortopóly všech přímek jednoho směru? Jaký útvar je množinou ortopólů všech přímek procházejících jedním vrcholem trojúhelníka?

Pomocí pojmu ortopólu lze odvozovat řadu dalších vlastností trojúhelníků a čtyřúhelníků. Příležitostně se s nimi seznámíme.

²⁾ Trojúhelník BQV v případě pravoúhlého trojúhelníka neexistoval.



Nukleární spad po zákazu jaderných výbuchů v ovzduší

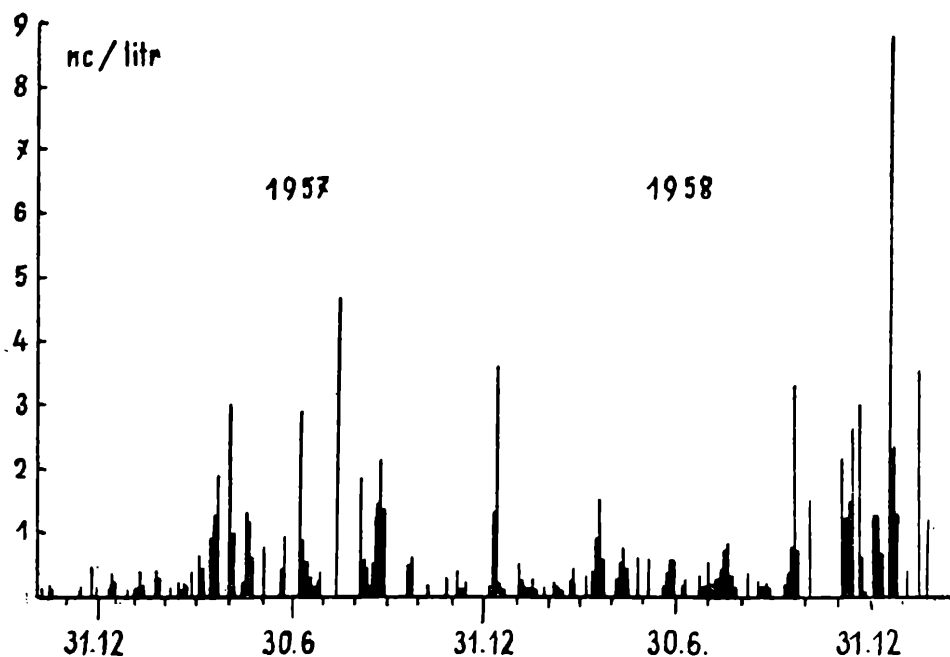
Moskevská smlouva ze dne 5. srpna 1963 o částečném zákazu zkoušek jaderných zbraní je velkým štěstím pro lidstvo. Vzduch není již zamořován čerstvým radioaktivním spadem, tj. štěpnými produkty z pokusných nukleárních výbuchů. V současné době se vyskytuje poměrně malé množství starého spadu, pocházejícího z pokusných výbuchů vodíkových pum prováděných v r. 1961-1962. Tyto megatunové výbuchy (energeticky rovnocenné megatunám, tj. miliónům tun třaskaviny trinitrotoluenu) vymrštily radioaktivní částice až do stratosféry, odkud nyní zvolna padají na zemský povrch. V období megatunových výbuchů dopadalo na 1 km² skoro 100 milicurie (tisícin jednotky radioaktivity curie) za měsíc. V současné době dopadá jen několik milicurie (mc) na 1 km² za měsíc. Další soustavná pozorování rozřeší otázku, na jak dlouho je tento *stratosférický rezervoár* zásoben radioaktivním prachem. Je možno se domnívat, že během letošního roku množství spadu poklesne na pouhé desetiny mc/km²/měsíc, množství již velmi nepatrné, které se bude postupně dále snižovat.

Zákaz jaderných zkoušek ve třech sférách, v ovzduší, pod vodou a v kosmickém prostoru neznamena sám o sobě již odzbrojení, jak upozornil s. Chruščov. Zůstaly ještě zkoušky pod zemí, které slouží dalšímu zdokonalování jaderných zbraní. Podzemní zkoušky mohou někdy způsobit značnou domácí kontaminaci (zamoření radioaktivitou) nejbližšího okolí, jak se v USA již několikrát stalo. Podzemní výbuchy však nezamořují ovzduší nad celou zeměkouli, nejsou škodlivé pro celé lidstvo. Přesto např. indická delegace podala koncem roku 1963 v OSN návrh, aby moskevská dohoda byla doplněna i zákazem výbuchů ve čtvrté sféře, tj. pod zemí. Tím by byla odstraněna možnost zkoušek nových typů nukleárních zbraní a padla by jedna z vážných překážek, které brání dohodě o všeobecném a úplném odzbrojení.

Na připojených obrázcích bych chtěl ukázat, jak blahodárná pro lidstvo byla moskevská dohoda z 5. srpna 1963. Zákazem pokusů v ovzduší odstranila již dnes většinu štěpných trosek, které po nukleárních zkouškách znečišťovaly naše životní prostředí. Radioaktivní prach pronikal i do potravin, zatím sice v nepatrném množství, avšak další výbuchy

mohly by toto množství postupně zvětšit na škodlivé množství, jak upozorňovali četní odborníci i na Západě.

Pozorování a měření umělé radioaktivity vzduchu i atmosférických srážek (deště a sněhu) provádíme na katedře fyziky lékařské fakulty v Hradci Králové již od roku 1956. O výsledcích svých měření jsme podávali zprávy také Radiační komisi OSN, prostřednictvím ministerstva zahraničních věcí ČSSR. Snažili jsme se přispět k důkazu, že radioaktivní spad se šíří po celé zeměkouli, a proto je nutno pokusné výbuchy zakázat.



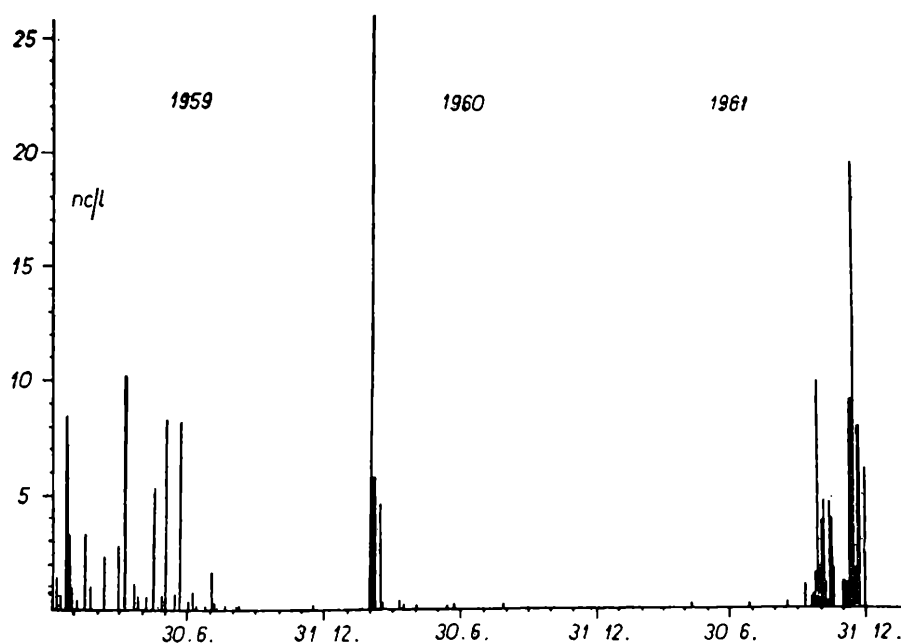
Obr. 1. Jednotlivé úsečky jsou úměrné radioaktivitě atmosférických srážek (deště a sněhu) od konce roku 1956 do začátku roku 1959. Radioaktivita byla způsobena štěpnými produkty, tj. radioizotopy vznikajícími při štěpení uranových a plutoniových náloží atomových a vodíkových pum.

Začněme *histogramem*, tj. časovým přehledem radioaktivity srážek na obr. 1. Aktivita srážek je uvedena v jednotkách *nanocurie*, tj. 10^{-9} curie pro 1 litr, nc/l. Na obr. 1 jsou všechny srážky od konce roku 1956 do začátku roku 1959. Jejich aktivita (= radioaktivita) kolísala podle toho, jak byly pokusné výbuchy prováděny. K nám se tenkrát šířila hlavně aktivita z pokusných výbuchů v Nevadě, odkud k nám dospěla za 7 až 14 dnů, podle povětrnostních poměrů.

Obr. 2 je pokračováním obrázku 1, avšak měřítko aktivit bylo nutno přibližně třikrát zmenšit, aby se tehdejší velké aktivity srážek vůbec do obrázku vešly. Zásluhou Sovětského svazu byly již dnem 1. listopadu 1958 dohodou velmocí nukleární zkoušky dočasně zastaveny, takže začátkem roku 1959, jak je na obr. 2 zřejmé, aktivita srážek se rychle

zmenšovala a koncem roku 1959 vymizela prakticky úplně. Tam, kde na obr. 2 nejsou svislé čáry, aktivita dešťů byla tak nepatrná, že ji nebylo možno do obr. zakreslit. Byla menší než desetiny použité jednotky.

Francie však nepřistoupila k dohodě velmocí. Roku 1960 začala provádět pokusné výbuchy na Sahaře. První pokusný výbuch provedený v únoru 1960 značně zamořil troposféru (vrstvu vzduchu do výšky 11 km). U nás se začátkem března 1960 vyskytla radioaktivita dešťové vody do té doby nevídaná, 25 nc/l. Nad naším územím přelétl v té době *radioaktivní oblak* a mírně přelétlo, takže dešťové kapky měly možnost nasbírat do sebe značné množství aktivity při svém průletu radioaktivním oblakem. Kdyby déšť byl vydatný, byla by radioaktivita velkým množstvím vody rozředěna.

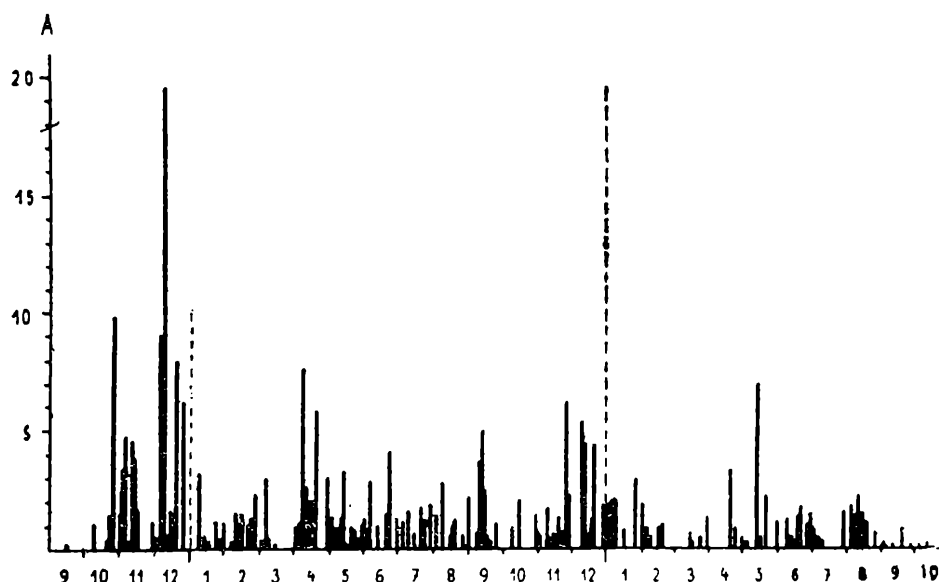


Obr. 2. Radioaktivita atmosférických srážek v letech 1959 až 1961. Obr. 2 je pokračováním obrázku 1, avšak měřítko aktivit je přibližně třikrát menší, aby bylo možno uvést vysokou radioaktivitu po francouzském výbuchu na Sahaře, která k nám dospěla kolem 1. března 1960. A rovněž značné radioaktivity koncem roku 1961, po zahájení pokusných výbuchů megatunových ráží, tj. vodíkových pum ekvivalentních milionům tun trinitrotoluenu.

Z obr. 2 je patrné, jak aktivita v březnu a dubnu 1960 rychle vymizela, neboť saharský výbuch „neprorazil“ tropopauzu, rozhraní mezi troposférou a stratosférou. Štěpné trosky z tohoto výbuchu (ráže asi 80 kilotun TNT, trinitrotoluenu) nedostaly se do stratosféry, odkud by jemný radioaktivní prach ještě alespoň několik měsíců klesal dolů. Ve stratosféře je poměrně klidný vzduch a nejsou tam deště, takže jemný prach může tam setrvávat měsíce a snad i léta.

Obr. 3 je pokračováním obrázku 2 se stejnou škálou aktivit, ale na první pohled s velkým množstvím radioaktivních srážek. Obr. 3 je proti

obr. 2 nahuštěný a proti obr. 1 má v průměru asi 4krát vyšší aktivity. Obr. 3 vystihuje období megatunových zkoušek, které prováděly USA i SSSR. Sovětská vláda ve svém prohlášení koncem roku 1961 uvedla, že je nucena v zájmu své obrany a také obrany celého tábora socialismu



Obr. 3. Radioaktivita srážek v období megatunových pokusných výbuchů, od podzimu 1961 do října 1963. Moskevská dohoda ze dne 5. srpna 1963 se projevila snížením radioaktivity srážek na velmi nepatrné hodnoty.

1 cm

Obr. 4. Stopy silně radioaktivních částic, které se vyskytují v ovzduší také u nás po nukleárních zkouškách. Byly způsobeny zářením štěpných trosek na fotografické desce.

a míru obnovit své pokusné výbuchy, neboť USA i Anglie provedly mnohem větší množství zkoušek a připravovaly další, které uskutečnily v roce 1962. Sovětský svaz provedl své pokusy jen z donucení a sovětsí odborníci se postarali o to, aby radioaktivní odpad byl při nich pokud možno malý. Jak je patrné z obr. 2 vpravo a vlevo na obr. 3, koncem roku 1961 začala aktivita srážek rychle stoupat, avšak nedosáhla u nás té hodnoty jako po výbuchu na Sahaře v roce 1960. Protože megatunové výbuchy prorazily tropopauzu, tj. štěpné trosky dostaly se až do stratosféry, aktivita srážek se udržovala ještě po celý rok 1962.

V létě 1962 byly provedeny další megatunové výbuchy, takže byla vytvořena nová stratosférická zásobárna i pro rok 1963, kdy již další výbuchy prováděny nebyly. Moskevská dohoda z 5. srpna 1963 pak výbuchy v ovzduší zakázala.

Na obr. 4 jsou stopy tzv. *h o r k ý c h č á s t i c*, tj. silně aktivních částecek radioaktivního prachu, jaké se vždycky vyskytují těsně po provedených nukleárních zkouškách. Obrázek byl získán metodou *H a v l o v i c o v o u*. Dr. Havlovic vystavil na střechu fakulty lepkavou desku, na níž se zachytily prachové částice. Když se pak na desku přiloží v temné komoře rentgenový film, zabalený v celofánu, vznikne na něm zčernání v těch místech, kde se zachytily silně aktivní částice. Člověk vdechuje zhruba asi 15 m³ vzduchu za 24 h a s ním i radioaktivní prach. I když jeho množství bylo zatím nepatrné, nesporně by stoupalo s pokračujícími výbuchy. Moskevská dohoda znamená tedy i po této stránce ozdravení našeho životního prostředí.

Inž. Dr. V á c l a v Š i n d e l á ř, P r a h a:

Tvrdost a její měření

(Dokončení)

Tvrdost plechů se obvykle zkouší jen při navrstvení několika vzorků na sebe.

Kuličky bývají zpravidla z chromové oceli, podobně jako kuličky u kuličkových ložisek. Při větších tvrdostech se používá také kuliček z tvrdých spékaných kovů, např. karbidu wolframu. Pro lepší viditelnost vtisku u velmi tvrdých materiálů používá se někdy vnikacích ocelových kuliček naleptaných kyselinou dusičnou.

Ze statistického průzkumu bylo zjištěno, že tvrdost podle Brinella souvisí s pevností v tahu vyšetřovaného materiálu. Byly též určeny převodní koeficienty mezi tvrdostí *HB* a pevností v tahu σ_t . Tak např. pro běžné uhlíkové (konstrukční) oceli činí hodnota tohoto součinitele asi 0,36.

Výpočet bychom provedli podle vzorce

$$\sigma_t = 0,36 \cdot HB \quad (2)$$

U jiných materiálů, i u zvláštních mechanických nebo tepelných zpracování, je nutno hodnotu tohoto součinitele stanovit empiricky. Tato závislost tvrdosti a pevnosti - i když ne vždy zcela přesně stanovitelná - má výhodu při orientačním určování pevnosti bez trhacích zkoušek.

Uvedená měření se provádějí jednak při provozním měření na menších dílcích, nebo při etalonovém měření s destičkami. Na velkých dílcích se měří tvrdost přenosnými tvrdoměry, které mívají u Brinellovy metody komparační charakter.

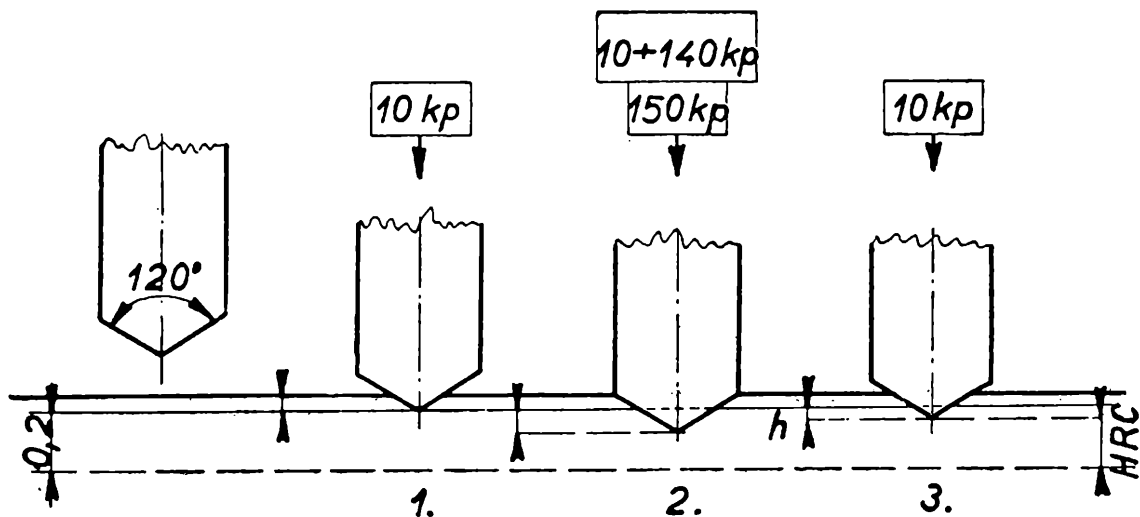
Tabulka II.

Rockwel- lova stupnice	Vnikací těleso	Zatížení			Vzorec pro tvrdost $HR^1)$
		před- běžné kp	mě- řicí kp	cel- kové kp	
<i>HRA</i>	diamant. kužel 120°	10	50	60	$100 - h/2$
<i>HRB</i>	ocel. kulička $\varnothing 1,5875$ mm	10	90	100	$130 - h/2$
<i>HRC</i>	diamant. kužel 120°	10	140	150	$100 - h/2$
<i>HRD</i>	diamant. kužel 120°	10	90	100	$100 - h/2$
<i>HRE</i>	kulička $\varnothing 3,175$	10	90	100	$130 - h/2$
<i>HRF</i>	kulička $\varnothing 1,5875$	10	50	60	$130 - h/2$
<i>HRG</i>	kulička $\varnothing 1,5875$	10	140	150	$130 - h/2$
<i>HRH</i>	kulička $\varnothing 3,175$	10	50	60	$130 - h/2$

b) Druhou význačnou tvrdoměrnou metodou je *metoda Rockwellova*, která umožňuje měření i u tvrdších materiálů, u nichž nelze již Brinellovy metody dobře použít, blíží-li se (nebo dosahuje-li) tvrdost vyšetřovaného materiálu tvrdosti vnikací kuličky. V takových případech by se totiž kulička při měření podstata něji sama deformovala, nebo by se dokonce porušila. U Rockwellovy metody se používá pro celý rozsah měření buď diamantového kužele o vrcholném úhlu 120° (s nepatrně zaobleným hrotem, poloměr $r = 2 \cdot 10^{-4}$ m, rozměry jsou dány normou), nebo pro menší tvrdosti ocelové kuličky o průměru $D = 1/16'' \doteq 1,5875$ mm. Tato dvě vnikací tělesa jsou nejběžnější. V určitých případech se používá také kuličky o průměru $D = 1/8'' \doteq 3,175$ mm (viz též tabulku II). Tvrdost podle Rockwella se značí obecně *HR*. Ke značce se připojuje další písmenová značka vystihující použité vnikací těleso a zatěžující sílu. Různé druhy tvrdosti podle Rockwella jsou uvedeny na tab. II. Nejběžnější je tvrdost *HRA*, *HRB* (B od ball = kulička) a *HRC* (C od cone = kužel).

¹⁾ h (v mikrometrech, μm) je hloubka trvalého vtisku po odlehčení na 10 kp.

Měření se provádí na speciálně vybavených přístrojích, na Rockwellových tvrdoměrech. Postup měření si vysvětlíme např. u diamantového kužele (obr. 3). Kužel nejprve vtlačíme svisle do horizontálního zkoušeného povrchu silou 10 kp, kterou nazýváme předběžným zatížením (operace č. 1). Děje se tak před vlastním měřením proto, aby se zaručil co možná nejdokonalejší styk hrotu s povrchem a aby se odstranily chyby případnou nerovností povrchu. Hloubkoměr přístroje po zatížení silou 10 kp nastavíme na nulu a necháme působit vlastní zkušební zařízení (u metody *HRC* je to 140 kp (operace č. 2). Celkové působící zatížení při měření je zřejmě rovno součtu zatížení předběžného a měřicího. Když se ukazatel hloubkoměru ustálí, odlehčí se kužel opět na 10 kp a na hloubkoměru čteme hloubku h (v mikrometrech, μm) trvalého vtisku (operace č. 3). Vzorce, podle kterých vypočteme ze čtené hodnoty h určenou tvrdost, jsou uvedeny podle příslušné stupnice v posledním sloupci tabulky II.



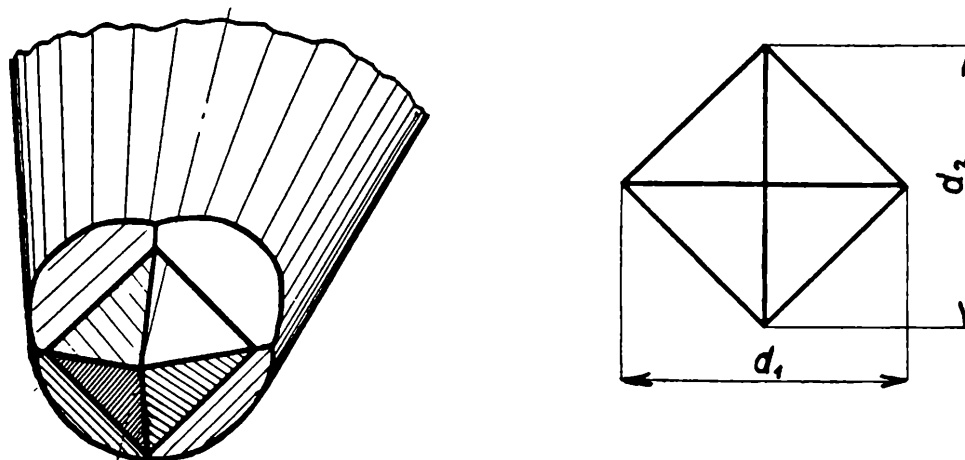
Obr. 3. Průběh zatěžování u Rockwellovy tvrdoměrné metody (*HRC*).
Jednotlivé operace:

1. Předběžné zatížení. 2. Měřicí zatížení. 3. Stav po měření při odlehčení na původní předběžné zatížení.

Rockwellova metoda je jednoduchá, má ovšem také své nevýhody. Jednou z nich je např. ta, že nepozorujeme běžně mikroskopem samotný vtisk, takže můžeme měřit poškozeným diamantovým kuželem, aniž o tom víme. Proto se musíme o stavu vnikacího hrotu občas přesvědčit kontrolním vtiskem na srovnávacích etalonových destičkách, u nichž známe nominální hodnoty tvrdosti. Jinou nevýhodou je, že při vyšších tvrdostech jsou vtisky mělké a jejich měření málo přesné.

c) Třetí nejčastěji používanou metodou je *metoda Vickersova*, které se může použít pro velmi široký rozsah tvrdosti. Tato metoda se vedle Rockwellovy metody nejvíce uplatňuje v technické praxi. U této metody

se silou O vtlačuje svisle do zkoumaného povrchu materiálu čtyřboký diamantový jehlan s vrcholovým úhlem 136° (protilehlých ploch, obr. 4a). Přitlačná síla v běžném rozsahu makrotvrdosti je větší než 5 kp. Většinou se používá zatížení 10, 30 a 60 kp. Po každém vtisku proměříme



Obr. 4. Vnikací těleso (jehlan) pro měření tvrdosti podle Vickerse.
a) Pohled na měřicí konec vnikacího tělesa. b) Měřené parametry u vtisku.

jeho obě uhlopříčky (d_1 a d_2) buď mikroskopem, nebo z obrazu vytvořeného na projektoru. Z obou takto určených hodnot bereme zpravidla aritmetický průměr d

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} . \quad (3)$$

Tvrdost podle Vickerse, kterou značíme HV, vypočteme podle vzorce

$$HV = \frac{F}{S} = \frac{2 F \cdot \cos 22^\circ}{d^2} = \frac{1,8544 F}{d^2} \quad (4)$$

kde F je měřící síla. Podobně jako tomu bylo u tvrdosti Brinellovy, udává se i Vickersova tvrdost podílem působící síly F a velikosti plochy S vytvořeného otisku, která v tomto případě je plochou pláště čtyřbokého jehlanku. Počítáme-li ji z uhlopříčky d podstavy, je zřejmě rovna

$$S = \frac{d^2}{2 \cos 22^\circ} \quad (5)$$

Aby byly naměřené hodnoty spolehlivé, musí vlastní měřící zatížení trvat určitou dobu. Vickersova metoda se hodí téměř pro všechny kovy. Je použitelná i u velmi malých, velmi tvrdých a tenkých vzorků nebo kusů. Lze jí spolehlivě měřit i tvrdost nitrídaných povrchů, u nichž nitrídaná vrstva činí pouze 0,1 mm, případně i méně.

d) Vnikacích metod je ještě celá řada. Vždyť všech tvrdoměrných metod je dnes známo více než 100. Zmínil jsem se jen o třech hlavních, nejběžněji používaných. I tyto metody jsem nastínil jen informačně. Vždyť

jen samotným tvrdoměrným přístrojům mohli bychom věnovat řadu dalších odstavců. Na závěr vnikacích metod pro informaci uvádím některé vnikací metody, kterých se používá pro dřevo, plastické látky a pryž. Jsou přehledně sestaveny v tabulce III. Blíže o nich pojednávat nebudeme.

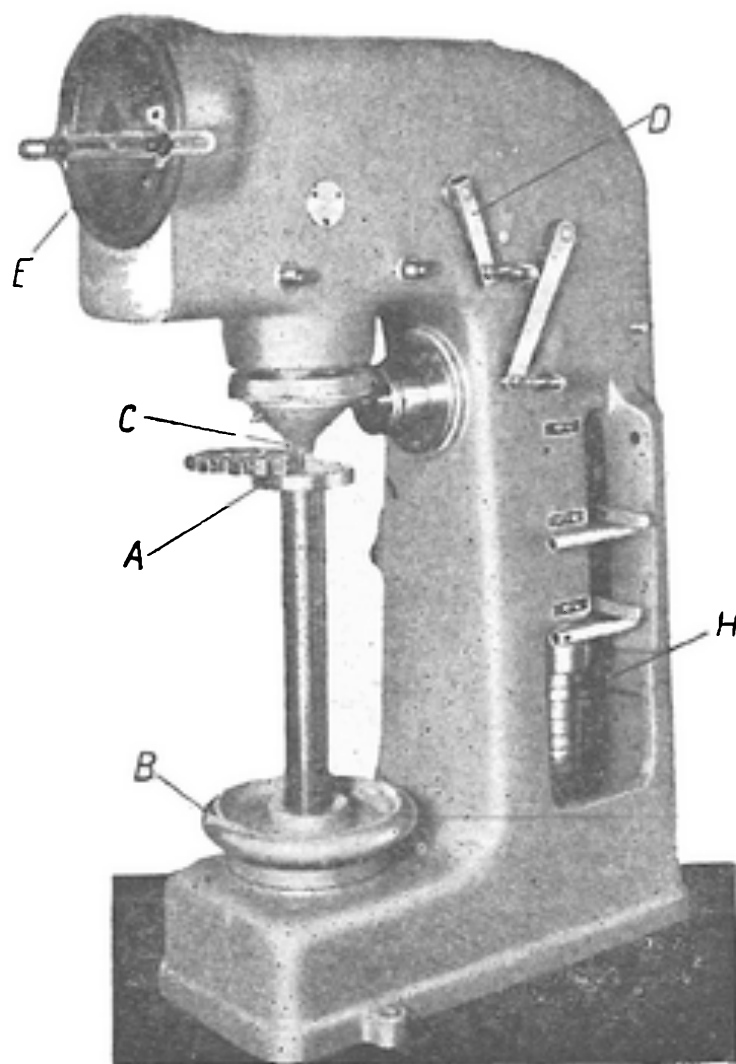
Tabulka III.

Druh tvrdosti	Vhodná pro materiál	Vnikací těleso	Hlavní parametr: D průměr kuličky F zatížení t zatěžovací doba	Co určuje tvrdost
Tvrdost podle Janky	dřevo	kulička	$D = 11,284 \text{ mm}$	zatížení F , při němž kulička vnikne do vzorku až po svůj největší průřez
Tvrdost dřeva podle Brinella	dřevo	kulička	$D = 10 \text{ mm}$ $F = 50 \text{ kp}$ (pro měkká dřeva $F = 10 \text{ kp}$, pro tvrdá $F = 100 \text{ kp}$)	síla a plocha vtisku (viz tvrdost podle Brinella)
Kuličková tvrdost	plastické látky	kulička	$D = 5 \text{ mm}$ $F = 50 \text{ kp}$ $t = (10 \text{ nebo } 60) \text{ s}$	hloubka vtisku (výpočet podle vzorce obdobného vztahu pro tvrdost podle Brinella)
Tvrdost pryže	pryž	kulička	$D = 10 \text{ mm}$ $F = 1 \text{ kp}$ $t = 10 \text{ s}$	hloubka vtisku (v jednotkách 10^{-2} mm) kuličky na vzorku tloušťky 6 mm aj.

U těch metod, jež byly popsány pro tzv. obor m a k r o t v r d o s t i, určujeme tvrdost z relativně větších vtisků, než jsou v novější době u tzv. m i k r o t v r d o m ě r n ý c h m e t o d. U nich jsou ovšem malá zkušební zatížení, aby i vtisky byly malé a umožňovaly tak měření tvrdosti i jednotlivých krystalů v kovové mikrostruktuře. Mikrotvrdost je sice svojí metodikou obdobná dříve popsaným metodám, je tu ovšem zapotřebí uvažovat celou řadu jiných podstatných okolností. Blíže zde o ní hovořit nebudeme. Je jen třeba dodat, že hodnoty získané mikro-

tvrdoměrnou metodou se značně liší od hodnot podle metod makrotvrdoměrných, i když se použije podobných vnikacích těles.

Než přejdeme k dalšímu krátkému odstavci o metodách vrypových, chtěl bych se zmínit o jednom zajímavém případě z války, který má s měřením tvrdosti úzkou souvislost. Při zkouškách nových typů vrtulových letadel v USA za války došlo u nových typů vrtulí, vysoce namáhaných velkými otáčkami, několikrát po sobě k roztržení vrtulí a k havárii.



Obr. 5. Tvrdoměr pro měření tvrdosti podle Vickerse (konstrukce Poldi, SONP Kladno).

A. Měřicí stolek. B. Ruční kolo s maticí pro zvedání šroubu se stolkem A. C. Držák s diamantovým jehlánkem (vnikacím hřotem). D. Zatěžovací a odlehčovací páka. E. Matnice projekčního zařízení. H. Zatěžovací závaží.

Při zkoumání nebylo zprvu možno najít příčinu, protože vrtule byly ze spolehlivého materiálu a povrch vrtulí byl tak upraven, aby na něm nebylo vrypů nebo stop po opracování, a to proto, že při namáhání součásti, na jejímž povrchu je nějaký vrub (ryska apod.), nastává v okolí této povrchové vady koncentrace mechanického napětí a součást se v tomto místě snáze poruší. Po dlouhém pátrání u vrtulí přišlo se konečně

na příčinu. Byla rovněž v porušeném povrchu, a to v malém kontrolním tvrdoměrném vtisku, kterým se po dokončení výroby vrtulí přejímací orgán přesvědčoval, zda byly dodrženy předepsané parametry výrobních vrtulí.

Metody vrypové

Zde se zmíním především o metodě *Martensově*, již se používá pro zvláště tvrdé kovy (slinuté karbidy), sklo, porcelán a jiné tvrdé a křehké látky. Také se užívá pro měření u galvanických povlaků a tenkých vrstev. Měření se provádí diamantovým hrotem s vrcholovým úhlem 90° , který se přitlačuje měnitelnou silou na leštěný povrch zkoušeného předmětu. Přitom se zkoušený kus pohybuje určitou rychlostí. Mírou tvrdosti je zatížení (v pondích) potřebné k tomu, aby se způsobil vryp široký 0,01 mm.

Jinou metodou, spíše informativního charakteru, je známa *metoda Mohsova*. Tvrdost podle Mohse se určuje porovnáváním s nerosty, tzv. Mohsovy stupnice. Tvoří ji

1 mastek	6 živec
2 kamenná sůl	7 křemen
3 vápenec	8 topas
4 kazivec	9 korund
5 apatit	10 diamant.

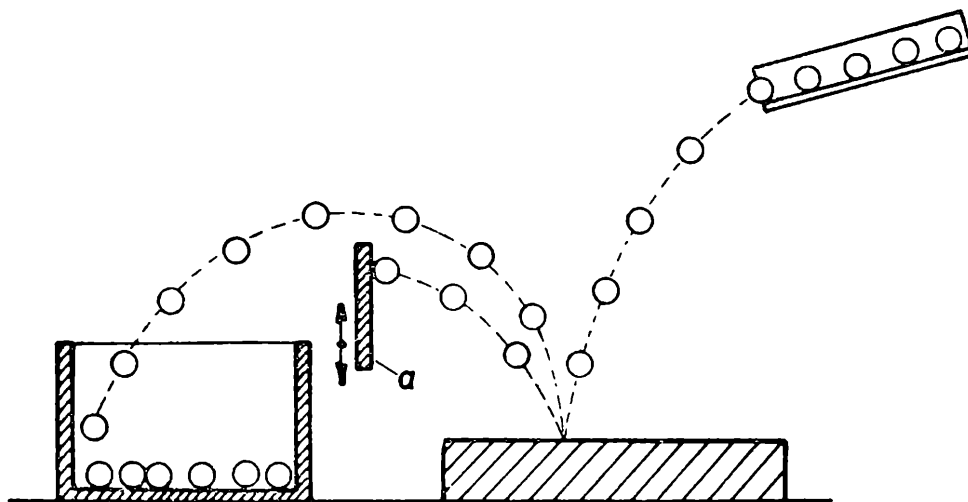
Látky, které máme zkoušet a nerosty stupnice musí mít ostré hrany nebo hroty. Zkoumanou látkou se rýpají postupně nerosty. Nezpůsobuje-li zkoušená látka vrypy na některém z nerostů stupnice, a nelze-li ji naopak tímto nerostem poškrábat, pak s ním má stejnou tvrdost. Rýpá-li zkoušená látka některý nerost Mohsovy stupnice, a lze-li ji rýpat nerostem nejbližše vyššího stupně tvrdosti, potom její tvrdost leží mezi oběma stupni.

Protože záleží při měření na jakosti hran a rychlosti rýpání, je toto měření dosti nespolehlivé. Výhodou ovšem je, že je tato metoda snadno realizovatelná omezenými prostředky. Pro technickou praxi se ovšem nehodí.

Metody odrazové

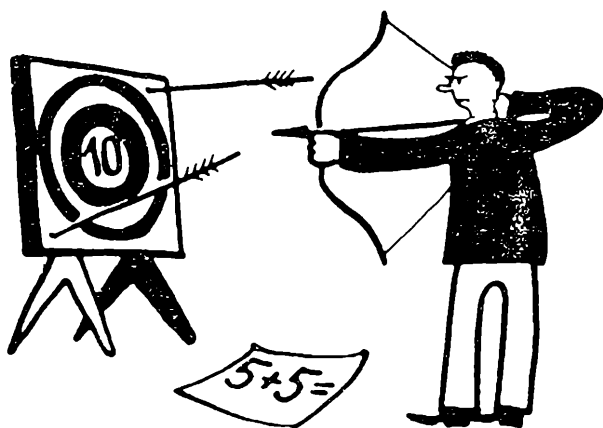
Poslední skupina metod, o které si promluvíme, řeší měření tvrdosti určováním odrazu nějakého vhodného tělíska, které dopadlo na zkoumaný povrch z určité výšky. Tyto metody bývají také nazývány *sklepickými*. Uvedené metody, kterých se pro značnou nespolehlivost používá v technické praxi jen velmi omezeně, je možno používat pouze u materiálů, které mají zhruba stejný model pružnosti, chceme-li porovnávat tvrdosti podle změřených hodnot.

U metody Shorovy (čti šórovy) dopadá kladívko o hmotnosti 36,5 gramu z výšky 19 mm. Mírou tvrdosti je poměr výšky zpětného odrazu k výchozí měrné výšce (násobený stem, v procentech).



Obr. 6. Principiální schéma měření tvrdosti kuliček odrazovou metodou.

V jednom případě našla odrazová metoda velmi dobré uplatnění, a to jako provozní zkouška tvrdosti kuliček pro kuličková ložiska. Na obr. 5 je schematické uspořádání této metody měření odrazovou metodou. Podle výšky mezistěny (a) řídí se tvrdost těch kuliček, které ji po odrazu přeskochí - a mají tedy předepsanou tvrdost.



Soutěž Rozhledů

Řešení úloh loňské soutěže

(Pokračování)

Uveřejňujeme abecední seznam našich čtenářů, kteří se úspěšně zúčastnili soutěže R o z h l e d ů v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, uveřejněných v 42. ročníku tohoto časopisu. Za jménem každého řešitele jsou uvedena čísla správně vyřešených příkladů z příslušného oboru, v závorce čísla úloh, řešených s menšími nedostatky. Nesprávná řešení neuvádíme vůbec.

Emil Běták, SVVŠ, Ostrava 1 – F 1–3 (4–6); Jiří Ciprys, SVVŠ, Břeclav F 5 (4); Jaroslav Dittrich, SVVŠ, Praha 5 – M 3, 9, 12 (1, 7, 8), F 1, 2, 4, 5 (6); Jana Dejemarová, SPŠS, Most – M 2, 9 (1, 4–6, 8, 11), F 2, 3, 5 (1); Marta Doležalová, SVVŠ, Brno, – M 2, 9 (5, 12); Jaroslav Gotthard, SVVŠ, Karlovy Vary M 9; Jiří Handlíř, SPŠE, Brno M 1, 4, 8, 9, 12 (3, 5–7, 10, 11), G 2–4 (1), F 1–3, 5, 6 (4); Pavol Hell, SPŠH, Košice – M 2–6, 8, 9 (1, 7, 10–12), F 1, 5 (4); Karel Henc, SVVŠ, Brno – M 1, 2, 7, 8 (4, 5, 9), F 1, 2, 5, 6, (4); Stanislav Hojek, SVVŠ, Třeboň M 8, 9; Petr Hornák, SVVŠ, Hranice – F 1, 3 (4); Felix Koschin, SVVŠ, Praha 1 – M 1–4, 7, 8 (5, 9–12); Petr Kůrka, ZDŠ, Zbraslav – M (1, 4, 8, 9); Jitka Kůrková, SVVŠ, Praha-Hlubočepy – M 2–4, 7–9 (1, 5, 12), F 2, 5 (4, 6); Petr Ludvík, SVVŠ, Praha 2 – F 1 (2); František Mohyla, SPŠE, Frenštát p. R. – M 9 (1); Jiří Pechouš, SVVŠ, Písek F 3, 5, 6 (1, 2, 4); Štefan Porubský, SPŠ, Zvolen M 4, 8 (5, 9, 12); Jaroslav Příhoda, SVVŠ, Čakovice – M 1–7, 9, 10 12 (8, 11), G 1–4, F 1–3, 5, 6 (4); Pavel Rödling, SVVŠ, Chomutov M 1–3, 7 (4, 5, 8–10, 12); Zdeněk Slanina, SPŠCh, Brno – M 1, 3, 7–9 (2, 4, 5, 12), G 3, 4 (2), F 1–3, 5, 6 (4); Miloš Šidlichovský, SVVŠ, Liberec M 1–4, 6, 8, 9 (5); Vlasta Šohajová, SVVŠ, Pacov – M 1, 7, 9 (2, 4–6, 8, 12), G (1, 3, 4), F 1, 2 (4–6); Richard Špišek, SVVŠ, Brno M 1–3, 7, 9 (4–6, 8, 11, 12), F 3, 5 (1, 2, 6); Milan Štědrý, SVVŠ, Ledec n. S – M 2–9, 12 (1, 10); Jan Švejda, SVVŠ, Praha 4 – M 1–4, 6–9, 12 (5, 11); Jana Vaněčková, SVVŠ, Kadaň – M (2); Karel Vazač, SVVŠ, Písek – M 1–3, 7–9, 12 (4–6, 10), G 3, 4 (1), F (1, 4); Jan Vobr, SVVŠ, Č. Budějovice – M 1–4, 7–9, (5, 6, 11); Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha-Nusle – M 1–4, 6–12 (5), G 1–4, F 1, 3, 5, 6 (2, 4). Mimo soutěž zaslal správné řešení p. Franz Denk, Fürth, Bavorsy, NSR, M 2.

* * *

Redakce uveřejňuje řešení prvních úloh m a t e m a t i c k ý c h loňské soutěže našeho časopisu. Řešení dalších úloh z matematiky a úloh z deskriptivní geometrie budou otištěna v dalších číslech, kde bude i vyhlášení vítězů s jejich fotografiemi.

Matematika:

1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB , je-li dán poloměr ρ vepsané kružnice a výška v vedená vrcholem A .

Stanislav Fučík

(Došlo 20 řešení)

Řešil Karel Henc, 2b SVVŠ, Brno:

Střed vepsané kružnice označíme O a střed základny AB označíme D . Vzdálenost bodu D od strany BC je rovna $\frac{1}{2}v$. Z toho dostáváme tuto konstrukci:

Zvolíme si libovolnou přímku a ; na ní bude ležet strana BC . Pak sestrojíme kružnici k poloměru ρ , která se přímkou BC dotýká. Rovnoběžka d s přímkou a vedená ve vzdálenosti $\frac{1}{2}v$ vytne na kružnici bod D . Další je již snadné.

D ů k a z. Nalezený trojúhelník má vepsanou kružnici k , která má skutečně poloměr ρ a výška jdoucí vrcholem A má délku v .

Přímka r protne kružnici k jen v případě, že $2\rho < v < 4\rho$. To jsou zároveň podmínky nutné i postačující k tomu, aby úloha měla řešení. Přím-

ka r profala kružnici k ve 2 různých bodech D, D' Poněvadž však oba tyto body vedou ke shodným trojúhelníkům, má za uvedených podmínek úloha jediné řešení.

Jiné geometrické řešení (a jediné toho druhu) přišlo od *Zd. Slaniny*. Ten spustil z bodu D kolmici m na stranu BC a středem O vedl rovnoběžku n se stranou BC . Průsečík přímk m, n je K . Dá se sestrojit trojúhelník ODK a z něho žádaný trojúhelník ABC .

Další řešení, které se opíralo o výpočet, zaslal *Jan Švejda*. Ten označil úhel $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \alpha$ a vypočítal $\cos \alpha = \frac{v - 2\rho}{2\rho}$ Z toho pak sestrojil žádaný trojúhelník.

2. Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Svatopluk Fučík

(Došlo 19 řešení)

Řešil p. Franz Denk, Fürth, Bavorsko NSR:

Rovnost nebo nerovnost se nemění, jestliže obě její strany dělíme 4^n . Obdržíme

$$\begin{aligned} & \text{nalevo } \frac{1}{n+1}, \text{ napravo } \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \quad n \cdot (n+1) (n+2) \dots (2n-1) 2n}{2^n \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad (n-1) \quad n \cdot 2^n \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad (n-1) n} = \\ &= \frac{(n+1) (n+2) \dots (2n-1) \cdot 2n}{2^n \cdot 2^n \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad (n-1) n} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad (n-1) n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad (2n-2) \cdot 2n}. \end{aligned}$$

Dále provádíme důkaz úplnou indukcí.

1. Zřejmě je nerovnost právná pro $n = 2$, neboť

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{8}, \text{ tj. } 0,3\overline{3} < 0,37$$

2. Předpokládejme, že nerovnost platí pro $n = N$, a pak stačí dokázat, že platí i pro $N + 1$

Budiž tedy

$$\text{a) } \frac{1}{N+1} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2N-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2N}$$

b) Platí nerovnost

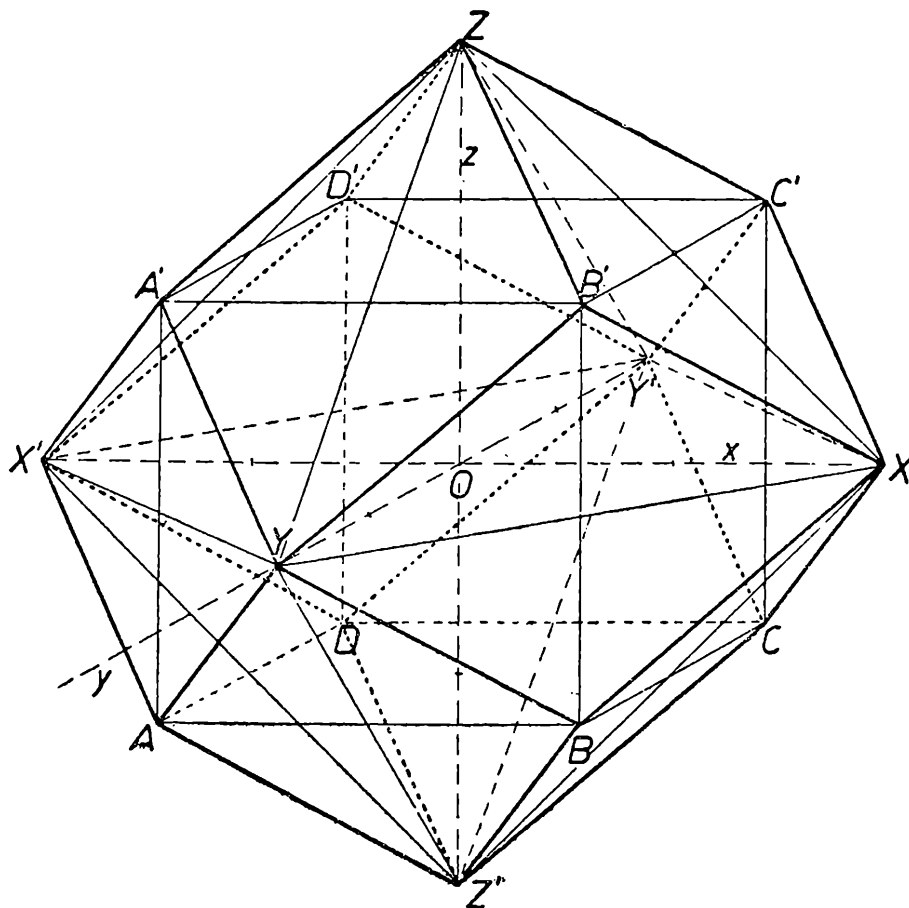
$$\frac{N+1}{N+2} < \frac{2N+1}{2N+2}$$

jak se můžeme přesvědčit jednoduchým vynásobením.

Vynásobením nerovností a), b) obdržíme

$$\frac{1}{N+2} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2N-1)(2N+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2N \cdot (2N+2)}$$

a tím je důkaz vysloveného tvrzení proveden.



Obr. 1

3. Vypočtete velikost poloměru kulové plochy, která se dotýká hran granátotvaru, tj. dvanáctistěnu kosočtverečného, je-li dána hrana granátotvaru o velikosti h .

Dokažte, že velikost vnitřního úhlu sousedních stěn granátotvaru se rovná 120° .

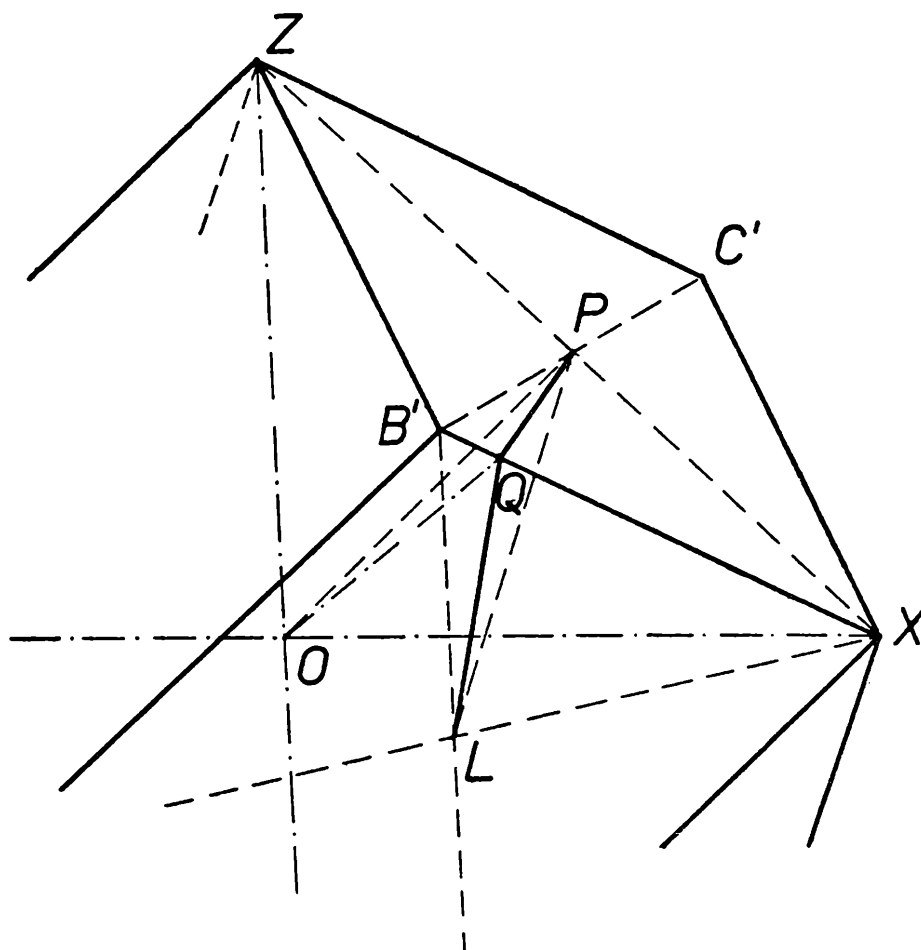
(Viz autorův článek *Některé geometrické vlastnosti granátotvaru*, Rozhledy m. – f., roč. 41, str. 255.)

Josef Holubář

(Došlo 15 řešení)

Řešení podle Miloše Šidlichovského (odst. A), žáka II. c tř., SVVŠ v Liberci a podle Jaroslava Zemánka, žáka tř. 3. d SVVŠ v Praze 4–Nusle (odst. B).

A. Protože granátotvar (velikost hrany je h) vznikne ze šesti shodných pravidelných čtyřbokých jchlanových ploch, sestrojených nad stěnami krychle $ABCD A' B' C' D'$ (obr. 1), leží střed kulové plochy κ , která se dotýká hran granátotvaru, ve středu O výchozí krychle, v níž je $AB = a$. Plocha κ protíná rovinu stěny, např. $B'XC'Z$ v kružnici $k(P, \varrho)$, která je vepsána kosočtverci $B'XC'Z$ (P je střed kosočtverce, Q je pata kolmice sestrojené bodem P na stranu $B'X$ a úsečka $PQ = \varrho$ je poloměr



Obr. 2

kružnice k) (obr. 2). V pravoúhlých trojúhelnících $\triangle B'PX \sim \triangle B'QP$ platí

$$\frac{PQ}{B'Q} = \frac{PX}{PB'} \quad \text{tj.} \quad \frac{2\varrho}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Odtud je

$$\varrho = a \frac{\sqrt{6}}{6}$$

V $\triangle OPQ$, kde $\sphericalangle OPQ = 90^\circ$, platí

$$OQ^2 = PQ^2 + OP^2,$$

kde $OQ = r$ je poloměr kulové plochy κ , čili

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{a}{2} \sqrt{2}\right)^2, \text{ tj. } r^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{2}, \quad r = \frac{2a}{\sqrt{6}}$$

Protože $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, je $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ a dostáváme

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} h = \frac{2}{3} h \sqrt{2}$$

B. Vypočteme velikost vnitřního úhlu α sousedních stěn granátotvaru, a to stěn $XB'ZC'$, $XB'YB$; úhel jiných dvou sousedních stěn je pak stejný.

Střed úsečky $B'B$ označme L . Platí:

$$\triangle B'PX \cong \triangle B'LX$$

Proto výšky těchto trojúhelníků kolmé ke straně $B'X$ mají společnou patu v bodě Q a hledaný úhel je $\sphericalangle PQL = \alpha$. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníka $\triangle B'PX$ dostaneme vztah

$$B'X \cdot PQ = PB' \cdot PX,$$

kde $B'X = h$, $PB' = \frac{a}{2}$, $PX = \frac{a}{2} \sqrt{2}$. Odtud vypočteme

$$PQ = \frac{PB' \cdot PX}{B'X} = \frac{a^2}{4h} \sqrt{2}$$

Dosazením $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ (viz odst. A) dostaneme

$$PQ = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

V rovnoramenném trojúhelníku $\triangle PLQ$ platí

$$\sphericalangle QPL = \sphericalangle QLP$$

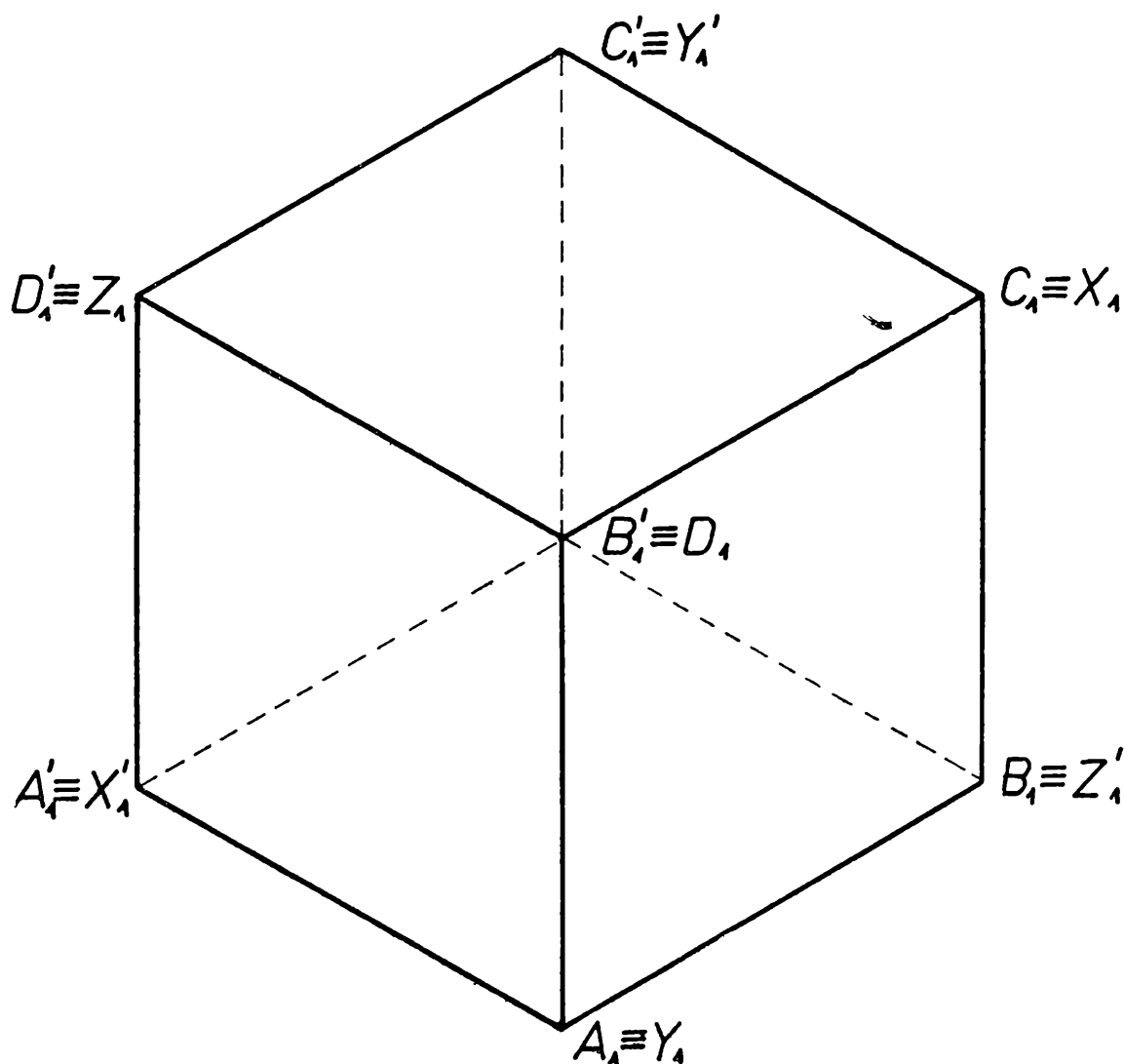
a tedy

$$\cos QPL = \frac{1}{2} PL : PQ = \frac{a}{4} \sqrt{2} : \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

Je proto $\sphericalangle QPL = \sphericalangle QLP = 30^\circ$, a tedy $\sphericalangle PQL = \alpha = 120^\circ$

C. P o z n á m k a. Vtipným způsobem určil velikost úhlu sousedních stěn granátotvaru žák M. Šidlichovský. Promítl granátotvar ve směru tělesové úhlopříčky krychle (např. úhlopříčky $B'D$) do roviny k přímce $B'D$ kolmé. Snadno se dokáže, že obrysem takového průmětu je pravidelný šestiúhelník (obr. 3). Protože hrany granátotvaru, které jsou rovnoběžné s přímkou $B'D$ se promítají jako body $A_1 \equiv Y_1$, $B_1 \equiv Z'_1$, $C_1 \equiv X_1$, $C'_1 \equiv Y'_1$, $D'_1 \equiv Z_1$, $A'_1 \equiv X'_1$, promítá se úhel každé dvojice sousedních stěn, které mají společnou jednu z těch hran, jako vnitřní úhel pravidelného šestiúhelníka, takže máme hned $\alpha = 120^\circ$.

Vztahů, které se objevují v tomto průmětu, bylo by možno použít i k určení velikosti poloměru r kulové plochy κ . Snadno se dokáže, že r se rovná, např. velikosti úhlopříčky $B'_1C'_1$ kosočtverce $B'_1X_1C'_1Z_1$.



Obr. 3

4. Stranami a, c ($c > a$) a úhlem α jsou za jisté podmínky určeny dva různé trojúhelníky ABC_1, ABC_2 . Je dáno c, α ; jak je nutné zvolit a , aby trojúhelníky ABC_1, ABC_2 měly obsahy v poměru $m : n$ ($m < n$).

Stanislav Horák

(Došlo 21 řešení)

Riešil Pavol Hell, KV. H₁ SPŠ hutnícka, Košice:

Označme P_1 a v_1 obsah a výšku trojúhelníka ABC_1 a P_2 a v_2 obsah a výšku trojúhelníka ABC_2 .

Má platit

$$P_1 : P_2 = m : n .$$

Keďže

$$P_1 = \frac{1}{2} c v_1 , \quad P_2 = \frac{1}{2} c v_2 ,$$

platí $P_1 \quad P_2 = v_1 : v_2 = m : n$.

Päť výšky v_1 označme D_1 a päť výšky v_2 označme D_2 . Z podobnosti trojuholníkov AD_1C_1 , AD_2C_2 (sú podobné, pretože sú rovnoľahlé) vyplýva

$$b_1 \quad b_2 = v_1 : v_2 = m : n,$$

alebo

$$b_1 : m = b_2 : n = k,$$

kde k je vhodné číslo. Odtiaľ

$$b_1 = km, \quad b_2 = kn. \quad (1)$$

Z trojuholníka ABC_1 podľa kosínovej vety plynie

$$a^2 = c^2 + b_1^2 - 2 b_1 c \cos \alpha.$$

Podobne z trojuholníka ABC_2 plynie

$$a^2 = c^2 + b_2^2 - 2 b_2 c \cos \alpha.$$

Po dosadení za b_1 a b_2 z rovníc (1) dostávame tieto dve rovnice

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + k^2 m^2 - 2 c k m \cos \alpha, \\ a^2 &= c^2 + k^2 n^2 - 2 c k n \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Z rovnosti ľavých strán plynie

$$c^2 + k^2 m^2 - 2 c k m \cos \alpha = c^2 + k^2 n^2 - 2 c k n \cos \alpha.$$

Odtiaľ po úprave

$$k = \frac{2c \cos \alpha}{m + n}.$$

Hodnotu a zistíme napríklad dosadením do prvej rovnice (2). Po úprave dostaneme

$$a = \frac{c}{m + n} \sqrt{(m - n)^2 + 4 m n \sin^2 \alpha}.$$

Výraz pod odmocnítkom je kladný a preto úloha je vždy možná.

O d p o v eď. Aby trojuholníky ABC_1 , ABC_2 mali obsahy v pomere $m : n$, musíme zvoliť

$$a = \frac{c}{m + n} \sqrt{(m - n)^2 + 4 m n \sin^2 \alpha}.$$

5. Jsou dány dvě kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0, \\ x^2 + rx + s &= 0. \end{aligned}$$

Kořeny první rovnice jsou $\sin \alpha$, $\sin \beta$, kde α , β jsou dva ostré úhly a kořeny druhé rovnice jsou kosiny těchto dvou úhlů. Ukažte, že koeficienty těchto dvou rovnic splňují rovnice:

- a) $p^2 + r^2 = 2(q + s + 1)$,
- b) $q^2 + r^2 = (s + 1)^2$,
- c) $s^2 + p^2 = (q + 1)^2$.

Stanislav Horák

(Došlo 20 řešení)

Řešili Jar. Příhoda, 2. a SVVŠ Čakovice a Mil. Štědrý, 2. b SVVŠ Ledeč n. Sázavou.

a) Víme, že platí

$$\sin \alpha + \sin \beta = -p, \quad \sin \alpha \sin \beta = q, \quad (1)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = -r, \quad \cos \alpha \cos \beta = s \quad (2)$$

První rovnici (1) a první rovnici (2) umocníme dvěma a sečtíme. Obdržíme tak první vztah.

b) Z druhé rovnice (1) plyne

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = q^2$$

Levou stranu této rovnice upravujeme postupně:

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) &= 1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \\ &= 1 - (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + s^2 + 2 \cos \alpha \cos \beta = \\ &= 1 - r^2 + s^2 + 2s \end{aligned}$$

Vztah b) je tak dokázán:

c) Při odvození vztahu posledního vyjdeme z rovnice

$$\cos \alpha \cos \beta = s$$

a postupujeme jako při b).

Rovnice nejsou nezávislé; sečtením vztahů b), c) obdržíme vztah a).

(Pokračování)

Upozornění. V prvním čísle letošního ročníku Rozhledů byla uvedena řešení příkladů z minulého ročníku, zasláná řešiteli. U příkladu č. 4, ve kterém byly počítány rychlostní parametry u balistického kyvadla, došlo při sazbě k záměně mezi zaslánými řešeními a bylo uveřejněno řešení nesprávné. Záměna byla způsobena tím, že ze všech řešení, která byla zaslána, bylo toto jediné, v němž použil řešitel 1. impulsové věty. Ostatní úvahy byly v řešení ovšem nesprávné. Bylo toto řešení tedy relativně nejlepší, nemělo být však otištěno v plném znění, nýbrž v kombinaci s řešením autorovým, což se však bohužel nestalo. Žádáme všechny čtenáře, aby původně uveřejněné znění řešení nahradili řešením autorovým, které dále otiskujeme.

Výška, do které kyvadlo po rázu vystoupí, je h . Rychlost c_2 kyvadla ihned po rázu, jehož trvání můžeme předpokládat bez omezení se blížíci nule, tedy teoreticky ještě v počáteční rovnovážné poloze kyvadla, určíme ze vztahu

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) c_2^2 = (m_1 + m_2) gh,$$

z čehož dostáváme známý výraz

$$c_2 = \sqrt{2gh},$$

kde $h = l - \sqrt{l^2 - s^2}$.

Pro ráz (který se při uváznutí střely v kyvadla jeví jako ráz dokonale nepružný) musí platit 1. impulsová věta

$$m_1 c_1 = (m_1 + m_2) c_2 ,$$

z čehož

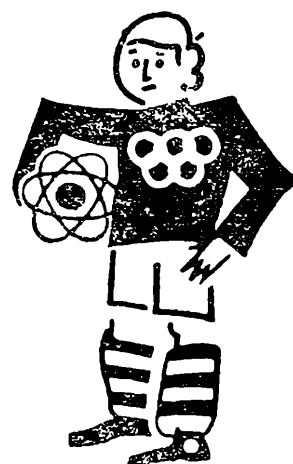
$$c_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} c_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2g(l - \sqrt{l^2 - s^2})} .$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme:

$$h = 0,553 \text{ m} , c_1 \doteq 3,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} , c_2 \doteq 103 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Fyzikální olympiáda

Konrád Hofman, České Budějovice
a dr. Marta Chytilová, Praha:



Vektorové znázornění střídavých proudů a symbolický počet

(Dokončení)

Téma k prostudování pro první kolo šestého ročníku FO v kategorii A.
Graficky tento případ znázorňuje obr. 5a; symbolicky píšeme

$$U = RI$$

Poněvadž $\varphi = 0$, je výkon $P = UI$.

1.2. Je-li v obvodu zapojena jen *cívka* o indukčnosti L se zanedbatelným odporem R vzhledem k indukanci, je fázové posunutí napětí vzhledem k proudu $+\frac{\pi}{2}$; platí tedy

$$i = I_m \sin \omega t , \quad u = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Výkon $P = UI \cos \frac{\pi}{2} = 0$; cívkou prochází jalový proud.

Grafické znázornění je na obr. 5b. Vektor proudu I nanášíme na reálnou osu, vektor napětí U na kladně orientovanou imaginární osu. Symbolicky píšeme

$$U_L = jL\omega I$$

1.3. Je-li v obvodu zapojen jen *kondenzátor* s kapacitou C , je fázové posunutí napětí vzhledem k proudu $-\frac{\pi}{2}$; platí tedy

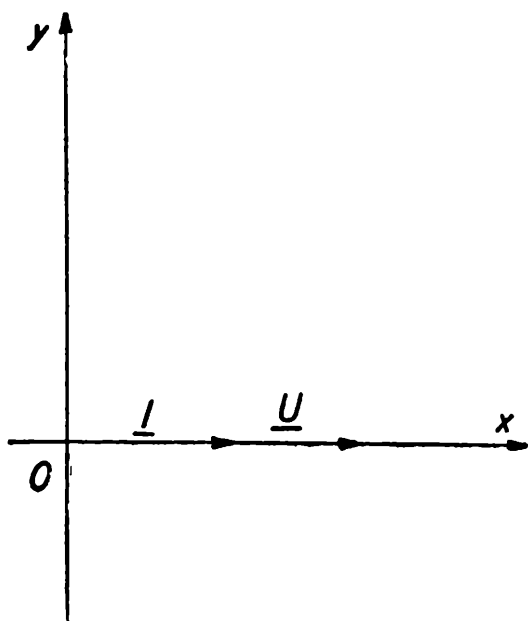
$$i = I_m \sin \omega t, \quad u = U_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Výkon $P = UI \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$; kondenzátorem prochází jalový proud.

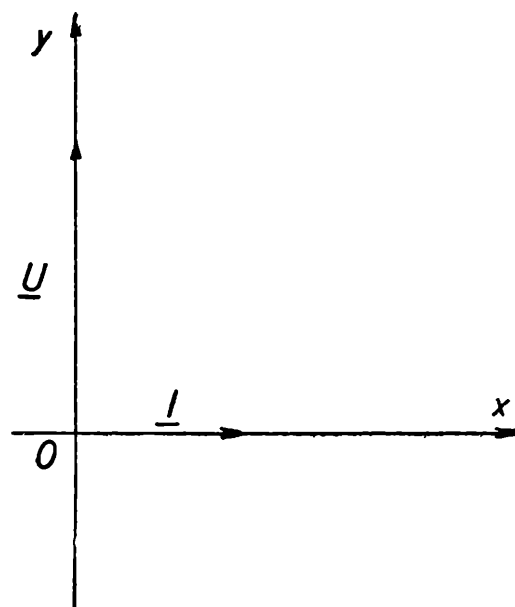
Grafické znázornění je na obr. 5c. Vektor I nanášíme na reálnou osu, vektor napětí U na náporně orientovanou imaginární osu.

Symbolicky píšeme

$$U_C = \frac{I}{jC}.$$



Obr. 5a



Obr. 5b

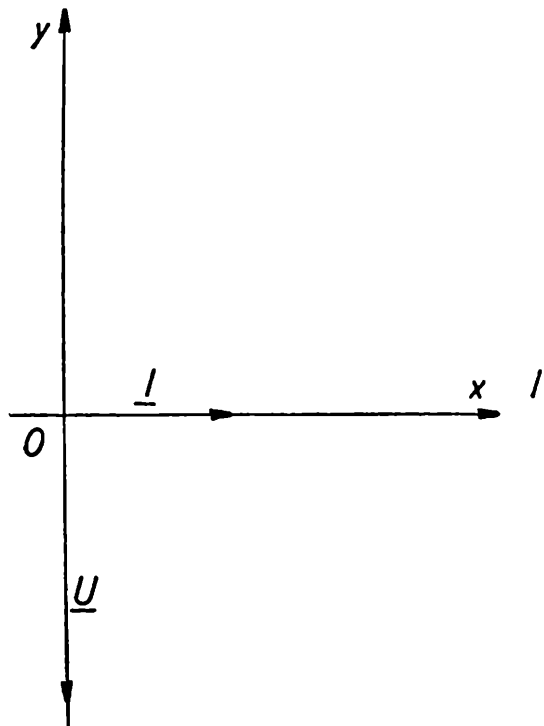
2. Obvody se sériově spojenými členy

2.1. Na obr. 6a je znázorněn obvod, v němž na střídavé napětí U je zapojen odpor R s cívkou o indukčnosti L v sérii. Celým obvodem prochází stejný proud $i = I_m \sin \omega t$, napětí na obou členech jsou však fázově posunuta.

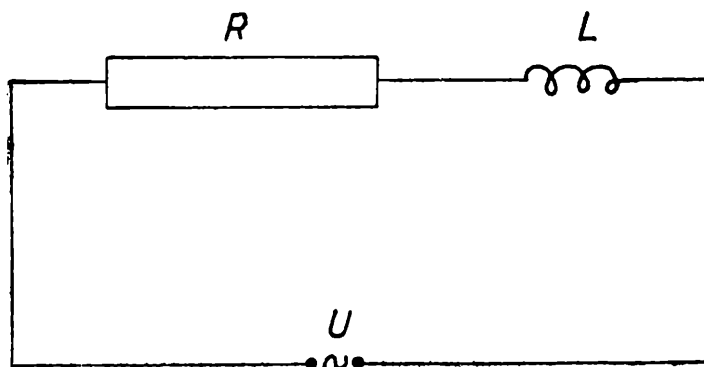
Ve vektorovém diagramu (obr. 6b) nanese vektor proudu I na reálnou osu; napětí U_R na odporu R je ve stejné fázi s proudem a proto jeho vektor U_R nanese také na reálnou osu, $U_R = IR$. Napětí na svorkách cívky o indukčnosti L (a zanedbatelném odporu vzhledem k odporu R) je fázově posunuto o $+\frac{\pi}{2}$ vzhledem k proudu, a proto vektor

napětí $\underline{U}_L$ nanese na kladně orientovanou imaginární osu, $\underline{U}_L = = L\omega I$. Svorkové napětí U je dáno vektorem znázorněným orientovanou úhlopříčkou obdélníka. Jeho velikost je

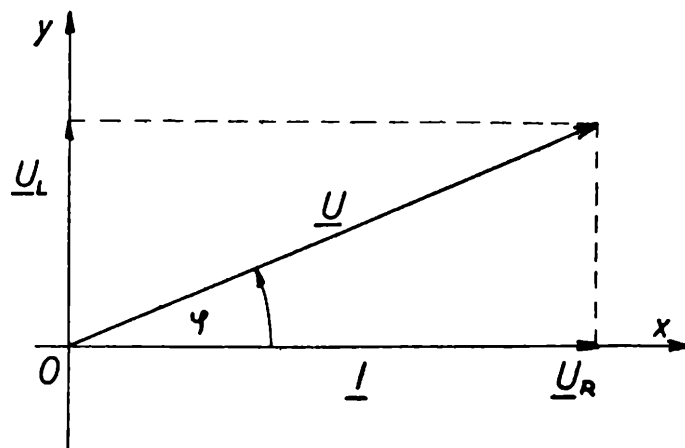
$$U = I \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = IZ,$$



Obr. 5c



Obr. 6a



Obr. 6b

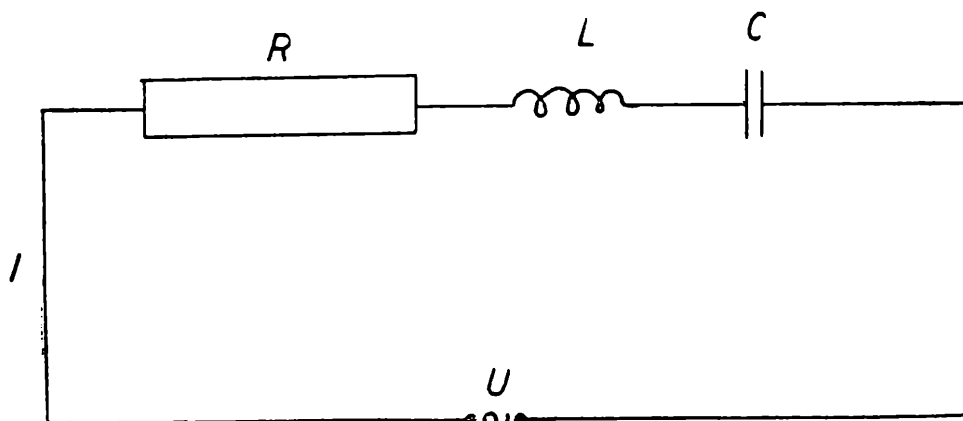
kde $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ je impedance; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$.

Výkon $P = UI \cos \varphi = U_R I$

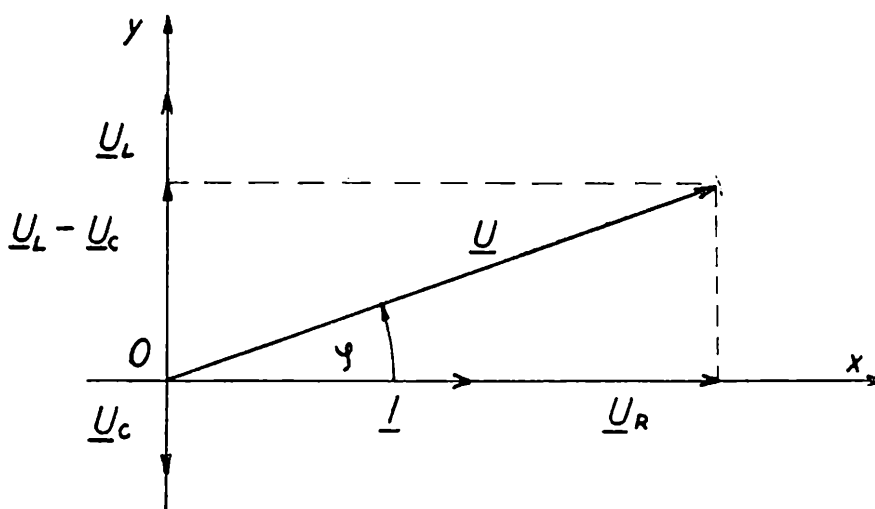
Symbolicky píšeme

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = RI + jL\omega I$$

2.2. Na obr. 7a je znázorněn obvod, v němž na střídavé napětí U je sériově zapojen odpor R , cívka s indukčností L a kondenzátor o kapacitě C . Celým obvodem prochází stejný proud $i = I_m \sin \omega t$, napětí na odporu R je ve stejné fázi s proudem, napětí na svorkách cívky je fázově posunuto o $+\frac{\pi}{2}$, na svorkách kondenzátoru o $-\frac{\pi}{2}$ vzhledem k proudu.



Obr. 7a



Obr. 7b

Ve vektorovém diagramu sestojíme vektor I opět na reálnou osu a podobně vektor napětí na odporu $U_R = IR$. Vektor napětí $U_L = L\omega I$ na kladně orientovanou imaginární osu, vektor napětí $U_C = \frac{I}{C\omega}$ na záporně orientovanou imaginární osu. Z obr. 7b plyne

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = IZ$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

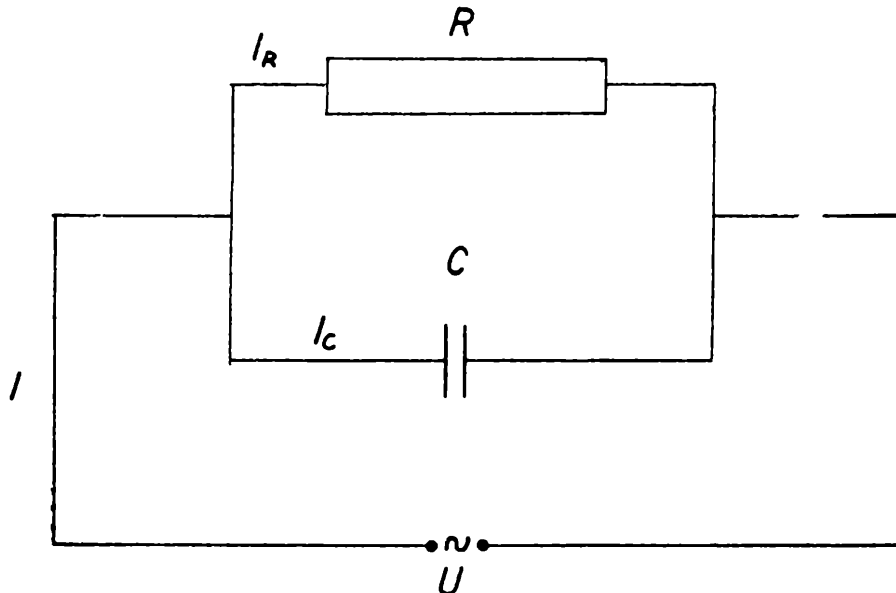
Použijeme-li symbolického počtu, dostaneme

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C = \mathbf{I}R + jL\omega\mathbf{I} + \frac{\mathbf{I}}{jC\omega} = \mathbf{I} \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]$$

Je-li imaginární složka napětí rovna nule, nastává *sériová rezonance*. Podmínku vzniku sériové rezonance vyjadřuje rovnice

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

Odtud plyne také $\omega^2 = \frac{1}{CL}$ nebo $T = 2\pi \sqrt{CL}$



Obr. 8a

Při sériové rezonanci dále platí

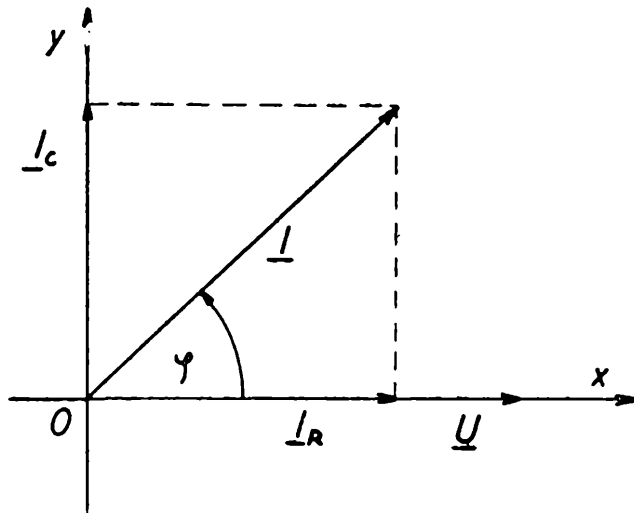
$$Z = R, \varphi = 0; I = \frac{U}{R}; \mathbf{U}_C = \frac{\mathbf{I}}{jC\omega} = -jL\omega\mathbf{I} = -\mathbf{U}_L.$$

Impedance Z se rovná odporu R . Proud I je při sériové rezonanci maximální a je ve stejné fázi s napětím U . Napětí na svorkách cívky a kondenzátoru jsou v každém okamžiku stejně veliká, ale opačného znaménka, proto se jejich součet rovná nule; přitom mohou být i mnohem větší než je napětí na odporu R .

3. Obvody s paralelně spojenými členy

3.1. Na obr. 8a je znázorněn obvod, v němž na střídavé napětí U

jsou paralelně zapojeny odpor R a kondenzátor o kapacitě C . Odporem R prochází proud $I_R = \frac{U}{R}$, který je s napětím U ve stejné fázi. Kondenzátorem C prochází proud $I_C = C\omega U$, který je fázově posunut o $+\frac{\pi}{2}$ vzhledem k napětí U .



Obr. 8b

Při sestavování vektorového diagramu vycházíme z napětí U , které je pro odpor R a kapacitanci $\frac{1}{C\omega}$ stejné. Na reálné ose sestavíme vektor napětí U a vektor proudu I_R . Poněvadž fázový rozdíl proudu I_C a napětí U je $+\frac{\pi}{2}$, nanese vektor I_C na kladně orientovanou imaginární osu. Výsledný proud je dán vektorem I . Jeho velikost je

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C}{I_R} = CR\omega$$

Symbolicky píšeme

$$I = I_R + I_C = \frac{U}{R} + jC\omega U = U \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right).$$

3.2. Obvod znázorněný na obr. 9 řešíme jen symbolickým počtem. Pro vektor proudu platí

$$\begin{aligned} I &= I_C + I_{LR} = jC\omega U + \frac{U}{R + jL\omega} = \\ &= U \left[\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Je-li imaginární složka proudu rovna nule, nastává *paralelní rezonance*. Podmínku jejího vztahu vyjadřuje rovnice

$$C - \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = 0.$$

Odtud plyne také

$$\omega^2 = \frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad \text{nebo} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

Můžeme-li velikost členu $\left(\frac{R}{L}\right)^2$ zanedbat vzhledem k $\frac{1}{CL}$, dostáváme

$$T = 2\pi \sqrt{CL},$$

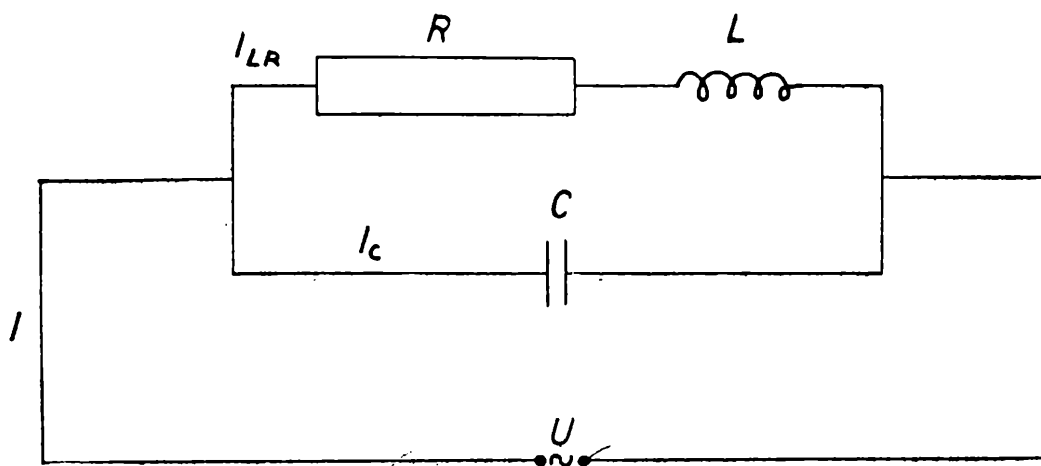
tedy stejný vzorec jako při sériové rezonanci.

Při paralelní rezonanci je proud nejmenší. Z rovnice

$$I = U \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}$$

po dosazení z rezonanční podmínky dostaneme

$$I = U \frac{RC}{L}$$



Obr. 9

Výraz $\frac{L}{RC}$ se nazývá *rezonanční odpor*. Napětí U a proud I jsou ve stejné fázi.

Proud procházející kondenzátorem je

$$I_C = jC\omega U$$

Proud procházející větví LR je

$$\begin{aligned} I_{LR} &= \frac{U}{R + jL\omega} = \frac{U(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} = \\ &= U \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} - jU \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li z podmínky pro rezonanci, dostaneme

$$I_{LR} = U \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} - jUC\omega.$$

Kondenzátorem prochází jen proud jalový, kdežto cívkou prochází proud činný i jalový. Imaginární složka proudu, který prochází cívkou, se rovná proudu, který prochází kondenzátorem, má však opačné znaménko. Proto jejich součet se rovná nule.

$$I = U \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} = U \frac{RC}{L}.$$

Výsledný proud je činný.

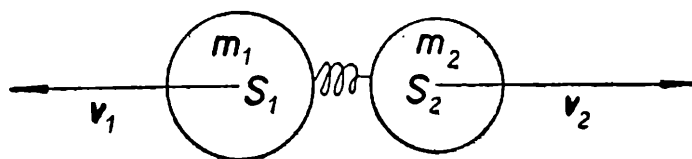
J a n T e s a ř, Praha:

Zákon zachování hybnosti

(Dokončení)

Těžiště soustavy těles

Vyšetřme pohyb dvou koulí malých rozměrů o hmotách m_1 a m_2 , které se mohou pohybovat bez tření v přímém žlábků ve vodorovné rovině. Koule se dotýkají konců stlačené pružiny. Koule a pružina tvoří uzavřenou soustavu těles (obr. 2).



Obr. 2

Odstraníme-li zařízení stlačující pružinu, pružina se prudce prodlouží a tlačí na obě koule stejně velikými silami F_1 a F_2 , které působí velmi krátkou dobu Δt , mají totožnou vektorovou přímkou a jsou opačně orientovány. Síly F_1 a F_2 udělí koulím stejně velké opačně orientované impulsy, které uvedou koule do pohybu. Koule dosáhnou na konci doby Δt rychlosti v_1 a v_2 . Protože byly na počátku ve stavu klidu, jsou v_1 a v_2 přírůstky rychlostí. Proto platí podle zákona zachování hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Obě koule se pohybují dále těmito rychlostmi pohybem přímočarým rovnoměrným a vykonají za libovolnou dobu t dráhy $s_1 = v_1 t$ a $s_2 = v_2 t$, takže

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

Zanedbáme-li dráhy, které koule vykonaly za velmi krátkou dobu Δt a pokládáme-li délku stlačené pružiny a rozměry koulí za velmi malé vzhledem k drahám s_1 a s_2 , pak bod, ve kterém počal pohyb obou koulí, dělí v každém okamžiku spojnicí poloh obou koulí v obráceném poměru k hmotám obou těles. Tento bod splňuje tedy vlastnosti *hmotného středu (těžiště)*.

Dvě tělesa, tvořící uzavřenou soustavu těles, která je jako celek v klidu, mohou konat uvnitř soustavy posuvné pohyby, pokud splňují zákon zachování hybnosti. Těžiště soustavy zůstává přitom v klidu. (9)

Chceme-li určit hmotný střed soustavy více než dvou těles (hmotných bodů) najdeme nejprve hmotný střed S_1 soustavy kterýchkoli dvou těles (hmotných bodů) A , B . Do bodu S_1 si myslíme soustředěnou hmotu $(m_1 + m_2)$ bodů A a B . Na spojnicí bodu S_1 s libovolným třetím tělesem (hmotným bodem) C leží hmotný střed soustavy tří těles (hmotných bodů) A , B , C , který dělí spojnicí $S_1 C$ v obráceném poměru součtu hmot $(m_1 + m_2)$ k hmotě m_3 tělesa (hmotného bodu) C . Obdobným způsobem můžeme pokračovat dále, až najdeme hmotný střed S soustavy všech těles (hmotných bodů).

Věta (9) platí pro každou uzavřenou soustavu o jakémkoli počtu těles (hmotných bodů).

Koná-li soustava těles jako celek posuvný pohyb, lze popsat pohyb soustavy pohybem jejího těžiště. Tělesa soustavy mohou v soustavě konat působením vnitřních sil ještě vlastní pohyby, takže konají pohyby složené. Vlastní pohyby těles soustavy musí vyhovovat zákonu zachování hybnosti.

Vyšetřujeme-li tedy posuvný pohyb tělesa, které je soustavou molekul, můžeme těleso pokládat za bod, ve kterém je soustředěna hmota celého tělesa. Tento bod je těžištěm tělesa.

Poznatky o vlastnostech těžiště těles a soustav těles mají veliký praktický význam, který je patrný z několika příkladů. Dělo koná při výstřelu zpětný pohyb, jehož rychlost se vypočítá ze zákona zachování hybnosti. Těžiště soustavy „dělo — střela“ při tom nezmění polohu, nebereme-li v úvahu tření při pohybu. Těžiště střepin granátu po explozi by se ve vzduchoprázdném prostoru pohybovalo podle zákonů o šikmém vrhu. Totéž platí i při vrhu diskem, oštěpem ap. Ačkoli se disk nebo oštěp při pohybu otáčejí, jejich těžiště by ve vakuu konalo pohyb podle zákonů šikmého vrhu. Při seskoku z klidného vozíku nebo při výskoku z klidně stojící lodky zůstává těžiště soustavy „člověk — vozík“ a „člověk — loďka“ v klidu.

Ráz těles

Srazí-li se dvě tělesa, která se obě pohybují, nebo narazí-li pohybující se těleso na jiné klidné, nastává *ráz*. Při rázu dochází k náhlé změně vektoru rychlosti i hybnosti obou těles. Následkem toho vznikne podle upraveného vztahu (6b) síla velikosti

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \Delta v}{\Delta t},$$

která se nazývá *nárazová síla*.

Při velké změně hybnosti, ke které dojde při krátce trvajícím nárazu, je číselná hodnota poměru $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ velká. Proto nabývají nárazové síly při prudkých nárazech velikých hodnot. Při srážce vlaků působí tak velké síly, že často roztrhají vagóny, zatímco při brzdění, kde dochází k stejné změně hybnosti, avšak za mnohem delší dobu, nevzniká škoda. Zvedáme-li zvolna závaží na niti, je nit napínána tíhovou silou. Pokusíme-li se zvednout závaží prudkým trhnutím směrem vzhůru, nit se přetrhne, protože nárazová síla dosáhne velké hodnoty. I zde je změna hybnosti v obou případech stejná. Z obou uvedených příkladů je patrné, že stejně velká změna hybnosti může mít za následek různě velké účinky podle toho, za jak dlouhou dobu k této změně hybnosti dojde.

Abychom měli konkrétní představu o velikosti nárazových sil, vyřešíme příklad:

Ocelová koule hmoty 500 g spadne z výšky $h = 3$ cm na ocelovou desku. Ráz trvá dobu $\Delta t = 0,0002$ s. Jak velká je nárazová síla a jaký je poměr nárazové síly k tíhové síle koule?

Označení veličin a dané hodnoty: Hmota koule je $m = 0,5$ kg, výška nad deskou $h = 0,03$ m, $\Delta t = 0,0002$ s. Změny hybnosti koule při rázu označíme Δp , velikost nárazové síly F a tíhovou sílu $G = mg$, kde $g = 10$ m/s² značí tíhové zrychlení.

Řešení. Koule má ve výšce h nad deskou vzhledem k desce potenciální energii $W_p = mgh$, při dopadu na desku kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2} mv^2$, kde v značí rychlost, se kterou dopadne koule na desku.

Podle zákona zachování energie je $\frac{1}{2} mv^2 = mgh$, takže

$$v = \sqrt{2hg}$$

Po odrazu se koule pohybuje stejnou rychlostí opačným směrem. Celková změna hybnosti má velikost $\Delta p = v - (-v) = 2v$, takže nárazová síla dosáhne velikosti

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{2v}{\Delta t} = \frac{2m}{\Delta t} \sqrt{2hg}. \quad (10)$$

Číselně:

$$F = \frac{2 \cdot 0,5}{0,0002} \sqrt{2 \cdot 0,03 \cdot 10} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\sqrt{0,6}}{0,0002} \text{ N} = \frac{0,8}{0,0002} \text{ N} = 4000 \text{ N} = 400 \text{ kp}.$$

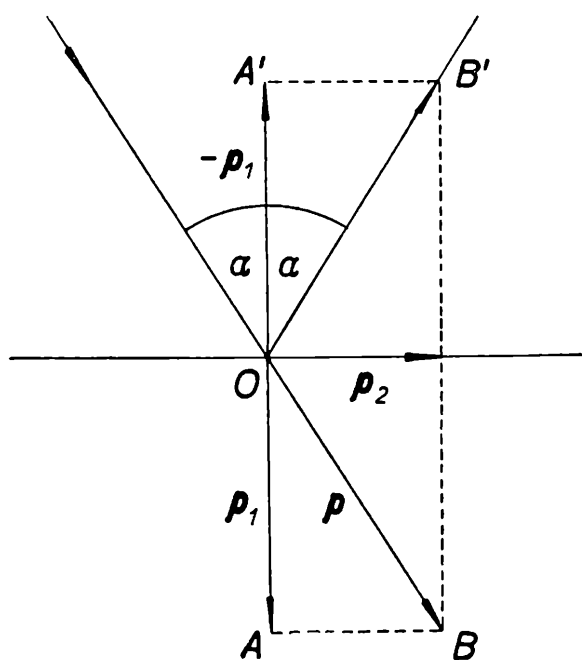
Obecně je určena velikost nárazové síly vztahem (10), číselnou hodnotu má přibližně 4000 N.

Tíhová síla je 0,5 kp, tj. přibližně 5 N. Je tedy poměr $\frac{F}{G} \doteq 800$. Nárazová síla koule je přibližně 800krát větší než tíhová síla.

Dopadne-li dokonale pružná koule na dokonale pružnou pevnou stěnu tak, že směr pohybu dopadající koule svírá s kolmicí ke stěně v místě dopadu (kolmice dopadu) úhel dopadu $\alpha \neq 0^\circ$, můžeme rozložit podle obr. 3 vektor hybnosti $\mathbf{p}$ v místě dopadu na dvě složky $\mathbf{p}_1$ ve směru kolmice dopadu a $\mathbf{p}_2$ ve směru rovnoběžném se stěnou. Složka ve směru kolmice dopadu změní za velmi krátkou dobu Δt nárazu svou velikost z $\mathbf{p}_1$ na 0. Proto vznikne nárazová síla $\mathbf{F}$ souhlasně orientovaná se složkou $\mathbf{p}_1$ hybnosti.

Stejně velikou opačně orientovanou reakcí $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ působí po stejnou dobu Δt stěna na kouli. Impuls této reakce $-\mathbf{F} \Delta t$ je příčinou změny hybnosti z hodnoty 0 na $-\mathbf{p}_1$, takže se koule od stěny odrazí.

Složka hybnosti $\mathbf{p}_2$ se během rázu nezmění, neboť v jejím směru žádná vnější síla nepůsobí. Odražená koule se proto pohybuje ve směru určeném výslednicí vektorů $\mathbf{p}_2$ a $-\mathbf{p}_1$ rychlostí, jakou dopadla na pevnou stěnu. Úhel, který svírá směr pohybu odražené koule s kolmicí dopadu (úhel odrazu) je vzhledem ke shodnosti trojúhelníků $\triangle OAB$ a $\triangle OA'B'$ stejný jako úhel dopadu.



Obr. 3

Dopadá-li pružná koule na pružnou pevnou stěnu, odrazí se od stěny stejnou rychlostí, jakou dopadla a její úhel odrazu je roven úhlu dopadu.

Průběh rázu je děj dosti složitý. Narazí-li dvě tělesa na sebe, způsobují nárazové síly nejprve změnu tvaru (deformaci) obou těles.

a) Jsou-li tělesa dokonale nepružná, zůstávají trvale deformována. Jakmile se při rázu jejich rychlosti vyrovnají, přestanou na sebe působit silami a pohybují se stejnou rychlostí jako jedno těleso. Kinetická energie obou těles před rázem je větší než po rázu o přírůstek vnitřní energie obou těles, který se projeví zvýšením jejich teploty.

b) Srazí-li se dvě dokonale pružná tělesa, rozdělíme si průběh rázu na dvě fáze. V první fázi nabudou tělesa obdobně jako nepružná tělesa stejné rychlosti a když jsou nejvíce deformována, začnou se vzpružovat (nabývat původního tvaru). Souhrn kinetických energií obou těles před rázem se při deformaci mění v elastickou energii. Rychlosti jejich pohy-

bů (rychlosti pohybů jejich těžišť) se při stlačování vyrovnávají. Při vzpružování (restituci) se tato elastická energie zase velmi rychle mění v energii kinetickou, takže u dokonale pružných těles je úhrnná kinetická energie před rázem i po rázu stejná. Rychlost obou koulí, která byla v okamžiku největší deformace stejná, se při vzpružování začne různit a proto při dokončení rázu se koule odrazí a po odrazu se pohybují různými rychlostmi.

Středový přímý ráz koulí

Podle způsobu, jak se navzájem tělesa před rázem pohybují, rozeznáváme různé druhy rázů. U homogenních koulí o stejně velikém poloměru, jejichž těžiště se pohybují po společné přímce, dochází vždy k středovému přímému rázu. Protože jsou nárazové síly mnohem větší než všechny ostatní síly (síla tření, tíhová síla apod.), které na tělesa působí, můžeme všechny ostatní síly zanedbat. Posuvný pohyb koulí můžeme považovat za pohyb jejich těžišť, v nichž si myslíme soustředěny celkové hmoty koulí m_1 a m_2 . Nárazové síly jsou v této soustavě silami vnitřními. Těžiště první koule má před rázem rychlost v_1 , po rázu w_1 , těžiště druhé koule se pohybuje před rázem rychlostí v_2 , po rázu w_2 . Podle zákona zachování hybnosti platí

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2. \quad (11)$$

A. Jsou-li obě koule dokonale nepružné, pohybují se po rázu jako jedno těleso rychlostí $w_1 = w_2 = w$, takže platí

$$w (m_1 + m_2) = m_1 v_1 + m_2 v_2 ,$$

takže

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

Rychlost obou koulí je určena vztahem (12).

Při rázu nepružných koulí nelze rychlost koulí po rázu počítat podle zákona zachování energie, neboť úhrnná kinetická energie obou koulí před rázem je větší než po rázu.

Úbytek pohybové energie po rázu se změní ve vnitřní energii obou koulí. Velikost ΔW tohoto úbytku má hodnotu

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) w^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

B. Protože rychlosti w_1 a w_2 , kterých nabývají po rázu pružné koule, jsou různé, vyskytují se v rovnici (11) dvě neznámé veličiny w_1 a w_2 . Zde můžeme k výpočtu těchto dvou neznámých veličin užít zákona zachování energie, takže získáme pro jejich určení druhou rovnici

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \quad (13)$$

Řešením rovnice (11) a (13) můžeme určit obě neznámé rychlosti. Protože rovnice (13) je kvadratická, je řešení soustavy uvedených dvou rovnic obtížné.

Úlohu můžeme vyřešit jednodušším způsobem:

U dokonale pružných koulí se elastická energie deformovaných koulí promění po restituci v plné hodnotě v energii kinetickou. Proto probíhá restituce stejným způsobem jako stlačování. Jsou tedy síly působící restituci každé koule stejně veliké jako síly, které působily stlačování téže koule, což platí i o změnách hybnosti. V okamžiku, kdy stlačování přechází ve vzpružování, mají obě koule stejně velikou rychlost w , určenou jako u nepružných koulí vztahem (12).

Vyjádříme-li tedy rovnicí, že změna hybnosti u první koule je při restituci stejná jako při stlačování, dostaneme

$$m_1 (w_1 - w) = m_1 (w - v_1),$$

z níž vychází

$$w_1 = 2w - v_1 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \quad (14)$$

a obdobně pro rychlost druhé koule po rázu

$$w_2 = 2w - v_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2. \quad (15)$$

Přesvědčíme se ještě, že obě koule mají celkovou kinetickou energii W' po rázu stejnou jako před rázem.

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (2w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (2w - v_2)^2 = \\ &= 2 m_1 w^2 - 2 m_1 w v_1 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 2 m_2 w^2 - 2 m_2 w v_2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \\ &= 2 w^2 (m_1 + m_2) - 2 w (m_1 v_1 + m_2 v_2) + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{aligned}$$

Dosadíme-li na $w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, vychází

$$W' = 2 \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} - 2 \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

což je kinetická energie před rázem.

Při řešení úloh o rázu je nutno velikosti souhlasně orientovaných vektorů rychlosti označovat stejným znaménkem, opačně orientovaných nesouhlasným znaménkem.

Na závěr vyřešíme úlohu.

Příklad. Dvě dokonale pružné stejně veliké koule se pohybují proti sobě. Jejich těžiště se pohybují po společné přímce. První koule má hmotu 4 kg a pohybuje se rychlostí 1 m/s, druhá koule o hmotě 2 kg se pohybuje rychlostí 2 m/s. Jaká je rychlost obou koulí po rázu?

Označení veličin a dané hodnoty. Poněvadž jsou vektory rychlostí obou koulí opačně orientovány, označíme rychlost první koule kladně, rychlost druhé koule záporně. Hmoty první koule je $m_1 = 4$ kg, druhé $m_2 = 2$ kg, první se pohybuje rychlostí $v_1 = 1$ m/s, druhá $v_2 = -2$ m/s. Rychlost první koule po rázu označíme w_1 , rychlost druhé w_2 .

Řešení

1. Příklad můžeme řešit dosazením daných hodnot do odvozených vzorců (14) a (15). Pak vychází

$$w_1 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = 2 \frac{4 - 4}{6} \frac{\text{kg m}}{\text{s kg}} - 1 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s},$$

$$w_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = 2 \text{ m/s}.$$

Koule se po rázu pohybují opačným směrem než před rázem. Rychlost mají v tomto případě stejnou jako měly před rázem.

2. Příklad však můžeme řešit také užitím zákonů zachování hybnosti a zachování energie. Ze zákonů zachování hybnosti a zachování energie vychází

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Obě rovnice jsou zřejmě rozměrově správné. Budeme tedy počítat jen s číselnými hodnotami. Dosadíme-li do obou rovnic dané číselné hodnoty, dostaneme

$$4 - 4 = 4 w_1 + 2 w_2$$

$$\frac{1}{2} 4 + \frac{1}{2} 2 \cdot 4 = 2 w_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 w_2^2$$

Z první rovnice vychází $w_2 = -2 w_1$

z druhé $2 w_1^2 + w_2^2 = 6.$

Dosadíme-li do druhé rovnice za w_2 , dostaneme rovnici $2 w_1^2 + 4 w_1^2 = 6$, odkud vychází $w_1 = \pm 1$ a z první $w_2 = \pm 2$.

Hodnoty $w_1 = 1 \text{ m/s}$ a $w_2 = -2 \text{ m/s}$ úloze nevyhovují, neboť obě koule by při těchto rychlostech neměnily orientaci své rychlosti a musely by tedy po rázu pokračovat v pohybu původním směrem, což není možné.

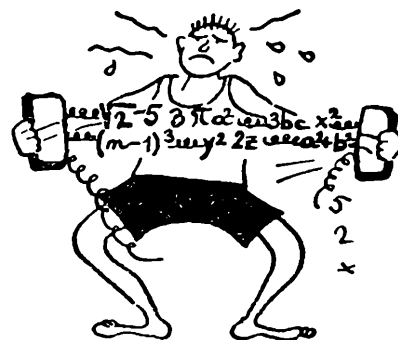
Naší úloze tedy vyhovují jen hodnoty $v_1 = -1 \text{ m/s}$ a $v_2 = 2 \text{ m/s}$, které souhlasí s výsledkem získaným prvním způsobem.

Oprava. V č. 1 si opravte v zadání úloh pro FO: Str. 34., obr. 2 místo M_1 , M_2 , M_3 , M_4 čti r_1 , r_2 , r_3 , r_4 . Str. 37., 17. řádek zdola místo 10^{-6} budiž 10^{-5} . Str. 41., 15. řádka místo o b r á c e n é h o čti o b e c n é h o. Str. 44., řádka 12. místo p o l o m ě r BD čti p o l o m ě r $\frac{BD}{4}$ a na 14. řádce místo p o l o m ě r y BD budiž p o l o m ě r y $\frac{BD}{6}$

Matematické zábavy

M i l a n K o m a n, Praha:

Řešení úlohy o zvoncích



Ve 3. čísle minulého ročníku našeho časopisu jsme vám předložili jednu úlohu z kombinatoriky. Připomeneme si její znění:

V jistém domě jsou 4 byty, které označíme pro jednoduchost A , B , C , D . Tlačítka ke zvonkům těchto bytů umístěná u vchodu do domu byla při montáži omylem označena tak, že ani jeden ze zvonků nebyl správně zapojen. Dostali jste za úkol určit, kolik je vůbec možných takovýchto úplně nesprávných zapojení. Náročnějším čtenářům jsme doporučili, aby se zamysleli nad zobecněním úlohy.

Nyní si uvedeme řešení úlohy.

1. Řešení úlohy pro 4 zvonky. Každému „totálně“ chybnému zapojení zvonků odpovídá určitá permutace 4 prvků A , B , C , D , při níž žádný prvek nestojí na svém základním místě, tj. A není na 1. místě, B není na 2. místě atd. V dalším budeme mluvit pro stručnost prostě o t -permutaci („totální“ permutaci). Nejdříve určíme všechny t -permutace, které mají na prvním místě B . V tom případě může stát prvek A na kterémkoli dalším místě:

B	A	$*$	$*$
B	$*$	A	$*$
B	$*$	$*$	A

Ve všech třech případech je však již poloha dalších prvků C , D na zbývajících dvou místech jednoznačně určena. Lze tedy sestavit celkem tři

různé t -permutace s prvkem B na 1. místě; jsou to

$$\begin{array}{l} B \ A \ D \ C \\ B \ D \ A \ C \\ B \ C \ D \ A \end{array}$$

Úplně stejně usoudíme, že existují právě tři různé t -permutace, které mají na 1. místě prvek C , resp. D . Uvedeme si je

$$\begin{array}{ll} C \ A \ D \ B & D \ A \ B \ C \\ C \ D \ A \ B & D \ C \ A \ B \\ C \ D \ B \ A & D \ C \ B \ A \end{array}$$

Můžeme tedy shrnout, že celkem existuje 9 t -permutací 4 prvků, tzn. že v dané úloze se mohlo uvedené chybné zapojení zvonků provést devíti různými způsoby.

2. Řešení úlohy pro n zvonků ($n \geq 5$).

Jde v podstatě opět o úlohu určit počet p_n t -permutací n prvků, tj. permutací při nichž žádný prvek nestojí na svém základním místě.

Hlavní myšlenku řešení si osvětlíme na případě $n = 5$. Budeme tedy hledat všechny t -permutace pěti prvků A, B, C, D, E . Nejdříve určíme všechny t -permutace, které mají na 1. místě prvek B . Pro polohu A rozlišíme pak dva případy: a) A je na 2. místě, b) A není na 2. místě.

a) Je-li A na 2. místě, jde o t -permutace typu

$$B \ A \ * \ * \ *$$

Na zbývajících třech místech je třeba umístit prvky C, D, E tak, aby žádný z nich nepřišel na své základní místo. To můžeme však provést tolika způsoby, kolik existuje t -permutací ze tří prvků, tj. $p_3 = 2$ způsoby. Tak získáme tyto t -permutace pěti prvků

$$\begin{array}{l} B \ A \ D \ E \ C \\ B \ A \ E \ C \ D \end{array}$$

b) Nechť A není na 2. místě. Pak dostaneme, jak se dále přesvědčíme, právě tyto t -permutace:

$$\begin{array}{lll} B \ C \ A \ E \ D & B \ D \ A \ E \ C & B \ E \ A \ C \ D \\ B \ C \ E \ A \ D & B \ D \ E \ A \ C & B \ E \ D \ A \ C \\ B \ C \ D \ E \ A & B \ D \ E \ C \ A & B \ E \ D \ C \ A \end{array}$$

Jestliže v těchto t -permutacích vynecháme prvek B a nahradíme písmena A, C, D, E po řadě prvky A', B', C', D' , zřejmě dostaneme všechny t -permutace prvků A', B', C', D' (Přesvědčte se!) Jejich počet je $p_4 = 9$. Z toho bezprostředně plyne, že jsme také uvedeným výčtem vyčerpali všechny t -permutace pěti prvků, které mají na 1. místě B a nemají na 2. místě A .

Z našich úvah tak vyplývá, že počet t -permutací pěti prvků A, B, C, D, E , které mají na 1. místě B je roven

$$p_3 + p_4 = 11$$

Stejným způsobem lze dojít k závěru, že počet t -permutací, které mají na 1. místě prvek C (resp. D , resp. E) je opět roven

$$p_3 + p_4 = 11.$$

Proto pro počet p_5 t -permutací pěti prvků platí

$$p_5 = 4p_3 + 4p_4 = 44. \quad (1)$$

Tím je úloha pro $n = 5$ rozřešena.

Obdobným způsobem pro libovolné přirozené $n \geq 5$ lze dokázat, že platí pro p_n rekurentní vzorec

$$p_n = (n - 1) p_{n-2} + (n - 1) p_{n-1} \quad (2)$$

A to je již výsledek zobecněné úlohy o zvoncích.

n	p_n	$n!$	$p_n : n!$
1	0	1	0
2	1	2	0,5
3	2	6	0,333...
4	9	24	0,375
5	44	120	0,366...
6	265	720	0,368...
7	1 854	5 040	0,367...
8	14 833	40 320	0,367...
9	133 496	362 880	0,367...

Pro zajímavost uvedme ještě v tabulce několik prvních hodnot čísel p_n a porovnejme je s počtem všech permutací n prvků.

Při pohledu na tabulku se nám vnucuje domněnka, že pro $n \geq 7$ platí pro počet p_n t -permutací odhad

$$0,367 n! < p_n < 0,368 n! \quad (3)$$

Naše domněnka je opravdu správná a snadno si ji sami s užitím rekurentního vzorce (2) dokážete.

Zajímavé číslo

Na zajímavou vlastnost čísla 210 upozorňuje K. F. Ševčík v sovětském časopise *Matematika ve škole* (r. 1964, č. 5, str. 87).

Číslo 210 je součinem prvních čtyř prvočísel 2, 3, 5, 7. Jestliže od něho odečteme kterékoli prvočíslo mezi 100 a 200, dostaneme opět prvočíslo:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $210 - 107 = 103$ | 11) $210 - 163 = 47$ |
| 2) $210 - 109 = 101$ | 12) $210 - 167 = 43$ |
| 3) $210 - 113 = 97$ | 13) $210 - 173 = 37$ |
| 4) $210 - 127 = 83$ | 14) $210 - 179 = 31$ |
| 5) $210 - 131 = 79$ | 15) $210 - 181 = 29$ |
| 6) $210 - 137 = 73$ | 16) $210 - 191 = 19$ |
| 7) $210 - 139 = 71$ | 17) $210 - 193 = 17$ |
| 8) $210 - 149 = 61$ | 18) $210 - 197 = 13$ |
| 9) $210 - 151 = 59$ | 19) $210 - 199 = 11$ |
| 10) $210 - 157 = 53$ | |

Obdobná vlastnost platí i pro číslo 600 a prvočísla z intervalu $(525 \leq p \leq 600)$.

Dovedli byste vyhledat další vhodné číslo a k němu interval téže vlastnosti?

O. S.

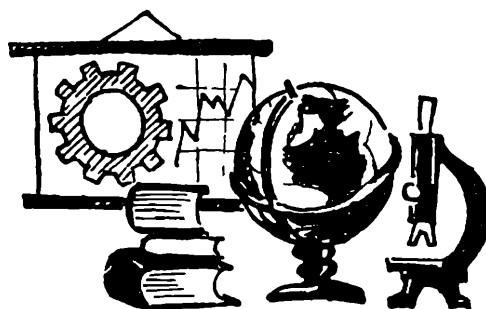
Doplňovačka

Danou tabulku doplňte tak, aby čísla v každé řádce i v každém sloupci tvořila členy aritmetické posloupnosti o celistvé diferenci.

			11	
6				
				54

O. S.

Různé



Josef Kotyk, Pardubice:

Z říše Inků

„*Historie není věda, nýbrž — umění. Úspěchů dopracuje se v ní jen člověk obdařený představivostí...*“, prohlásil **A n a t o l e F r a n c e** (čti Anatol Fráns).

V prachu historie sedí archeolog a trpělivě odstraňuje vrstvu za vrstvou — jako by obracel listy knihy. Z nich skládá děje a obraz minulosti.

Archeologie potvrdila, že **I n k o v é**, vládcové andských národů žijících na území dnešního Peru, peruánskou kulturu nevytvořili.¹⁾ Inkové ji spíše zorganizovali. V organizování neměli pak skutečně sobě rovných! Celá organizace státu, politická i hospodářská struktura říše, byla vybudována v podstatě na **d e s í t k o v é s o u s t a v ě č í s e l n é** jako pyramida: Za 10 prostých robotníků odpovídal předák zv. **k o n k a k a m a i o k** (desítkář), 10 předáků podléhalo dohlížiteli, 10 dohlížitelů vůdci osady, atd. Náčelník kmene řídil 10 000 lidí. Hierarchie pokračovala k správcům oblastí, k místodržitelům, kteří kontrolovali „čtyři díly světa“, a konečně k panovníku. Při budování této vysoce organizované společnosti nedostačovaly ovšem již metody numerace (čítání) nižších kultur.²⁾ Organizačnímu géniu Inků vydatně napomáhali také **m a t e m a t i k o v é**, **p o č t á ř i** zv. **k i p u - k a m a i o k o v é**.

Slovo **k i p u** znamená původně **u z e l**, prakticky pak **u z l o v o u š ň ů r u**. Kipu, jež dnes archeolog nalézá v hrobech, nám ovšem neprozradí nic; pro nás to jsou jen mrtvé provázky. Počátkem tohoto století byl však v Královské knihovně v Kodani nalezen rukopis **P r v n í n o v é k r o n i k y**, kterou napsal a perokresbami bohatě ilustroval indiánsko-španělský míšenec **F e l i p e H u a m á n P o m a d e A y a l a**, narozený v Ayacuchu asi roku 1534. Jeho dílo, vydané roku 1927, popi-

¹⁾ Do doby předincké datuje se mj. i stavba velikých vorů z balzového dřeva, lehčího než korek, o nichž píše **T h o r H e y e r d a h l** ve své knize **V e z n a m e n í K o n - T i k i** (Mladá fronta, Praha 1958). Byl to největší druh plavidla, jaký Peruánci znali.

²⁾ Viz autorův článek **N u m e r a c e (Č í t á n í)** v *Rozhledech matematicko-přírodovědeckých roč.* 25, čís. 2, str. 54 až 57.

suje a zobrazuje³⁾ kipu jako jednoduchou, avšak důmyslnou pomůcku pravděpodobně i mnemotechnickou, která měla pomáhat paměti. V základě však představovala účetní metodu překvapivě účinnou, kterou i španělští dobyvatelé velmi obdivovali.

K i p u se skládalo z hlavní (vlněné nebo bavlněné) šňůrky, která měřila několik decimetrů až několik metrů, k níž byly v kolmém směru v řadách přivázány (zavěšeny) další šňůry, šňůrky nebo vlněné nitě jako trásně. Jejich různé barvy měly zřejmě také svůj zvláštní význam. Na těchto kratších a barevných šňůrkách byly umístěny v různých vzdálenostech od základního provázku uzlíky, které představovaly svou formou a množstvím čísla. Svědčí o pokročilosti matematického myšlení jeho tvůrců, že byl zaveden také symbol ničeho, obdoba naší nuly; byla jím šňůrka s místem „prázdným“. Čísla na uzlových čarách byla zaznamenávána v dekadické soustavě. P e d r o d e C i e z a d e L é o n vypravuje ve své knize o Incích z roku 1553, že po svém příchodu do Peru mluvil o kipu s několika starými pamětníky; ti mu vysvětlili, že jednoduché uzly, umístěné nejdále od hlavního provazu, znamenaly jednotky, další řada desítky, další stovky a tisíce. Největší čísla byla umístěna k základnímu provazu nejbližší. Dekadický systém záznamů na kipu dokládá také dochovaný obrázek F e l i p a H u a m á n a P o m y d e A y a l a (viz pozn. ³⁾) další vedlejší kresbou, jež připomíná dominové kostky.

Kromě rozdílů v umístění a v barvách se číselné odlišnosti zachycovaly také zkroucením šňůrky, různými způsoby splétání uzlů, jejich vzájemnými vzdálenostmi aj. Podrobné studium uzlových šňůr ukázalo, že se na nich dalo počítat až na desítky tisíc. Složitá spleť uzlů vedla badatele nakonec k závěru, že na kipu bylo možno zaznamenat více než pouhé údaje číselné (zejména statistické) obecného rázu, že obsahovaly např. také kalendářní data, záznamy historické aj.

Je jisté, že kipu samo nevypovídalo nic bez slovního výkladu. K tomu účelu vydržovali Inkové (vládcové) i jejich místodržitelé v provinciích u svého dvora úředního počtáře, který dovedl kipu dobře používat, k i p u - k a m a i o k a; jeho povinností bylo uzlové záznamy odborně „vpisovat“ i vykládat. Když říše Inků např. pohltila výbojem nové území, byli ihned sečtení všichni jeho obyvatelé a „vevázáni“ do kipu. Kipu-kamaiok musel pak mít v trvalé evidenci, co je na kterém kipu zaznamenáno, počet mužů či žen, počet zvířat (zvláště lam) ve stádech, množství obilí v sýpkách, zásoby vlny ve skladištích, zásoby látek, množství potravin v kamenných zásobárnách, množství dobytých kovů (zlata, stříbra) a jiných věcí. Počet poplatníků, robotníků, potřebných k plnění pracovní povinnosti, i přesný počet vojáků, které mohl místodržitel kdy-

³⁾ Zdařilou reprodukci této zajímavé kresby přináší kniha V i c t o r W. H a g e n, Ř í š e I n k ů (Orbis, Praha 1963) na str. 144, obr. 57.

koli povolat, byl rovněž zaznamenáván na kipu. Při stanovení, jaké daně mají být odvedeny, byl soupis dokonce tak přesný, že „ani pár sandálů nechyběl“, vypravuje Pedro de Cieza de León a dodává: „Byl jsem opravdu ohromen“.

Také zpráva o příchodu Španělů roku 1532 byla ovšem doplněna tím, že na kipu byl zaznamenán přesný počet lidí i zvířat: 200 mužů a 50 koní⁴⁾. Hrstka dobrodruhů stačila, aby vyvrátila despotický stát Inků⁵⁾ a započala dílo zkázy. Zejména archivy kipu vzaly záhy za své; ve snaze vyhubit v dobyté zemi co nejrychleji modlářství, ničili je Španělé ve velkém, neboť je považovali za „knihy ďábelské“. Avšak to jsou už dějiny. Historie jako věda potvrdila⁶⁾, že dobytí Ameriky Španěly přerušilo samostatný vývoj národností amerického kontinentu a uvrhlo je do jařma koloniálního otroctví.

Recenze

Český překlad

Struikových Dějin matematiky



Našim učitelům matematiky a pokročilejším žákům středních škol se dostává do rukou v českém překladu kniha profesora matematiky Dirk J. Struika, *Dějiny matematiky*.

Autor působil poslední dobou na technologickém institutu v Massachusetts v USA a soustavně se zabýval studiem děl Marxových a Engelsových. Jeho dějiny matematiky jsou zpracovány v marxistickém duchu. Našly velkou odezvu možno říci v celém světě. O tom a současně o významu knihy svědčí, že byla už přeložena do několika evropských jazyků a vydána i v jazyku čínském a japonském. Český překlad pořídili vědečtí pracovníci Historického ústavu ČSAV z oddělení pro dějiny přírodních věd a techniky Jaroslav Folta a Luboš Nový a připojili k němu na několika místech samostatné odstavce o vývoji matematiky v našich

⁴⁾ Přidrží se *Dějiny světa* (SNPL 1961), sv. IV., str. 99.

⁵⁾ Poutavé líčení věrolomnosti Pizarrovy a tragického konce Inky Atahualpy podává kniha William Prescott, *Dějiny dobytí Peru*.

⁶⁾ K. Marx - B. Engels, *Vybrané spisy II.* (Praha 1954).

zemích, čímž kniha získala pro naše čtenáře na přitažlivosti. Škoda jen, že tyto odstavce nejsou dosti nápadně odlišeny od ostatního autorova textu.

Struikovy dějiny matematiky podávají populární a přehledný výklad o vývoji matematiky od nejstarších dob až do 19. století včetně a to v o s m i kapitolách. První čtyři kapitoly zahrnují dějiny matematiky do 17. století s názvy: *Počátky*, *Starý orient*, *Řecko*, *Orient po úpadku řecké společnosti*, *Počátky rozvoje matematiky v západní Evropě*. Další čtyři kapitoly sledují rozvoj matematiky v *sedmnáctém*, *osmnáctém a devatenáctém století*, tj. rozvoj matematiky renesanční, vznik analytické geometrie a vývoj infinitesimálního počtu (dnešní vyšší matematiku), dále bouřlivý rozmach matematické analýsy a ostatních matematických oborů, zvláště algebry, a konečně rozvíjející se specialisaci moderních matematických disciplín v 19. století. Tato poslední kapitola zaujímá přitom v celé knize nejvíce místa, 60 stran textu.

Mimo to doplnili překladatelé autorovy výklady d e v á t o u kapitolou s názvem *Hlavní období vývoje matematiky*, kde přehledně shrnuli, jak se předmět matematiky v jejím vývoji měnil, čímž dospěli k rozlišení čtyř hlavních vývojových etap v historii matematiky, ovlivněných a určených společenským vývojem.

Pokrokové pojetí dějin matematiky je v celé knize patrné z toho, že autor stále, třebaže leckde jenom velmi stručně, ukazuje, jak rozvoj matematiky a jednotlivých jejích odvětví byl v příslušných obdobích podmíněn vývojem společenským, rozvojem hospodářským a technickým, stavem filosofie a pokroky fyziky a astronomie.

Není pochyby o tom, že četba překladu Struikovy knihy naše čtenáře nejenom velmi zaujme, ale že je také poučí o tom, jaké klíčové postavení matematika představuje a jak by měla být pěstována k získání všeobecného vzdělání a odborné kvalifikace dnešního člověka.

Knihu vydalo v M a l é m o d e r n í e n c y k l o p e d i i jako publikaci Československé společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí nakladatelství Orbis v Praze r. 1963. Stran 256, stran příloh 16, cena brožovaného výtisku Kčs 11,—.

Doc. Josef Holubář

Oprava. Vedení *Matematické olympiády* žádá čtenáře, aby si v soutěžní úloze 1 kategorie D opravili 14 km na správných 13 km. Oprava se týká nejen č. 2. Rozhledů (str. 81), ale i publikace obsahující pouze soutěžní úlohy.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

■ T ■

таблица
тангенс
тело, тело вращения
тень, падающая, собственная
теорема
теорема синусов, косинусов
тогда и только тогда
тождественный
тождество
тонна
точность, с точностью до двух сто-
миллионных
трансляция
траектория
трапеция
требование
треугольник
треугольник вписанный, описанный,
остроугольный, пифагорейский,
прямоугольный, прямоугольный
равнобедренный, Паскаля, равно-
бедренный, равносторонний, тупо-
угольный
треугольный
трехгранник
трехгранный
трехгранный угол
тригонометрический
тригонометрия
трисекция

tabulka
tangens
těleso, rotační těleso
stín, vržený, vlastní
věta
sinová věta, kosinová věta
tehdy a jen tehdy
identický
identita
tuna
přesnost, s přesností na dvě stomi-
liony
translace, posunutí
trajektorie, dráha
lichoběžník
požadavek, podmínka
trojúhelník
trojúhelník vepsaný, opsaný, ostro-
úhlý, pythagorejský, pravouhlý,
pravouhlý rovnoramenný, Pasma-
lův, rovnoramenný, rovnostranný,
tupoúhlý

trojúhelníkový
trojhran
trojhranný
trojhran
trigonometrický
trigonometrie
trisekce

■ Y ■

убывать
убывающий
увеличение
угломер

zmenšovat se, klesat
klesající
zvětšení
úhloměr

угол
 угол внешний, внутренний, зрения,
 направленный, острый, полный,
 прилежащий, прямой, противоре-
 жащий, развёрнутый, тупой
 угол двугранный
 удалённый
 удлинить, удлинять
 удобный
 удовлетворять
 указание
 уменьшаемое
 умножать, умножить
 умножение
 уничтожаться взаимно
 упражнение
 употребляющийся
 упорядочить
 упрощение
 уравнение
 усечённый конус, пирамида
 условие
 условный
 усложнять
 устанавливать, установить
 устный счёт
 утверждать
 утверждение
 участок

úhel
 úhel vnější, vnitřní, zorný, oriento-
 vaný, ostrý, plný, přilehlý, pravý
 protější, přímý, tupý

klín
 vzdálený
 prodlužovat
 vhodný
 vyhovovat
 návod, pokyn
 menšenec
 násobit
 násobení
 navzájem se rušit
 cvičení
 používaný
 uspořádat
 zjednodušení
 rovnice
 komolý kužel, jehlan
 podmínka
 relativní, podmíněný
 zkomplikovat
 stanovit
 počítání z paměti
 tvrdit
 tvrzení
 část, úsek

Ф

фактор
 фигура
 фокус
 форма
 формула
 формуляция проблемы
 функция
 функция гониометрическая, линей-
 ная, показательная, разрывная, эле-
 ментарная

činitel, faktor
 útvar, obrazec
 ohnisko
 tvar, forma
 vzorec, formule
 formulace úlohy, problému
 funkce
 funkce goniometrická, lineární, ex-
 ponenciální, nespojitá, elementár-
 ní

X

характеристика аффиниты, коллине-
 ации, логарифмов
 хорда

charakteristika afinity, kolineace,
 logaritmů
 tětíva

Ц

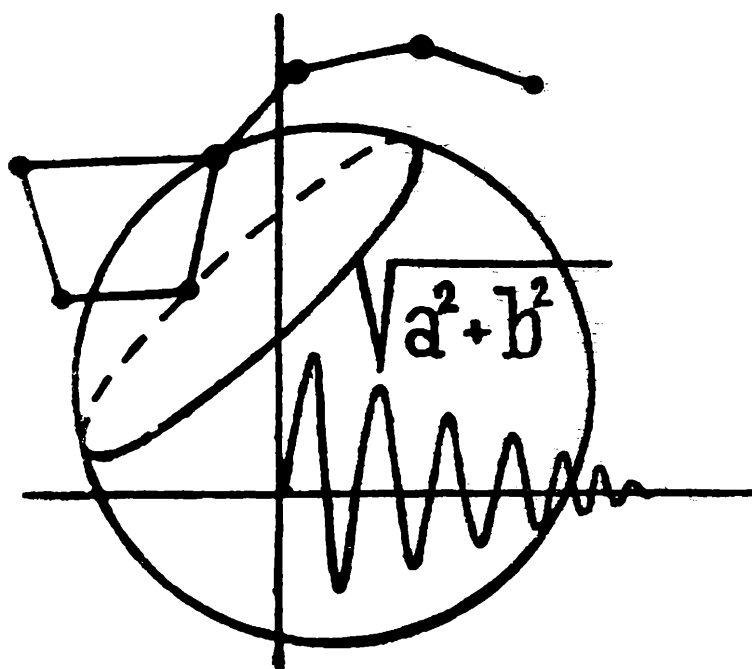
целесообразно
 целиком
 целое число раз
 центр, центральный
 центр подобия, тяжести

je vhodné, užitečné
 úplně, zcela
 několikrát
 střed, středový
 střed podobnosti, těžiště

{ Pokračování }

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



4

ROČ. 43

1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Prosinec 1964

Číslo 4

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

Dr. R. Plajner: Pythagorovy trojúhelníky o stejném obsahu	145
J. Náhunková: Jedna vlastnost pravoúhlého čtyřstěnu	148
CSc. B. Haňková, F. Hrnčíř: Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti (Pokračování)	150
Doc. inž. L. Drs, CSc., O. Jeništa: Určité konstrukce elipsy a oválu	155
Z. Kupka: K pojmu setrvačná síla	160
J. Grygar: Astronomické rekordy vzdáleností	168
CSc. L. Sehnal: Umělé družice a kosmické rakety	174
Úlohy k řešení	176
Inž. M. Špačková: Záhadný průměr	184
J. Tesař: Děje v plynech	184
Recenze	192
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jin-dřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořal, studující FS.

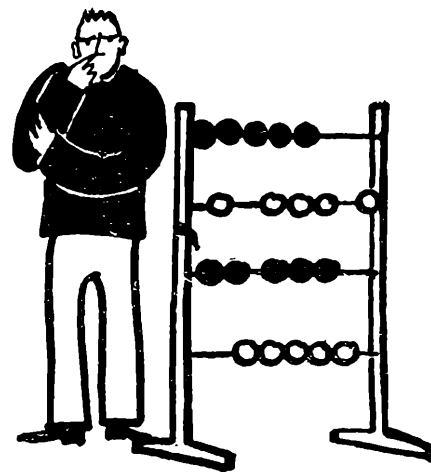
A-18*41895

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.

Matematika

Dr. Rudolf Plajner, Praha:

Pythagorovy trojúhelníky o stejném obsahu



Definice. Pravoúhlé trojúhelníky, jejichž strany jsou celá čísla, se nazývají Pythagorovy trojúhelníky.

Pro určení velikostí stran Pythagorových trojúhelníků udávají učebnice geometrie vzorce

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = a^2 + b^2 \quad (0)$$

s přirozenými čísly a, b splňujícími podmínky $a > b > 0$.

Definice. Pythagorovy trojúhelníky, jejichž strany jsou nesoudělná čísla, se nazývají trojúhelníky primitivní. Platí-li o stranách trojúhelníků, že $D(x, y, z) = d$, kde d je přirozené číslo > 1 , nazývají se příslušné trojúhelníky neprimitivní Pythagorovy trojúhelníky.

Aby řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

bylo primitivní, je nutné a stačí, aby jeden z navzájem nesoudělných parametrů a, b byl číslo sudé, druhé liché.¹⁾ Na objasnění uvádíme několik příkladů:

a	b	x	y		charakteristika
2	1	3	4	5	primitivní
5	4	9	40	41	primitivní
10	3	91	60	109	primitivní
4	2	12	16	20	neprimitivní
6	3	27	36	45	neprimitivní

Geometrie pythagorejských trojúhelníků rozlišuje ještě dva druhy primitivních Pythagorových trojúhelníků.

¹⁾ Podrobněji v článku dr. Rud. Plajner, Pythagorova čísla, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 37. 1959, str. 49.

Definice. Je-li velikost přepony primitivního pythagorejského trojúhelníku dána prvočíslem, nazývá se trojúhelník základní primitivní. Je-li velikost přepony dána číslem složeným, nazýváme trojúhelník rovněž primitivní složený.

V přehledu primitivních trojúhelníků, který dále uvádíme a který budeme v dalším potřebovat, jsou oba druhy rozlišeny různou sazbou (tabulka).

Primitivní pythagorejské trojúhelníky s přeponou menší než 1000

Poř.	x	y	z	P	Poř.	x	y		P
1.	3	4	5	6	39.	209	120	241	12 540
2.	5	12	13	30	40.	255	32	257	4 080
3.	15	8	17	60	41.	247	96	265	11 856
4.	7	24	25	84	42.	23	264	265	3 036
5.	21	20	29	210	43.	69	260	269	8 970
6.	35	12	37	210	44.	115	252	277	14 490
7.	9	40	41	180	45.	231	160	281	18 480
8.	45	28	53	630	46.	161	240	289	19 320
9.	11	60	61	330	47.	285	68	293	9 690
10.	63	16	65	504	48.	273	136	305	18 564
11.	33	56	65	924	49.	209	224	305	23 408
12.	55	48	73	1 320	50.	25	312	313	3 900
13.	77	36	85	1 386	51.	75	308	317	11 550
14.	13	84	85	546	52.	323	36	325	5 814
15.	39	80	89	1 560	53.	253	204	325	25 806
16.	65	72	97	2 340	54.	175	288	337	25 200
17.	99	20	101	990	55.	299	180	349	26 910
18.	91	60	109	2 730	56.	225	272	353	30 600
19.	15	112	113	840	57.	357	76	365	13 566
20.	117	44	125	2 574	58.	27	364	365	4 914
21.	105	88	137	4 620	59.	275	252	373	34 650
22.	143	24	145	1 716	60.	345	152	377	26 220
23.	17	144	145	1 224	61.	135	352	377	23 760
24.	51	140	149	3 570	62.	189	340	389	32 130
25.	85	132	157	5 610	63.	325	228	397	37 050
26.	119	120	169	7 140	64.	399	40	401	7 980
27.	165	52	173	4 290	65.	391	120	409	23 460
28.	19	180	181	1 710	66.	29	420	421	6 090
29.	153	104	185	7 956	67.	297	304	425	45 144
30.	57	176	185	5 016	68.	87	416	425	18 531
31.	95	168	193	7 980	69.	145	408	433	29 580
32.	195	28	197	2 730	70.	437	84	445	18 354
33.	187	84	205	7 854	71.	203	396	445	40 194
34.	133	156	205	10 374	72.	351	280	449	49 140
35.	171	140	221	11 970	73.	425	168	457	27 200
36.	21	220	221	2 310	74.	261	380	461	49 590
37.	221	60	229	6 630	75.	319	360	481	57 420
38.	105	208	233	10 920	76.	31	480	481	7 440

Poř.	x	y	z	P	Poř.	x	y	z	P
77.	483	44	485	10 626	118.	713	216	745	77 004
78.	93	476	485	22 134	119.	407	624	745	126 984
79.	475	132	493	31 350	120.	595	468	757	139 230
80.	155	468	493	36 270	121.	39	760	761	14 820
81.	377	336	505	63 336	122.	481	600	769	144 300
82.	217	456	505	49 476	123.	195	748	773	72 930
83.	459	220	509	50 490	124.	783	56	785	21 924
84.	279	440	521	61 380	125.	273	736	785	100 464
85.	525	92	533	24 150	126.	775	168	793	65 100
86.	435	308	533	66 990	127.	665	432	793	143 640
87.	341	420	541	71 610	128.	555	572	797	158 730
88.	513	184	545	47 196	129.	759	280	809	106 260
89.	33	544	545	8 976	130.	429	700	821	150 150
90.	165	532	557	43 890	131.	629	540	829	169 830
91.	493	276	565	68 034	132.	41	840	841	17 220
92.	403	396	565	79 794	133.	837	116	845	48 546
93.	231	520	569	60 060	134.	123	836	845	51 414
94.	575	48	577	13 800	135.	205	828	853	84 870
95.	465	368	593	85 560	136.	825	232	857	95 700
96.	551	240	601	66 120	137.	703	504	865	177 156
97.	35	612	613	10 710	138.	287	816	865	117 096
98.	105	608	617	31 920	139.	805	348	877	140 070
99.	527	336	625	88 536	140.	369	800	881	147 600
100.	621	100	629	31 050	141.	899	60	901	26 970
101.	429	460	629	98 670	142.	451	780	901	175 890
102.	609	200	641	60 900	143.	777	464	905	180 264
103.	315	572	653	90 090	144.	663	616	905	204 204
104.	589	300	661	88 350	145.	43	924	925	19 866
105.	385	552	673	106 260	146.	533	756	925	201 474
106.	675	52	677	17 550	147.	129	920	929	59 340
107.	667	156	685	52 026	148.	215	912	937	98 040
108.	37	684	685	12 654	149.	741	580	941	214 890
109.	561	400	689	112 200	150.	851	420	949	178 710
110.	111	680	689	37 740	151.	301	900	949	135 450
111.	455	528	697	120 120	152.	615	728	953	223 860
112.	185	672	697	62 160	153.	957	124	965	59 334
113.	651	260	701	84 630	154.	387	884	965	171 054
114.	259	660	709	85 470	155.	945	248	977	117 180
115.	627	364	725	114 114	156.	697	696	985	242 556
116.	333	644	725	103 896	157.	473	864	985	204 336
117.	725	108	733	39 150	158.	925	372	997	172 050

Věnujme nyní pozornost obsahu pythagorejského trojúhelníka. Půjde-li o trojúhelník primitivní o stranách x , y , z , bude jeho obsah

$$P = \frac{x y}{2} = ab (a^2 - b^2),$$

nebo po rozkladu v činitele a vhodné úpravě

$$P = b(a - b)a(a + b) \quad (2)$$

Po tom, co bylo řečeno o přirozených číslech a , b je jasné, že všichni čtyři činitelé na pravé straně vzorce (2) jsou nesoudělná přirozená čísla. Obsah neprimitivního pythagorejského trojúhelníka o stranách dx , dy , dz bude vyjádřen podobně vzorcem

$$P = d^2 b(a - b)a(a + b), \quad (2a)$$

kde činitelé b , $a - b$, a , $a + b$ jsou rovněž nesoudělná přirozená čísla.

Pátrání po pythagorejských trojúhelnících o stejném obsahu je úkol prastarý a byl oživen v roce 1775 známým vědeckým sporem Laplace a Eulera (který byl již 8 let slepý), dvou vynikajících matematiků té doby. Euler tvrdil, že je možné sestavit několik pravoúhlých trojúhelníků, které mají stejný obsah a jejichž strany jsou celá čísla. Laplace to popíral a vyzval Eulera, aby je tedy našel. Po nesmírné námaze našel Euler tři a prohlásil, že hledání čtvrtého k nim je problém na staletí pilné práce. Technický magazín T 61, seš. 11., str. 697, který předložil tento problém i českým odborníkům, v řešení oznámil, že trojúhelníky, které Euler našel, měly obsahy 3360 a strany 48, 140, 148; 84, 80, 116; 224, 30, 226 a že jsou možné i další, nebyly však dosud nalezeny.

Ukážeme nyní, že vyhledávání pythagorejských trojúhelníků o stejném obsahu není tak nesnadné, jak se obecně soudí. Úkol bude uspokojivě rozřešen tehdy, podaří-li se nám rozložit číslo, udávající velikost obsahu trojúhelníka, nějakým způsobem podle vzorce (2) v takové čtyři nesoudělné činitele, aby tři z nich vyjadřovaly tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti $a - b$, a , $a + b$ a čtvrtý činitel b byl diferencí této posloupnosti. Úspěšně provedené rozklady vedou k primitivním trojúhelníkům.

(Pokračování)

J a n a N á h u n k o v á, Kaliště:

Jedna vlastnost pravoúhlého čtyřstěnu

Pythagorova věta v rovině je každému dobře známa. Jen pro úplnost ji zde zopakujeme v této formulaci:

V ě t a 1. Součet druhých mocnin délek dvou vzájemných kolmých stran trojúhelníka rovná se druhé mocnině délky třetí strany.

Označíme-li strany trojúhelníka p_1 , p_2 , p_3 , kde p_1 je kolmé na p_2 , pak platí $p_1^2 + p_2^2 = p_3^2$.

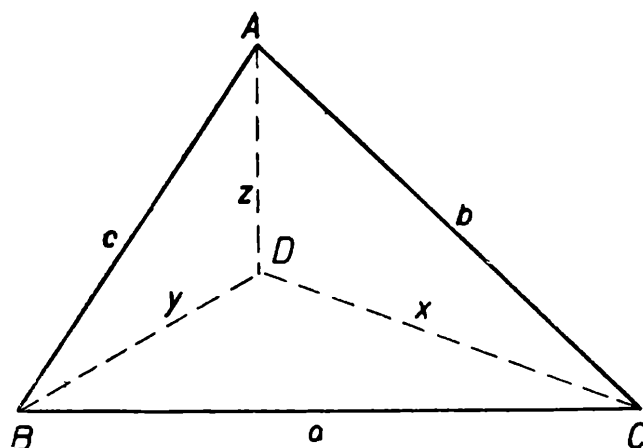
Nebudeme zde dokazovat její platnost, ale ukážeme si její analogii v prostoru.

Mějme pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$, kde každé dvě stěny ABD , BCD , CAD jsou na sebe kolmé (obr. 1).

Trojúhelníky ABD , BCD a CAD jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu D . (1)

Označme si: Obsah trojúhelníka $CAD = P_1$, obsah trojúhelníka $BCD = P_2$, obsah trojúhelníka $ABD = P_3$ a obsah trojúhelníka $ABC = P_4$. A nyní vyslovíme větu, která je prostorovou analogií věty Pythagorovy:

V ě t a 2. *Součet druhých mocnin obsahů tří stěn čtyřstěnu, z nichž každé dvě jsou k sobě kolmé, rovná se druhé mocnině obsahu čtvrté stěny, tedy*
 $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P_4^2$ (2)



Obr. 1

D ů k a z. Důkaz provedeme na základě použití a úpravy Heronova vzorce. Označme si $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CD = x$, $BD = y$, $AD = z$. Z (1) plyne

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + z^2 \\ a^2 &= x^2 + y^2 \\ c^2 &= y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Nyní si vypočteme P_1^2 , P_2^2 , P_3^2 , P_4^2

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} xz & P_1^2 &= \frac{1}{4} x^2 z^2 \\ P_2 &= \frac{1}{2} yz & P_2^2 &= \frac{1}{4} y^2 z^2 \\ P_3 &= \frac{1}{2} xy, & P_3^2 &= \frac{1}{4} x^2 y^2 ; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ P^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) = \\ &= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \\ &= \frac{1}{16} [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2] [a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)] \end{aligned}$$

Dosadíme-li z (3), dostaneme

$$P_4^2 = \frac{1}{16} [x^2 + z^2 + 2 \sqrt{(x^2 + z^2) \cdot (y^2 + z^2)} + y^2 + z^2 - x^2 - y^2] \cdot [x^2 + y^2 - x^2 - z^2 + 2 \sqrt{(x^2 + z^2) (y^2 + z^2)} - y^2 - z^2]$$

Po úpravě

$$P_4^2 = \frac{1}{4} (x^2 z^2 + x^2 y^2 + y^2 z^2) = \frac{1}{4} x^2 z^2 + \frac{1}{4} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^2 z^2$$

Dosadíme-li do (2) z (4), dostaneme

$$P_4^2 = \frac{1}{4} x^2 y^2 + \frac{1}{4} x^2 z^2 + \frac{1}{4} y^2 z^2 ,$$

čili

$$P_4^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$$

Bohuslava Haňková CSc., ČVUT,
František Hrnčíř, studující ČVUT, Praha:

Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti

(Pokračování)

A. Jednoduché vlastnosti Fibonacciových čísel

1. Součet prvních n Fibonacciových čísel je

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1 , \quad (3)$$

protože z podmínky (2) plyne

$$a_1 = a_3 - a_2 ,$$

$$a_2 = a_4 - a_3$$

$$a_3 = a_5 - a_4 ,$$

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n ,$$

$$a_n = a_{n+2} - a_{n+1} .$$

Sečteme-li postupně tyto rovnice a položíme-li $a_2 = 1$, dostaneme hledaný součet.

2. Součet Fibonacciových čísel s lichými indexy je

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n} . \quad (4)$$

Pro důkaz této rovnosti napíšme

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2, \\ a_3 &= a_4 - a_2, \\ a_5 &= a_6 - a_4, \end{aligned}$$

$$a_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n-2}.$$

Opět postupným sečítáním dostaneme rovnost (4).

3. Pro součet Fibonacciových čísel se sudými indexy platí

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1 \quad (5)$$

Podle rovnice (3) platí také $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n} = a_{2n+2} - 1$. Odečteme-li od této rovnice rovnici (4), dostaneme

$$a_2 + a_4 + a_{2n} = a_{2n+2} - 1 - a_{2n} = a_{2n+1} - 1,$$

což jsme chtěli dokázat.

4. Součet Fibonacciových čísel, jejichž znaménka se střídají, je

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n = (-1)^{n+1} a_{n-1} + 1 \quad (6)$$

Důkaz provedeme takto: Odečtením (5) od (4) dostaneme

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = -a_{2n-1} + 1. \quad (7)$$

K oběma stranám této rovnice přičteme a_{2n+1} :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} + a_{2n-1} = a_{2n} + 1 \quad (8)$$

Spojením (7) a (8) dostaneme naše tvrzení.

5. Součet čtverců prvních n Fibonacciových čísel je

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1} \quad (9)$$

Pro důkaz této vlastnosti si všimněme, že

$$a_k a_{k+1} - a_{k-1} a_k = a_k (a_{k+1} - a_{k-1}) = a_k^2$$

Postupným sečítáním rovnic

$$\begin{aligned} a_1^2 &= a_1 a_2, \\ a_2^2 &= a_2 a_3 - a_1 a_2, \\ a_3^2 &= a_3 a_4 - a_2 a_3, \end{aligned}$$

$$a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_{n-1} a_n$$

dostaneme rovnici (9).

6. Důkaz platnosti rovnice

$$a_{n+m} = a_{n-1} a_m + a_n a_{m+1} \quad (10)$$

provedeme matematickou indukci²⁾.

Pro $m=1$ tato rovnice má tvar

$$a_{n+1} = a_{n-1} a_1 + a_n a_2 = a_{n-1} + a_n,$$

protože $a_1 = a_2 = 1$. Pro $m=2$ je rovnice (10) také správná, protože

$$a_{n+2} = a_{n-1} a_2 + a_n a_3 = a_{n-1} + 2a_n = a_{n-1} + a_n + a_n = a_{n+1} + a_n$$

Dále předpokládejme, že rovnice (10) je správná pro $m=k$ a pro $m=k+1$ a dokažme její správnost pro $m=k+2$. Tedy

$$a_{n+k} = a_{n-1} a_k + a_n a_{k+1},$$

$$a_{n+k+1} = a_{n-1} a_{k+1} + a_n a_{k+2}.$$

Sečtením obou rovnic dostaneme

$$a_{n+k+2} = a_{n-1} a_{k+2} + a_n a_{k+3},$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 1. Položíme-li v rovnici (10) $m=n$, dostaneme

$$a_{2n} = a_{n-1} a_n + a_n a_{n+1} = a_n (a_{n-1} + a_{n+1}) \quad (11)$$

Z toho vidíme, že číslo a_{2n} je dělitelné číslem a_n . Později dokážeme ještě obecnější větu o dělitelnosti Fibonacciových čísel.

Poznámka 2. Protože $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$, můžeme rovnost (11) přepsat do tvaru

$$a_{2n} = (a_{n+1} - a_{n-1}) (a_{n+1} + a_{n-1}) = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2,$$

tj. rozdíl čtverců dvou Fibonacciových čísel, jejichž indexy se liší o 2, je opět Fibonacciovo číslo. Analogicky (položíme-li $m=2n$) můžeme dokázat, že

$$a_{3n} = a_{n+1}^3 + a_n^3 - a_{n-1}^3$$

7. Pomocí předchozích vlastností Fibonacciových čísel je možno dokázat např. tyto další tři vlastnosti (důkazy ponecháváme čtenáři):

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{2n-1} a_{2n} &= a_{2n}^2, \\ a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{2n} a_{2n+1} &= a_{2n+1}^2 - 1, \\ na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \dots + 2a_{n-1} + a_n &= a_{n+4} - (n+3). \end{aligned}$$

8. Existuje také souvislost Fibonacciových čísel s jinými rovněž pozoruhodnými čísly, totiž s binomickými koeficienty.

Jak známo, binomické koeficienty tvoří Pascalův trojúhel-

²⁾ Důkaz věty matematickou (nebo též úplnou) indukci spočívá v následující myšlence: 1. Větu dokážeme pro $n=1$.

2. Předpokládáme, že věta platí pro $n=k$ a za tohoto předpokladu ji dokážeme pro $n=k+1$.

n í k. Napišme jej ve tvaru

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Přímky, vedené přes čísla tohoto trojúhelníka pod úhlem 45° k jeho řádkům, nazveme hlavními diagonálami Pascalova trojúhelníka. Takovou hlavní diagonálou je např. přímka, jdoucí přes čísla 1, 4, 3, nebo 1, 5, 6, 1 atd. Dokážeme, že součet čísel, ležících na některé této diagonále, je Fibonacciovo číslo.

Na prvních dvou hlavních diagonálách leží vskutku jedničky. Dále stačí dokázat, že součet všech čísel, tvořících $(n - 2)$ -hou a $(n - 1)$ -ní diagonálu Pascalova trojúhelníka, je roven součtu čísel, tvořících n -tou diagonálu. Na $(n - 2)$ -hé diagonále leží čísla

$$\binom{n-3}{0}, \binom{n-4}{1}, \binom{n-3}{2}, \dots,$$

na $(n - 1)$ -vé diagonále leží čísla

$$\binom{n-2}{0}, \binom{n-3}{1}, \binom{n-4}{2},$$

Součet všech těchto čísel napíšme ve tvaru

$$\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots \quad (12)$$

Pro binomické koeficienty však platí

$$\binom{n-2}{0} = \binom{n-1}{0} = 1 \quad \text{a} \quad \binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}$$

Proto výraz (12) je roven

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$$

tj. součtu čísel, ležících na n -té diagonále.

Využijeme-li rovnosti (3), ihned dostáváme větu:

Součet všech binomických koeficientů, ležících na hlavní diagonále Pascalova trojúhelníka a nad ní, je roven $a_{n+2} - 1$ z posloupnosti Fibonacciových čísel.

Užitím vztahů (4), (5), (6) a jim podobných může čtenář sám bez obtíží najít další vztahy mezi Fibonacciovými čísly a binomickými koeficienty.

9. Při důkazech vlastností 1. až 8. jsme užívali Fibonacciových čísel, vyjádřených rekurentně. Ptáme se nyní, zda Fibonacciova posloupnost se dá vyjádřit přímo ve tvaru určité funkce indexu.

Vyšetřujme proto soubor všech posloupností, vyhovujících vztahu (2). Každou takovou posloupnost nazveme řešením rovnice (2). Nechť písmeno V značí posloupnost $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ písmeno V' posloupnost $v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n, \dots$ a písmeno V'' posloupnost $v''_1, v''_2, v''_3, \dots, v''_n, \dots$. Budtež V' a V'' dvě nezávislá řešení rovnice (2), tj. taková dvě řešení rovnice (2), že k libovolně dané konstantě c lze udat takový index n , pro který

$$\frac{v'_n}{v''_n} \neq c.$$

Lze dokázat, že každá posloupnost V se členy tvaru (2) se dá vyjádřit vztahem

$$c_1 V' + c_2 V'' = V$$

Abychom dostali všechna řešení rovnice (2), znamená to, že stačí najít kterákoliv dvě její nezávislá řešení. Protože chceme vyjádřit n -tý člen posloupnosti V (posloupnosti Fibonacciových čísel) pomocí indexu n , musíme najít takové posloupnosti V', V'' , u kterých n -tý člen pomocí indexu umíme vyjádřit.

Hledejme posloupnosti V', V'' ve tvaru geometrických posloupností $1, q, q^2, \dots$. Aby byla splněna rovnice (2), musí platit

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

neboli

$$1 + q = q^2,$$

z čehož

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Posloupnost V' má tedy tvar

$$1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

posloupnost V'' je

$$1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3, \dots, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Označíme-li $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \beta$, potom každá posloupnost, vyhovující rovnici (2), dá se vyjádřit ve tvaru

$$c_1 + c_2, \quad c_1 \alpha + c_2 \beta, \quad c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2,$$

Vypočítejme čísla c_1, c_2 tak, abychom z této posloupnosti dostali posloupnost Fibonacciových čísel. Musí platit

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 = a_1, \\ c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} &= 1 = a_2. \end{aligned}$$

Řešíme-li tuto soustavu lineárních rovnic pro c_1, c_2 , dostáváme

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Je tedy konečně

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 \alpha^{n-1} + c_2 \beta^{n-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \\ &- \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Tento vztah ukazuje, jak vypočíst n -tý člen posloupnosti Fibonacciových čísel pomocí indexu n .

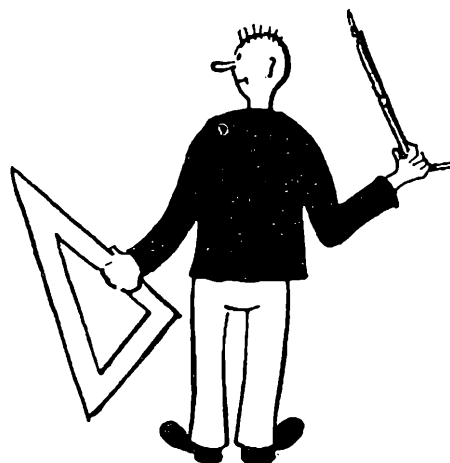
(Pokračování)

Deskriptivní geometrie

Doc. inž. Ladislav Drs, CSc.,
a Oldřich Jeništa, ČVUT, Praha:

Určité konstrukce elipsy a oválu

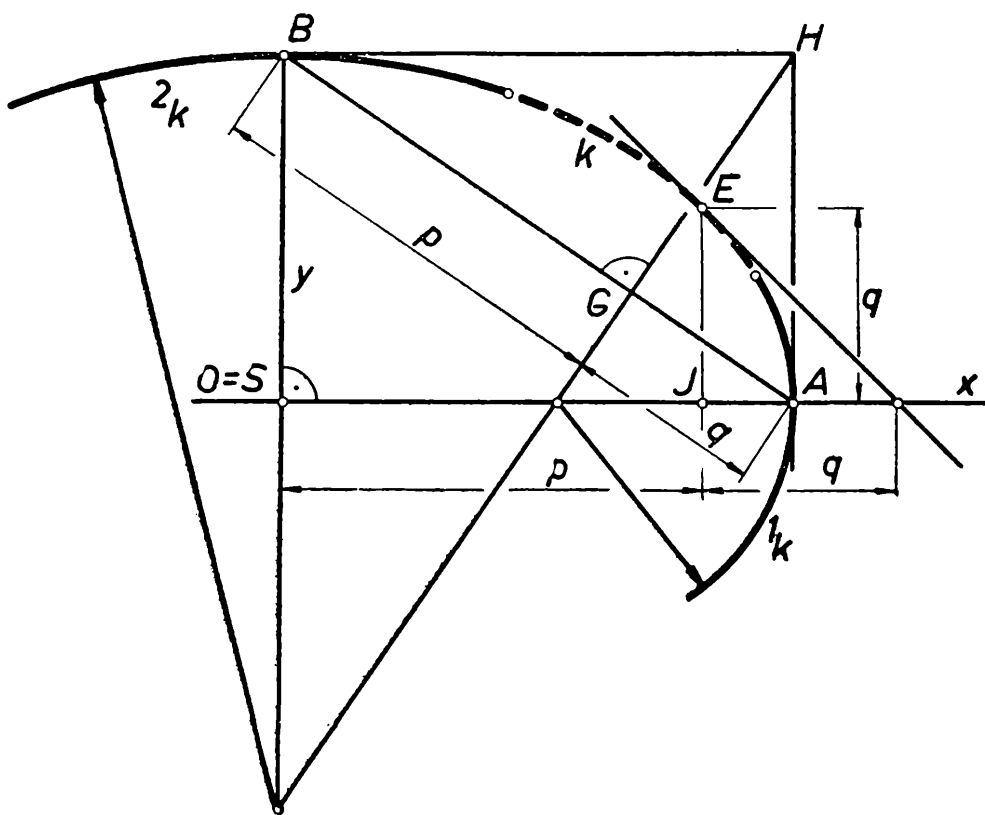
Obvyklými rýsovacími prostředky (kružítkem, pravítkem, křivítkem) nelze elipsu přesně sestavit. Eliptický oblouk se proto aspoň částečně nahrazuje oblouky kruhovými. V okolí vrcholů elipsy užíváme proto oblouků tzv. hyperoskulačních kružnic. Konstrukce těchto kružnic je známá. Pro osvěžení paměti je tato konstrukce provedena na obr. 1. Je však zřejmé, že dále od vrcholů se již hyperoskulační kružnice znatelně odchylují od eliptického oblouku, a proto část tohoto oblouku mezi oblouky $^1k, ^2k$ hyperoskulačních kružnic nahrazujeme



vhodným obloukem k křivítka. Aby se tento oblouk jen málo lišil od skutečného oblouku elipsy, bylo by prospěšné, kdybychom mohli v těchto místech stanovit přesně polohu jednoho nebo více bodů elipsy. Jeden takový bod můžeme velmi snadno sestrojít. Je to bod E elipsy, v němž tečna elipsy svírá s její osou úhel 45° . Označme jeho souřadnice p, q , kde p, q jsou úseky přepony AB trojúhelníka, kterého používáme ke konstrukci hyperoskulačních kružnic.

D ů k a z. Bod $E(p, q)$ leží na elipse s poloosami $a = SA, b = SB$, jejíž rovnice je tedy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1^1)$$



Obr. 1

Dosadíme-li do této rovnice souřadnice bodu E , tj.

$$x_E = p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_E = q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

je rovnice splněna.

¹⁾ O analytickém vyjádření elipsy a její tečny rovnicí viz článek doc. Emila Kraemera, O analytické geometrii v rovině, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 39, 1960–61, seš. 5, str. 193.

Že souřadnice p, q bodu E se rovnají úsekům BG, GA , (obr. 1), lze takto dokázat:

$$\triangle BGH \sim \triangle ASB \Rightarrow \frac{BG}{BH} = \frac{AS}{AB},$$

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\triangle HGA \sim \triangle ASB \Rightarrow \frac{GA}{HA} = \frac{SB}{AB},$$

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Leží-li bod E o souřadnicích p, q na elipse, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici elipsy, čili

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1,$$

po dosazení

$$\frac{a^4}{a^2(a^2 + b^2)} + \frac{b^4}{b^2(a^2 + b^2)} = 1,$$

$$1 = 1$$

Bod E tedy je bodem elipsy a sestrojíme jej tak, že učiníme $SJ = BG$ a $JE = GA$.

Rovnice tečny elipsy v bodě E je

$$\frac{x \cdot x_E}{a^2} + \frac{y \cdot y_E}{b^2} = 1,$$

což po dosazení a úpravě dá rovnici

$$y = -x + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Směrnice této tečny (koeficient u x) je -1 , svírá tedy tečna s hlavní (a ovšem i s vedlejší) osou elipsy úhel 135° (resp. 45°). Prostý člen rovnice tečny je $\sqrt{a^2 + b^2} = AB$, protíná proto tečna vedlejší a ovšem i hlavní osu ve vzdálenosti AB od středu S .

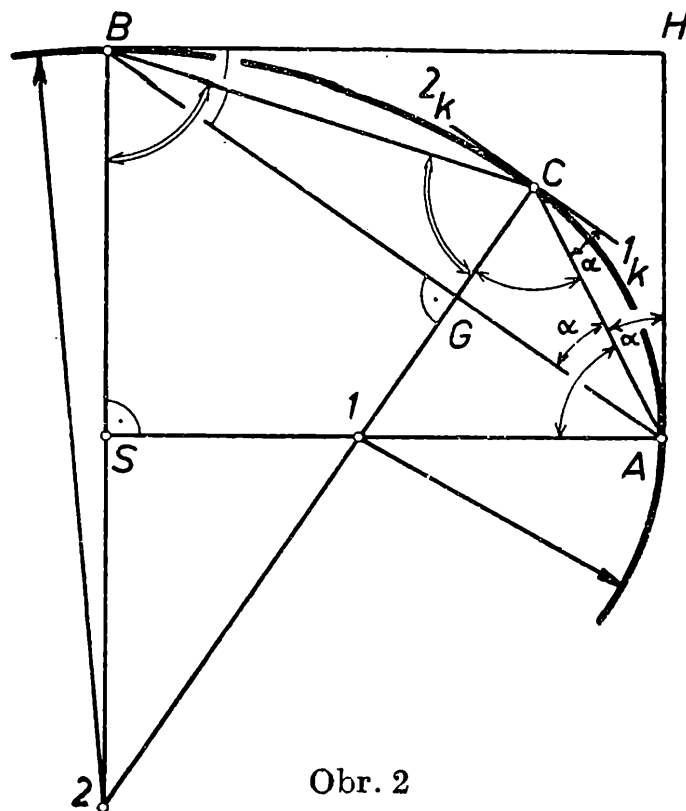
Elipsu s poloosami a, b lze přibližně nahradit křivkou složenou jen

z kruhových oblouků, tzv. o v á l e m. Na obr. 2 je provedena konstrukce oválu nad poloosami SA , SB . Jako při konstrukci hyperoskulačních kružnic sestrojíme nejprve obdélník $SAHB$ se stranami SA , SB a jeho úhlopříčku AB . Osy úhlů určených úhlopříčkou AB a stranami tohoto obdélníka AH a BH se protnou v bodě C . Kolmice vedená bodem C k úhlopříčce AB protne osy elipsy (či správně oválu) ve středech 1 , 2 kružnic 1k , 2k , které procházejí vrcholy A , B a navzájem se dotýkají v bodě C . Trojúhelník $\triangle IAC$ je totiž rovnoramenný, jeho úhly při vrcholech A , C jsou si rovny a jsou doplňkové k úhlu α . Podobně jsou si rovny úhly při vrcholech B , C v trojúhelníku $\triangle 2BC$, tento trojúhelník je rovnoramenný a $2B = 2C$.

Tuto konstrukci můžeme takto odůvodnit

$$\sphericalangle HAC = \sphericalangle BAC = \alpha,$$

$$\sphericalangle HBC = \sphericalangle ABC = \beta$$



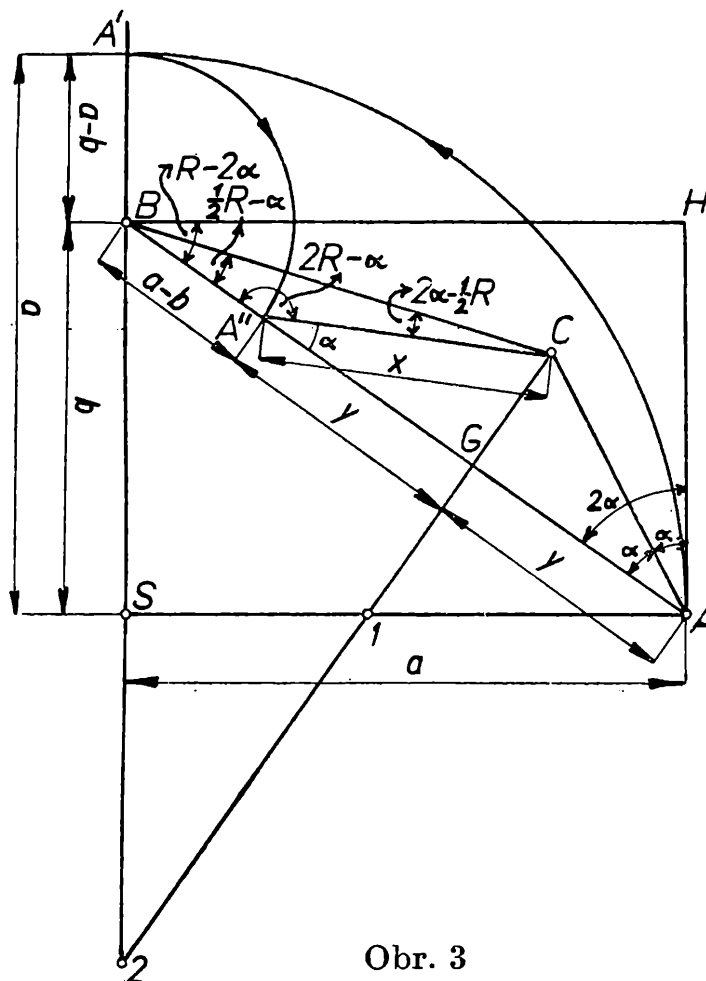
Obr. 2

Nahradíme-li oblouk $\widehat{AC}$ elipsy kružnicí 1k o středu 1 , bude úsečka AC tětivou této kružnice, a proto musí úhel α mezi tětivou AC a tečnou v bodě C se rovnat úhlu α mezi tětivou AC a tečnou v bodě A . Tečna v bodě C musí být kolmá k poloměru IC . Spojnice IC byla však sestrojena kolmo k úhlopříčce AB , a proto tečna v bodě C je rovnoběžná se spojnicí AB . Jestliže tedy tečna v bodě C a úhlopříčka AB jsou rovnoběžky, pak tětiva AC je jejich příčkou. Pak ovšem i úhel mezi tětivou AC a úhlopříčkou AB se musí rovnat úhlu α mezi tětivou AC a tečnou v bodě C (vnitřní úhly střídavé). Je tudíž bod C na ose úhlu BAH . Stejně bychom dokázali, že bod C musí být i na ose úhlu ABH .

Nahrazování elipsy oválem se užívá zejména v technické praxi, kde přesné rýsování elipsy není nutné. Proto téměř žádná učebnice technického kreslení neopomene uvést některou konstrukci oválu. Velmi často bývá uváděna tato konstrukce oválu (obr. 3):

Poloosy elipsy, kterou máme nahradit oválem, jsou SA , SB . Na prodlouženou vedlejší osu SB nanese se $SA' = SA = a$, takže $BA' = a - b$. Přeneseme pak BA' na spojnici BA od bodu B do A'' , takže i $BA'' = a - b$. Osa úsečky $A''A$ protne spojnici AB v bodě G , hlavní osu v bodě 1 a vedlejší osu v bodě 2 . Poněvadž $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $BA'' = a - b$, vyplývá

$$AG = A''G = \frac{1}{2} AA'' = \frac{1}{2} [\sqrt{a^2 + b^2} - (a - b)]$$



Obr. 3

Body $1, 2$ jsou týmiž středy kružnic $^1k, ^2k$, které vytvořily ovál při konstrukci, uvedené v obr. 2. Je-li tomu tak, pak bod C , v obr. 3, musí být průsečíkem os úhlů BAH a ABH , jak je tomu v obr. 2. Označme proto v obr. 3 $\sphericalangle GAC = \alpha$, $\sphericalangle GAH = 2\alpha$, $A''C = x$ a $A''G = AG = y$. Pro úhly pak platí tyto vztahy:

V $\triangle ABH$ je $\sphericalangle BAH = 2\alpha$, a tedy $\sphericalangle ABH = R - 2\alpha$.

V $\triangle A''BC$ je $\sphericalangle BA''C = 2R - \alpha$,

$\sphericalangle A''BC = \frac{1}{2}R - \alpha$

a tedy $\sphericalangle A''CB = 2R - (2R - \alpha) - (\frac{1}{2}R - \alpha)$

Použitím sinové věty obdržíme z $\triangle A''BC$

$$\begin{aligned}\frac{x}{a-b} &= \frac{\sin(\frac{1}{2}R - a)}{\sin(2a - \frac{1}{2}R)}; \\ y &= x \cdot \cos a, \\ y &= \frac{(a-b) \cdot \sin(\frac{1}{2}R - a) \cos a}{\sin(2a - \frac{1}{2}R)} = \\ &= \frac{(a-b) (\sin \frac{1}{2}R \cos a - \cos \frac{1}{2}R \sin a) \cos a}{\sin 2a \cos \frac{1}{2}R - \cos 2a \sin \frac{1}{2}R} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}(a-b)(\cos a - \sin a) \cos a}{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin 2a - \cos 2a)} = \frac{(a-b)(\cos^2 a - \sin a \cos a)}{\sin 2a - \cos 2a} = \\ &= \frac{(a-b) [\frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \frac{1}{2} \sin 2a]}{\sin 2a - \cos 2a} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(a-b) \left[1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(a-b) \sqrt{a^2+b^2} + \frac{1}{2}(a-b)(b-a)}{a-b} = \frac{1}{2} [\sqrt{a^2+b^2} - (a-b)].\end{aligned}$$

Jestliže tedy i pomocí vztahů mezi úhly zavedenými v obr. 2 docházíme k stejné délce úsečky AG v obou konstrukcích, pak obě konstrukce vedou k týmž středům $1, 2$ kružnic ${}^1k, {}^2k$, z nichž je složen ovál. _j



Zdeněk Kupka, Praha:

K pojmu setrvačná síla

Fyzika

Velmi často se setkáváme s úkolem určit v jistém okamžiku polohu tělesa, které se vzhledem k druhému tělesu pohybuje a stanovit velikost síly, která tento pohyb vyvolala. V běžných případech, kdy rychlost pohybu nenabývá hodnot blízkých se k rychlosti šíření světla, použijeme k řešení zákonů kinematiky a dynamiky, s kterými jsme se seznámili při

studiu základů Newtonovy mechaniky.¹⁾ Málokdy si však uvědomujeme, že se na fyzikální jevy můžeme dívat v různých podmínkách.

Uvažujme například zákon setrvačnosti. Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, není-li vnějšími silami přinuceno tento stav změnit. V určitém přiblížení si můžeme jeho platnost ověřit jednoduchým pokusem. Vrheme postupně malé koule po vodorovných rovinách. Při použití různě hladkých ploch a koulí zjistíme z pozorování, že pohyb koulí se bude blížit k pohybu rovnoměrnému tím více, čím hladší plochy a koule k pokusu použijeme, tj. čím více vyloučíme vliv tření a odporu vzduchu.²⁾

K jakému výsledku by však dospěl pozorovatel, který by týž pokus prováděl v místnosti bez oken a jakéhokoliv spojení s vnějším světem, kdybychom bez jeho vědomí tuto místnost uvedli do otáčivého pohybu? Již v nejjednodušším případě koule, která je původně klidná vzhledem k místnosti a neleží na ose otáčení místnosti, se při otáčení dá do pohybu ve směru od osy otáčení. Na základě tohoto sledování může pozorovatel udělat závěr, že neplatí v jeho místnosti zákon setrvačnosti.

Z tohoto příkladu je vidět, že se musíme také zabývat otázkou, kdy a za jakých podmínek platí zákony mechaniky, tj. pro které souřadnicové soustavy a pro jakou časovou škálu. Všimněme si tohoto problému poněkud blíže.

Pohyb definujeme jako změnu polohy nějakého tělesa vůči tělesům ostatním, která pokládáme za klidná. Pozorujeme-li tedy pohybující se těleso, musíme zvolit jiná pevná tělesa, ke kterým tento pohyb vztahujeme. Tato klidná tělesa nahrazujeme souřadnicovou soustavou, ve které potom pohyb sledujeme. Polohu těles v určitém okamžiku určujeme jeho souřadnicemi. Pro zjednodušení budeme užívat pravoúhlé souřadné soustavy se třemi navzájem kolmými osami x , y , z (obr. 1).

Poloha bodu A (a , b , c) v pravoúhlé souřadnicové soustavě je potom dána úsečkou o velikosti a na ose x , délku o velikosti b na ose y a c na ose z . Například pro $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, tedy A (3; 4; 5), najdeme polohu bodu A v prostoru podle obr. 1. Na osu x nanese úsečku $a = 4$ a na

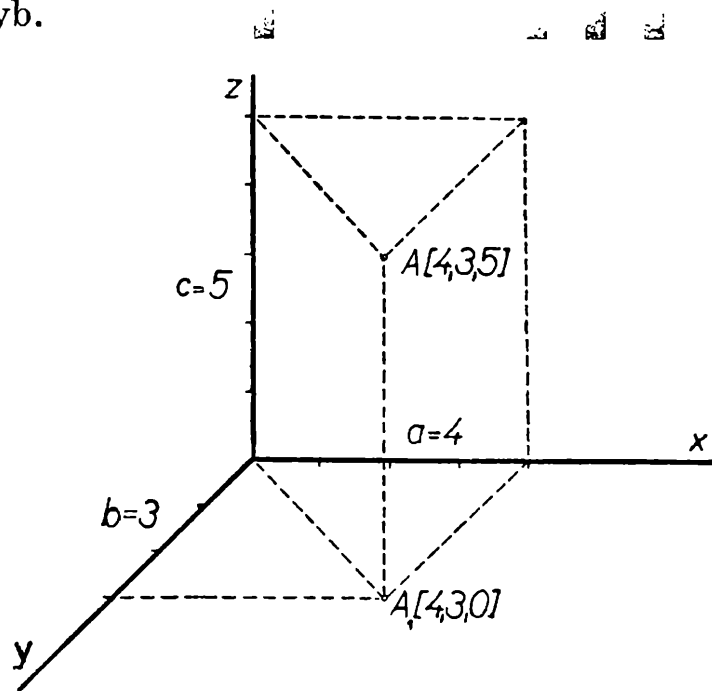
¹⁾ Tj. mechaniky těles, která se pohybují malou rychlostí ve srovnání s rychlostí světla. Zákony těles pohybujících se rychlostí blíží se rychlosti světla popisuje mechanika relativistická. Zde již musíme používat zákonů speciální teorie relativity, které jsou obecnějším vyjádřením zákonů mechaniky. Newtonovy zákony jsou potom jejich speciálním případem za předpokladu malých rychlostí (asi do $60\,000\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$). Při obecném řešení našeho úkolu museli bychom tedy uvažovat zákony speciální teorie relativity.

²⁾ Toto přibližování nelze dělat do nekonečna. Při určité, i když značné hladkosti plochy a koule začínají mezi nimi také působit mezimolekulární přitažlivé síly a velikost tření se potom značně zvětšuje.

osu y úsečku o velikosti $b = 3$. Pomocí rovnoběžníku sestrojíme bod A_1 . Nyní naneseme na osu z úsečku velikosti $c = 5$ a v rovině dané osou z a bodem A_1 pomocí rovnoběžníku najdeme bod A . Bod A je třemi souřadnicemi v prostoru jednoznačně určen a opačně každému bodu odpovídají tři čísla - souřadnice.

Nás bude zajímat, zda je lhostejné, která tělesa si zvolíme za klidná, neboli jak zvolíme soustavu souřadnic.

Z hlediska kinematiky vidíme, že je jedno, která tělesa si zvolíme jako klidná, neboť vždy můžeme pozorovat jenom relativní pohyby. Zákony kinematiky platí tedy vždy bez ohledu na to, v jaké soustavě souřadnic sledujeme pohyb.



Obr. 1

Jak je tomu se zákony dynamiky? Představme si, že užijeme souřadnicové soustavy spojené pevně se stěnami vagónu. To znamená, že vztahujeme všechny polohy pohybujícího se tělesa vzhledem k pevným stěnám vagónu. Dvě souřadnice budou určovat vzdálenosti od dvou navzájem kolmých stěn a třetí vzdálenost od podlahy, nebo od stropu. Jako příklad vezmeme vlak, který se pohybuje po přímé trati bez otřesů. Jestliže budeme v této souřadnicové soustavě zkoumat platnost Newtonových zákonů dynamiky, zjistíme, že výsledek bude záviset na tom, jak se pohybuje vagón, tedy souřadnicová soustava, ve které pozorujeme.

Je-li vagón vzhledem k Zemi v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, ukazují pokusy konané v takovém vagónu, že všechny mechanické děje probíhají pro pozorovatele ve vlaku stejně jako na Zemi, bez ohledu na rychlost, jakou se vagón pohybuje. Zde tedy Newtonovy pohybové zákony platí. Takové souřadnicové soustavy, v nichž platí Newtonovy zákony, nazýváme *soustavami inerciálními* (lex inertiae - zákon setrvačnosti).

Abychom zjistili, zda tedy existují i souřadnicové soustavy, ve kterých Newtonovy zákony neplatí (*neinerciální*), provedeme pozorování při nerovnoměrném pohybu vůči Zemi. Z vlastní zkušenosti víme, že v rozjíždějícím nebo zastavujícím se vlaku z hlediska cestujícího, který pohyb vztahuje na stěny vagónu, zákon setrvačnosti neplatí. Předměty na stolicích se bez působení vnější síly dávají do pohybu, cestující pociťuje tlak v opačném směru než je směr zrychlení vagónu. Příklad zastavování a rozjíždění vlaku je příkladem pohybu postupného nerovnoměrného vzhledem k Zemi. Příklad vlaku v zatáčce, nebo již v úvodu uvedený příklad s otáčející se místností jsou případy pohybu otáčivého vzhledem k Zemi. Pozorování nám tedy ukazuje, že při nerovnoměrném pohybu soustavy souřadnic vůči Zemi tato soustava není inerciální.

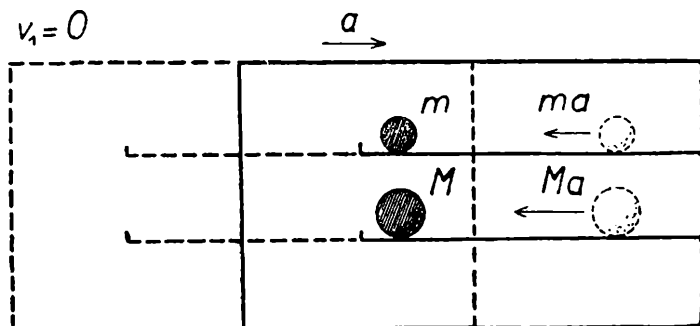
Při pokusu ve vagónu, který se pohybuje rovnoměrně přímočaře vzhledem k Zemi a představuje pro nás tedy souřadnicovou soustavu inerciální, zjistíme, že platnost Newtonových zákonů nezávisí vůbec na rychlosti pohybu souřadnicové soustavy. Mohli bychom si tedy zvolit nekonečně mnoho soustav souřadnic, které by se pohybovaly vůči Zemi různými konstantními rychlostmi a všemi možnými směry a zjistili bychom, že ve všech stejně platí Newtonovy zákony mechaniky. Žádným způsobem nemůžeme určit, která z nich je základní, od které bychom mohli vycházet. Všechny inerciální soustavy jsou stejně oprávněné, vzájemně se vůči sobě pohybují rovnoměrně přímočaře. Ve všech probíhají mechanické děje stejně a žádným mechanickým pokusem nelze prokázat, zda je soustava v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Při přechodu z jedné soustavy souřadnic do druhé se sice mění souřadnice a rychlosti, ale síla a změna rychlosti zůstávají nezměněny.

Souhrnně lze o inerciálních soustavách říci toto: Jsou to všechny soustavy, ve kterých platí Newtonovy zákony mechaniky. Je jich nekonečně mnoho. Vůči sobě se pohybují rovnoměrně přímočaře a jsou vzájemně naprosto rovnoprávné.

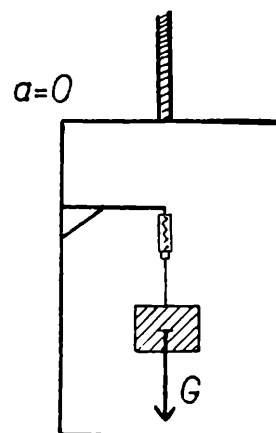
Ve svých úvahách jsme vycházeli ze souřadnicové soustavy spojené s naší Zemí. Vyskytuje se otázka: Je tato soustava souřadnic skutečně inerciální, když existuje rotace Země kolem osy a obíhání Země kolem Slunce? Existuje řada pokusů, kde bychom přesnými měřeními mohli zjistit malé odchylky od mechanických zákonů. Tyto odchylky jsou vzhledem k poměrně pomalým změnám pohybu Země velmi malé. Proto můžeme s dostatečnou přesností souřadnicovou soustavu spojenou se Zemí považovat za inerciální. Dalším přiblížením k inerciální soustavě je soustava souřadnic spojená se Sluncem a dále soustava souřadnic spojená s Galaxií.

Představme si nyní, že jedna stěna vagónu je skleněná a všechny děje uvnitř vagónu může sledovat jak pozorovatel uvnitř, tak pozorovatel vně vagónu. Nechť se vagón rozjíždí pohybem přímočarým rovnoměrně zrychleným. Oba pozorovatelé budou sledovat chování koule volně po-

ložené na velkém stole. Pozorovatel vně vagónu, který pohyb vztahuje k souřadnicové soustavě Země tvrdí, že koule setrvává ve stavu klidu ve shodě se zákonem setrvačnosti, a proto se pohybuje vůči stolu ve směru opačném ke směru změny rychlosti vagónu.

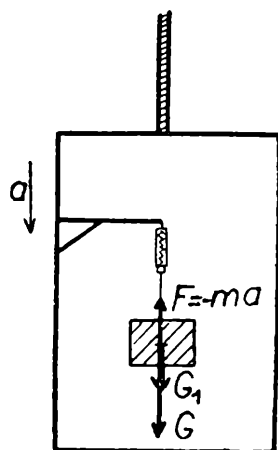


Obr. 2

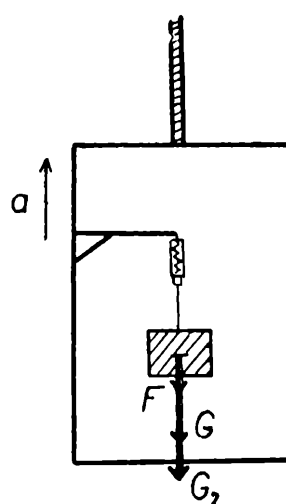


Obr. 3

Pozorovatel uvnitř vagónu, který pohyb vztahuje na soustavu spojenou s vagónem, tvrdí, že koule se začne sama pohybovat. Má-li platit zákon setrvačnosti, musí na kouli působit síla ve směru opačném ke směru změny rychlosti vagónu vzhledem k Zemi. Pozorovatel se bude snažit určit velikost této síly. Umístí na dvě přihrádky koule o malé hmotnosti m a koule o velké hmotnosti M (obr. 2). Obě koule se budou vůči přihrádkám pohybovat se stejným zrychlením. Podle zákona síly na kouli o větší hmotnosti M působí větší síla než na kouli o hmotnosti m .



Obr. 4



Obr. 5

Z toho může pozorovatel udělat závěr, že velikost síly, která vyvolala pohyb koulí, je přímo úměrná jejich hmotnosti. Kdyby pozorovatel zjišťoval velikost této síly v závislosti na změně rychlosti soustavy vzhledem k Zemi, zjistil by také přímou závislost na zrychlení vagónu. Pro tuto sílu by platilo

$$F = -ma, \quad (1)$$

kde m je hmotnost zkoumaného tělesa uvnitř vagónu a a je velikost zrychlení vagónu vzhledem k Zemi. My tuto sílu, jejíž působení sleduje pozorovatel, který se účastní nerovnoměrného pohybu, nazýváme *silou setrvačnou*. Na všechna tělesa uvnitř vagónu i na pozorovatele působí tedy setrvačná síla daná vztahem (1). Sami ji pozorujeme při rozjíždění, nebo zastavování autobusu, vlaku apod.

Ke stejným závěrům bychom došli, kdyby vagón vykonával rovnoměrný pohyb po kruhové dráze. Při výkladu pokusu s kuličkou z hlediska pozorovatele neúčastného pohybu sledujeme účinky síly dostředivé a síly odstředivé. Při výkladu téhož pokusu pozorovatelem, který se účastní pohybu, sledujeme jenom sílu odstředivou jako sílu setrvačnou, která je opačného směru ke změně rychlosti a její velikost je také dána vztahem (1).

Vidíme, že u neinerciálních soustav, kde změna rychlosti je konstantní, můžeme použít zákonů mechaniky, ale musíme navíc uvažovat působení síly setrvačné.

Ukážeme ještě, jak se projevuje setrvačná síla na určité obměně Einsteina pokusu se zdviží. Nechť ve zdviži určuje pozorovatel na siloměru váhu tělesa. Je-li zdviž v klidu nebo rovnoměrném pohybu, na těleso působí jenom gravitační síla $G = mg$. Siloměr ukáže váhu (tíhu) G (obr. 3).

Nechť se nyní zdviž pohybuje zrychleně směrem dolů. Na těleso nyní působí dvě síly (obr. 4), síla gravitační směrem dolů a síla setrvačná směrem opačným ke změně rychlosti, tedy nahoru. Siloměr ukáže výslednou sílu G_1 , která je (obecně) vektorovým součtem obou složek

$$G_1 = G + F = mg + (-ma) = m(g - a)$$

V případě $g > a$ by výsledná síla G_1 směřovala dolů ve směru gravitačního pole. V případě $g < a$ by výslednice měla orientaci opačnou. Ze zkušenosti víme, že při jízdě zdviží dolů nebo při přistávání letadla cítíme nadlehčení, tedy zmenšení své váhy (tíhy).

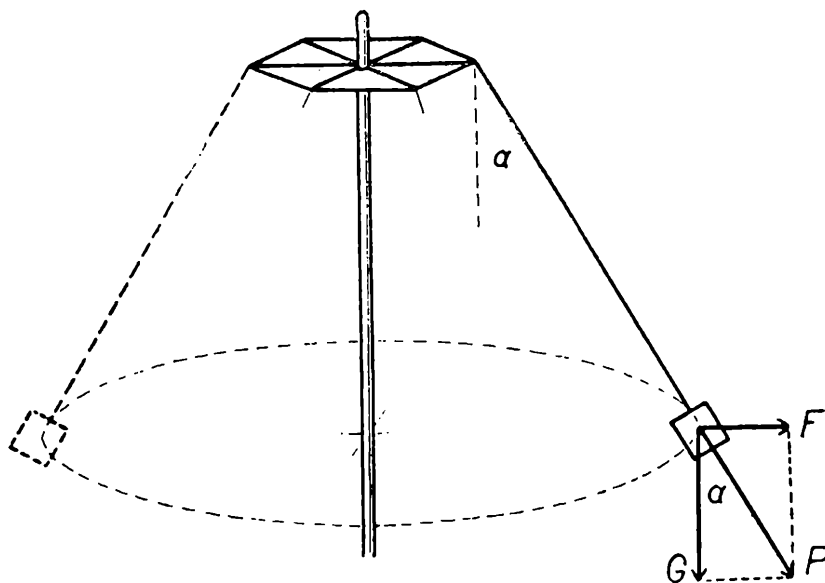
Velmi zajímavý případ by nastal, kdyby se zdviž pohybovala se zrychlením $a = g$, kdyby padala volným pádem. V tomto případě by na těleso nepůsobila žádná výsledná síla. Síla setrvačná by byla stejně veliká jako síla gravitační, ale opačného směru. Těleso i sám pozorovatel by byli v tzv. beztížném stavu. Předměty, např. nůž, kapesník apod. by nepadaly ani k podlaze, ani ke stropu. Zůstávaly by nehybně na svém místě (bráno v souřadnicové soustavě zdviže). Taková situace by na krátký okamžik nastala při utržení zdviže, pokud by se zrychlení volného pádu nezmenšilo odporem vzduchu. Jinak v našem případě jde jenom o úvahy teoretické. Praktická realizace by byla v tomto případě velmi nákladná a neúčelná. Se stavem beztíže se také setkáváme u umělých družic Země, kdy gravitační síla je co do velikosti stejná jako síla odstředivá, která pro kosmonauta uvnitř družice představuje sílu setrvačnou; $F = -ma =$

$$= -m \frac{v^2}{r}, \text{ neboť } a = \frac{v^2}{r}.$$

V případě zrychleného pohybu zdviže nahoru dochází k přetížení. Na těleso působí síla gravitační a síla setrvačná, která je stejného směru (obr. 5). Siloměr ukáže výslednou sílu G_2

$$G_2 = G + F = mg + ma = m(g + a)$$

S podobným pocitem přetížení se můžeme setkat při stoupání letadla nebo na kolotoči. V tomto případě se také sčítají síla gravitační a síla setrvačná, která má směr i velikost síly odstředivé (obr. 6), obě síly však zde mají stejný směr.



Obr. 6

Stav přetížení nastává také při startu kosmických raket. Zde jsou změny rychlosti značně velké a kosmonaut musí snášet velké přetížení. K tomu se připravuje na speciálních odstředivých strojích - centrifugách.

V neinerciálních soustavách, které se vůči inerciálním pohybovaly s konstantním zrychlením, jsme „odchylky“ od klasické mechaniky vyrovnali předpokladem, že na všechna tělesa v této neinerciální soustavě působí setrvačná síla, jejíž velikost je přímo úměrná hmotnosti tělesa a změně rychlosti soustavy. Lidé, kteří by celý život strávili v takové soustavě, neznali by zákony klasické mechaniky a pro svou soustavu by odvodili jiné zákony „své mechaniky“, ve které by na všechna tělesa působila síla určitého směru přímo úměrná hmotnostem těles. Tato síla by se shodovala s naší setrvačnou silou.

Jak je to s neinerciálními soustavami, které se pohybují obecně nerovnoměrně? Kdybychom mechanické děje v těchto soustavách chtěli srovnávat s mechanickými zákony platnými v inerciální soustavě, došli bychom k závěrům velmi složitým. A zde právě *Einstein* položil otázku: Je možné, aby jen v inerciálních soustavách platily jednoduché přesné fyzikální zákony? Čím je dána privilegovanost inerciálních soustav před neinerciálními, když neexistuje absolutní klid, ani absolutní pohyb?

Na základě těchto otázek vystupuje problém, zda je možné formulovat fyzikální zákony, které by platily pro každou soustavu souřadnic a zákony inerciálních soustav by byly jen zvláštním případem těchto obecných fyzikálních zákonů. Tento problém je řešen tzv. *obecnou teorií relativity*, jejíž základy položil *Albert Einstein* (1879—1955), největší fyzik naší doby, který významnou měrou ovlivnil vývoj soudobé fyziky.

Závěr. Pomocí zákonů klasické mechaniky zkoumáme a vysvětlujeme pohyby těles, jejichž rychlost je značně menší než rychlost světla. V případě rychlostí blízkých se k rychlosti světla musíme použít zákonů *speciální teorie relativity*, které jsou obecnějším vyjádřením zákonů mechaniky.³⁾ Newtonovy zákony jsou potom zvláštním případem těchto obecnějších zákonů za předpokladu $v \ll c$, kde v je rychlost pohybu tělesa, a c rychlost světla. Zákony speciální teorie relativity, a tedy i zákony klasické mechaniky platí jenom v inerciálních soustavách. V případě neinerciálních soustav, jejichž rychlost se mění rovnoměrně, můžeme pro pohyb těles použít těchto zákonů jen za předpokladu, že na každé těleso v této soustavě působí setrvačná síla, jejíž velikost závisí pouze na hmotnosti tělesa a velikosti změny rychlosti soustavy a směr je opačný ke směru změny rychlosti soustavy. Obecně v neinerciálních soustavách neplatí zákony speciální teorie relativity, a tedy ani zákony klasické mechaniky. Zde potom platí ještě obecnější zákony - zákony obecné teorie relativity. Zákony speciální teorie relativity a s nimi i zákony klasické mechaniky jsou zvláštním případem těchto obecných zákonů za předpokladu, že pohyb tělesa zkoumáme v inerciální soustavě.

Literatura

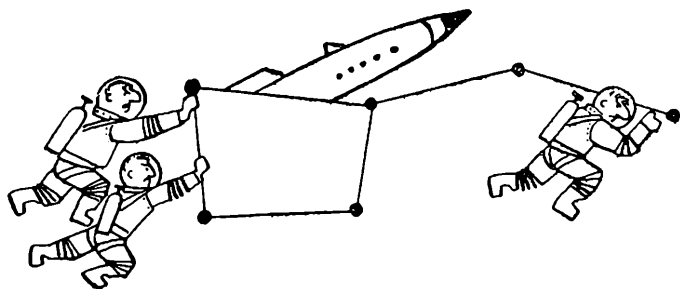
- E i n s t e i n, I n f e l d : Fyzika jako dobrodružství poznání, Orbis - Malá moderní encyklopedie, Praha, 1962.
A l b e r t E i n s t e i n : Jak vidím svět, Československý spisovatel, Praha, 1961.
A l b e r t E i n s t e i n : The Meaning of Relativity, Princeton, Princeton Univ. Press, 1955.
B ě l a ř, F u k a, R u d o l f : Mechanika a akustika, skripta, SPN, Praha, 1962.

* * *

PŘEJEME SVÝM ČTENÁŘŮM MNOHO ÚSPĚCHŮ V ROCE 1965

Redakce

³⁾ Tato úvaha nebyla v článku rozebírána pro svou matematickou náročnost a také to nebylo úkolem článku. Přesto považuji za nutné, aby si čtenář tuto souvislost uvědomil. Proto závěr je vyjádřen již obecněji než jsou výsledky vyvozené v článku.



J i ř í G r y g a r, O n d ř e j o v:

Astronomické rekordy vzdáleností

Vzpomínám si, že když jsem ještě co dítě školou povinné přišel poprvé na populární přednášku o astronomii, zanechalo ve mně největší dojem řečnickovo sebejisté zacházení s údaji o vzdálenostech hvězd. Myslím, že obdobný pocit ohromení prožije každý, kdo se poprvé setká s astronomickými poznatky a záleží pak na jeho povaze, zda od té chvíle bude astronomii třeba až nekriticky obdivovat, nebo zda naopak pojme nedůvěru k oboru, v němž se tolik hýří čísly s mnoha nulami, a astronomy začne považovat za nesolidní vypravěče fantastických smyšlenek. Naštěstí je tento článek psán pro čtenáře se zájmem o matematiku a fyziku, a těm je sotva potřeba vysvětlovat scestnost takových extrémních názorů na astronomii. Dějiny fyziky nás už mnohokrát poučily, že si při zkoumání přírody musíme zvykat na pojmy a výsledky téměř nepředstavitelné, a matematické metody užívané při zpracování poznatků nás opravňují k tomu, abychom v astronomii stejně jako ve fyzice důvěřovali závěrům vyvozeným z pozorování.

S tímto pocitem bezpečí se můžeme vypravit na krátkou exkursi do světa nepředstavitelných vzdáleností - do světa galaxií a ukázat si, jak podstatně se zvětšila v posledních letech ta část vesmíru, kterou přímo zkoumáme. Z běžných výkladů si zopakujme, že Slunce je členem velké hvězdné soustavy zvané Galaxie, jejíž střed ve směru k souhvězdí Střelce je vzdálen asi 10 kiloparsek¹⁾. Celá Galaxie má tvar disku o průměru kolem 60 kiloparseků. Galaxií podobných té naší je ovšem nesmírně mnoho. Pouhým okem jich sice na celé obloze najdeme sotva pět, avšak na snímcích pětimetrovým palomarským dalekohledem již převyšuje počet zachycených galaxií počet zobrazených hvězd z naší Mléčné dráhy.

Studium galaxií představuje zatím jedinečnou možnost zkoumat vzdá-

¹⁾ Astronomickou jednotkou vzdáleností je 1 parsek. Je to vzdálenost, z níž se velká poloosa zemské dráhy, vztyčená kolmo ke spojnici hvězda—Slunce, jeví pod úhlem 1 obloukové vteřiny. 1 parsek $\doteq$ 3,3 světelných let, 1 kpc (kiloparsek) = 10^3 pc, 1 megaparsek (1 Mpc) = 10^6 pc.

lené části vesmíru. K jejich světlu totiž přispívá záření desítek a stovek miliard hvězd, a proto můžeme galaxie pozorovat ve vzdálenostech, v nichž o pozorování jednotlivých hvězd nemůže být řeči. Pozorujeme-li tedy vzdálenou galaxii, můžeme se chvíli radovat z dokonalosti našich přístrojů, jež nám umožňují proniknout tak daleko. Otážíme-li se však, *jak* daleko jsme se dostali, upadne astronom obvykle do rozpaků, jež jsou tím větší, čím slabší je obraz galaxie na fotografické desce. Určování vzdáleností galaxií je neobyčejně nesnadné a přes veškeré úsilí vydobýt z mlhavého obrazu galaxie na desce informaci o vzdálenosti objektu nevynikají současné hodnoty zvláštní přesností. Chyby ve vzdálenostech činí obvykle desítky a často i stovky procent naměřené hodnoty.

Vzdálenosti blízkých hvězd měří astronomové jakousi obdobou pozemské triangulace, z periodických posuvů hvězdy na desce v průběhu roku. Činí-li tento posuv za půl roku P obloukových vteřin, je vzdálenost hvězdy R v parsecích

$$R = \frac{1}{P}$$

Pro všechny hvězdy s výjimkou Slunce je $P < 1''$. Kdybychom chtěli triangulací měřit vzdálenosti galaxií, museli bychom umět měřit posuvy menší než milióntina obloukové vteřiny, a tak nám zatím nezbývá než používat nepřímých metod, které jsou pochopitelně méně přesné.

Podle jedné metody například předpokládáme, že všechny galaxie jsou stejně svítivé a rozdíly v jasnostech jsou způsobeny pouze ne stejnou vzdáleností objektů. Podle fotometrického vztahu o ubývání osvětlení E se čtvercem vzdálenosti R platí pro galaxie 1 a 2

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \quad (1)$$

Předpokládáme tedy současně, že mezihvězdný i mezigalaktický prostor je dokonale průzračný. Osvětlení v astronomii měříme v tzv. hvězdných velikostech (magnitudách) m . Je-li m_1 , resp. m_2 magnituda galaxie ve vzdálenosti R_1 , resp. R_2 , pak platí

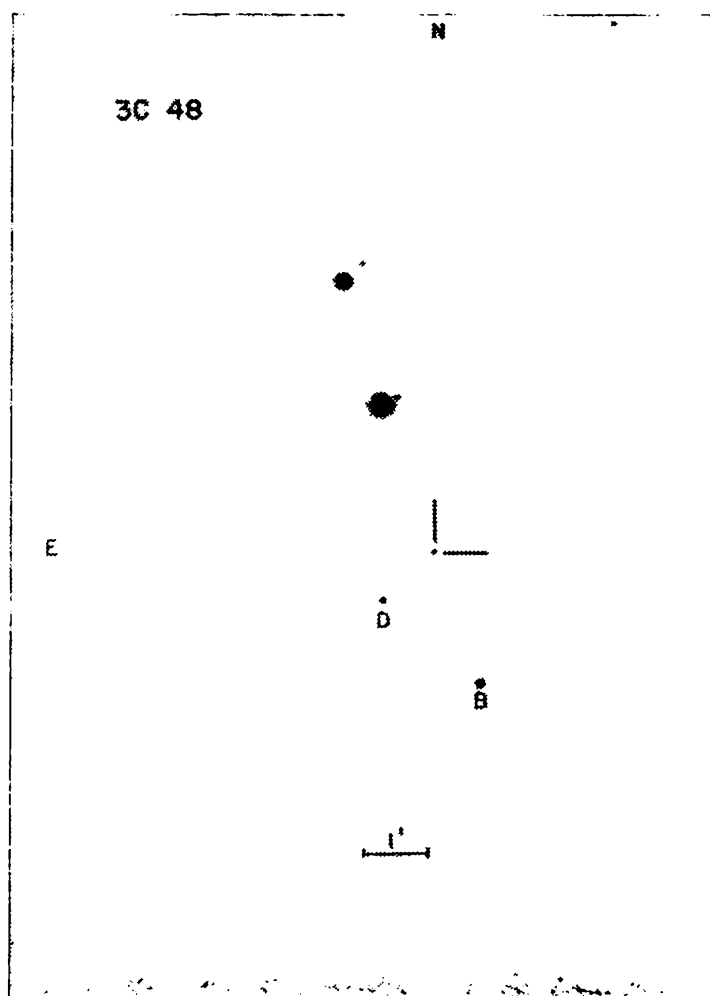
$$\log R_2 = \log R_1 + 0,2 (m_2 - m_1), \quad (2)$$

když jsme nejprve do vztahu (1) dosadili podle definice magnitudy

$$(\sqrt[5]{100})^{(m_2 - m_1)} = \frac{E_1}{E_2}. \quad (3)$$

Jestliže tedy známe vzdálenost galaxie R_1 a změříme-li na snímcích hvězdné velikosti m_1 a m_2 , můžeme podle (2) určit vzdálenost galaxie 2. Úlohu jakési základní galaxie nebo galaktického „metru“ přebírá obvykle známá spirálová galaxie M 31 v Andromedě. Na přesném změření její vzdálenosti tudíž nakonec závisí celá stupnice vzdáleností galaxií.

Když ve dvacátých letech určil americký astronom E. H u b b l e její vzdálenost (tehdy) fantastickým číslem 250 kiloparseků, komentovala to ročenka pro učitele měšťanských škol asi tak, že někteří neodpovědní astronomové matou veřejnost výmysly o nesmyslně velké vzdálenosti mlhoviny v Andromedě (800 000 světelných let), což každý s o u d n ý člověk musí popřít. Jak by se asi tvářil pisatel úvahy z té ročenky, kdyby si přečetl, že v r. 1952 opravil d r. B a a d e vzdálenost galaxie M 31 na 450 kiloparseků, a že o deset let později d r. S w o p e o v á dospěla dokonce k hodnotě 700 kiloparseků? Tyto údaje mimochodem přesvědčivě ukazují, jak nejisté je určování vzdálenosti i u blízkých galaxií, avšak zároveň znamenají, že vlastně „pouhým“ početním zásahem se dosah hvězdářských dalekohledů za čtyřicet let skoro ztrojnásobil.



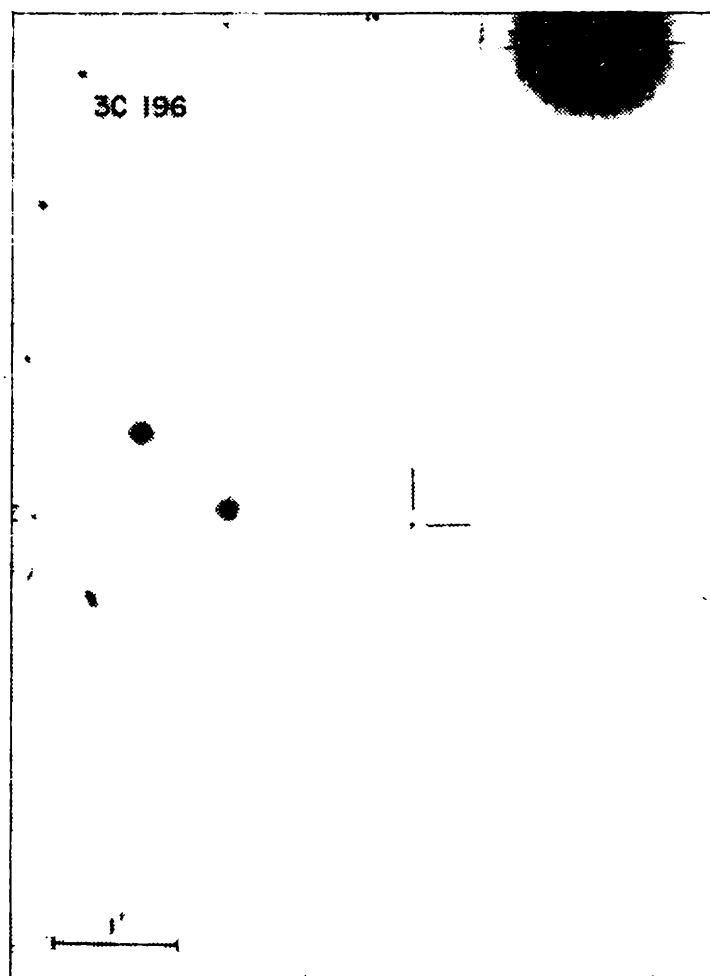
Obr. 1. Rádiogalaxie 3C-48 v souhvězdí T r o j ú h e l n í k a vzdálená 1,2 miliardy parseků (asi 4 miliardy světelných let). Otisk originálního negativu, pořízeného pětimetrovým palomarským dalekohledem. Galaxie se jeví jako hvězda 17. hv. velikosti; označena je dvěma kolmými úsečkami. D a B jsou srovnávací hvězdy a úsečka v dolní části snímku dlouhá 1 obloukovou minutu vyznačuje měřítko snímku. Sever (N) je nahoře a východ (E) vlevo,

Při zkoumání vzdálenějších galaxií byl objeven jev, svědčící o rozpínání systému galaxií. Spektrální čáry jsou vždy posunuty od klidové vlnové délky λ o hodnotu $\Delta\lambda$ směrem k červenému konci spektra. Podle Dopplerova principu to vykládáme jako vzdalování zdroje světla a pozorovatele vzájemnou rychlostí

$$v = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad (4)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Dr. H u b b l e našel důležitou závislost

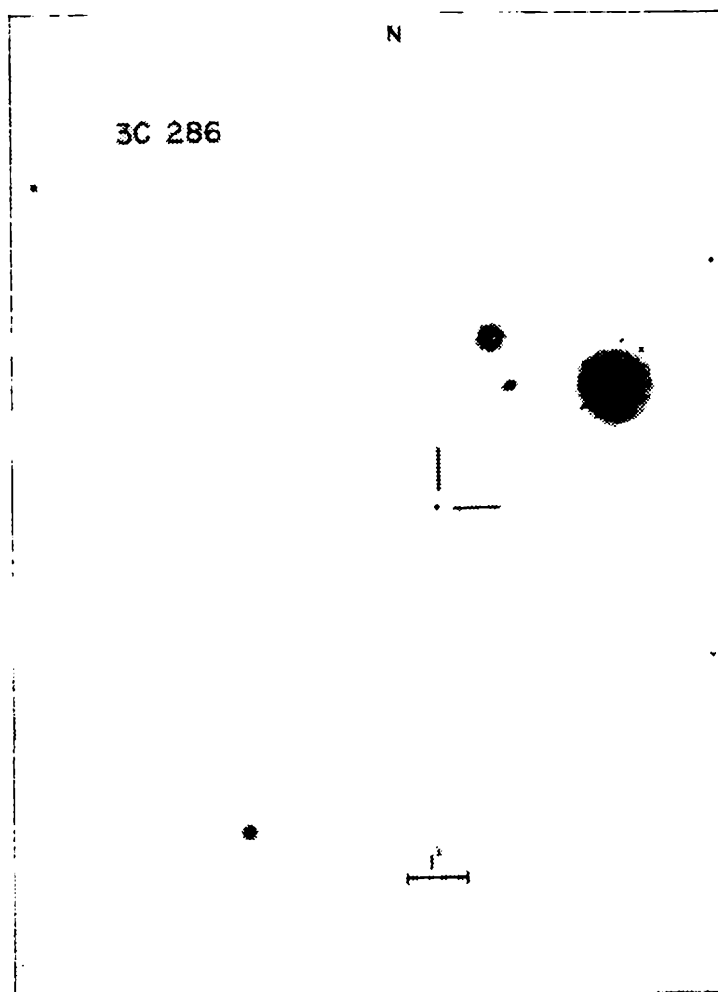
$$v = H \cdot R, \quad (5)$$



Obr. 2. Rádiogalaxie 3C-196 v souhvězdí R y s a drží v současné době „vesmírný rekord“ ve vzdálenosti od Země přes 4 miliardy parseků (13 miliard světelných let). Fotografie dalekohledem na Mt. Palomaru v Kalifornii. Vpravo nahoře je silně přexponovaný obraz jasné hvězdy.

kde R je vzdálenost galaxie v megaparsecích a konstanta H má podle novějších údajů hodnotu $100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Mezi vzdáleností a rychlostí vzdalování galaxie je tudíž (statisticky) přímá úměrnost. Poněvadž známe konstantu H , můžeme podle (5) určovat vzdálenost R , změříme-li nejprve u čar, jejichž laboratorní vlnovou délku známe, posuv $\Delta\lambda$ a stanovíme-li ještě podle (4) rychlost v .

Tato metoda nám dobře slouží při určování vzdáleností slabých galaxií, pokud se ovšem podaří zaznamenat jejich spektrum. Před pěti lety tak bylo u galaxie označené 3C-295 v souhvězdí B o o t e s a změřeno vzdalování rychlostí 110 000 km/s, čili přes třetinu rychlosti světla. Při takové rychlosti nelze zanedbat relativistické opravy ve vztazích (4) a (5). Vezmeme-li opravy v úvahu, vyjde, že galaxie 3C-295 je vzdálena 1500 megaparseků a její světlo, jež nyní dopadá na Zem, bylo tedy vyzářeno „chvíli“ předtím, než Země vznikla. Stáří Země je totiž podle nových měření 4,5 miliardy let.



Obr. 3. Rádiogalaxie 3C-286 v souhvězdí H o n i c í h P s ů vzdálená 2,9 miliardy parseků (9,5 miliardy světelných let). Okrouhlý terč severozápadně od rádiogalaxie je přexponovaný obraz jasnější hvězdy. Drobné oválné terčíky (např. na východ od zdroje) jsou bližší galaxie běžného typu. Snímek pětmetrovým dalekohledem na M t. P a l o m a r u.

Galaxie v B o o t e s o v i se ze svého rekordu dlouho netěšila. V r. 1963 byly identifikovány čáry ve spektru objektů, jež jsou zároveň mohutnými zdroji rádiového záření. Posuvy čar přitom činily i více než 2000 angstromů! Musí jít tedy o rádiogalaxie nesmírně vzdálené a patrně i velmi neobvyklé. Na snímcích palomarským dalekohledem

(obr. 1, 2, 3) je nerozlišíte od hvězd. Astronomové se domnívají, že tyto nejvzdálenější a nejsvítivější objekty ve vesmíru souvisí vývojově s novým typem nebeských těles s nadhvězdami.²⁾ Některé z těchto radiogalaxií uvádím v přehledné tabulce, v níž je označení radiogalaxie (3C - 3. Cambridgeský katalog rádiových zdrojů, za pomlčkou je pořadové číslo v katalogu) a souhvězdí, velikost rudého posuvu

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

vzdálenost R v miliardách parseků a rychlost vzdalování v , odvozená z rudého posuvu.

Galaxie	Souhvězdí		R (10^9 par- seků)	v ($\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)
3C - 48	Trojúhelník	0,37	1,2	90 000
3C - 295	Bootes	0,46	1,5	110 000
3C - 147	Vozka	0,54	1,8	120 000
3C - 286	Honičí Psi	0,85	2,9	160 000
3C - 196	Rys	> 1,14?	> 4?	> 190 000?

Vzdálenosti v tabulce uvedené je třeba zatím brát s jistou zdrženlivostí. Musíme si totiž uvědomit, že studium tak vzdálených zdrojů je vrcholným výkonem astronomických pozorování, kde experimentální chyby i teoretické předpoklady podstatně ovlivňují výsledek. Přesto však znamenají nové astronomické rekordy vzdáleností více než pouhou krátkodobou senzaci. Skutečnost, že sledujeme opticky i rádiově vesmírné útvary vzdálené řádově 10 miliard světelných let se musí brzy projevit jak v teoriích o stavbě a vývoji vesmíru jako celku, tak i v základním výzkumu ve fyzice. A kdož ví, zda tématem doktorské disertace, kterou bude jednou obhajovat některý z dnešních nejmladších čtenářů Rozhledů, nebude právě formulace neznámého fyzikálního principu, odvozeného z pozorování radiogalaxií či nadhvězd v těch nepředstavitelně vzdálených oblastech vesmíru.

* * *

Chybí-li vám některé číslo Rozhledů matematicko-fyzikálních, obraťte se na prodejnu Poštovní novinové služby, Praha 2, Příkopy 22.

Redakce

²⁾ Koho by zajímaly podrobnosti, najde je např. v článku *N a d h v ě z d y* v časopise *Říše hvězd*, č. 12 (1963), str. 226.

Umělé družice a kosmické rakety

V dalším pokračování našich pravidelných přehledů vypuštěných umělých nebeských těles uvádíme družice, vypuštěné do konce srpna 1964. I zde jsme vynechali všechna tělesa, která nemají vědecký význam. Ze sovětských družic jsou v seznamu všechny satelity K o s m o s, plnící vědecké výzkumy podle předem stanoveného plánu. U amerických družic chybí 19 satelitů, u nichž nebyly udány žádné údaje o jejich určení. Celkem bylo do konce srpna 1964 vypuštěno 51 raket, které ovšem mnohdy vynesly na oběžnou dráhu více těles. Tak tomu bylo např. již při prvním letošním úspěšném pokusu z 11. ledna; sovětské družice E l e k t r o n tvoří rovněž dvojice, vynesené na oběžné dráhy jednou raketou.

Většina družic měří opět různé druhy záření - jsou mohdy označeny pouze zkratkami, např. E G R S, T R S (Tetrahedral Research Satellite), který měří kosmické záření, S R (Solar Radiation), měřící sluneční záření v různých vlnových délkách. Sovětské družice E l e k t r o n měří nebezpečné záření v tzv. V a n A l l e n o v ý c h p á s e c h, které se rozkládají přibližně v rovníkové rovině ve vzdálenostech kolem 10 a 50 tisíc km od Země.

Družice V e l a jsou určeny k registraci jaderných zkoušek v kosmickém prostoru; vliv kosmických podmínek na různá telekomunikační zařízení sleduje družice S t a r f l a s h.

Pro ryze telekomunikační účely jsou opět určeny družice E c h o (pasivní) a R e l a y a S y n c o m (aktivní).

Americké družice S a t u r n a G e m i n i slouží ke zkouškám těžkých těles, která mají vynést na oběžné dráhy kabiny pro více kosmonautů.

Meteorologické družice T i r o s byly nahrazeny dokonalejšími satelity N i m b u s.

Sovětský svaz zkoušel nové typy družic S o n d a 1 a L e t 2, který má ověřit možnosti setkání dvou těles v prostoru a jejich případné spojení.

Kosmické rakety měly jediného zástupce, americkou sondu k Měsíci R a n g e r 7, která byla velmi úspěšná a předala na zemský povrch snímky Měsíce z velmi malé vzdálenosti.

Datum vypuštění 1964	Název a ostatní příslušnost	Váha kg	Doba oběhu min	Výška perigea km	Sklon dráhy
11. 1.	CGSE, USA	—	103,5	898	69,9
	EGRS, USA	18	103,5	904	69,9
	SR 5, USA	23	103,5	905	69,9
21. 1.	Relay 2, USA	78	194,6	2 091	46,3
25. 1.	Echo 2, USA	256	108,9	1 029	81,5
29. 1.	Saturn 5, USA	17 100	94,6	264	31,4
30. 1.	Elektron 1, SSSR	—	169,3	394	60,8
	Elektron 2, SSSR	—	1356,4	441	60,8
27. 2.	Kosmos 25, SSSR	—	92,3	255	49,0
18. 3.	Kosmos 26, SSSR	—	91,0	266	49,0
27. 3.	Kosmos 27, SSSR	—	88,2	167	64,8
27. 3.	Ariel 2, USA + GB	68	101,3	285	51,6
2. 4.	Sonda 1, SSSR	—	88,5	187	64,8
4. 4.	Kosmos 28, SSSR	—	90,4	213	65,0
8. 4.	Gemini 1, USA	3 000	89,0	154	32,6
12. 4.	Let 2, SSSR	—	91,9	242	59,9
25. 4.	Kosmos 29, SSSR	—	89,5	203	65,1
18. 5.	Kosmos 30, SSSR	—	90,3	206	64,9
28. 5.	Saturn 6, USA	17 700	88,2	179	31,7
6. 6.	Kosmos 31, SSSR	—	91,6	222	48,9
10. 6.	Kosmos 32, SSSR	—	89,8	213	51,2
13. 6.	Star flash, USA	—	91,2	350	114,9
23. 6.	Kosmos 33, SSSR	—	89,4	209	65,0
1. 7.	Kosmos 34, SSSR	—	90,0	202	65,0
10. 7.	Elektron 3, SSSR	—	168,2	404	60,8
	Elektron 4, SSSR	—	1313,6	457	60,8
15. 7.	Kosmos 35, SSSR	—	89,2	218	51,2
17. 7.	Vela 4, USA	234	6007,0	94 436	40,9
	TRS, USA	2	2364	220	36,7
30. 7.	Kosmos 36, SSSR	—	91,9	261	49,0
14. 8.	Kosmos 37, SSSR	—	89,4	207	64,9
18. 8.	Kosmos 38, SSSR	—	94,1	206	56,1
	Kosmos 39, SSSR	—	94,6	206	56,1
	Kosmos 40, SSSR	—	94,0	206	56,1
19. 8.	Syncom 3, USA	30	1407,8	34 191	0,1
21. 8.	Star flash, USA	—	91,6	349	115,0
22. 8.	Kosmos 41, SSSR	—	715,0	394	64,7
22. 8.	Kosmos 42, SSSR	—	98,1	230	49,0
	Kosmos 43, SSSR	—	97,9	224	49,0
25. 8.	Explorer 20, USA	44	104,1	878	79,8
28. 8.	Kosmos 44, SSSR	—	99,5	618	65,0
28. 8.	Nimbus 1, USA	376	98,3	422	98,7



Úlohy k řešení

Řešení úloh loňské soutěže

(Pokračování)

Matematika:

6. Je dána obdélníková mřížka $ABCD$, obsahující $n \cdot k$ jednotkových čtverečků ($AB = n$, $BC = k$). Kolikerym způsobem lze dospět z bodu A do bodu C po mřížce, aby délka „větve“ byla $n + k$? (Větvi se zde nazývá každá lomená čára, označující dráhu z A do C po mřížce.)

Robert Karpe

(Došlo 16 řešení)

Řešil Jaroslav Zemánek, 3.d, SVVŠ, Praha-Nusle:

Označme postupně indexy $1, 2, \dots, n + k$ jednotkové úseky libovolné větve o délce $n + k$ jdoucí z A do C ; je zřejmé, že z těchto indexů jich právě n přísluší indexům vodorovným (tj. rovnoběžným se stranou AB).

Jestliže z indexů $1, 2, \dots, n + k$ vybereme libovolných n , je zřejmé, že vždy existuje jediná větev jdoucí z A do C , jejíž délka je $n + k$ a jejíž vodorovné jednotkové úseky jednoznačně odpovídají zvoleným n indexům. Jak patrně, nezáleží zde na tom, v jakém pořadí vybereme jistých n indexů z celkového počtu $n + k$. Jedná se proto o kombinace. Tedy počet všech větví je

$$\binom{n+k}{n}.$$

7. Rovnice $(12m^2 - 4m + 21)x^2 - (144m^2 - 48m + 54)x + (432m^2 - 144m - 36) = 0$ s reálným parametrem m má pro některá m stejné kořeny. Určete je!

Josef Kotyk

(Došlo 18 řešení)

Řešil Jan Švejda, 3. d, SVVŠ, Praha 4, Křesomyslova:

Koeficient $12m^2 - 4m + 21$ kvadratického členu má pro reálná m hodnotu $a \neq 0$. Daná rovnice je tedy pro tato m vskutku kvadratická a lze jí dát tvar

$$(M + 21)x^2 - 6(2M + 9)x + 36(M - 1) = 0,$$

přičemž

$$M = 12m^2 - 4m.$$

Aby měla kvadratická rovnice stejné kořeny, musí být její diskriminant D roven nule, což znamená, že pro parametr m musí platit

$$D = 36(2M + 9)^2 - 4 \cdot (M + 21) \cdot 36(M - 1) = 0,$$

po úpravě

$$M = \frac{15}{4},$$

čili

$$12m^2 - 4m - \frac{15}{4} = 0,$$

odkud

$$m_1 = \frac{3}{4}, \quad m_2 = -\frac{5}{12}.$$

V obou případech nabude původní rovnice po úpravě tvaru

$$(x - 2)^2 = 0$$

a má dvojný kořen

$$x_1 = x_2 = 2.$$

8. Určete všechna prvočísla, která mají v desítkové soustavě ciferný součet 8, přičemž se v prvočísle neopakuje žádná číslice.

Jiří Sedláček

(Došlo 21 řešení)

Řešil Stanislav Hojek, 3. tř., SVVŠ, Třeboň:

Aby číslo vyhovovalo dané úloze, může mít na konci některé z číslic 1, 3, 7. Uvažujeme-li 7 na konci, dostáváme dvě čísla 17, 107. Obě tato čísla jsou prvočísla.

Pro číslici 3 na konci dostáváme tato čísla s ciferným součtem 8, v nichž se neopakuje žádná číslice: 1403, 1043, 4103, 4013, 413, 143, 503, 53; z nich jsou prvočísla 4013, 503, 53.

Pro číslici 1 na konci jsou to tato čísla: 701, 71, 5201, 5021, 2501, 2051, 251, 521, 4301, 4031, 3401, 3041, 431, 341; z nich jsou prvočísla 701, 71, 5021, 251, 521, 3041, 431.

Úloze vyhovuje celkem 12 prvočísel; jsou to 17, 107, 4013, 503, 53, 701, 71, 5021, 251, 521, 3041, 431.

9. Určete sedm po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je roven čtvrté mocnině jistého prvočísla.

Jiří Sedláček

(Došlo 24 řešení)

Riešil Pavol Hell, IV. H, SPŠ hutnícka, Košice:

Sedem po sebe idoucích prirodzených čísel môžeme zapísať

$$a, a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6.$$

Ich súčet je

$$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 + a + 6 = \\ = 7a + 21 = 7(a + 3).$$

Teda

$$7(a + 3) = p^4,$$

kde p je isté prvočíslo.

Pretože ľavá strana je deliteľná číslom 7, musí byť aj p^4 deliteľné siedmimi (a má byť prirodzené číslo). To bude splnené iba ak p je deliteľné siedmimi. Keďže p je prvočíslo, platí zrejme $p = 7$. Potom

$$7(a + 3) = 7^4, \\ a = 340.$$

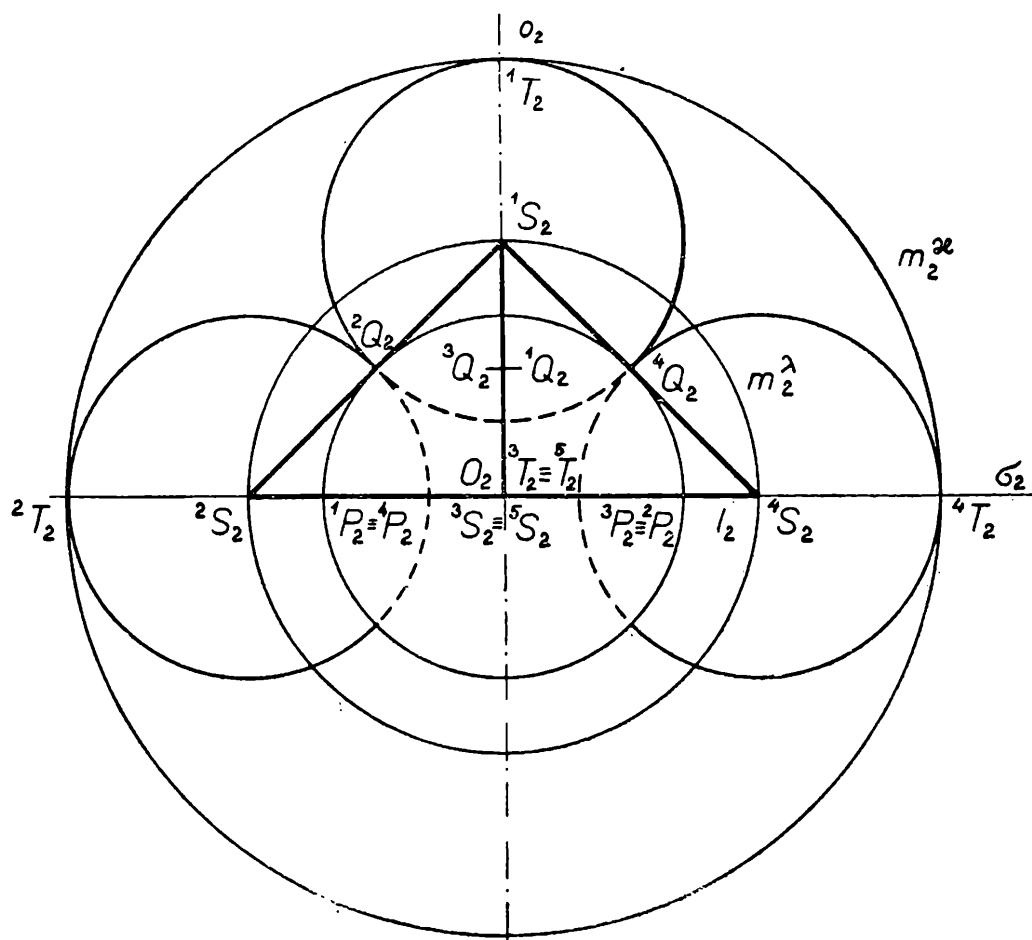
Hľadané prirodzené čísla sú 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346.

Deskriptivní geometrie

1. Je dána kulová plocha o středu O a poloměru r . Vepište do ní pět shodných kulových ploch (poloměru q), jež se jí dotýkají a z kterých jedna se dotýká ostatních čtyř koulí, z nich pak každá se dotýká tří z ostatních čtyř. Určete q a zobrazte ve sdružených průmětech.

Ema Kasková

(Došlo 5 řešení)



Obr. 1

Řešil Jaroslav Příhoda, II. roč. SVVŠ, Čakovice:

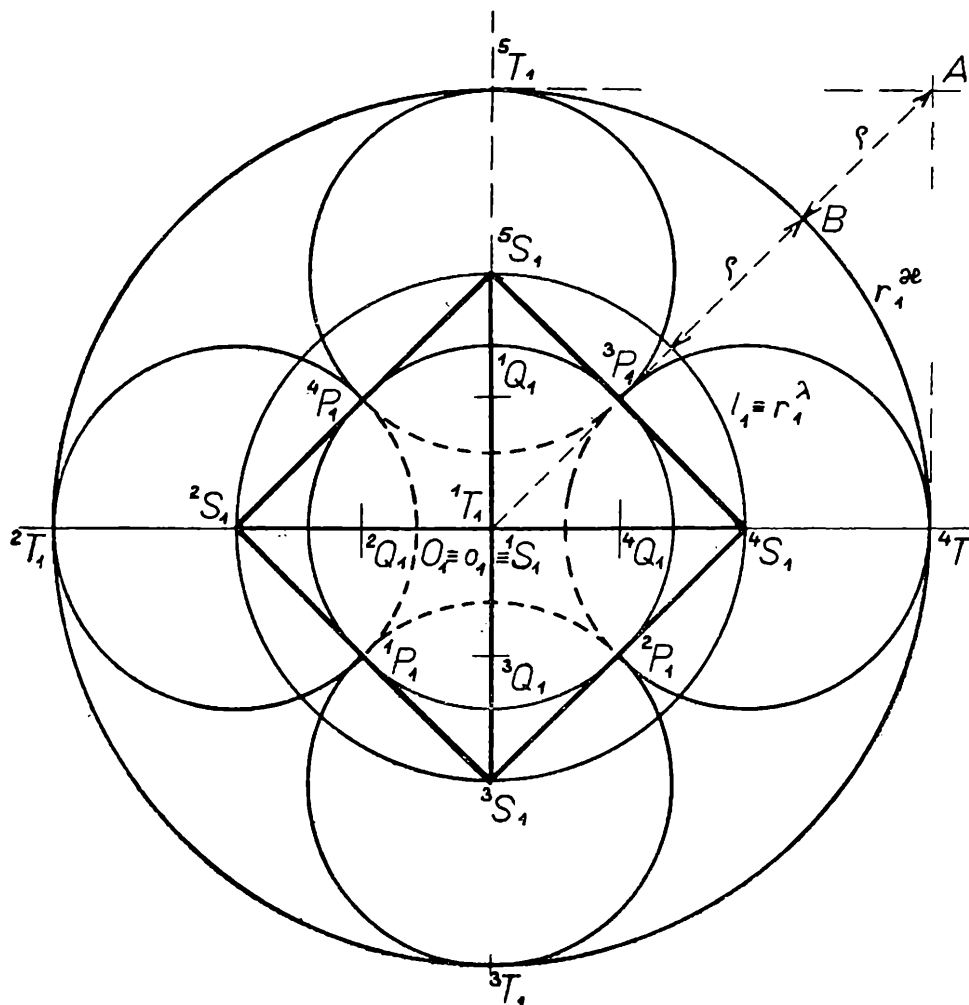
Pro středné pěti shodných kulových ploch

$${}^k\kappa = ({}^kS, \varrho),$$

kde $k = 1, 2, \dots, 5$, které se navzájem dotýkají způsobem popsáním v textu úlohy, musí platit vztahy

$${}^1S^2S = {}^1S^3S = {}^1S^4S = {}^1S^5S = 2\varrho, \quad (1)$$

$${}^2S^3S = {}^3S^4S = {}^4S^5S = {}^5S^2S = 2\varrho. \quad (1')$$



Obr. 2

Mají-li se plochy ${}^k\kappa$ dotýkat dané kulové plochy $\kappa = (O, r)$ zevnitř, musí být splněn vztah

$$O {}^kS = r - \varrho, \quad (2)$$

tj., body kS jsou body kulové plochy

$$\lambda \equiv (O, r - \varrho).$$

Musí tedy existovat shodné rovnoramenné trojúhelníky se společným ramenem v úsečce $O {}^1S$:

$$\triangle O {}^1S^2S \cong \triangle O {}^1S^3S \cong \triangle O {}^1S^4S \cong \triangle O {}^1S^5S$$

Jestliže v rovinách těchto trojúhelníků sestrojíme výšky na společné rameno $O {}^1S$, ztotožní se jejich paty v jediném bodě S na přímce $O {}^1S$.

Přitom, jak rovněž ze shodnosti uvedených trojúhelníků vyplývá, platí, že

$$S^2S = S^3S = S^4S = S^5S.$$

Zřejmě je tedy nutno, aby se body qS (kde $q = 2, 3, 4, 5$) nacházely v jediné rovině σ , která jde bodem S kolmo k O^1S . V této rovině představují body qS - vzhledem ke vztahu (1') - vrcholy čtverce o středu S a straně délky 2ρ . Polovina úhlopříčky tohoto čtverce je tedy

$$S^qS = \rho \sqrt{2}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka S^1S^qS vyplývá pak dále:

$$S^1S = \sqrt{(S^1S^qS)^2 - (S^qS)^2} = \sqrt{(2\rho)^2 - 2\rho^2} = \rho \sqrt{2},$$

což svědčí o tom, že bod S je středem kulové plochy procházející všemi pěti body kS a je tedy totožný s bodem O . Proto

$$O^kS = \rho \sqrt{2}.$$

Vzhledem ke vztahu (2)

$$\rho \sqrt{2} = r - \rho,$$

takže pro ρ platí:

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{2} + 1} = r(\sqrt{2} - 1). \quad (3)$$

Odtud vyplývá k o n s t r u k c e :

1. Podle vztahu (3) sestrojíme ρ (v obr. je to úsečka AB) a opíšeme kulovou plochu

$$\lambda \equiv (O, r - \rho).$$

2. Středem O vedeme rovinu σ , která protne plochu λ v hlavní kružnici l . Do ní vepíšeme čtverec

$$^2S^3S^4S^5S.$$

3. Bod 1S je jedním z průsečíků kulové plochy λ s přímkou o jdoucí středem O kolmo k rovině σ .

4. Sestrojíme kulové plochy $^k\kappa \equiv (^kS, \rho)$. Každá z nich se dotkne kulové plochy κ v jejím průsečíku kT s polopřímkou O^kS . Vzájemný dotyk kulových ploch $^k\kappa$ nastane v bodech

$$^1P, ^2P, ^3P, ^4P, ^1Q, ^2Q, ^3Q, ^4Q,$$

které jsou středy hran čtyřbokého pravidelného jehlanu s podstavnými vrcholy v bodech

$$^2S, ^3S, ^4S, ^5S$$

a s hlavním vrcholem v bodě 1S .

D ů k a z s p r á v n o s t i. Protože

$$\rho = r(\sqrt{2} - 1),$$

je délka všech hran sestrojeného čtyřbokého jehlanu

$$(r - \varrho) \sqrt{2} = r(2 - \sqrt{2}) \sqrt{2} = 2r(\sqrt{2} - 1) = 2\varrho$$

a pět kulových ploch k_κ sestrojených kolem jeho vrcholů kS poloměrem ϱ vyhovuje všem požadavkům úlohy.

Z á v ě r. Úloha je řešitelná jediným shora popsáním způsobem vzájemného seskupení ploch k_κ .

Z o b r a z e n í. Půdorysnu volíme vhodně rovnoběžnou s rovinou σ , nárysnu pak rovnoběžnou s o^1S , např. s o^2S (viz obr.).

P o z n. a u t o r a. Někteří z řešitelů podali sice správné výsledné řešení, n e d o k á z a l i však n u t n o s t umístění středů čtyř hledaných koulí do roviny hlavní kružnice dané kulové plochy, a tím i úplnost řešení. K závěru uveřejněného řešení připomínám: Uvedenou pětici koulí jako celek je pocho-pitelně možno uvnitř dané kulové plochy nesčíslněkrát přemístit, neboť hlavní vrchol jehlanu 1S lze zvolit v libovolném bodě kulové plochy λ , každý takový jehlan pak otáčet okolo osy O^1S .

2. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká přímk a, b, c , ležících v rovině q a přímky d , protínající rovinu q .

Ota Setzer

(Došla 4 řešení)

Řešil Jaroslav Zemánek, 3. d, SVVŠ, Praha 4:

Střed hledané kulové plochy κ nazveme S , dotykový bod přímky d s kulovou plochou κ označme D . Dále budiž $P \equiv d \cdot \varrho$. Průnikem kulové plochy κ s rovinou ϱ je buď kružnice k o středu O , která se dotýká přímk a, b, c , anebo bod K , který je společný přímkám a, b, c . Bod P zřejmě neleží uvnitř kružnice k ani nesplývá s bodem K . Sestrojme tečnu PT kružnice k s dotykovým bodem T , resp. sestrojme přímku PK . Přímka PT , resp. PK je tečnou kulové plochy κ . Ale také přímka $PD \equiv d$ je tečnou kulové plochy κ . Platí tedy $PD = PT$, resp. $PD = PK$. Dále pak je S společný bod přímky $p \perp \varrho$, jdoucí bodem O , resp. K a roviny $\delta \perp d$, obsahující bod D .

K o n s t r u k c e. Označme K společný bod přímk a, b, c (existuje-li), resp. sestrojme v rovině ϱ kružnici k , která se dotýká přímk a, b, c (je-li to možné). Sestrojme tečnu PT kružnice k - pokud bod P neleží uvnitř kružnice k , T je bod dotyku, resp. sestrojme přímku PK - pokud $P \neq K$. Potom na přímce d existuje bod D tak, že $PD = PT$, resp. $PD = PK$. Existují právě dva takové body D , které splynou tehdy a jen tehdy, je-li $P \in k$, takže je $P \equiv T \equiv D$. Bodem D vedeme potom známým způsobem rovinu $\delta \perp d$ - taková rovina existuje právě jedna. Pak vedeme středem O kružnici k , resp. bodem K jediné možnou přímku $p \perp \varrho$. Přímka p má s rovinou δ jediný průsečík $S \neq O$, neboť není $d \parallel \varrho$. Kulová plocha κ o středu S a poloměru SD vyhovuje naší úloze. Správnost konstrukce je zřejmá.

R o z b o r. Jestliže aspoň dvě z přímk a, b, c splynou, má úloha nekonečně mnoho řešení.

Nechť přímky a, b, c jsou navzájem různé. Pak jsou právě tyto čtyři možnosti:

α) Je-li $a \parallel b \parallel c$, pak neexistuje kružnice k ani bod K a úloha nemá řešení.

β) Přímky a, b, c mají jediný společný bod K , takže neexistuje žádná kružnice k . Pak při $P \equiv K$ není řešení, kdežto při $P \neq K$ jsou právě dvě různá řešení.

γ) Dvě z přímk a, b, c jsou rovnoběžné a třetí je protíná. Pak neexistuje bod K , ale existují právě dvě různé kružnice k , jejich vnitřky jsou disjunktní. Podle toho, jakou má k nim bod P polohu, má úloha čtyři, tři nebo dvě řešení.

δ) Přímky a, b, c jsou navzájem různoběžné a nemají společného bodu. Potom existují čtyři kružnice k , jejichž vnitřky jsou disjunktní. Naše úloha má pak buď osm nebo sedm nebo šest řešení.

3. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká různoběžek a, b , ležících v rovině ϱ a různoběžek c, d , ležících v rovině $\sigma \parallel \varrho$.

Ota Setzer

(Došlo 6 řešení)

Řešil Karel Vazač, III. b, SVVŠ, Písek:

Geometrickým místem středů kulových ploch, které se dotýkají dvou různoběžek a, b , jsou dvě roviny α_1, α_2 ($\alpha_1 \perp \alpha_2$), z nichž každá je kolmá k rovině ϱ určené různoběžkami a, b . Přitom $\alpha_1 \varrho \equiv p_1, \alpha_2 \varrho \equiv p_2$; p_1, p_2 jsou osy úhlů, které svírají různoběžky a, b a $p_1 \perp p_2$.

Geometrickým místem středů kulových ploch, které se dotýkají dvou různoběžek c, d , jsou dvě roviny β_1, β_2 ($\beta_1 \perp \beta_2$), z nichž každá je kolmá k rovině σ určené různoběžkami c, d . Přitom $\beta_1 \sigma \equiv q_1, \beta_2 \sigma \equiv q_2$; q_1, q_2 jsou osy úhlů, které svírají různoběžky c, d a $q_1 \perp q_2$.

Roviny $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, (z nichž každá je kolmá k rovinám ϱ, σ) se protínají v obecném případě celkem v šesti průsečnicích (vzájemně rovnoběžných), z nichž hned vyloučíme $r \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2, s \equiv \beta_1 \cdot \beta_2$. Další čtyři průsečnice $t \equiv \alpha_1 \cdot \beta_1, u \equiv \alpha_1 \cdot \beta_2, v \equiv \alpha_2 \cdot \beta_1, w \equiv \alpha_2 \cdot \beta_2$ jsou pak geometrickými místy bodů, na kterých leží středy hledaných kulových ploch.

Nyní najdeme průsečíky přímky t s rovinami ϱ, σ : $t \cdot \varrho \equiv S_1, t \cdot \sigma \equiv S'_1$; v rovině ϱ sestrojíme kružnici k se středem S_1 tak, že se dotýká různoběžek a, b ; v rovině σ sestrojíme kružnici l se středem S'_1 tak, že se dotýká různoběžek c, d . Kružnicemi k, l je pak jednoznačně určena hledaná kulová plocha κ_1 . Podobně najdeme ještě kulové plochy $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$.

D i s k u s e (jen za předpokladu, že $\sigma \neq \varrho$).

α) Úloha má neomezený počet řešení tehdy, splyne-li některá z rovin α_1, α_2 s některou z rovin β_1, β_2 .

β) Úloha má jedno řešení, protínají-li se roviny $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ v jedné průsečnici (roviny tvoří svazek).

c) Úloha má dvě řešení, jsou-li roviny $\alpha_1 \parallel \beta_1$, $\alpha_2 \parallel \beta_2$ nebo $\alpha_1 \parallel \beta_2$, $\alpha_2 \parallel \beta_1$ (avšak žádné nesplývají).

d) Úloha má tři řešení, když průsečnice rovin $r \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2$ ($s \equiv \beta_1 \cdot \beta_2$) leží v některé z rovin β_1, β_2 (α_1, α_2).

e) Ve všech ostatních případech má úloha čtyři řešení.

4. Narysujte elipsu, znáte-li oskulační kružnici k_A v jejím (neznámém) vrcholu A a ohnisko F vně kružnice k_A .

Ota Setzer

(Došlo 6 řešení)

Řešil Jiří Handlíř, 2a, SPŠE, Brno:

Pro poloměr oskulační kružnice k_A platí

$$\varrho = \frac{b^2}{a}, \quad (1)$$

vzdálenost ohniska F od vrcholu A je

$$x = a + e = a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne:

$$\begin{aligned} b^2 &= a\varrho, \\ x - a &= \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

a po umocnění

$$x^2 - 2ax + a^2 = a^2 - a\varrho,$$

odtud

$$a = \frac{x^2}{2x - \varrho} \quad (3)$$

Délku hlavní poloosy a určíme z (3) podle Euklidovy věty. Pravoúhlý trojúhelník o výšce x má jeden úsek na přeponě o známé délce $2x - \varrho$ a druhým je hledaná hlavní poloosa a .

Protože podle zadání je $2x - \varrho > 0$, lze délku a vždy jednoznačně sestrojít.



Matematické zábavy

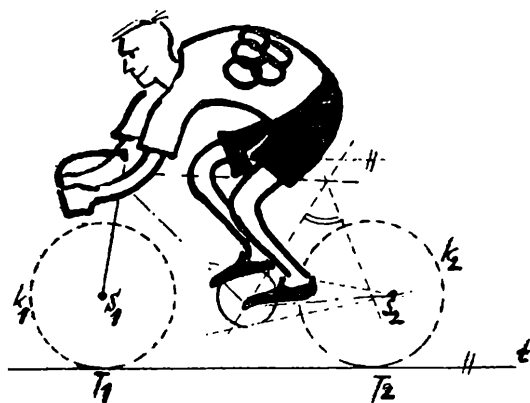
Inž. Miloslava Špačková, Praha:

Záhadný průměr

Nastala doba zkoušek na vysokých školách. Znalosti studentů jsou hodnoceny známkami 1 výborná, 2 velmi dobrá, 3 - dobrá. Jeden zkoušející při pondělním zkoušení zjistil, že vyzkoušel 25 posluchačů a že průměrná známka je 2,2. V úterý vyzkoušel opět 25 studentů a když propočítal průměr a zjistil jeho hodnotu 2,2, podivil se tím spíše, že počet výborných, velmi dobrých a dobrých nesouhlasil s pondělním počtem. Když se toto opakovalo i při zkoušení středečním a čtvrtečním, kdy vyzkoušel vždy po pětadvaceti posluchačích a vždy byl denní průměr 2,2, ale počet jednotek, dvojek a trojek vždy různý, sedl, vzal tužku a začal počítat.

Zkuste i vy zjistit, kolikrát se tento případ mohl ještě opakovat. A pro zajímavost - kolik bylo za celou tu dobu výborných, velmi dobrých a dobrých a jaká byla celková průměrná známka?

Řešení zašlete redakci. Jména správných řešitelů uveřejníme.



Fyzikální olympiáda

Jan Tesař, Praha:

Děje v plynech

*Studijní text pro první kolo VI. ročníku FO
kategorie B.*

Dokonalý plyn

Za dokonalý čili ideální plyn pokládáme látku skládající se z molekul stejné hmoty, o kterých předpokládáme, že mají tvar stejně velikých koulí o nepatrných rozměrech, jež lze zanedbat vzhledem k objemu, který vyplňují. Molekuly dokonalého plynu jsou dokonale pružné a nepůsobí na sebe navzájem žádnými silami, kromě okamžiků srážek. Proto se pohybují setrvač-

ností přímočaře a svou rychlost mění náhle jen při vzájemných srážkách a při nárazech na stěny nádoby, v níž je plyn uzavřen. Žádné jiné pohyby, např. otáčivé kolem osy, nekonnají. Při rázech si vyměňují svoje rychlosti podobně jako dokonale pružné koule o stejné hmotě při středových rázech. Srazí-li se molekula 1 s molekulou 2, pokračuje molekula 2 v pohybu molekuly 1 a při další srážce předá molekula 2 svou rychlost molekule 3 a ta zase další molekule. Výměna rychlostí mezi jednotlivými molekulami pokračuje tak dlouho, pokud nedojde k nárazu na stěnu nádoby. Při tomto neustálém neuspořádaném pohybu zůstává počet molekul v daném uzavřeném objemu stálý.

V nádobě s dokonalým plynem naráží v každém okamžiku nesmírný počet molekul na stěny nádoby a působí na ně tlakem. Velikost tohoto tlaku má hodnotu

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w}, \quad (1a)$$

kde p značí tlak plynu, n_0 počet molekul plynu v jednotkovém objemu a $\bar{w}$ střední kinetickou energii neuspořádaného pohybu jedné molekuly. Uvedený vzorec se vypočítá z představ kinetické teorie dokonalého plynu a je odvozen jako vztah (9) v článku d o c. V l a d i m í r a R u d o l f a, v 2. čísle 42. ročníku časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální.

Násobíme-li obě strany této rovnice objemem V nádoby, vychází

$$p V = \frac{2}{3} n_0 V \bar{w}, \quad (1b)$$

kde $n_0 \bar{w}$ značí střední kinetickou energii neuspořádaných pohybů molekul ideálního plynu, obsažených v objemové jednotce a $U = V n_0 \bar{w}$ celkovou kinetickou energii neuspořádaných pohybů všech molekul ideálního plynu v objemu V . Velikost U se nazývá v n i t ř n í e n e r g i e dokonalého plynu. Vztah (1b) můžeme upravit na tvar

$$p V = \frac{2}{3} U \quad (1c)$$

Označíme-li T absolutní teplotu dokonalého plynu, je vztah mezi veličinami p , V , T vyjádřen stavovou rovnicí dokonalého plynu

$$\frac{p V}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 m}{\varrho_0 T_0} = B, \quad (2)$$

kde $T_0 = 273,15^\circ \text{K}$, $p_0 = 760 \text{ torr} = 1,01325 \text{ N m}^{-2}$; V_0 je objem zvolené hmoty m ideálního plynu, který má při teplotě T_0 a tlaku p_0 hustotu ϱ_0 , T je absolutní teplota plynu a p a V jeho tlak a objem při teplotě T . Velikost konstanty B závisí podle vztahu (2) jen na velikosti zvolené hmoty m .

Kilomol¹⁾ M_k dokonalého plynu má objem V_k (kilomolový objem). Konstanta B má pro kilomol ideálního plynu hodnotu, která se značí R a nazývá se univerzální plynová konstanta. Její hodnota je

$$R = 8,31696 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$$

Stavová rovnice pro jeden kilomol dokonalého plynu má tedy jednoduchý tvar

$$p V_k = R T \quad (3)$$

Porovnáme-li vztah (1c) se vztahem (2), dostaneme pro zvolenou hmotu m dokonalého plynu vztah

$$U = \frac{3}{2} B T = k T, \quad (4)$$

kde k má pro zvolenou hmotu m dokonalého plynu stálou hodnotu.

¹⁾ Kilomol (kmol) libovolné látky: $M_k = \mu \text{ kg kmol}^{-1}$, kde μ je poměrná molekulová hmota. Např. pro O_2 je $\mu = 32$, $M_k = 32 \text{ kg kmol}^{-1}$.

Vnitřní energie určité hmoty dokonalého plynu závisí tedy jen na jeho teplotě a při rostoucí teplotě se zvětšuje podle vztahu (4).

Vratné děje v dokonalých plynech

Nemění-li se teplota T_1 , tlak p_1 , ani objem V_1 plynu hmoty m , je plyn v mechanické a tepelné rovnováze. Veličiny tlak, objem a teplota charakterizují tedy určitý rovnovážný stav plynu, a proto se nazývají *stavové veličiny*.

Změní-li se jedna nebo dvě ze stavových veličin, např. změní-li se teplota plynu na T_2 a tlak na p_2 , poruší se rovnovážný stav plynu a jeho objem se bez vnějšího působení sám od sebe upraví na hodnotu V_2 tak, že hodnoty p_2 , V_2 a T_2 splňují opět rovnici (2). Plyn přitom změní svůj původní stav, charakterizovaný stavovými veličinami o hodnotách p_1 , V_1 a T_1 , na jiný rovnovážný stav, který charakterizují stavové veličiny o velikostech p_2 , V_2 a T_2 . Každý

přechod plynu z určitého rovnovážného stavu do jiného rovnovážného stavu se nazývá děj v plynu.

Lze tedy stavovou rovnici dokonalého plynu vyjádřit ve tvaru

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} = B \quad (5)$$

Vyhovují-li hodnoty stavových veličin stavové rovnici dokonalých plynů, je plyn v mechanické i tepelné rovnováze.

Velikou důležitost mají děje, při kterých se objem plynu zvětšuje (expanze) a děje, při nichž se objem plynu zmenšuje (komprese). Při expanzi plyn práci koná, při kompresi práci přijímá (práci konají vnější síly působící na plyn).

Je-li ve válcovité nádobě uzavřena určitá hmota dokonalého plynu pístem, který se může pohybovat bez tření a má-li tlak plynu hodnotu p a vnější tlak na píst je p' (obr. 1), pak se plyn může jen rozpínat, jestliže $p > p'$ a jen stlačovat, je-li $p < p'$. Při rovnosti obou tlaků může probíhat právě tak expanze jako komprese plynu v nádobě. Oba případy jsou stejně dobře možné a mohou probíhat stejně v obou směrech.

Takové děje, při kterých může nastat buď expanze plynu, nebo jeho komprese, nazývají se děje vratné. Vratnými jsou děje v plynech, které probíhají nekonečně pomalu.

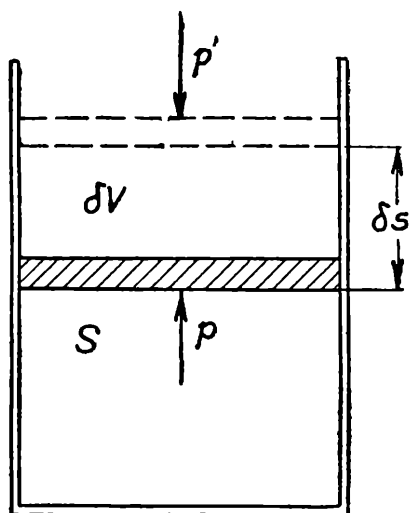
Kdyby se totiž změna stavu plynu ve válci dala konečnou rychlostí, měnila by se velikost tlaku p plynu ve válci a přestala by platit rovnost $p = p'$.

Plyn uzavřený ve válci přijme při kompresi určitou práci, kterou vykonají vnější síly tlakem na píst. Při stejně veliké expanzi plyn práci vykoná. Jestliže oba děje jsou vratné, je $p = p'$. Proto je *práce plynem při vratné kompresi přijatá stejně veliká jako práce vykonaná plynem při stejně veliké vratné expanzi*. Jsou-li oba děje, nebo jeden z nich, nevratné, pak při kompresi je $p' > p$, a proto plyn přijme při kompresi větší práci, než je schopen vykonat při stejně veliké expanzi. Proto mají tepelné stroje pracující vratnými ději s dokonalým plynem (*ideální tepelné stroje*) *větší účinnost než stroje pracující za stejných jinak okolností nevratně*.

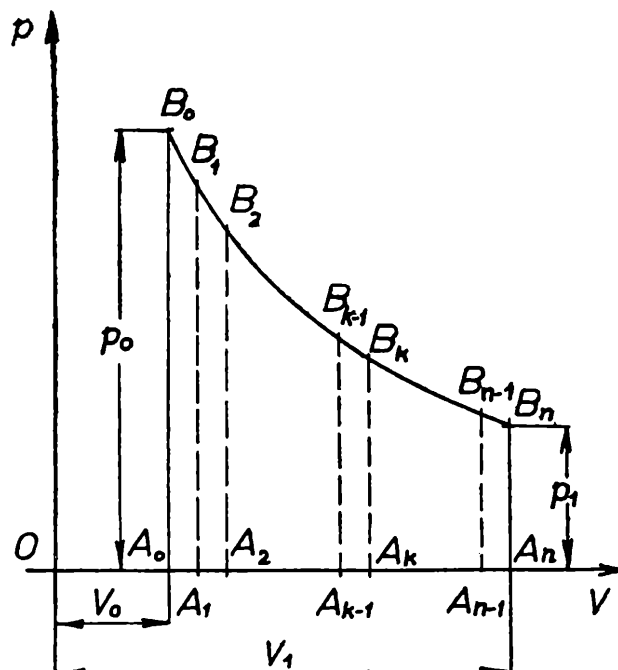
Při dějích, které probíhají nekonečně pomalu, dochází v každém okamžiku k tak malým změnám nejen tlaku, nýbrž i objemu a teploty plynu uzavřeného ve válci, že můžeme všechny tyto změny zanedbat a pokládat veličiny p , T a V za stálé. *Proto platí během vratného děje stále stavová rovnice dokonalého plynu a plyn zůstává v průběhu vratného děje ve stavu mechanické a tepelné rovnováhy.*

Vratné děje ve skutečnosti neexistují. Jejich představa se zavádí proto, že se dají teoreticky snadněji zpracovat než skutečné děje a poznatky takto získané můžeme v prvním přiblížení aplikovat i na skutečné děje v plynech.

Uvažujme nyní, jakou práci vykoná dokonalý plyn hmoty m o objemu V , uzavřený ve válcovité nádobě pístem o průřezu S , jestliže se plyn vratně rozpíná (obr. 1). Má-li tlak plynu v nádobě hodnotu p , působí na píst ve směru kolmém k jeho průřezu síla $F = p S$. Předpokládáme-li, že se píst posune bez tření o tak malou délku δs),



Obr. 1



Obr. 2

že můžeme zanedbat změnu tlaku plynu při jeho expanzi a pokládat p za konstantní, změní se objem plynu o nekonečně malou hodnotu $\delta V = S \delta s$ a plyn při ní vykoná práci

$$A = F \delta s = p S \delta s = p \delta V \quad (6)$$

Vztah (6) platí jen pro vratné děje.

Práci A vykonanou plynem při vratném ději můžeme určit také graficky z tzv. pracovního diagramu, neboli $p - V$ diagramu příslušného vratného děje.

Pracovní diagram zobrazuje závislost tlaku p plynu na jeho objemu V v pravoúhlém souřadném systému. Velikosti objemu jsou souřadnicemi x , příslušné hodnoty tlaku souřadnicemi y . Počáteční objem V_0 plynu je zobrazen úsečkou OA_0 (obr. 2), konečný V_1 úsečkou OA_n ; velikost počátečního tlaku p_0 zobrazuje úsečka A_0B_0 , výsledného A_nB_n . Oblouk B_0B_n znázorňuje závislost tlaku plynu na jeho objemu v intervalu $\langle A_0A_n \rangle$.

²⁾ Změny veličin, ke kterým při dějích v plynech dochází, budeme značit písmenem Δ , jsou-li konečné, tj. tak velké, že je nelze zanedbat vzhledem k hodnotě veličiny, jejíž změnu označují a písmenem δ , jsou-li tak malé, že je lze zanedbat vzhledem k hodnotě veličiny, jejíž změnu označují. Značí tedy např. Δp konečnou změnu tlaku, δp tak malou změnu tlaku, že ji lze zanedbat (nekonečně malou změnu tlaku).

Úsečkou A_0A_n je zobrazen konečný přírůstek $\Delta V = V_1 - V_0$ objemu plynu.

Rozdělme interval A_0A_n na n nekonečně malých stejných intervalů, jejichž koncové body označíme $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Libovolná úsečka $A_{k-1}A_k$ zobrazuje nekonečně malý přírůstek δV objemu plynu (obr. 3). Plošku $A_{k-1}A_kB_kB_{k-1}$ můžeme pokládat za lichoběžník, neboť nekonečně malý oblouk $B_{k-1}B_k$ je možno pokládat za úsečku. Střední příčka tohoto lichoběžníka znázorňuje průměrný tlak p_k' v intervalu $V_{k-1}V_k$ a jeho obsah $p_k' \cdot \delta V$ práci, kterou plyn vykoná při nekonečně malé vratné expanzi z objemu V_{k-1} na V_k . Součet plošek všech těchto lichoběžníků určuje velikost práce, kterou plyn vykoná při ději zobrazeném obloukem B_0B_n křivky, znázorňující závislost tlaku plynu na jeho objemu. Velikost práce, kterou plyn vykoná při vratné expanzi z objemu V_0 na objem V_1 , je určena velikostí plochy omezené na $p - V$ diagramu úsečkou A_0B_0 , znázorňující počáteční tlak plynu, úsečkou A_nB_n , jež udává velikost výsledného tlaku plynu, úsečkou A_0A_n , zobrazující velikost $\Delta V = V_1 - V_0$ expanze plynu a obloukem B_0B_n křivky, jež znázorňuje závislost tlaku plynu na jeho objemu v intervalu A_0A_n . Táž plocha určuje práci, kterou vykonají vnější síly působící na plyn, uzavřený v nádobě, při jeho vratné kompresi z objemu V_1 na objem V_0 .

Z obr. 2 je patrné, že práce vykonaná plynem při vratné expanzi nezávisí jen na počátečním a konečném stavu plynu, nýbrž i na způsobu, jak plyn přešel z počátečního stavu do stavu výsledného.

Děj, jehož počáteční a konečný stav je totožný, se nazývá *kruhový děj* (cyklem).

Uvažujme děj, který se skládá ze čtyř vratných dějů a probíhá v určité hmotě dokonalého plynu. Plyn má v počátečním stavu objem V_1 , teplotu T_1 a tlak p_2 . Zvyšujeme-li jeho teplotu a udržujeme jeho tlak stálý, rozpíná se izobaricky a při teplotě T_2 dosáhne objemu V_2 . Potom zmenšíme tlak plynu na hodnotu p_1 a udržujeme jeho objem stálý. Při tomto izochorickém ději se plyn ochladí na teplotu T_3 . Pak ho stlačujeme při stálém tlaku p_1 až na počáteční objem V_1 . Na konci této izobarické komprese bude mít plyn teplotu T_4 . Zvýšíme-li nyní izochoricky tlak na počáteční hodnotu p_2 , nabude teplota hodnotu T_5 . Protože všechny čtyři děje jsou vratné, řídí se stavovou rovnicí dokonalého plynu a veličiny V_2, T_3, T_4 a T_5 mají hodnoty

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}, \quad T_3 = T_2 \cdot \frac{p_1}{p_2}, \quad T_4 = T_1 \cdot \frac{p_1}{p_2}, \quad T_5 = T_1$$

Protože $T_5 = T_1$, tvoří uvažované čtyři děje jeden vratný kruhový děj.

Podle obr. 4 vykoná dokonalý plyn při izobarické expanzi práci určenou obsahem obdélníka $ABCD$, při izochorickém zmenšení tlaku práci nekoná ani nepřijímá, při izobarické kompresi přijme práci určenou obsahem obdélníka $A'B'CD$ a při izochorickém zvýšení tlaku práci ani nekoná, ani nepřijímá. Práci vykonanou během kruhového děje určuje tedy obsah obdélníka $ABB'A'$. Tento poznatek lze zobecnit:

Velikost práce vykonané dokonalým plynem při vratném kruhovém ději je určena obsahem obrazce omezeného v $p - V$ diagramu křivkami, které znázorňují závislost tlaku plynu na jeho objemu v průběhu celého děje.

První termodynamická věta

První termodynamická věta je vyjádřením zákona zachování energie pro děje mechanické a tepelné. Omezíme se jen na děje probíhající v dokonalých plynech.

Předpokládáme, že dokonalý plyn dané hmoty je ve válci s pohyblivým pístem. Působením vnější tlakové síly na píst plyn stlačujeme, přičemž vykonáváme mechanickou práci A' . Současně mu dodáme teplo ΔQ . Tím se zvýší vnitřní energie plynu ve válci o hodnotu

$$\Delta U = U - U_0,$$

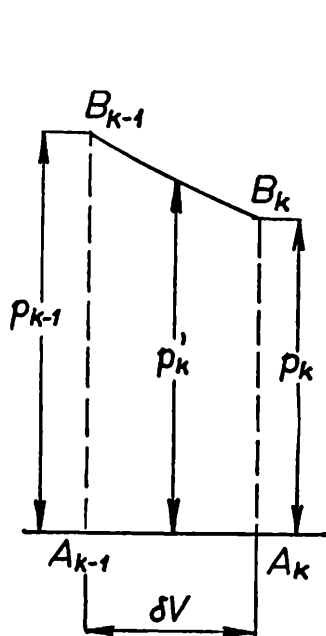
kde U značí konečnou a U_0 počáteční hodnotu vnitřní energie plynu.

Matematicky vyjádříme tento poznatek rovnicí

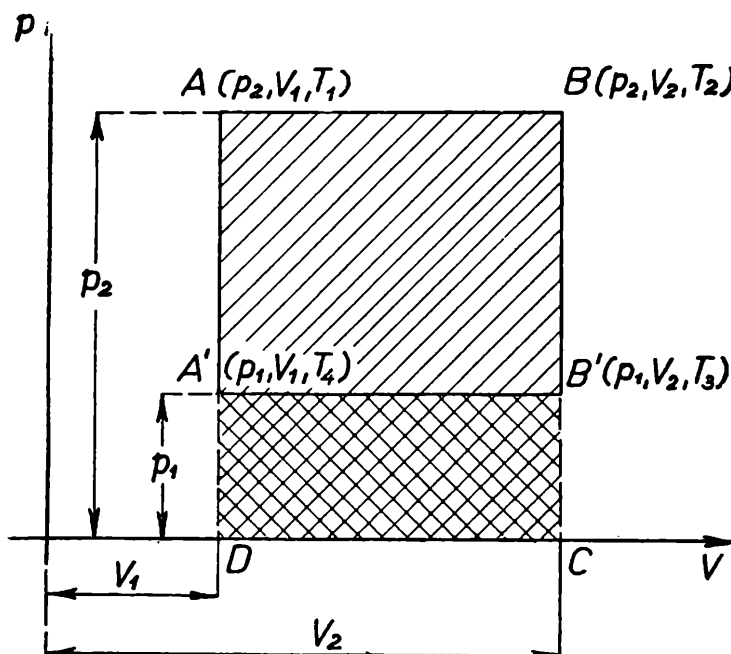
$$\Delta U = U - U_0 = \Delta Q + A' \quad (7)$$

Jestliže naopak plyn uzavřený ve válci koná mechanickou práci nebo vydává teplo, zmenší se jeho vnitřní energie o hodnotu vyhovující rovnici (7).

Plyn můžeme převést ze stavu 1 do stavu 2 různými ději. Na obr. 5 značí body A, B dva různé stavy určité hmoty ideálního plynu a oblouky AaB a AbB dva děje, jimiž je možno převést plyn ze stavu 1 do stavu 2. Dokázalo se, že přírůstek vnitřní energie plynu je stejný, převedeme-li plyn ze stavu 1 do stavu 2 libovolným vratným dějem.



Obr. 3



Obr. 4

Přírůstek vnitřní energie dokonalého plynu nezávisí na ději, jímž převedeme plyn z jednoho stavu do jiného stavu, nýbrž jen na počátečním a konečném stavu. Je-li tedy stav plynu na počátku a na konci děje totožný, je přírůstek vnitřní energie plynu během děje nulový.

Při kruhovém ději je $U = U_0$. Proto platí pro vratný kruhový děj podle vztahu (7) rovnice

$$\Delta Q = -A' = A, \quad (8)$$

kde A značí práci, kterou plyn během kruhového děje vykoná.

Má-li tepelný stroj pracovat periodicky, musí se v jeho pracovním plynu opakovat stále stejné kruhové děje. Podle vztahu (8) není možno sestavit periodicky pracující tepelný stroj, který by konal větší práci než odpovídá teplu, které pracovní plyn přijímá během práce z okolí (tepelné lázně).

Matematická formulace první termodynamické věty, uvedená v rovnici (7), se dobře nehodí k vyšetřování dějů v ideálních plynech. Abychom

získali vhodnější vyjádření této věty při vratných dějích v plynech, určíme veličinu ΔU pomocí stavových veličin.

Kilomolové teplo C_v při stálém objemu je číselně rovno teplu, kterým se ohřeje jeden kilomol dokonalého plynu o 1°K , jestliže objem plynu je při tomto ději stálý. Jednotkou kilomolového tepla je $\text{J kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1}$. Má-li se tedy zvýšit teplota jednoho kilomolu plynu o hodnotu δT , je nutno dodat mu teplo

$$\delta Q = C_v \cdot \delta T$$

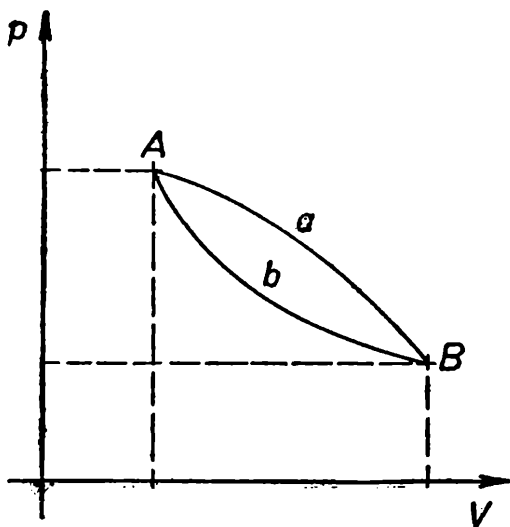
Objem plynu zůstane přitom stálý, a proto plyn nekoná práci. Podle vztahu (7) platí tedy rovnice

$$\delta U = C_v \cdot \delta T \quad (9)$$

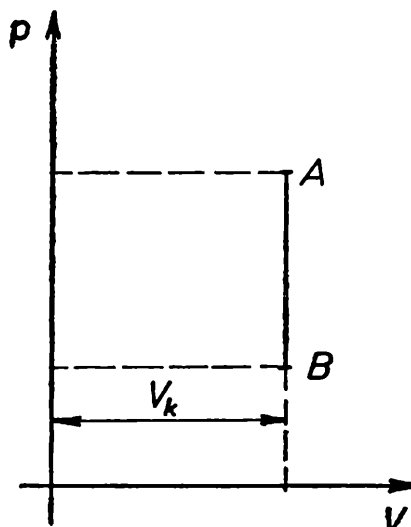
Vzhledem ke vztahům (6), (8) a (9) můžeme matematicky formulovat první termodynamickou větu při vratných dějích v dokonalém plynu rovnici

$$\delta Q = \delta U + p \cdot \delta V_k = C_v \delta T + p \cdot \delta V_k, \quad (10)$$

platnou pro jeden kilomol plynu. Písmenem V_k značíme kilomolový objem plynu, veličiny δQ , δU a δV_k jsou nekonečně malé změny tepla, vnitřní energie plynu a kilomolového objemu.



Obr. 5



Obr. 6

Teplo, kterým se ohřeje 1 kmol plynu o 1°K při konstantním tlaku, je číselně rovno kilomolovému teplu C_p při stálém tlaku. Zvýší-li se při stálém tlaku teplota jednoho kilomolu dokonalého plynu o δT , je třeba plynu dodat teplo $C_p \delta T$, pro něž platí podle rovnice (10) vztah

$$C_p \delta T = C_v \delta T + p \delta V_k.$$

Ze stavové rovnice pro dokonalý plyn však plyne

$$p \delta V_k = R \delta T,$$

takže

$$C_p \delta T = C_v \delta T + R \delta T$$

a po úpravě

$$C_p = C_v + R, \quad (11)$$

což je *Mayerova rovnice*. Dělíme-li obě strany číslem C_v , dostaneme

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v},$$

kde $\frac{C_p}{C_v} = \kappa$ je tzv. *Poissonova konstanta*.

Měřením se zjistilo, že κ má pro jednoatomové plyny hodnotu

$$\kappa = \frac{5}{3} = 1,67 ,$$

pro dvouatomové plyny je

$$\kappa = 1,40 .$$

Entropie

Protože práce, kterou koná ideální plyn při expanzi, závisí na ději, jenž v plynu probíhá, závisí také veličina ΔQ na způsobu, jakým se mění stav plynu. To je při výpočtech často velmi nevhodné. Proto se v termodynamice definuje nová veličina, zvaná entropie, nezávislá na tom, jak změna stavu plynu probíhá. Entropie se značí S a její nekonečně malá změna δS je definována jako podíl nekonečně malého tepla δQ , dodaného plynu, a teploty T , při které bylo toto teplo plynu dodáno vratným dějem. Je tedy

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} . \quad (12)$$

Pomocí entropie je možno první termodynamickou větu pro jeden kilomol dokonalého plynu vyjádřit ve formě

$$\delta S = \frac{C_v \delta T + p \cdot \delta V_k}{T} = \frac{C_v}{T} \delta T + R \frac{\delta V_k}{V_k} . \quad (13)$$

Jednotkou entropie je $[S] = \text{J deg}^{-1}$. Entropie je veličina skalární.

Entropie závisí, právě tak jako vnitřní energie dokonalého plynu, jen na počátečním a konečném stavu plynu.

Podle obr. 5 můžeme každý vratný kruhový děj $AaBbA$ rozložit na dva děje AaB a BbA . Má-li entropie při stavech zobrazených body A a B hodnoty S_1 a S_2 , změny se její velikost při ději AaB o $S_2 - S_1$ a při ději BbA o $S_1 - S_2$. Poněvadž entropie je veličina skalární, je celková změna ΔS entropie při kruhovém ději $AaBbA$ rovna

$$\Delta S = S_2 - S_1 + S_1 - S_2 = 0 .$$

Změna entropie ideálního plynu při vratném kruhovém ději je rovna nule.

Stavové změny dokonalého plynu

Dodáváme-li nebo odnímáme-li plynu teplo, dochází ke změnám všech, nebo aspoň dvou stavových veličin p , V , T . Všechny tyto změny budeme vztahovat na kilomol dokonalého plynu a na změny vratné. Nejdůležitější vratné děje v ideálním plynu jsou: děj izochorický, izobarický, izotermický a adiabatický.

a) **Děj izochorický.** Izochorický je takový děj v plynu, při kterém zůstává objem plynu stálý. Proto platí rovnice

$$V_k = \text{konst.} , \Delta V_k = 0 , A = p \Delta V_k = 0 .$$

Při tomto ději plyn práci nekoná, jak je patrné i z obr. 6. V $p - V$ diagramu je průběh tohoto děje zobrazen úsečkou rovnoběžnou s osou p (i z o c h o r a).

Teplo ΔQ dodané plynu se podle I. termodynamické věty ($A = 0$) spotřebuje na zvýšení vnitřní energie plynu, jehož teplota roste z hodnoty T_1 na hodnotu T_2 . Protože

$$\Delta V_k = 0 ,$$

je

$$\Delta Q = \Delta U = C_v \Delta T ,$$

takže

$$\Delta Q = C_v (T_2 - T_1) .$$

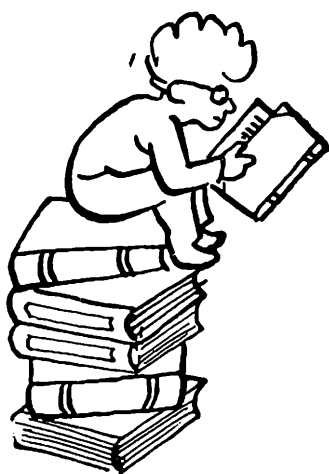
Nekonečně malý přírůstek entropie je podle vztahu (13)

$$\delta S = C_v \frac{\delta T}{T} .$$

Celkovou změnu entropie z hodnoty S_1 na hodnotu S_2 při zvýšení teploty z hodnoty T_1 na hodnotu T_2 nelze určit prostředky elementární matematiky. Použijeme-li k výpočtu integrálního počtu, dojdeme k výsledku

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} .^3) \quad (14)$$

(Pokračování)



Recenze

Vyšel desátý svazek Školy mladých matematiků

Před několika týdny vyšel v nakladatelství Mladá fronta další svazek edice Škola mladých matematiků. Autor CSc. Jiří Sedláček jej nazval Faktoriály a kombinační čísla. Na 80 stránkách textu jsou definovány a ve 45 řešených příkladech použity základní kombinatorické pojmy. Čtenář se dozví o řadě souvislostí kombinatoriky s teorií čísel, elementární geometrií, matematickou statistikou a teorií pravděpodobnosti. Zajímavé problémy spojené s Pascalovým trojúhelníkem, binomickou větou, číslem e , latinskými čtverci a trojúhelníkovými čísly jistě upoutají pozornost čtenářů.

Velmi srozumitelnému textu porozumí každý, kdo má základní středoškolské znalosti a chuť zamýšlet se nad matematickými problémy. Zvláště studenti odborných škol naleznou v tomto svazku látku, kterou v hodinách matematiky neprobírají. Pomůckou k řešení úloh jsou návody uvedené v závěru svazku, u jednodušších úloh jsou uvedeny výsledky.

Redakce Rozhledů vřele doporučuje svým čtenářům, aby si brožuru opatřili a prostudovali. Cena brožury je 3 Kčs, část nákladu je k dostání v prodejnách n. p. Kniha, ostatní výtisky dostanou žákovské knihovny na školách.

Jaroslav Šedivý

³⁾ Značkou $\ln$ značíme tzv. přirozený logaritmus, který má za základ Eulerovo číslo $e = 2,7182818\dots$. Přirozený logaritmus jakéhokoli čísla $a > 0$ vypočítáme pomocí dekadických logaritmů ze vztahu $\ln a = 2,302585 \cdot \log a$.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

цепная дробь
цилиндр, цилиндрический
циркуль
цифра, сумма цифр
цифра верная, значащая, римская

řetězový zlomek
válec, válcový
kružítko
číslice, součet cifer
cifra zaručená, platná, římská

Ч

часовая стрелка
частично
частное
частность, в частности
частный случай
часть уравнения
чередоваться
чередующийся
черта дроби
чертёж
чертить, черчение
четвёрка
четверть круга, окружности

чётный
четырёхгранник
четырёхгранный угол
четырёхсторонник
четырёхугольник
числитель
числительное
число
число вещественное, действительное, дробное, иррациональное, комплексное, десятичное, мнимое, относительное, отрицательное, периодическое, положительное, противоположное, целое, обратное

hodinová ručička
částečně
podíl
zejména
zvláštní případ, speciální případ
strana rovnice
střídat se
alternující
zlomková čára
rys
rýsovat, rýsování
čtveřina, čtveřice
čtvrtina, kvadrant, čtvrtkruh, čtvrtkružnice
sudý
čtyřstěn
čtyřhran
čtyřstran
čtyřúhelník
čítatel
číslovka
číslo, počet
číslo reálné, reálné, lomené, iracionální, komplexní, desetinné, imaginární, relativní, záporné, periodické, kladné, opačné, celé, převrácené

III

шаг	krok
шар	koule
шаровой слой	kulová vrstva
ширина	šířka
шкала, обратная шкала	stupnice, stupnice reciproká

Э

Эвклид	Euklid
экватор	rovník
эквивалентный	ekvivalentní
экстремум	extrém
эксцентрицитет, m.	excentricita
элемент	element, prvek
элементарный	elementární
элиминировать	eliminovat
эллипс, эллипсоид	elipsa, elipsoid
эллиптический	eliptický
эскиз	náčrt, skica

Čtení matematických znaků, výrazů a symbolů

1. Zlomky

$\frac{1}{2}$	— одна вторая; половина
$\frac{1}{3}$	— одна третья; одна треть; треть
$\frac{1}{4}$	— одна четвёртая; четверть
$\frac{1}{5}$	— (одна) пятая
$\frac{1}{10}$	— (одна) десятая
$\frac{1}{25}$	— (одна) двадцать пятая
$\frac{1}{100}$	— (одна) сотая
$\frac{1}{1000}$	— (одна) тысячная
$\frac{1}{2367}$	— одна две тысячи триста шестьдесят седьмая
$\frac{2}{3}$	— две третьих; две трети
$\frac{3}{4}$	— три четвёртых; три четверти
$\frac{6}{13}$	— шесть тринадцатых
$\frac{7}{8}$	— семь восьмых
$\frac{24}{39}$	— двадцать четыре тридцать девятих
$\frac{76}{1000}$	— семьдесят шесть тысячных
$\frac{145}{10000}$	— сто сорок пять десятитысячных
$\frac{367}{20000}$	— триста шестьдесят семь двадцатитысячных

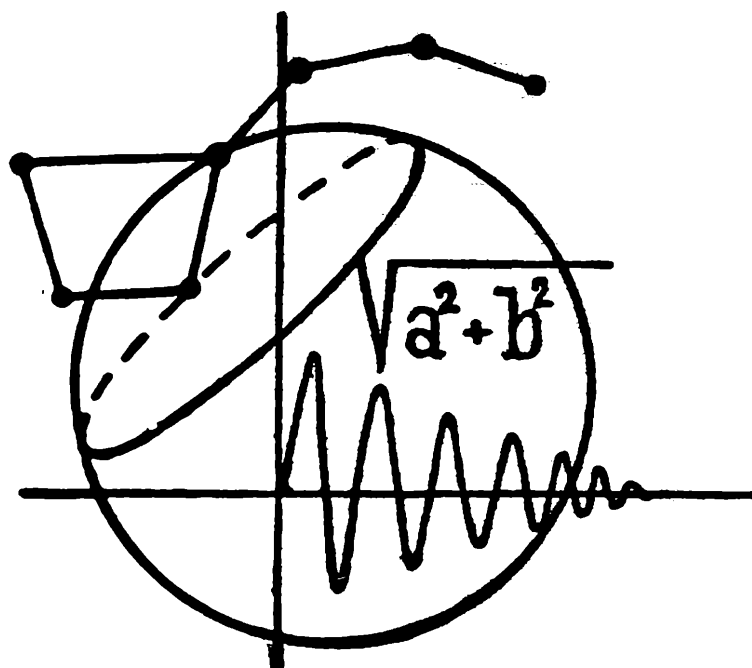
2. Desetinná čísla

0,1 — ноль целых, одна десятая

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



5

ROČ. 43
1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Leden 1965

Číslo 5

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Bezen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

F. Jirásek: Řešení geometrických úloh pomocí základních vlastností těžiště hmotných bodů	193
S. Horák: Dodatek k článku Fr. Jirásky	197
K. K. Ponomarev: Grafická znázornění druhých odmocnin z přirozených čísel	198
M. Zelenka: Poznámka k článku K. K. Ponomareva	200
Dr. R. Plajner: Pythagorovy trojúhelníky o stejném obsahu (Dokončení)	202
CSc. B. Haňková, F. Hrnčíř: Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti (Dokončení)	204
F. Hradecký: O určitých geometrických místech	208
V. Kolesnikov: Grafické řešení obecné rovinné soustavy sil	212
Prof. dr. V. Santholzer: Podstata scintilační spektrometrie	217
Závěr soutěže Rozhledů	221
M. Koman: Řešení úlohy o cyklistické dráze	222
Doc. O. Setzer: Geometrické paradoxon	225
J. Tesař: Děje v plynech (Dokončení)	226
Rz: K sedmdesátinám doc. J. Holubáře	236
J. Kotyk: Galilei — otec principu relativnosti klasické mechaniky	237
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. strana obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novln. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhnig. Titulní obrázky: M. Kořář, studující FS.

A-04*41581

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.

Matematika

František Jirásek, ČVUT, Praha:

Řešení geometrických úloh pomocí základních vlastností těžiště hmotných bodů



Pro názornost si můžeme hmotný bod představit fyzikálně v podobě malé těžké koule, jejíž rozměry jsou zanedbatelné.

Dohodněme se, že v dalším budeme brát všechny názvy fyzikálních veličin v jedné a téže soustavě, např. v CGS. V souvislosti s tím budeme poukazovat pouze na číselný význam té či oné fyzikální veličiny, ale nebudeme označovat její název. Jestliže v bodě A je soustředěna hmota m , pak takto určený hmotný bod budeme označovat $(A; m)$. Pokud nebude moci dojít k omylu, budeme jej prostě označovat A .

Těžištěm dvou hmotných bodů $(A; a)$, $(B; b)$ budeme nazývat bod C , který leží na úsečce AB a splňuje podmínku rovnováhy na páce. Početní podmínka pro určení bodu C je tato: $a \cdot CA = b \cdot CB$ nebo

$$\frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}.$$

V bodě C je pak soustředěna hmota $a + b$, a to zapisujeme $(C; a + b)$.

Jako důsledek předcházející úvahy můžeme vyslovit větu o vzdálenosti těžiště od dvou hmotných bodů:

Vzdálenost těžiště dvou hmotných bodů od těchto dvou bodů je nepřímou úměrná velikosti hmot v těchto bodech umístěných.

Těžiště bude blíže k bodu o větší hmotě. Z toho plyne, jestliže přímka prochází těžištěm a jedním z hmotných bodů, pak prochází i druhým.

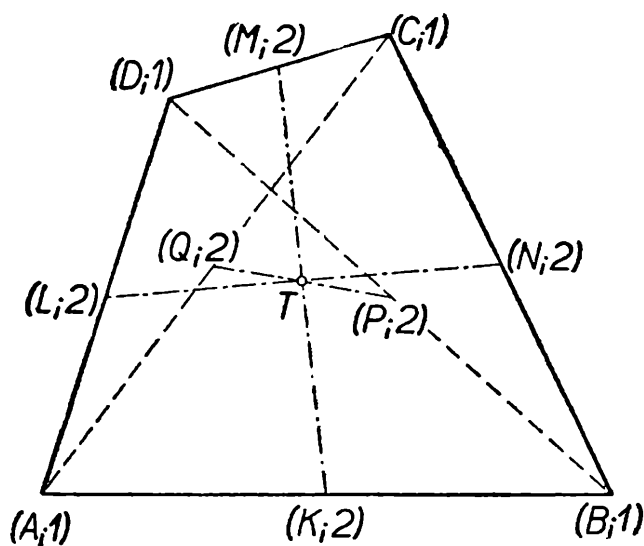
Nahradíme-li dva hmotné body jejich těžištěm, říkáme, že jsme body sjednotili, nebo že jsme je sečetli. Např. součet bodů $(A; 1)$, $(B; 4)$ je bod $(T; 5)$. Bod T je přirozeně těžiště hmotných bodů A , B . Podobně součet bodů $(R; 2)$, $(S; 5)$ dá těžiště $(Q; 7)$. Můžeme vyslovit větu:

Součtem (sjednocením) dvou bodů $(A; a)$, $(B; b)$ je těžiště $(T; a + b)$ těchto dvou bodů. Těžiště je vnitřní bod úsečky AB a dělí tuto úsečku v nepřímém poměru velikostí hmot v těchto bodech umístěných.

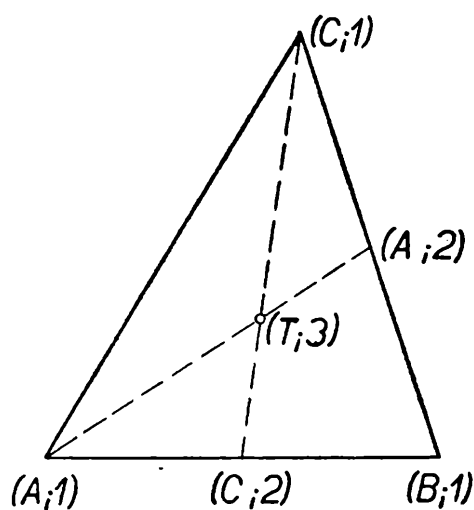
Místo výroku „těžiště dvou hmotných bodů $(A; a)$, $(B; b)$ je bod C “, můžeme užít kratšího zápisu $T[(A; a), (B; b)] \equiv C$.

Příklad 1. Nechť na koncích tenké bezvážné tyče AB , jejíž délka je rovna 20 jednotkám délky, je umístěna hmota: v A 6 jednotek, v B 2 jednotky. Těžištěm hmotných bodů $(A; 6)$, $(B; 2)$ bude bod C , ležící na tyči AB a bude určen podmínkami $6 \cdot CA = 2 \cdot CB$ nebo $CB = 3 \cdot CA$. Potom $AC = \frac{1}{4} AB = 5$. Sjednocením bodů $(A; 6)$, $(B; 2)$ je hmotný bod $(C; 8)$.

Těžiště tří hmotných bodů nalezneme tak, že najdeme těžiště T' dvou ze tří daných bodů a potom hledáme těžiště bodu T' a třetího z daných hmotných bodů. Analogicky nalezneme těžiště čtyř hmotných bodů, pěti atd. Obecně, těžiště n hmotných bodů nalezneme takto: Nejprve najdeme těžiště T_1 dvou hmotných bodů A_1, A_2 . Potom těžiště T_2 bodů A_3, T_1 , pak těžiště bodů A_4, T_2 atd. až posléze nalezneme těžiště bodů A_n, T_{n-2} .



Obr. 1



Obr. 2

Pro řešení geometrických úloh jsou důležité následující věty, které uvedeme bez důkazu.

Věta 1. *Poloha těžiště n hmotných bodů nezávisí na pořádku, podle kterého tyto body sjednocujeme.*

Věta 2. *Poloha těžiště soustavy n hmotných bodů se nezmění, jestliže nahradíme několik hmotných bodů jejich sjednocením.*

Našich vědomostí nyní využijeme k řešení několika geometrických úloh.

Příklad 2. Dva geometři Angličan Simson a Francouz Gergonne (Žergon) vyslovili tuto zajímavou větu:

Střední příčky libovolného čtyřúhelníka a úsečka spojující středy jeho úhlopříček procházejí společným bodem, kterým jsou půleny.

Důkaz (obr. 1). V každém vrcholu daného čtyřúhelníka umístíme hmotu jedné jednotky a zjistíme těžiště těchto čtyř hmotných bodů tak, že je různým způsobem seskupíme. Podle věty 1 musíme vždy dojít k témuž výsledku, tj. k témuž těžišti $(T; 4)$.

a) Součet bodů $(A; 1)$, $(B; 1)$ je bod $(K; 2)$, který pólí úsečku AB . Součet bodů $(C; 1)$, $(D; 1)$ je bod $(M; 2)$, který pólí úsečku CD . Součet bodů $(K; 2)$, $(M; 2)$ je bod $(T; 4)$, který pólí úsečku KM a je to těžiště dané soustavy bodů.

b) Sjednocením bodů $(C; 1)$, $(B; 1)$ je bod $(N; 2)$, který je středem úsečky BC . Součtem bodů $(A; 1)$, $(D; 1)$ dostaneme bod $(L; 2)$, který pólí úsečku AD . Těžiště $(T; 4)$ obdržíme jako součet bodů $(N; 2)$ a $(L; 2)$. Je přirozené, že to je střed úsečky LN .

Tím jsme zatím dokázali, že střední příčky čtyřúhelníka se vzájemně pólí a že jejich průsečík je těžiště čtyřúhelníka.

c) Nyní již stručně. Body $(A; 1)$, $(C; 1)$ sjednotíme v bodě $(Q; 2)$ a body $(B; 1)$, $(D; 1)$ sjednotíme v bodě $(P; 2)$. Součet bodů $(P; 2)$, $(Q; 2)$ je těžiště $(T; 4)$ daného čtyřúhelníka. Tím je důkaz vyslovené věty proveden.

P o z n á m k a . Střední příčka čtyřúhelníka je úsečka spojující středy dvou proti sobě ležících stran.

P ř í k l a d 3. V libovolném trojúhelníku se protínají tři těžnice v jediném bodě a každá těžnice je tímto bodem dělena v poměru $2 : 1$, počítáno od vrcholu.

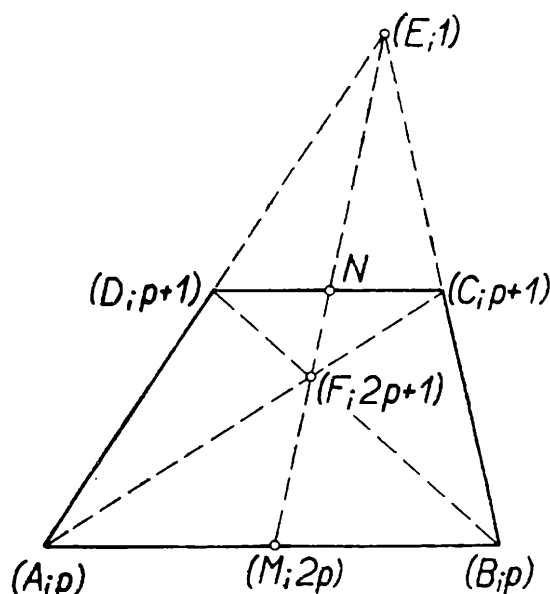
Ř e š e n í (obr. 2). V každém vrcholu trojúhelníka ABC umístíme hmotu velikosti 1. Spojením bodů $(A; 1)$, $(B; 1)$ obdržíme bod $(C_1; 2)$, který je středem úsečky AB . Součet bodů $(C_1; 2)$ a $(C; 1)$ je těžiště $(T; 3)$, které leží blíž k bodu C_1 a úsečku CC_1 dělí v poměru $2 : 1$. (V obr. 2 je index u C_1 vynechán).

K témuž těžišti dojdeme podle věty 1 také tak, že nejdříve sečteme body $(B; 1)$, $(C; 1)$ a tento součet přičteme k bodu $(A; 1)$.

P ř í k l a d 4. Je dán lichoběžník $ABCD$. Dokažte, že průsečík úhlopříček AC , BD , průsečík prodloužených ramen AD , BC a středy základů leží v jedné přímce.

Ř e š e n í (obr. 3). Nechť $AB > CD$. Středy základů označíme M , N , platí tedy $AM = BM$, $CN = DN$. Průsečík ramen je E a průsečík úhlopříček je F . V bodech A , B , E umístíme takové hmoty, aby bod F byl jejich těžištěm. To provedeme takto: Do bodu E umístíme hmotu 1, do bodu A hmotu p a do bodu B hmotu q tak, aby bod D byl těžištěm bodů $(A; p)$ a $(E; 1)$ a zároveň, aby bod C byl těžištěm bodů $(B; q)$ a $(E; 1)$. Pak platí

$$p \cdot AD = 1 \cdot DE, \text{ tj. } p = \frac{DE}{AD} \quad (1)$$



Obr. 3

Analogicky obdržíme

$$q = \frac{CE}{BC}. \quad (2)$$

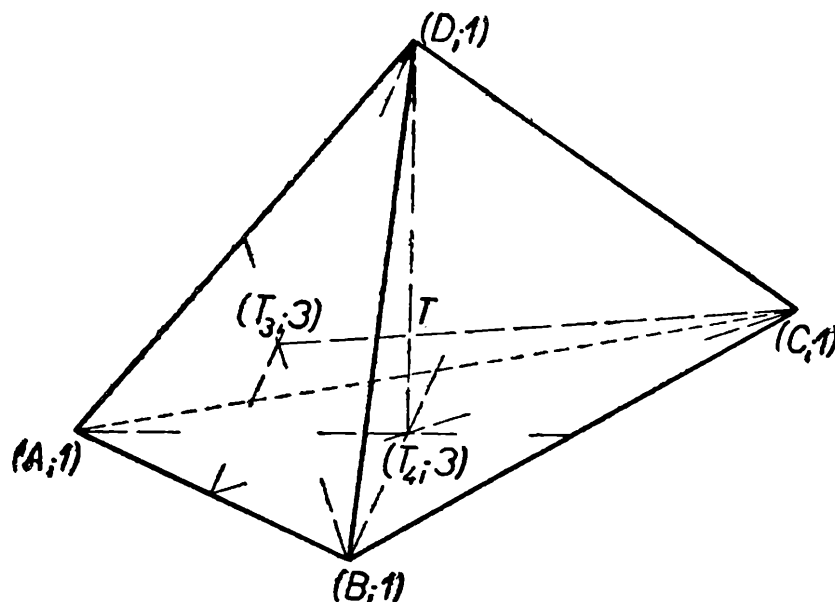
Z podobnosti trojúhelníků ABE , DCE plyne

$$DE : AD = CE : BC \quad (3)$$

Dosazením z rovnic (1), (2) do rovnice (3) máme

$$p = q.$$

Sjednocením bodů $(A; p)$, $(E; 1)$ dostaneme bod $(D; p + 1)$. Pak je jasné, že těžiště bodů A , B , E leží na BD . Stejným způsobem se ukáže, že toto těžiště nutně leží na AC , tj. splývá s bodem $(F; 2p + 1)$. K témuž těžišti F se můžeme také dostat tak, že nejprve sečteme body $(A; p)$, $(B; p)$ a tento součet sečteme s bodem $(E; 1)$. A tím jsme s důkazem hotovi.



Obr. 4

To, co jsme si řekli o hmotných bodech v rovině, platí také o hmotných bodech v prostoru. Platí tam i věty 1 a 2. Toho použijeme při řešení dalšího příkladu.

Příklad 5. V libovolném čtyřstěnu spojme každý vrchol s těžištěm protější stěny. Dokažte, že takto získané čtyři úsečky procházejí jedním bodem a jsou jím děleny v poměru 3 : 1 (počítáno od vrcholu).

Řešení (obr. 4). Ve vrcholech čtyřstěnu $ABCD$ umístíme hmoty rovné jedné jednotce.

Těžiště bodů $(A; 1)$, $(B; 1)$, $(C; 1)$ je $(T_4; 3)$. Těžiště bodů A , B , C , D leží tudíž na úsečce DT_4 a dělí tuto úsečku v poměru 3 : 1, počítáno od bodu D .

Těžiště bodů $(A; 1)$, $(B; 1)$, $(D; 1)$ je bod $(T_3; 3)$ a pak těžiště všech čtyř bodů leží na úsečce CT_3 a dělí v poměru 3 : 1, počítáno od bodu C . Podle věty 1 a 2 splývá toto těžiště s těžištěm dříve nalezeným a důkaz věty je proveden.

Příklady.

1. Je dán libovolný (rovinný nebo prostorový) šestiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Středů jeho stran postupně označme $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Dokažte, že trojúhelník $B_1B_3B_5$ má totéž těžiště jako trojúhelník $B_2B_4B_6$.

2. Do kružnice je vepsán čtyřúhelník s úhlopříčkami vzájemně kolmými. Dokažte, že průsečík jeho středních příček půlí úsečku spojující průsečík úhlopříček se středem kružnice.

Stanislav Horák st., ČVUT, Praha:

Dodatek k článku Fr. Jiráska

V uvedeném článku v příkl. 2. je jedna pěkná věta o obecném čtyřúhelníku. Věta se dá ovšem dokázat planimetricky, aniž bychom operovali s hmotnými body. Důkaz je právě tak jednoduchý a elegantní jako důkaz provedený v citovaném článku. Jde o důkaz této věty:

Střední příčky čtyřúhelníka se vzájemně půlí a jejich průsečíkem prochází a je jím půlena i spojnice středů obou úhlopříček.

D ů k a z (obráz. 1). Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník, neboť KL je střední příčka v trojúhelníku ABD a MN je střední příčka v trojúhelníku BCD . Proto

$$KL \parallel BD,$$

$$MN \parallel BD,$$

z čehož $KL \parallel MN$.

Poněvadž zároveň platí

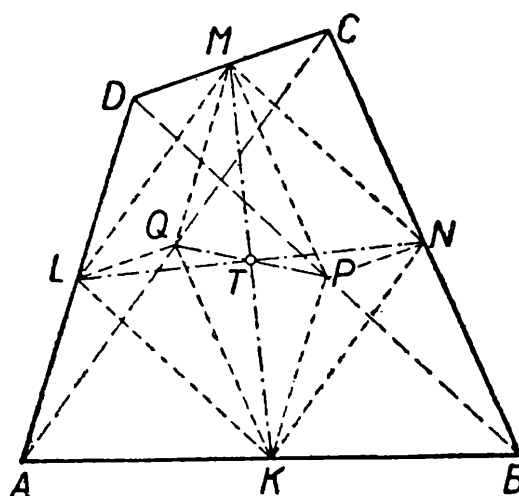
$$KL = \frac{1}{2} BD,$$

$$MN = \frac{1}{2} BD,$$

platí též $KL = MN$.

Čtyřúhelník $KLMN$ je tudíž skutečně rovnoběžník. Ale v rovnoběžníku se úhlopříčky vzájemně půlí a v našem případě jsou úhlopříčky právě střední příčky daného čtyřúhelníka, a tím je první část vyslovené věty dokázána.

Druhá část se dokazuje podobně. Čtyřúhelník $KQMP$ je rovnoběžník, neboť jeho strany jsou středními příčkami jistých trojúhelníků (najdete je sami). A úsečky KM, PQ jsou v tomto rovnoběžníku úhlopříčky a ty se vzájemně půlí. Úsečka KM je společnou úhlopříčkou dříve uvažovaného rovnoběžníku $KLMN$ a rovnoběžníku $KQMP$ a po-



Obr. 1

něvadž úsečka KM má jediný střed T , je to střed i úseček PQ a LN , jak jsme měli dokázat.

Dokažte, že čtyřúhelník $LPNQ$ je rovnoběžník.

K. K. P o n o m a r e v, Moskva:

Grafické znázornění druhých odmocnin z přirozených čísel

(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)

Při geometrických konstrukcích nebo při znázorňování přímk daných rovnicemi v pravoúhlé soustavě souřadnic je často třeba najít graficky druhou odmocninu z přirozeného čísla 1, 2, 3, atd., tj. sestrojit výraz tvaru $\sqrt{n}$, kde n je libovolné přirozené číslo.

Je-li toto číslo n čtvercem jiného přirozeného čísla, jako např. 1, 4, 9, 16, 25, ..., nečiní sestrojení druhé odmocniny z n žádné potíže.

V jiných speciálních případech, když $n = 2, 3, 5, 7, 8$ apod., dá se konstrukce provést též poměrně snadno. Použijeme Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ a volíme pro dané číslo vhodný rozklad na součet nebo rozdíl čtverců, např. $2 = 1^2 + 1^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2 = 3^2 - 2^2$ atd. V těchto zvláštních případech se konstrukce dá provést elementárně. Rozdělme si postup na dva případy:

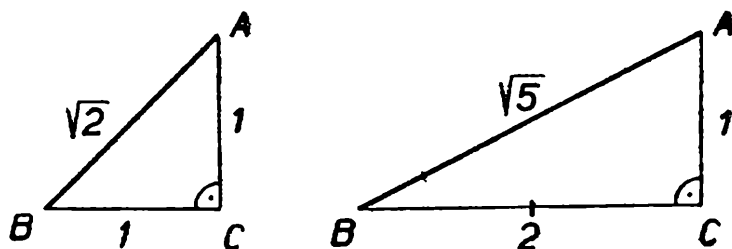
a) Číslo n se dá psát ve tvaru součtu čtverců dvou přirozených čísel: stačí sestrojit pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsnami budou základy mocnin, na něž jsme dané číslo rozložili, např. ve výše uvedených příkladech 1 a 1, 2 a 1, délková jednotka (obr. 1) atd.

b) Číslo n se dá psát ve tvaru rozdílu čtverců dvou přirozených čísel. Zde sestrojíme užitím Thaletovy věty pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou a jednou odvěsnou budou základy mocnin, na něž jsme dané číslo rozložili, např. 2 a 1, 3 a 2 délkové jednotky (obr. 2) atd.

Ovšem v obecném případě, kdy se výše uvedených postupů nedá použít, je sestrojení druhých odmocnin z ostatních přirozených čísel, např. 6, 14, 22, 30, 38, 42 atd., trochu složitější. Uvedeme zde metodu sestrojení druhé odmocniny z libovolného přirozeného čísla, která je pravděpodobně mnoha čtenářům známa ze školní výuky. Postupuje se při ní takto (obr. 3):

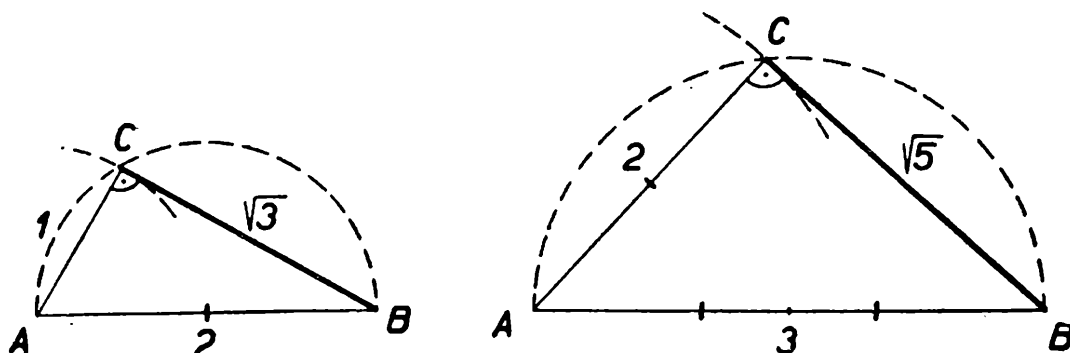
Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník OAB , jehož odvěsny OA a AB se rovnají jedné délkové jednotce. Délka přepony OB pak bude $OB = \sqrt{2}$ délkových jednotek, protože $\overline{OB^2} = \overline{AO^2} + \overline{AB^2} = 1^2 + 1^2$. Přeponu OB

nyňí zvolíme za delší odvěsnu nového pravoúhlého trojúhelníka OBC , jehož kratší odvěsnu BC (kolmou k odvěsně OB) sestrojíme rovnou opět jedné délkové jednotce. Potom se přepona trojúhelníka OCB podle vztahu $\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$ rovná $OC = \sqrt{3}$ délkových jednotek.

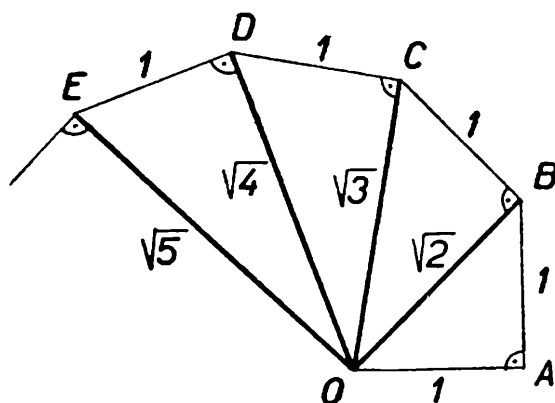


Obr. 1

Nyní vztyčíme v bodě C kolmici a na ni opět nanese jednu délkovou jednotku. Dostaneme bod D , ten spojíme s počátečním bodem O a přepona OD vzniklého trojúhelníka OCD se rovná $\sqrt{4} = 2$ délkové jednotky.



Obr. 2



Obr. 3

Stejným způsobem můžeme dále pokračovat v sestrojování: v bodě D vztyčíme kolmici DE délky jedna, bod E spojíme s počátečním bodem konstrukce O a takto získaná přepona $OE = \sqrt{5}$ délkových jednotek atd.

Přeložil a upravil Miloslav Zelenka

Poznámka k článku K. K. Ponomareva

Metoda uvedená v závěru článku K. K. Ponomareva má jeden podstatný nedostatek. Je totiž zřejmé, že každým dalším krokem (tj. sestrojením dalšího pravoúhlého trojúhelníka) se přesnost konstrukce zmenšuje, takže sestrojiti takto např. $\sqrt{66}$ by znamenalo vykonat velkou a přitom zbytečnou práci, protože výsledek by jistě nemohl vyhovět ani nejméně náročným požadavkům na přesnost.

Tento nedostatek se dá dosti snadno obejít, uvědomíme-li si, že při sestrojování $\sqrt{n}$ nemusíme začínat vždy až od jedné, ale že výhodnější bude začít konstrukci od takového nejbližšího nižšího nebo vyššího čísla, jehož odmocnina se dá velice přesně najít postupem vyloženým v odstavcích a) a b) článku K. K. Ponomareva. Např. $66 = (\sqrt{65})^2 + 1^2$, stačí sestrojiti pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\sqrt{65}$ a 1; a přitom $\sqrt{65}$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky 7 a 4. Z tohoto posledního trojúhelníka stačí tedy vyjít a již po dvou geometrických krocích máme hledanou délku $\sqrt{66}$.

Pro zajímavost uvádím tabulku přirozených čísel menších nebo rovných 100 i s jejich rozklady (pokud existují) na součty nebo rozdíly čtverců jiných přirozených čísel

1 = 1 ²	20 = 4 ² + 2 ² = 6 ² - 4 ²
2 = 1 ² + 1 ²	21 = 5 ² - 2 ² = 11 ² - 10 ²
3 = 2 ² - 1 ²	22
4 = 2 ²	23 = 12 ² - 11 ²
5 = 2 ² + 1 ² = 3 ² - 2 ²	24 = 5 ² - 1 ² = 7 ² - 5 ²
6	25 = 5 ² = 4 ² + 3 ² = 13 ² - 12 ²
7 = 4 ² - 3 ²	26 = 5 ² + 1 ²
8 = 3 ² - 1 ² = 2 ² + 2 ²	27 = 6 ² - 3 ² = 14 ² - 13 ²
9 = 3 ² = 5 ² - 4 ²	28 = 8 ² - 6 ²
10 = 3 ² + 1 ²	29 = 2 ² + 5 ² = 15 ² - 14 ²
11 = 6 ² - 5 ²	30
12 = 4 ² - 2 ²	31 = 16 ² - 15 ²
13 = 2 ² + 3 ² = 7 ² - 6 ²	32 = 4 ² + 4 ² = 6 ² - 2 ² = 9 ² - 7 ²
14	33 = 7 ² - 4 ² = 17 ² - 16 ²
15 = 4 ² - 1 ² = 8 ² - 7 ²	34 = 3 ² + 5 ²
16 = 4 ² = 5 ² - 3 ²	35 = 6 ² - 1 ² = 18 ² - 17 ²
17 = 4 ² + 1 ² = 9 ² - 8 ²	36 = 6 ² = 10 ² - 8 ²
18 = 3 ² + 3 ²	37 = 6 ² + 1 ² = 19 ² - 18 ²
19 = 10 ² - 9 ²	38

$$\begin{aligned}
39 &= 8^2 - 5^2 = 20^2 - 19^2 \\
40 &= 2^2 + 6^2 = 7^2 - 3^2 = \\
&= 11^2 - 9^2 \\
41 &= 4^2 + 5^2 = 21^2 - 20^2 \\
42 & \\
43 &= 22^2 - 21^2 \\
44 &= 12^2 - 10^2 \\
45 &= 3^2 + 6^2 = 7^2 - 2^2 = \\
&= 9^2 - 6^2 = 23^2 - 22^2 \\
46 & \\
47 &= 24^2 - 23^2 \\
48 &= 7^2 - 1^2 = 8^2 - 4^2 = \\
&= 13^2 - 11^2 \\
49 &= 7^2 = 25^2 - 24^2 \\
50 &= 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 \\
51 &= 10^2 - 7^2 = 26^2 - 25^2 \\
52 &= 4^2 + 6^2 = 14^2 - 12^2 \\
53 &= 2^2 + 7^2 = 27^2 - 26^2 \\
54 & \\
55 &= 8^2 - 3^2 = 28^2 - 27^2 \\
56 &= 9^2 - 5^2 = 15^2 - 13^2 \\
57 &= 11^2 - 8^2 = 29^2 - 28^2 \\
58 &= 3^2 + 7^2 \\
59 &= 30^2 - 29^2 \\
60 &= 8^2 - 2^2 = 16^2 - 14^2 \\
61 &= 5^2 + 6^2 = 31^2 - 30^2 \\
62 & \\
63 &= 8^2 - 1^2 = 12^2 - 9^2 = \\
&= 32^2 - 31^2 \\
64 &= 8^2 = 10^2 - 6^2 = 17^2 - 15^2 \\
65 &= 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2 = \\
&= 9^2 - 4^2 = 33^2 - 32^2 \\
66 & \\
67 &= 34^2 - 33^2 \\
68 &= 2^2 + 8^2 = 18^2 - 16^2 \\
69 &= 13^2 - 10^2 = 35^2 - 34^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
70 & \\
71 &= 36^2 - 35^2 \\
72 &= 6^2 + 6^2 = 9^2 - 3^2 = \\
&= 11^2 - 7^2 = 19^2 - 17^2 \\
73 &= 3^2 + 8^2 = 37^2 - 36^2 \\
74 &= 5^2 + 7^2 \\
75 &= 10^2 - 5^2 = 14^2 - 11^2 = \\
&= 38^2 - 37^2 \\
76 &= 20^2 - 18^2 \\
77 &= 9^2 - 2^2 = 39^2 - 38^2 \\
78 & \\
79 &= 40^2 - 39^2 \\
80 &= 4^2 + 8^2 = 9^2 - 1^2 = \\
&= 12^2 - 8^2 = 21^2 - 19^2 \\
81 &= 9^2 = 15^2 - 12^2 = 41^2 - 40^2 \\
82 &= 9^2 + 1^2 \\
83 &= 42^2 - 41^2 \\
84 &= 10^2 - 4^2 = 22^2 - 20^2 \\
85 &= 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2 = \\
&= 11^2 - 6^2 = 43^2 - 42^2 \\
86 & \\
87 &= 16^2 - 13^2 = 44^2 - 43^2 \\
88 &= 13^2 - 9^2 = 23^2 - 21^2 \\
89 &= 5^2 + 8^2 = 45^2 - 44^2 \\
90 &= 3^2 + 9^2 \\
91 &= 10^2 - 3^2 = 46^2 - 45^2 \\
92 &= 24^2 - 22^2 \quad k \\
93 &= 17^2 - 14^2 = 47^2 - 46^2 \\
94 & \\
95 &= 12^2 - 7^2 = 48^2 - 47^2 \\
96 &= 10^2 - 2^2 = 11^2 - 5^2 = \\
&= 14^2 - 10^2 = 25^2 - 23^2 \\
97 &= 4^2 + 9^2 = 49^2 - 48^2 \\
98 &= 7^2 + 7^2 \\
99 &= 10^2 - 1^2 = 18^2 - 15^2 = \\
&= 50^2 - 49^2 \\
100 &= 10^2 = 6^2 + 8^2 = 26^2 - 24^2
\end{aligned}$$

Tato tabulka poskytne jistě některé náměty a podněty těm, kteří se zajímají o teorii čísel. Ukazuje mimo jiné též souvislost existující mezi touto matematickou disciplínou a elementární geometrií. Čísla, která nelze rozložit ani na součet čtverců dvou přirozených čísel, ani na rozdíl čtverců, jsou v tabulce vyznačena ležatým písmem. S výjimkou čísel 42 a 66 jsou to čísla, která se liší od šestky o celistvý násobek osmi. Proč jsou to v oboru přirozených čísel 1 až 100 právě tato čísla? Dá se nějak zapsat výtvarný zákon posloupnosti těchto čísel (včetně 42 a 66)? Platí to i pro čísla větší než 100?

Pythagorovy trojúhelníky o stejném obsahu

(Dokončení)

Ukážeme řešení na několika příkladech.

1a) Hledejme pythagorejské trojúhelníky o obsahu $P = 210$. Řešení zahájíme rozkladem obsahu v prvočíselné činitele a budeme pokračovat jejich seskupováním v nesoudělné činitele podle (2).

$$\begin{aligned} P = 210 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ &\quad b \cdot (a - b) \cdot a \cdot (a + b) . \end{aligned}$$

Existují tedy dva různé pythagorejské trojúhelníky o obsahu $P = 210$. Strany prvního obdržíme, dosadíme-li do vzorců (0) $a = 5, b = 2$; dostaneme $x = 21, y = 20, z = 29$. Pro druhý trojúhelník je $a = 6, b = 1$, a tedy $x = 35, y = 12, z = 37$.

b) Jak tomu bude s trojúhelníky o obsahu $P = 7\,980$?

Postup řešení

$$\begin{aligned} P = 7980 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \\ &= 7 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 19 \\ &= 1 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \\ &= b \cdot (a - b) \cdot a \cdot (a + b) \end{aligned}$$

$\triangle_1$: $a = 12, b = 7, x = 95, y = 168, z = 193$;

$\triangle_2$: $a = 20, b = 1, x = 399, y = 40, z = 401$.

c) Podobně postupujeme v případě

$$\begin{aligned} P = 2730 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \\ &= 1 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \\ &= b \cdot (a - b) \cdot a \cdot (a + b) \end{aligned}$$

$\triangle_1$: $a = 14, b = 1, x = 195, y = 28, z = 197$

$\triangle_2$: $a = 10, b = 3, x = 91, y = 60, z = 109$.

2. Bude-li rozklad velikosti obsahu trojúhelníka odpovídat vzorci (2a), potom, jak ukazuje další příklad, půjde o trojúhelníky neprimitivní.

$$\begin{aligned} P = 398\,034 &= 2 \cdot 3^7 \cdot 7 \cdot 13 \\ &= 9^2 \cdot 13 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 27 \\ &= 27^2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 13 \\ &= d^2 \cdot b \cdot (a - b) \cdot a \cdot (a + b) \end{aligned}$$

$\triangle_1$: $d = 9, a = 14, b = 13$,

$$x = d(a^2 - b^2) = 243, y = d \cdot 2ab = 3276, z = d(a^2 + b^2) = 3285;$$

$$\triangle_2: d = 27, a = 7, b = 6,$$

$$x = d(a^2 - b^2) = 351, y = d \cdot 2ab = 2268, z = d(a^2 + b^2) = 2295.$$

3. Musíme připustit i možnost, že by obsah pythagorejského trojúhelníka bylo možno rozložit v požadované činitele jak podle vzorce (2), tak podle (2a). V takovém případě bychom získali trojúhelník primitivní i neprimitivní. Dokladem toho budiž např. trojúhelník o obsahu $P = 1320$

$$P = 1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$= 2^2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 11$$

$$= 1^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11$$

$$\triangle_1: d = 2, a = 6, b = 5, x = 22, y = 120, z = 122 \text{ (neprimitivní);}$$

$$\triangle_2: d = 1, a = 8, b = 3, x = 55, y = 48, z = 73 \text{ (primitivní).}$$

4. Hledejme naším postupem Eulerovy trojúhelníky, které mají mít stejný obsah $P = 3360$.

Rozklad a úprava

$$P = 3360 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$= 4^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$= 4^2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$= 2^2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 15.$$

Kromě těchto tří seskupení neexistují jiné, jak se můžeme přesvědčit. Potvrzuje to ostatně i uvedený přehled všech primitivních pythagorejských trojúhelníků s přeponou menší než 1000, sestavený podle vzrůstající velikosti přepony. Nenajdeme mezi nimi trojúhelník o uvedeném obsahu, což znamená, že musíme řešení úlohy hledat mezi neprimitivními trojúhelníky, které by musely mít obsah $\frac{3360}{d^2}$, kde d by bylo přirozené

číslo. Z rozkladu obsahu v prvočíselné dělitele je však ihned patrné, že mezi děliteli jsou jen dvě vyhovující čísla, tj. $d_1^2 = 4$, $d_2^2 = 16$. Jsou proto skutečně jen tři neprimitivní řešení, která Euler také našel a která uvádíme ve tvaru, jak jej užíváme my. Pátrání po čtvrtém je proto marné. V tom se Euler mylil.

Poř.	d	a	b	x	y	z	P	charakteristika
$\triangle_1$	4	5	2	84	80	116	3360	neprimitivní
$\triangle_2$	4	6	1	140	48	148	3360	neprimitivní
$\triangle_3$	2	8	7	30	224	226	3360	neprimitivní

Naše úvahy uzavřeme několika dalšími ukázkami, z nichž jsou pozoruhodné zejména ty, které dávají po třech řešeních, podobně jako v případě Eulerově. Stojí za zmínku, že trojúhelníky, nalezené Eulerem, jsou vlastně odvozené od trojice trojúhelníků o obsahu 840, která tehdy ušla Eulerově pozornosti. Neexistuje trojice trojúhelníků s obsahem menším než 840.

Obsah	Poř.	d	a	b	x	y	z	Charakteristika
840	Δ_1	1	8	7	15	112	113	primitivní neprimitivní neprimitivní
	Δ_2	2	6	1	70	24	74	
	Δ_3	2	5	2	42	40	58	
4 914	Δ_1	1	14	13	27	364	365	primitivní neprimitivní
	Δ_2	3	7	6	39	252	255	
10 920	Δ_1	1	13	8	105	208	233	primitivní neprimitivní neprimitivní
	Δ_2	2	14	1	390	56	394	
	Δ_3	2	10	3	182	120	218	
18 480	Δ_1	1	16	5	231	160	281	primitivní neprimitivní
	Δ_2	2	11	4	210	176	274	
106 260	Δ_1	1	23	12	385	552	673	primitivní primitivní
	Δ_2	1	28	5	759	280	809	

Bohuslava Haňková CSc., ČVUT,
František Hrnčíř, studující ČVUT, Praha:

Fibonacciova čísla a jejich vlastnosti

(Dokončení)

B. Některé vlastnosti Fibonacciových čísel, týkající se jejich dělitelnosti.

10. Jestliže číslo n je dělitelné číslem m , pak také Fibonacciovo číslo a_n je dělitelné Fibonacciovým číslem a_m .

D ů k a z. Nechť číslo n je dělitelné číslem m , tj. nechť platí $n = mk$. Důkaz provedeme indukcí pro k . Proto $k = 1$ je $n = m$, tedy je zřejmé, že a_n je dělitelné číslem a_m . Předpokládejme nyní, že a_{mk} je dělitelné čís-

lem a_m a všimněme si čísla $a_{m(k+1)}$. Platí $a_{m(k+1)} = a_{mk+m}$ a podle (10) je $a_{m(k+1)} = a_{mk-1}a_m + a_{mk}a_{m+1}$. První sčítanec na pravé straně poslední rovnice je zřejmě dělitelný číslem a_m . Druhý sčítanec je násobek čísla a_{mk} , tedy podle předpokladu je také dělitelný číslem a_m . Proto i součet obou těchto sčítanců a_{mk+1} je dělitelný číslem a_m ; a tím je věta dokázána.

11. *Jestliže číslo $n \neq 4$ je číslo složené, pak také Fibonacciovo číslo a_n je číslo složené.*

D ů k a z. Pro složené číslo n můžeme napsat $n = n_1 \cdot n_2$, kde $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$, přičemž buď $n_1 > 2$, anebo $n_2 > 2$. Zvolme $n_1 > 2$. Pak podle věty, právě dokázané, je číslo a_n dělitelné číslem a_{n_1} , přičemž $1 < a_{n_1} < a_n$; to znamená, že a_n je složené číslo.

12. *Dvě sousední čísla ve Fibonacciově posloupnosti jsou nesoudělná.*

D ů k a z. provedeme tentokrát sporem. Předpokládejme, že čísla a_n a a_{n+1} mají nějakého společného dělitele $d > 1$. Pak také jejich rozdíl $a_{n+1} - a_n$ bude dělitelný číslem d . Protože je $a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$, také číslo a_{n-1} bude dělitelné číslem d . Analogicky se dá dokázat, že číslem d jsou dělitelná i čísla a_{n-2} a a_{n-3} atd. a konečně i číslo a_1 . Avšak $a_1 = 1$, a proto nemůže být dělitelné číslem $d > 1$. Tento spor dokazuje naše tvrzení.

13. *Největším společným dělitelem dvou Fibonacciových čísel, a_n a a_m je Fibonacciovo číslo a_k , kde k je největším společným dělitelem čísel n a m .*

D ů k a z. Položme $m > n$ a uijíme na čísla m a n Euklidova algoritmu o dělení

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1, & \text{kde } 0 \neq r_1 < n, \\ n &= r_1q_1 + r_2, & \text{kde } 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, & \text{kde } 0 \leq r_3 < r_2, \end{aligned} \tag{13}$$

$$r_{t-2} = r_{t-1}q_{t-1} + r_t, \quad \text{kde } 0 \leq r_t < r_{t-1},$$

$$r_{t-1} = r_tq_t.$$

Číslo r_t je největší společný dělitel čísel m a n ³⁾.

Dále budeme zapisovat největšího společného dělitele dvou čísel m a n jako (m, n) . Rovnice $m = nq_0 + r_1$ znamená $(a_m, a_n) = (a_{nq_0} + r_1,$

³⁾ Je zřejmé, že číslo r_{t-1} je dělitelné číslem r_t . V předposlední rovnici ve (13) jsou oba sčítanci na pravé straně dělitelní číslem r_t , proto i r_{t-2} je dělitelné číslem r_t . Takto postupně se přesvědčíme, že číslem r_t jsou dělitelná čísla $r_{t-3}, r_{t-4}, \dots$, až konečně i m a n . Tedy r_t je společným dělitelem čísel m a n . Abychom dokázali, že je jejich největším společným dělitelem, stačí dokázat, že každý společný dělitel čísel m a n je také dělitelem čísla r_t . Nechť d je nějaký společný dělitel čísel m a n . Z první rovnice (13) vidíme, že d musí být také dělitelem čísla r_1 . Avšak potom podle druhé rovnice (13) je d dělitelem čísla r_2 . Analogicky dokážeme, že d je dělitelem čísel $r_3, \dots, r_{t-1}$ a konečně čísla r_t .

a_n), neboli $(a_m, a_n) = (a_{nq_0-1} a_{r_1} + a_{nq_0} a_{r_1+1}, a_n)$. Podle odstavce 10. a rovnice $(a, b) = (a + c, b)$, která platí v případě, že číslo c je dělitelné číslem b (snadný důkaz pomocí Euklidova algoritmu přenechávám čtenáři), je dále $(a_m, a_n) = (a_{nq_0-1} a_{r_1}, a_n)$, neboli podle odstavce (12) lze psát

$$(a_m, a_n) = (a_{r_1}, a_n)$$

Analogicky dokážeme, že platí

$$\begin{aligned}(a_{r_1}, a_n) &= (a_{r_2}, a_{r_1}), \\ (a_{r_2}, a_{r_1}) &= (a_{r_3}, a_{r_2}),\end{aligned}$$

$$(a_{r_{t-1}}, a_{r_{t-2}}) = (a_{r_t}, a_{r_{t-1}}).$$

Porovnáním všech těchto rovnic dostaneme

$$(a_m, a_n) = (a_{r_t}, a_{r_{t-1}}).$$

Protože r_{t-1} je dělitelné číslem r_t , je také $a_{r_{t-1}}$ dělitelné číslem a_{r_t} a je $(a_{r_t}, a_{r_{t-1}}) = a_{r_t}$. Všimneme-li si konečně, že $r_t = (m, n)$, dostáváme naše tvrzení.

Poznámka 3. Z věty právě dokázané, plyne věta obrácená k větě odstavce 10.:

Jestliže a_n je dělitelné číslem a_m , pak n je dělitelné m .

Vskutku, jestliže a_n je dělitelné a_m , pak

$$(a_n, a_m) = a_m. \quad (14)$$

Podle právě dokázané věty je

$$(a_n, a_m) = a_{(n, m)}. \quad (15)$$

Porovnáním (14) a (15) dostaneme $a_m = a_{(n, m)}$, tj. $m = (n, m)$, což znamená, že n je dělitelné m .

14. Sloučením věty v odstavci 10. a poznámky 3. dostaneme větu:
 a_n je dělitelné a_m tehdy a jen tehdy, jestliže n je dělitelné m .

Podle toho dělitelnost Fibonacciových čísel můžeme posuzovat podle dělitelnosti jejich indexů. Tedy např.:

Fibonacciovo číslo je sudé tehdy a jen tehdy, jestliže jeho index je dělitelný třemi.

Fibonacciovo číslo je dělitelné třemi tehdy a jen tehdy, jestliže jeho index je dělitelný čtyřmi.

Fibonacciovo číslo je dělitelné čtyřmi tehdy a jen tehdy, je-li jeho index dělitelný šesti.

Fibonacciovo číslo je dělitelné pěti tehdy a jen tehdy, je-li jeho index dělitelný pěti.

Fibonacciovo číslo je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, je-li jeho index dělitelný osmi.

Současně s těmito větami může čtenář dokázat věty:

Neexistuje Fibonacciovo číslo takové, že při dělení osmi dá zbytek 4. Neexistují lichá Fibonacciova čísla, dělitelná 17.

Rovněž čtenáři přenecháme důkaz zajímavé věty:

Pro jakékoliv celé číslo m je mezi prvými m^2 Fibonacciovými čísly alespoň jedno dělitelné m .

C. Fibonacciova čísla v geometrii.

Rozdělme úsečku AB jednotkové délky na dvě části tak, aby větší z nich byla střední geometrickou úměrnou mezi menší částí a celou úsečkou. Označme tuto delší část úsečky x , délka menší části úsečky je pak $1 - x$. Naše podmínka nám dá rovnici

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \quad (16)$$

$$x^2 = 1 - x.$$

Kladný kořen této rovnice je $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, takže

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(-1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

Takovéto dělení úsečky (bodem C_1) se často nazývá *zlatý řez*.

Kdybychom vzali záporný kořen rovnice (16), dělicí bod C_2 by padl vně úsečky AB , avšak zase jde o zlatý řez, neboť platí $\frac{C_2B}{AB} = \frac{AB}{C_2A} = \alpha$.

Zlatý řez se v geometrii vyskytuje dosti často. Např. strana a_{10} pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru R je rovna $2R \sin \frac{360^\circ}{2 \cdot 10}$, tj. $2R \sin 18^\circ$. Protože $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ ⁴⁾, je $a_{10} = 2R \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{R}{\alpha}$.

Můžeme ukázat, že prakticky při výpočtu strany a_{10} je možno místo čís-

⁴⁾ $\sin 18^\circ$ vypočítáme pomocí goniometrických vzorců: $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$, $\cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$, takže $\sin 72^\circ = 4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ)$; protože $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ \neq 0$, plyne z předchozího, že $1 = 4 \sin 18^\circ (1 - 2 \sin^2 18^\circ)$, a proto $\sin 18^\circ$ je jedním z kořenů rovnice $1 = 4x(1 - 2x^2)$. Upravíme-li tuto rovnici na tvar

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0,$$

najdeme kořeny $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Protože $\sin 18^\circ$ je kladné číslo,

různé od $\frac{1}{2}$, je $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

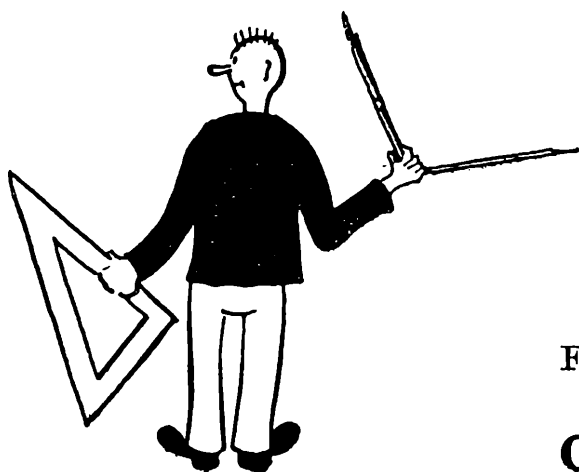
la α ($\alpha \doteq 1,6180$) brát podíl dvou sousedních Fibonacciových čísel, tedy přibližně $a_{10} \doteq \frac{8}{13} R$, nebo také $\frac{5}{8} R$

Na závěr podotkněme, že ne všechny úlohy, které souvisí s Fibonacciovými čísly, jsou tak snadno řešitelné jako ty, které jsme zde uvedli. Některé úlohy mají velmi složitá řešení a některé dokonce ještě nejsou vyřešeny. Např. v odstavci 10. jsme dokázali, že všechna Fibonacciova čísla, jejichž indexy jsou čísla složená (kromě a_4), jsou sama také čísla složená. Opačné tvrzení neplatí, protože např. $a_{11} = 4181 = 37 \cdot 113$. Vzniká otázka, zda je počet všech prostých Fibonacciových čísel konečný nebo nekonečný, nebo jinými slovy, existuje-li mezi prostými Fibonacciovými čísly číslo největší. Tato otázka zůstává ještě i v současnosti nevyřešena.

Použitá literatura

N. N. V o r o b j e v, Fibonacciova čísla;

B. A. K o r d ě m s k i j, Matematičeskaja smekalka



Deskriptivní geometrie

František Hradecký, Praha:

O určitých geometrických místech

I. V tomto článku se budeme zabývat vyšetřováním geometrických míst středů úseček, jejichž krajní body se pohybují po obvodech dvou shodných mnohoúhelníků, resp. po hranách některých těles rovnoměrným pohybem.

Než přistoupíme k jednotlivým úlohám, dokážeme pomocnou větou:

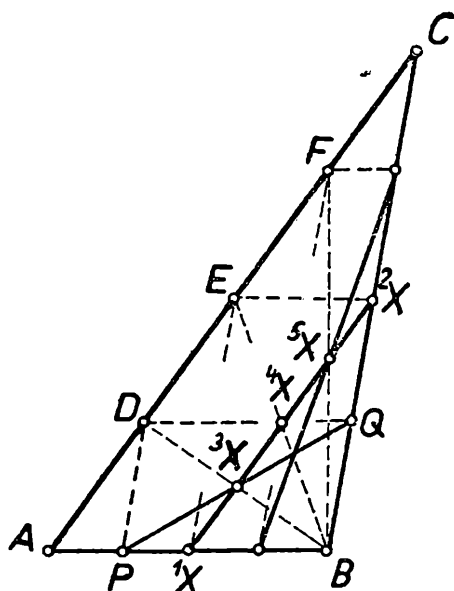
(1) Jestliže se bod P pohybuje po úsečce AB z bodu A do bodu B rychlostí v_1 a bod Q po úsečce BC z bodu B do bodu C rychlostí v_2 , přičemž $v_1 : v_2 = AB : BC$ (body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku), pak geometrickým místem středů úseček PQ je střední příčka trojúhelníku ABC rovnoběžná se stranou AC (obr. 1).

D ů k a z. Hledané množině bodů náleží středy 1X a 2X úseček AB a BC , což jsou středy počáteční a koncové polohy uvedené dvojice bodů P a Q .

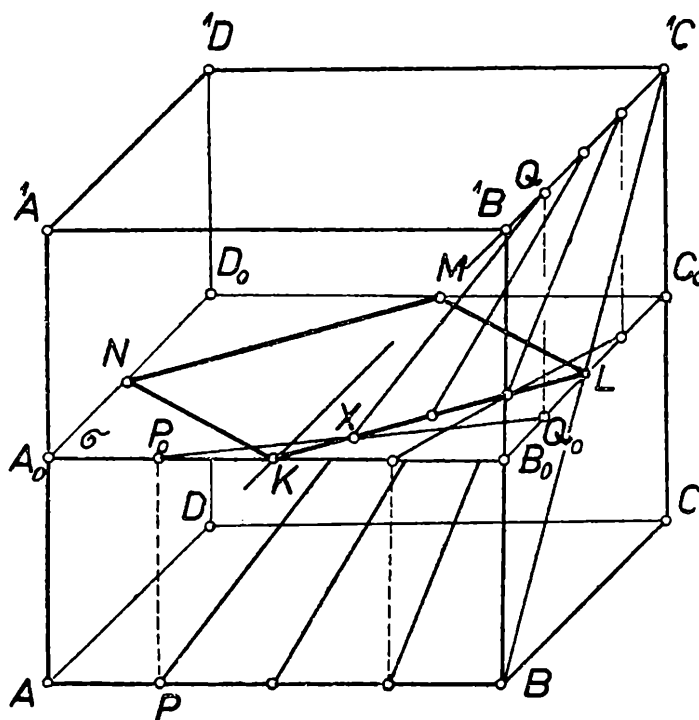
Pro rychlosti pohybujících se bodů platí

$$v_1 : v_2 = AP : BQ = AB : BC \quad (1)$$

Střed 3X úsečky PQ (obr. 1) náleží hledanému geometrickému místu. Rovnoběžky se stranami BC a AB vedené body P a Q se protnou v bodě D , který leží na straně AC . To plyne ze stejnoolehých trojúhelníků $\triangle APD \sim \triangle ABC$. Úhlopříčka BD rovnoběžníku $BQDP$ vytíná na PQ střed 3X . Poněvadž je $B^3X : BD = B^1X : AB$, je $^1X^3X \parallel AD$. To však platí pro kteroukoliv polohu bodu iX . Leží tedy body iX na střední příčce $^1X^2X \parallel AC$ trojúhelníka ABC .



Obr. 1



Obr. 2

Nahlédneme snadno, že každý bod úsečky $^1X^2X$ je středem určité úsečky PQ , jejíž krajní body splňují podmínky uvedené úlohy.

Této větě užijeme v následujících úlohách:

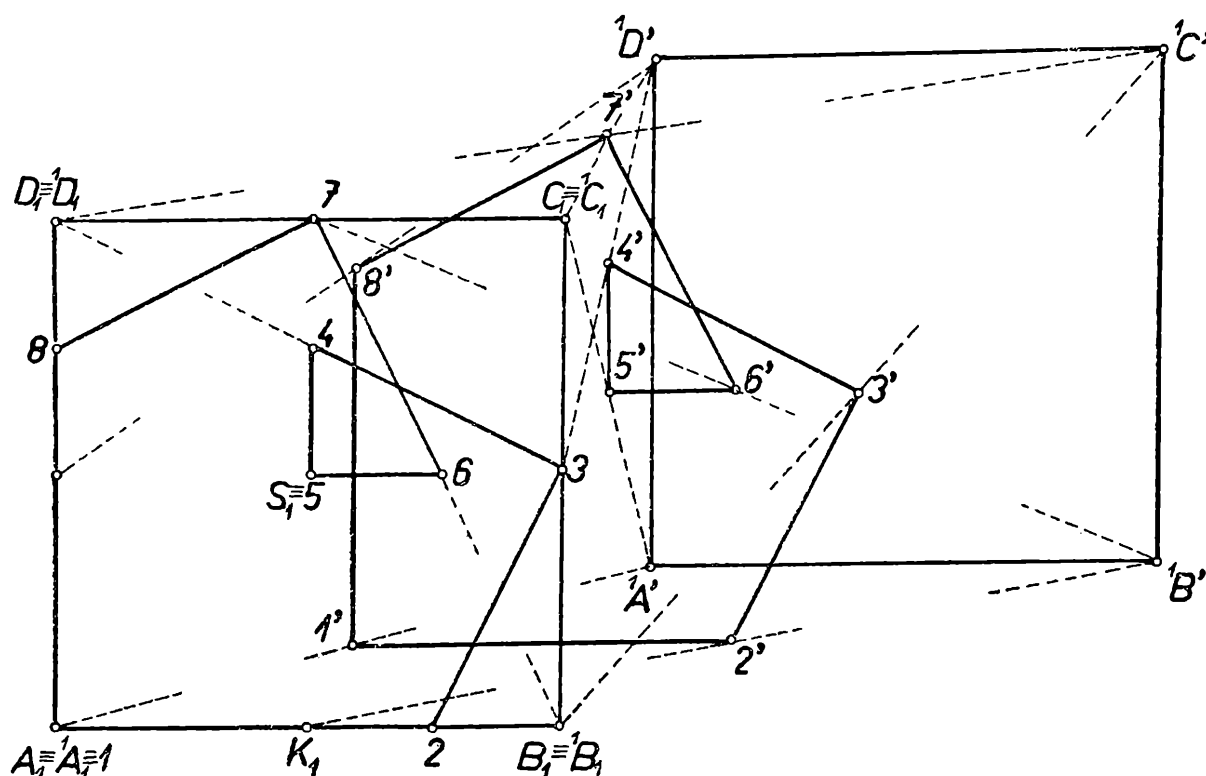
Ú l o h a 1. Je dána krychle $ABCD$ $^1A^1B^1C^1D$. Bod P se pohybuje z bodu A rovnoměrně po obvodu čtverce $ABCD$, bod Q se pohybuje z bodu 1B rovnoměrně touž rychlostí a v témže smyslu po obvodu čtverce $^1B^1C^1D^1A$. Máme určit geometrické místo středů úseček PQ (obr. 2).

Je zřejmé, že středy úseček PQ musí ležet v rovině σ procházející středem krychle a rovnoběžné s rovinami obou podstav. Tato rovina protíná krychli ve čtverci $A_0B_0C_0D_0$. Je-li P, Q jedna z poloh pohybujících se bodů a X střed úsečky PQ a jsou-li P_0Q_0 pravoúhlé průměty bodů P, Q do roviny σ , je střed úsečky P_0Q_0 bodem hledaného geometrického místa. Proběhne-li bod P úsečku AB a současně přitom

bod Q úsečku ${}^1B^1C$, proběhnou body P_0, Q_0 úsečky A_0B_0 a B_0C_0 . Podle pomocné věty (1) vyplní středy úseček P_0Q_0 úsečku KL spojující středy stran A_0B_0 a C_0D_0 . Proběhnou-li body P, Q obvody obou podstav tak, jak je uvedeno v úloze, pak geometrickým místem středů úseček PQ je obvod čtverce $KLMN$ (obr. 2). Jistě nebude obtížné dokázat, že každý bod nalezeného geometrického místa splňuje všechny podmínky dané úlohou.

Jestliže místo krychle užijeme kolmého nebo kosého hranolu se čtvercovou podstavou, dostaneme též výsledek.

Úloha 2. Je dána krychle $ABCD{}^1A^1B^1C^1D$. Po obvodě dolní podstavy se pohybuje z bodu A bod P , po obvodě horní podstavy se pohybuje z bodu 1A v témže smyslu, ale dvojnásobnou rychlostí bod Q . Máme určit geometrické místo středů úseček PQ (obr. 3).



Obr. 3

Geometrickým místem středů úseček PQ bude jistá lomená čára v rovině σ procházející středy pobočných hran. Budeme uvažovat o pravoúhlém průmětu pohybujících se bodů do roviny π dolní podstavy. Tyto pravoúhlé průměty budeme označovat indexem 1. Počátek průmětu lomené čáry označme $1 \neq A_1$. Body P_1Q_1 se nejprve pohybují po úsečce A_1B_1 . To znamená, že část úsečky A_1B_1 bude náležet hledanému průmětu geometrického místa. Je to úsečka 12 . Když bod P_1 dospěje do bodu K_1 , který je středem úsečky A_1B_1 , dostane se bod Q_1 do bodu B_1 . Je proto střed 2 úsečky K_1B_1 druhým vrcholem průmětu lomené čáry. Když bod P_1 dospěje do bodu B_1 , dostane se bod Q_1 do bodu C_1 . Středy úseček P_1Q_1 vyplní podle pomocné věty (1) úsečku 23 , která

je střední příčkou trojúhelníku $K_1B_1C_1$ rovnoběžnou s K_1C_1 . Střed 3 úsečky B_1C_1 je dalším vrcholem průmětu lomené čáry. Kdyby bod P_1 proběhl celou úsečkou B_1C_1 , proběhl by bod Q_1 dvojnásobnou úsečkou D_1C_1 a středy úseček P_1Q_1 by podle věty (I) vyplnily úsečku 3 D_1 . Poněvadž bod Q_1 proběhne jen úsečkou C_1D_1 , je hledaným geometrickým místem jen úsečka 3 4, kde bod 4 je středem úsečky 3 D_1 . Úsečka 4 5 je zřejmě rovnoběžná s A_1D_1 ; další část průmětu hledané křivky je pak souměrná podle přímky A_1C_1 .

Jestliže promítneme do této roviny hoření podstavu ${}^1A^1B^1C^1D$ ve směru ${}^1A^1A'$, kde ${}^1A'$ je libovolně zvolený bod v rovině dolní podstavu, je rovnoběžným průmětem hoření podstavu čtverec ${}^1A'^1B'^1C'^1D'$, jehož strany jsou rovnoběžné a shodné s příslušnými stranami čtverce ${}^1A^1B^1C^1D$. Můžeme pak snadno určit geometrické místo středů úseček PQ' , když se bod P pohybuje rovnoměrně po obvodu čtverce $ABCD$ a bod Q' dvojnásobnou rychlostí v témže smyslu po obvodě čtverce ${}^1A'^1B'^1C'^1D'$, který je se čtvercem shodný, přičemž odpovídající strany jsou rovnoběžné. Hledaným geometrickým místem je uzavřená lomená čára $1'2'3'4' \dots 8'1'$, která je rovnoběžným průmětem dříve nalezené lomené čáry 1, 2, 3, ..., 8, 1 ležící v rovině σ , neboť střed úsečky PQ se promítne do středu průmětu, tj. do středu úsečky PQ' .

Stejně bychom postupovali, kdyby rychlost bodu Q byla trojnásobná, čtyřnásobná atd., nebo kdyby se body P a Q pohybovaly ve smyslech opačných.

Zajímavé útvary dostaneme, jestliže body P a Q se pohybují po lomené čáře $AB^1B^1C^1D DA$ krychle (obr. 2) stejnou rychlostí v témže smyslu, nebo ve smyslech opačných, jestliže volíme počátek pohybu v různých vrcholech této lomené čáry.

Příklady k 1. části.

1. Po obvodě pravidelného mnohoúhelníka se pohybují rovnoměrně a) v témže smyslu, b) v opačném smyslu body P a Q . Volte počátek pohybu v různých vrcholech mnohoúhelníka a určete geometrické místo středů úseček PQ .

2. Předcházející úlohu řešte za předpokladu, že rychlost bodu Q je rovna a) dvojnásobku, b) trojnásobku rychlosti bodu P .

3. Po obvodě dolní a horní podstavu pravidelného hranolu se pohybují a) v témže smyslu, b) v opačném smyslu, body P , Q α) buď touž rychlostí, nebo β) rychlostí dvojnásobnou. Určete geometrické místo středů úseček PQ !

Uvažujte o rovnoběžném průmětu hranolu na rovinu dolní podstavu (podle úlohy 2) a o geometrickém místě středů úseček PQ' , když body P a Q' obíhají průměty obou podstav.

4. Na krychli $ABCD {}^1A^1B^1C^1D$ vyznačte lomenou čáru $AB^1B^1C^1D DA$ a určete geometrické místo středů úseček PQ , o nichž je zmínka na konci textu. Nakreslete v náčrtku příslušná geometrická místa pro různé polohy počátků pohybujících se bodů.

5. Předcházející úlohu řešte pro některá jiná pravidelná tělesa (čtyřstěn, osmistěn) nebo pravidelné hranoly a jehlany, které mají všechny hrany podstavné a pobočné shodné. Zvolte na nich libovolně lomené čáry utvořené z jejich hran.

(Pokračování)



Fyzika

Vladislav Kolesnikov, Olomouc:

Grafické řešení obecné rovinné soustavy sil

Učivo fyziky na střední škole se zabývá studiem grafického skládání sil v těchto případech:

1. Skládání dvou a více sil různoběžných, působících ve společném působišti, tzv. centrální rovinná soustava sil.

2. Skládání dvou sil rovnoběžných stejného i opačného směru.

3. Skládání dvou sil různoběžných působících v různých působistích.

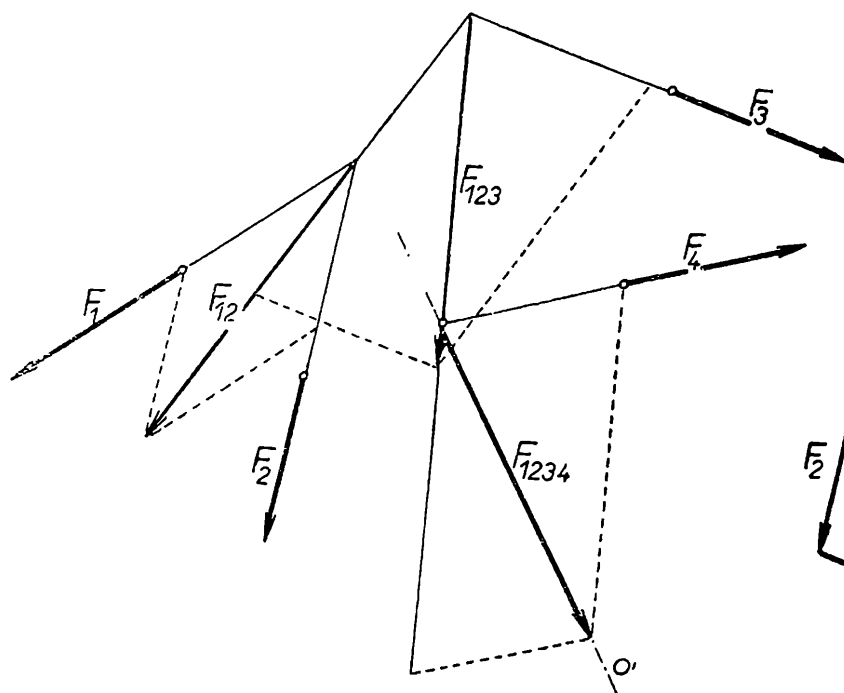
Poněvadž studium statiky a hlavně jejich technických aplikací má v praxi velký význam, podává tento článek metodu grafického řešení více různoběžných sil působících v různých bodech roviny. Jde o grafické řešení tzv. obecné rovinné soustavy sil.

Uvědomme si nejdříve známý způsob grafického řešení obecné rovinné soustavy sil - grafického řešení pomocí rovnoběžníků sil. Jsou dány síly F_1, F_2, F_3, F_4 , které působí na tuhé těleso. Grafické složení těchto sil můžeme provést tak, že skládáme vždy dvě síly. Prodloužíme jejich vektorové přímky až se protnou ve společném průsečíku, pak přeneseme působíště uvažovaných sil do společného průsečíku jejich vektorových přímk a graficky sečteme. Tak pokračujeme stále, až složíme všechny dané síly. Nezáleží přitom na tvaru tuhého tělesa, působíště může padnout i mimo těleso. Můžeme též použít při skládání těchto sil vektorového polygonu, tzv. složkového obrazce (obr. 2). Ovšem složkový obrazec sám o sobě nestačí, poněvadž výslednice F_{1234} má v dané soustavě sil F_1 až F_4 určitou polohu, která je dána v obr. 1 čarou o' částečných výslednic.

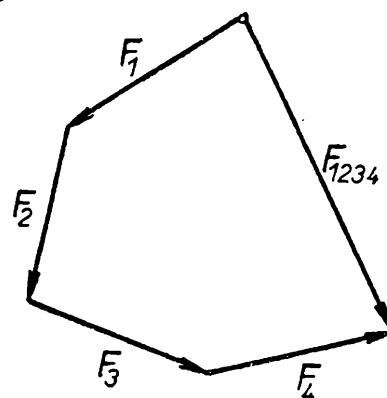
Tato metoda grafického řešení má svoje nevýhody. Někdy leží průsečíky sil i mimo nákresnu, nebo je nelze vůbec nakreslit, jde-li o rovno-

běžné síly. Dále při kreslení částečných výslednic se můžeme dopustit určitých nepřesností, nehledě k tomu, že tato metoda je dosti zdlouhavá.

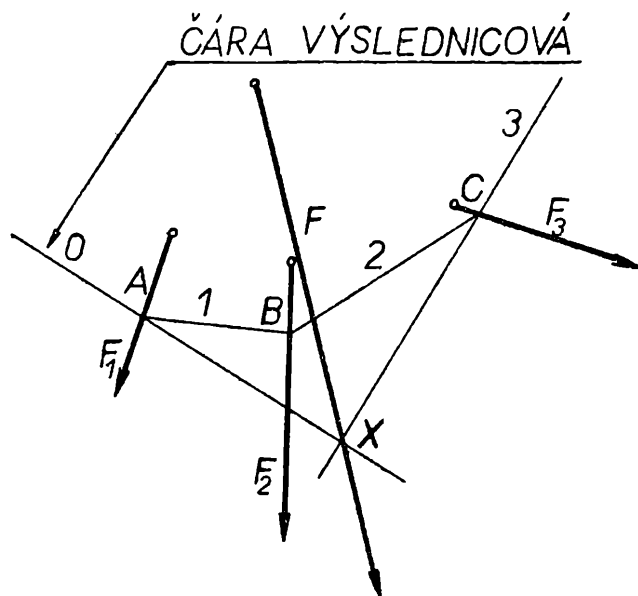
Pojednáme nyní o jiném obecnějším způsobu grafického řešení obecné rovinné soustavy sil. Jsou dány tři síly F_1, F_2, F_3 (obr. 3ab). Hledejme velikost a směr výsledné síly F dané složením sil F_1 až F_3 . Přidejme



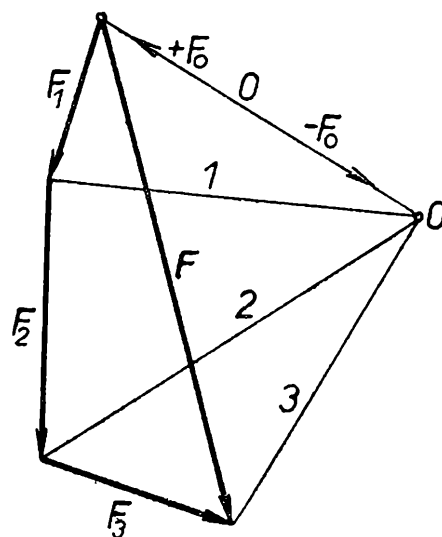
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3a. Obrazec silový.

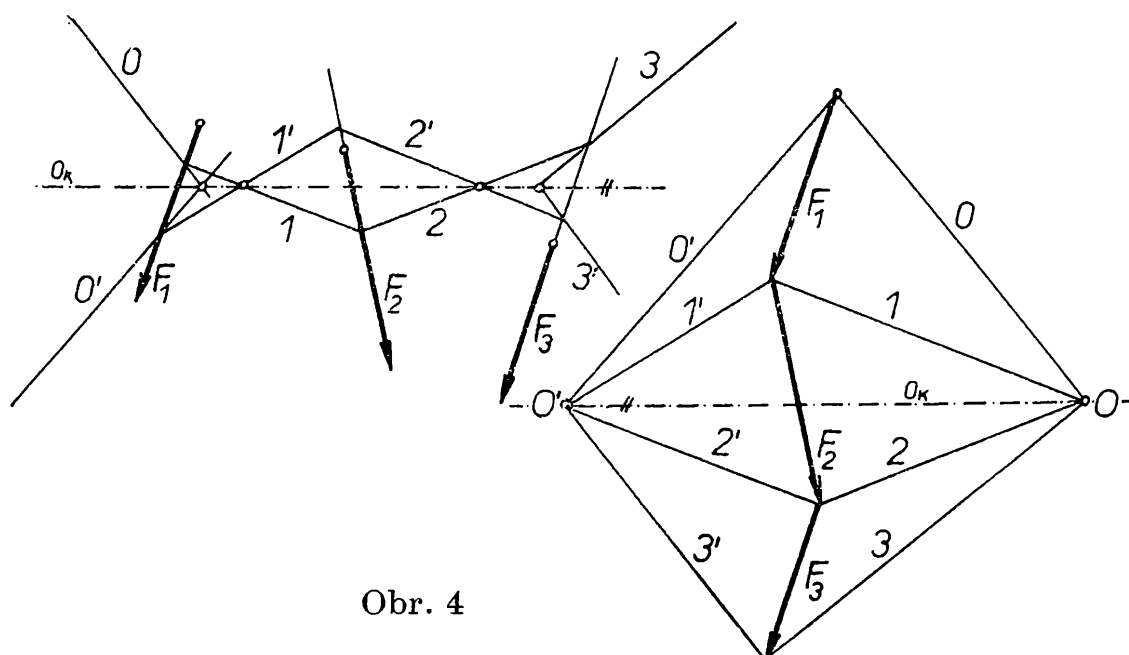


Obr. 3b. Obrazec složkový.

k těmto silám daným dvě stejně veliké pomocné síly $+F_0$ a $-F_0$, působící na jedné přímce. Síly $+F_0$ a $-F_0$ jsou označeny jen ve složkovém obrazci, obvyčejně se označují číslicí nula. Tyto dvě síly se navzájem ruší a nemají na těleso pohybový účinek. Tak dostaneme pět sil, které graficky složíme. Ve složkovém obrazci stanovíme nejdříve částečnou vý-

slednici sil $+F_0$ a F_1 označenou v obr. 3b číslicí 1, která musí procházet průsečíkem A složek F_0 a F_1 v obr. 3a. Pak sílu označenou číslicí 1 složíme s F_2 v částečnou výslednici označenou číslicí 2, jdoucí v obrázku 3a bodem B , dále sílu označenou 2 a F_3 složíme v částečnou výslednici označenou číslicí 3 jdoucí na obrázku 3a bodem C . Konečně síla označená číslicí 3 a síla $-F_0$ dávají výslednici všech pěti sil. Výslednice označená F' musí procházet průsečíkem X částečných výslednic označených čísly 0 a 3 a je rovnoběžná se silou F v obr. 3b. Při konstrukci volíme místo přídavných sil $+F_0$ a $-F_0$ přímo bod O zvaný pól (obr. 3b) a částečným výslednicím 1, 2, 3 říkáme pólové paprsky. Lomená čára 0, 1, 2, 3 v obrazci sil se nazývá čára výslednicová (obr. 3a).

Tato konstrukce má tyto vlastnosti:



Obr. 4

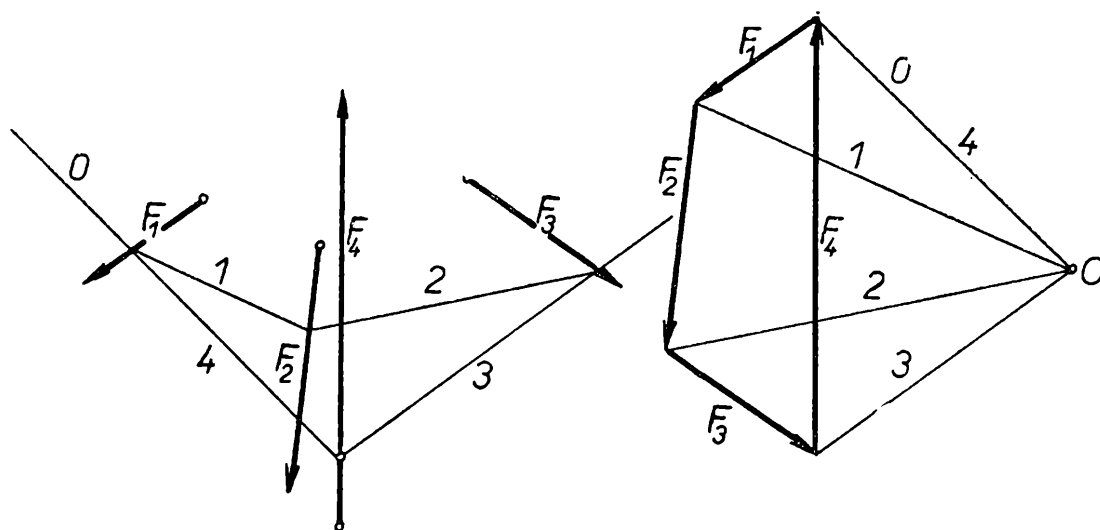
1. Dva sousední pólové paprsky a síla, která mezi nimi ve složkovém obrazci leží, se protínají v silovém obrazci v témž bodě.

2. Strana výslednicové čáry leží v obrazci sil mezi dvěma silami a ve složkovém obrazci jde jejím průsečíkem.

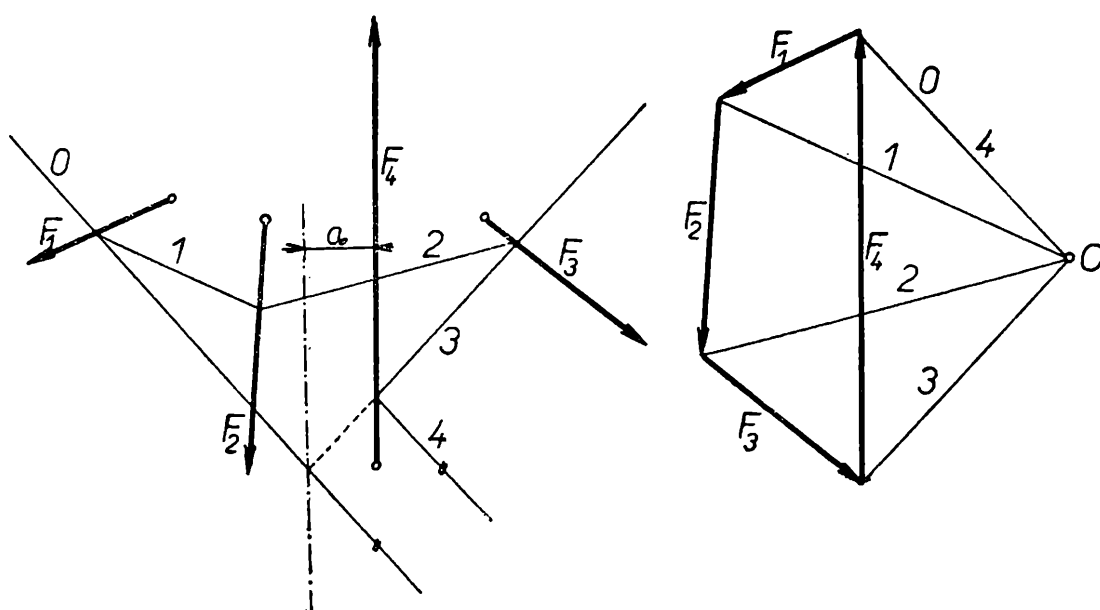
Zvolíme-li pro danou soustavu sil dva póly O a O' , dostaneme dvě výslednicové čáry a mezi nimi platí kolineární vztah. (Nejde tu přesně vzato o kolineaci, ale o jistou obdobu.) Příslušné sobě odpovídající strany výslednicové čáry se protínají na přímce o_k zvané osa kolineace. Osa kolineace je rovnoběžná se spojnici obou pólů O a O' obou soustav pólových paprsků (obr. 4).

Pro praktické užití je možné si pamatovat postup jen mechanicky. Nejprve nakreslíme složkový obrazec z daných sil. Spojnice jeho začátku a konce dává velikost a směr výslednice. Neznáme jen polohu výslednice. Zvolíme vhodně, ale jinak úplně libovolně pól O . Spojíme pól pólovými paprsky s konci sil ve složkovém obrazci. V silovém obrazci vedeme

rovnoběžky s pólovými paprsky čáru výslednicovou. Z vlastností konstrukce plyne, že průsečík rovnoběžky s prvním a posledním pólovým paprskem leží na výslednici F . Zručnost v grafickém řešení se získá cvičením.



Obr. 5

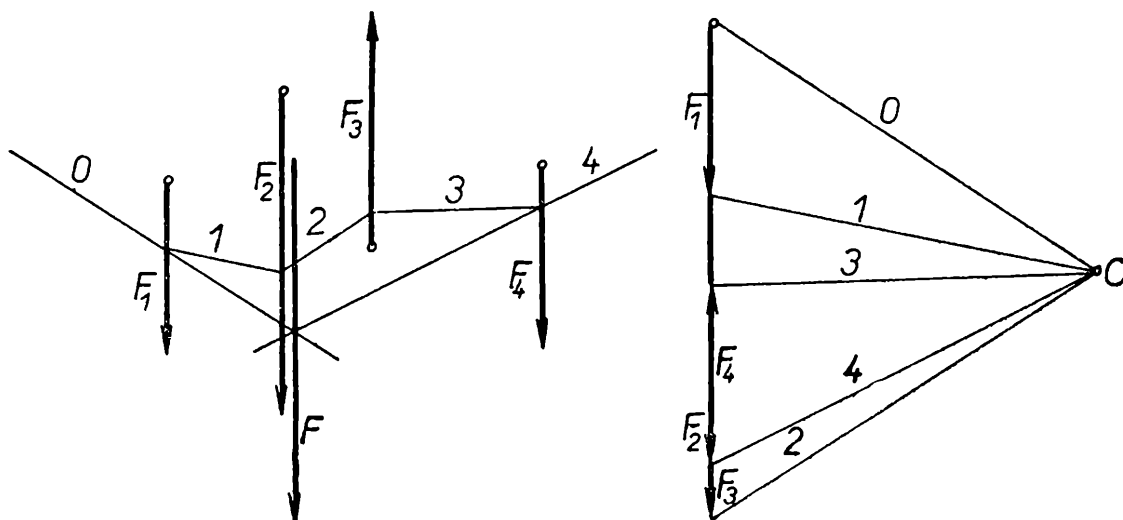


Obr. 6

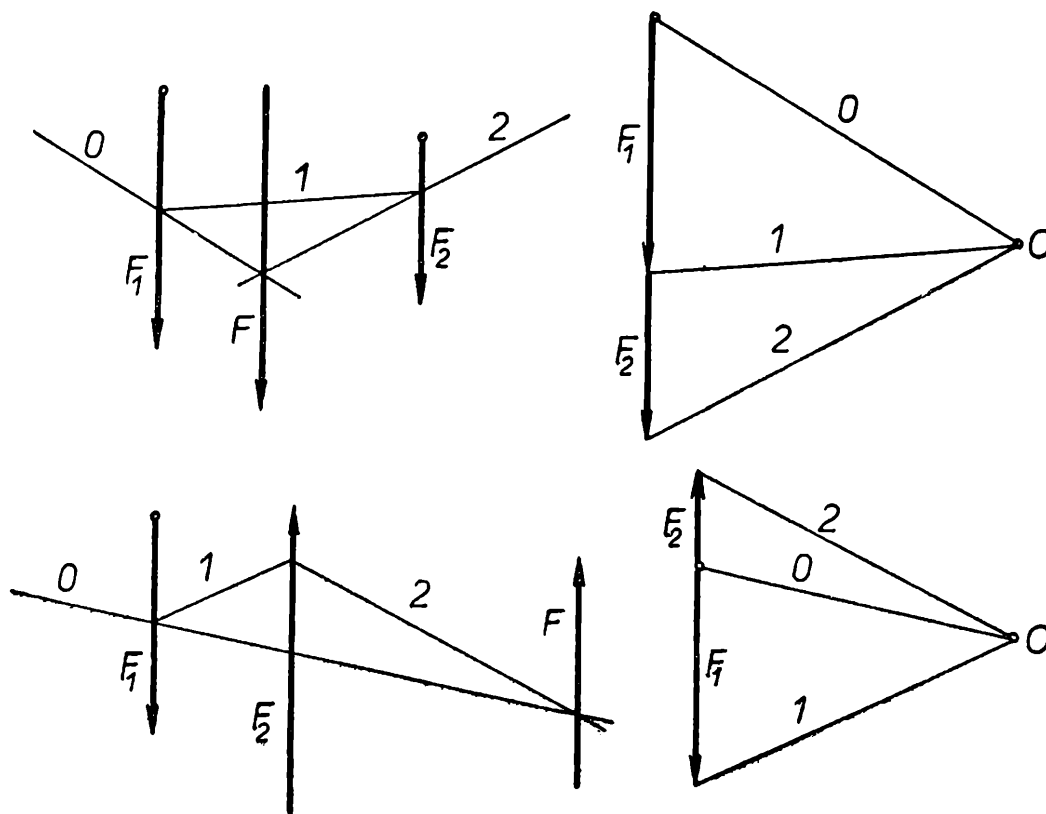
Všimněme si ještě závěrem, jaké případy mohou nastat. Z předešlého jsme viděli, je-li složková čára i výslednicová čára z daných sil otevřená, pak existuje při složení sil výslednice. Je-li složková čára uzavřená, pak existují dva případy:

1. Přidáme-li k soustavě sil, které mají výslednici F další sílu $-F$ stejně velikou jako F a ležící na stejné přímce, pak soustava je v rovnováze. Složková i výslednicová čára je v tomto případě uzavřená (obr. 5).

2. Přidáme-li k soustavě sil, které mají výslednici F další sílu $-F$ stejně velikou jako F , ale posunutou o vzdálenost a , pak tato síla uzavírá také složkovou čáru, což by ukazovalo na rovnováhu. Výslednicová čára



Obr. 7



Obr. 8

však uzavřena není, a proto rovnováha nenastane. Výslednice, jak by se zdálo ze složkové čáry se sice rovná nule, ale její působíště je nekonečně daleko na průsečíku dvou rovnoběžných paprsků (obr. 6). Grafická konstrukce nedává výsledek. Soustava sil se redukovala na dvojici,

kterou nelze graficky skládat. Těleso se vlivem dvojice roztočí, není tedy v rovnováze.

Pomocí popsaného způsobu můžeme graficky určit i výslednici rovnoběžných sil. Velikost výslednice je dána $F = F_1 + F_2 - F_3 + F_4$. Působíště vyplývá z grafické konstrukce. (Viz obr. 7.)

Aplikujme ještě tento způsob na případ dvou rovnoběžných sil stejného i opačného směru (obráz. 8). Je zřejmé, že v prvním případě je $F = F_1 + F_2$. Působíště výslednice leží blíže síly větší. Ve druhém případě je $F = F_1 - F_2$ a její působíště leží vně obou sil na straně síly větší.

Prof. DrSc. Vilém Santholzer, KU,
Hradec Králové:

Podstata scintilační spektrometrie

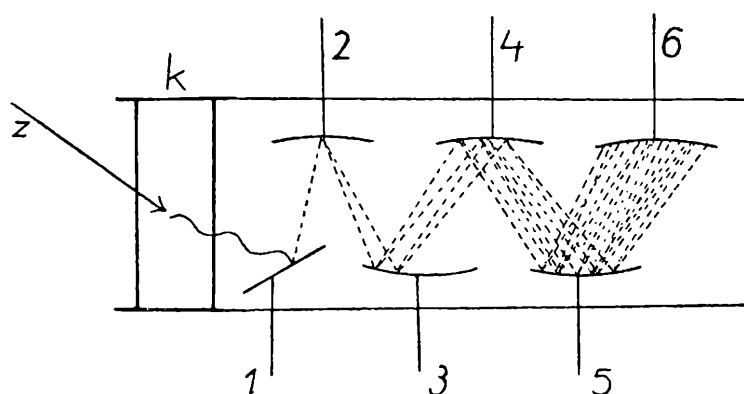
Předchůdcem *scintilačních detektorů* (scintilla = lat. jiskra), které byly vytvořeny až po druhé světové válce, byl na začátku našeho století *Crookesův spintariskop*. V tomto velmi jednoduchém zařízení byly pozorovány lupou záblesky neboli scintilace, vznikající dopadem částic alfa nebo protonů na vrstvu sirníku zinečnatého. Každý jednotlivý záblesk odpovídá dopadu jedné částice, které je možno tak spočítat. První transmutace atomového jádra uskutečněná r. 1919 *Rutherfordem* byla prokázána touto jednoduchou metodou.¹⁾

Světélkování (fluorescence) vzniká v krystalických látkách tím, že elektrony nejsou z atomů odtrhovány, tj. nenastává ionizace atomů, nýbrž jen excitace atomů, kdy elektrony jsou posouvány na vyšší hladiny energie. Nastává energetické vzbuzení atomu, avšak elektron se ve zlomku vteřiny vrací do původní hladiny, při čemž se energie opět uvolní. Vzniká světelné záření, které je možno pozorovat za vhodných podmínek. Dnes se tyto světelné záblesky mnohem pohodlněji indikují tzv. *fotonásobičem*, v němž se využívá emise sekundárních elektronů. Elektrony jsou uvolňovány světlem z vrstvy vhodné látky na fotokatodě. Postupného násobení množství uvolněných fotoelektronů se docílí soustavou elektrod zv. *dynody*, jejichž povrch je opatřen látkou s velkým koeficientem *sekundární emise* (což je průměrný počet sekundárních elektronů vyzařovaných elektronem primárním). Mezi jednotlivými dynodami je napětí asi 100 V, celkové napětí na *fotonásobiči* až 1800 V a celkové zesílení kolem 10^6 . Tak dostaneme na vý-

¹⁾ Viz např. *František Běhounek, Lidé a radioaktivita*. ČSAV, Praha 1960, nebo *F. Běhounek - A. Bohun - J. Klumpar, Radiologická fyzika*. SNTL, Praha 1958. *Z. Horák - F. Krupka - V. Šindelář, Technická fyzika*. SNTL, Praha 1960.

stupu fotonásobiče velký napěťový impuls, který je možno upravit vhodným elektronickým zařízením. Jednotlivé impulsy je možno počítat podobně jako u GM trubice.²⁾

Dnešní scintilační detektory indikují nejen částice alfa, ale také záření beta, gama i neutrony. Scintilační detektory používají různých luminiscentních látek (scintilátorů), např. monokrystalů anorganických i organických sloučenin, avšak i scintilačních roztoků, aj. Pro paprsky gama se používá krystalu jodidu sodného aktivovaného thaliem, NaJ (Tl). Celkové množství světelné energie záblesku ve scintilátoru je mírou energie primární částice nebo paprsku gama. Dosažení přímé úměrnosti mezi výškou napěťového impulsu a energií pohlcené částice nebo fotonu je hlavním úkolem nukleárních spektrometrů.



Obr. 1. Schéma fotonásobiče. Zářením gama (z) v krystalu (k) působí světelné záblesky, které dopadají na fotokatodu 1. Fotoelektrony jsou naznačeny čárkovaně, a dopadem na dynody 2 až 6 se jejich množství postupně zvětšuje.

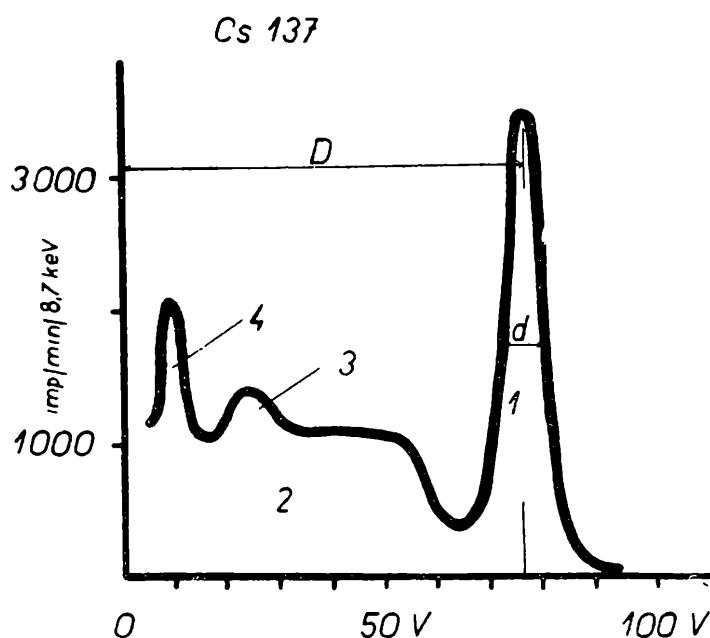
Scintilační spektrometrie využívá tedy schopností scintilátoru přeměňovat energii záření v energii světelnou, v záblesk světla, který s pomocí speciální elektronky - fotonásobiče je přeměněn v elektrický impuls s amplitudou úměrnou energii záření. Tento impuls je zesílen lineárním zesilovačem, takže výstupní impuls je přímo úměrný vstupnímu. Vhodné elektronické zařízení, tzv. *analyzátor impulsů*, třídí impulsy podle velikosti. Za analyzátozem je připojen čítač impulsů, který registruje počet impulsů za časovou jednotku, tj. určuje četnost impulsů. Četnost jednotlivých druhů impulsů určuje intenzitu záření příslušné energie. Tzv. *šíře kanálu* (kterou je možno plynule nastavit) je úzký energetický interval posunovatelný po celém rozsahu spektra, od energií malých k energiím maximálním. V našem případě byla 1 V v rozsahu 5 až 100 V; amplitudy ve voltech jsou přímo úměrné energii fotonů. V *jednokanálovém analyzátoru*, je možno kanál posunovat tak, že postupně

²⁾ O GM trubicích byla uveřejněna stať v *Rozhledech matematicko-fyzikálních* v č. 6, ročníku 41 (1962—63), str. 273 až 278.

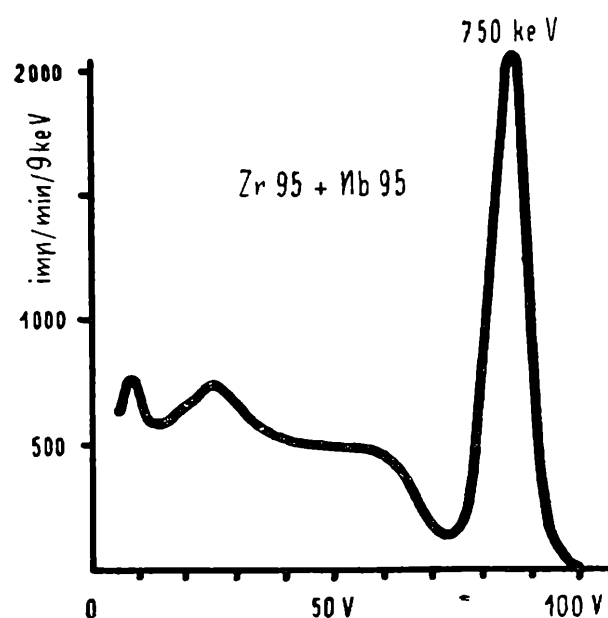
se jím třídí různě veliké impulsy a každý druh impulsů, tj. určitý energetický obor záření, se tímto kanálem vede k záznamu. Jsou také složitější *vícekanálové analyzátory*, kdy se různé impulsy třídí současně ve více kanálech, takže spektrum paprsků je možno získat v krátké době.

Na obr. 1 je spektrum impulsů radioizotopů cesia 137, které emituje fotony (paprsky gama) o energii 0,662 MeV (megaelektronvoltů, 10^6 eV). Této energii odpovídá vrchol, tzv. *fotopík* (peak = angl. vrchol) při amplitudě asi 77 voltů pro dané zařízení. Amplitudy, tj. výšky impulsů, na ose x jsou přímo úměrné energii fotonů. Tato „linearita“ byla přezkoušena pomocí radioizotopů, vysílajících fotony známé energie.

Na ose y jsou četnosti v impulsech za minutu, pro danou šíři kanálu uvedenou v keV (v kiloelektronvoltech). Fotopík cesia 137 odpovídá v tomto případě napětí 77 V. Na ose x mohly by být tedy místo voltů uvedeny kiloelektronvolty, obvykle se však spektra gama uvádějí tak jako na obr. 1 až 3.



Obr. 2. Spektrum paprsků gama radioizotopu cesia 137. Poločas 30 let.

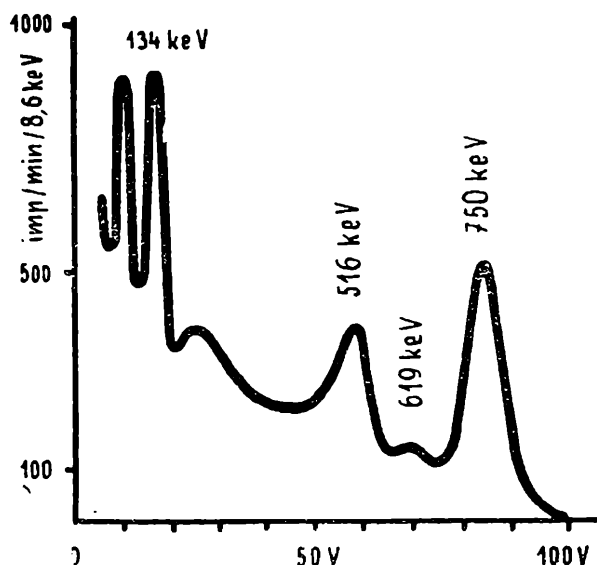


Obr. 3. Spektrum gama radioizotopů zirkonu 95 a jeho dceřinné látky niobu 95. Poločasy 65 dnů a 35 dnů.

Impulsy pod fotopíkem jsou výsledkem *fotoelektrického jevu*, kdy prakticky celá energie fotonu je pohlcena krystalem. Šířku píku působí statistický charakter dějů při detekci. Šířka v polovině výšky píku je *pološířka d*. *Rozlišovací schopnost* je poměr $d : D$ v procentech. Na obr. 1 je asi 10 %.

Kromě fotoelektrického jevu odehrává se v krystalu i *jev Comptonův*, kdy se nepohlí celá energie fotonu. Zbytek energie fotonu se předává elektronu, vznikají rozptylové elektrony Comptonovy, které působí světelné záblesky v krystalu. Comptonův rozptyl na obr. 1 dokazuje oblast 2, začínající tzv. *Comptonovou hranou*. Vlevo je zde tzv. *Comptonův*

hrbol 3, způsobený pohlcením fotonů rozptýlených při zpětném odrazu. Je patrné, že správný výklad jednotlivých vrcholů spekter vyžaduje praktické zkušenosti.

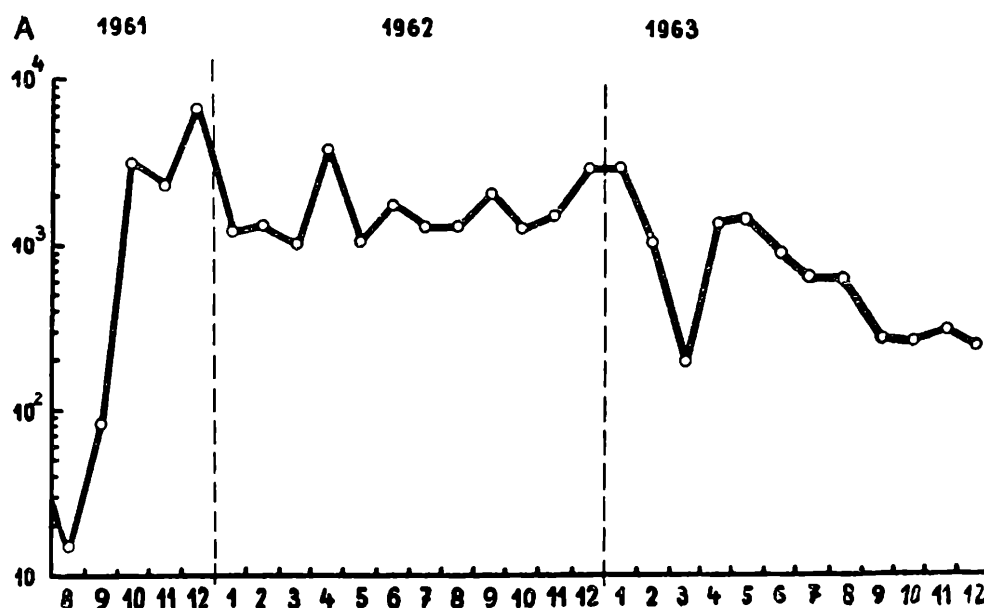


Obr. 4. Spektrum paprsků gama z odparků atmosférických srážek z jara 1963.

Vrchol 4 přísluší sekundárním fotonům z excitovaných atomů olova použitého k stínění krystalu.

Na obr. 2 je spektrum paprsků gama ze zirkonu 95 a jeho dceřinné látky niobu 95, energie 0,750 MeV.

Na obr. 3 je spektrum radioaktivních látek z dešťové vody. Preparát byl získán odpařením asi 100 l vody na jaře 1963, kdy nastalo značné zvýšení radioaktivity následkem nukleárních výbuchů v předešlém roce 1962 (obr. 4). Ze spektra vyplývá, že spad obsahoval hlavně radioizotop ceru 144 (pík 134 keV = 0,134 MeV), ruthenia 106 a rhodia 106 (pík 516 keV) a zirkonu



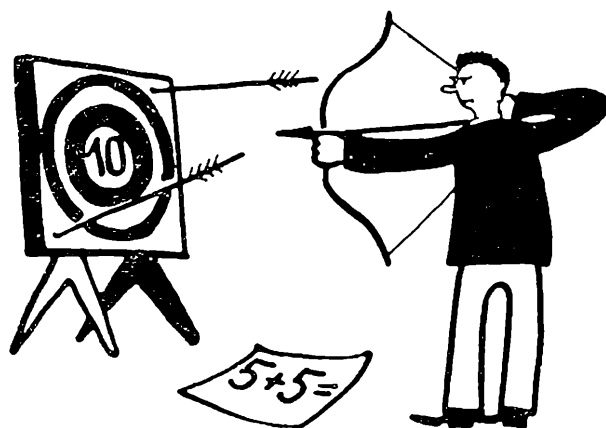
Obr. 5. Histogram (časový přehled) průměrné měsíční radioaktivity atmosférických srážek od srpna 1961 do prosince 1963. Radioaktivita je na ose y ve škále logaritmické v jednotkách pikocurie pro 1 litr dešťové nebo sněhové vody. Na ose x jsou měsíce.

95 + niobu 95 (pík 750 keV). Malý vrchol 619 keV přísluší patrně jednomu druhu fotonů rovněž z Ru 106 + Rh 106. Obr. 1, 2 a 3 zhotovil inž. Otakar Neruda v katedře radiobiologie Voj. lékařského, výzkumného a doškolovacího ústavu v Hradci Králové. Preparáty nukleárního spadu poskytla mu naše katedra fyziky,

která soustavně provádí sběr spadu. K získání spekter bylo použito jednokanálového scintilačního spektrometru TESLA NZG 319, fotonásobiče RCA a krystalu NaJ (Tl) velikosti $1\frac{1}{4} \times 2$ palce (Frieseke-Hoepfner).

Z obr. 3 vyplývá tedy ryze *fyzikální cestou* složení odparku z jednotlivých radioizotopů. Kdybychom tuto analýzu chtěli provést *cestou chemickou*, byla by mnohem obtížnější a zdlouhavější. Z ploch píků pro různé radioizotopy (patříčně korigovaných) je možno určit i procentové zastoupení jednotlivých radioizotopů ve směsi a srovnáním s preparáty o přesně známé radioaktivitě i množství ve zlomcích jednotky aktivity curie.

Úlohy k řešení



Závěr soutěže Rozhledů

Abecední seznam úspěšných řešitelů soutěže 42. ročníku **R o z h l e d ů m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í c h**, nositele vyznamenání Za zásluhy o výstavbu, byl otištěn v 3. čísle letošního ročníku.

Za spolupráce autorů přihlédla redakce k počtu a jakosti zaslaných řešení a stanovila toto pořadí vítězných řešitelů.

Absolutní vítězové:

1. Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha-Nusle,
2. Jaroslav Příhoda, SVVŠ, Čakovice,
3. Jiří Handlíř, SPŠE, Brno,
4. Zdeněk Slanina, SPŠCh, Brno,
5. Karel Vazač, SVVŠ, Písek,
6. Richard Špísek, SVVŠ, Brno,
7. Pavol Hell, SPŠ, Košice,
8. Vlasta Šohajová, SVVŠ, Pacov,
9. Jitka Kůrková, SVVŠ, Praha-Hlubočepy.

V jednotlivých kategoriích jsou nejlepší

v m a t e m a t i c e :

1. Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha-Nusle,
2. Jaroslav Příhoda, SVVŠ, Čakovice,
3. Milan Štědrý, SVVŠ, Ledec n. S.;

v e f y z i c e :

1. Jiří Handlíř, SPŠE, Brno,
2. Zdeněk Slanina, SPŠCh, Brno,
3. Jaroslav Příhoda, SVVŠ, Čakovice;

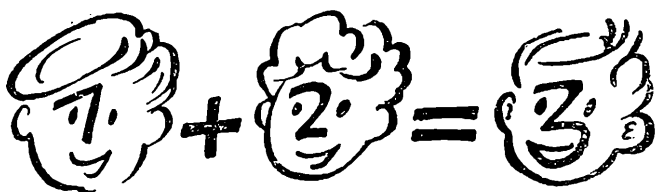
v deskriptivní geometrii

1. Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha-Nusle,
2. Jaroslav Příhoda, SVVŠ, Čakovice,
3. Jiří Handlíř, SPŠE, Brno.

Redakce blahopřeje těmto řešitelům k dosaženému úspěchu.

Současně oznamujeme, že se knižní odměny, zakoupené z prostředků ministerstva školství a kultury i Státního pedagogického nakladatelství, zasílají úspěšným řešitelům podle jejich volby.

O. S.



Matematické zábavy

Milan Koman, Praha:

Řešení úlohy o cyklistické dráze

V 10. čísle loňského ročníku Rozhledů byla čtenářům položena otázka, proč se přední kolo cyklisty jedoucího po neklopené dráze (obr. 1) během závodu otočilo víckrát než zadní kolo. Dnes si naznačíme jak lze tuto zdánlivou nesrovnalost snadno vysvětlit. Nejdříve však budeme úlohu formulovat matematicky.

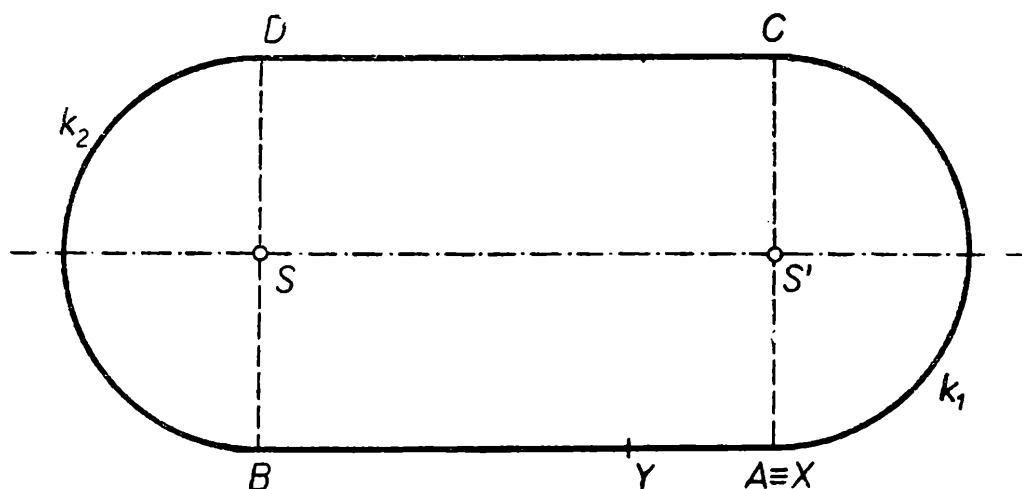
Je dána křivka k (obr. 1) složená ze dvou shodných polokružnic k_1, k_2 a dvou shodných úseček AB, CD . Na polopřímce AB je dána úsečka XY velikosti v . V určitém okamžiku se začne krajní bod X pohybovat v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček) po křivce k . Při svém pohybu „táhne za sebou“ bod X i bod Y . Máme vyšetřit křivku, kterou probíhá bod Y .

Naše formulace však ještě není dostatečně přesná, neboť v ní užíváme neurčitěho rčení „bod X táhne za sebou bod Y “. Pokusme se i tuto větu matematicky precisovat. Nejdříve si všimneme názorného obrázku 2. Z něho získáme poměrně dobrou představu o křivce l , po které se pohybuje bod Y , jestliže bod X po prvé obíhá křivku k . Všimněme si několika poloh pohybující se úsečky XY . Snadno usoudíme, je-li např. úsečka v poloze X_1Y_1 , pak v tomto okamžiku se pohybuje bod Y_1 ve směru přímky X_1Y_1 . To jinými slovy znamená, že v bodě Y_1 je tečnou křivky l přímka X_1Y_1 . Totéž platí pro libovolný bod křivky l . Nazveme ještě délkou tečny křivky l vzdálenost bodu dotyku od průsečíku tečny s křivkou k . Z našeho výkladu pak vyplývá, že hledaná křivka l má

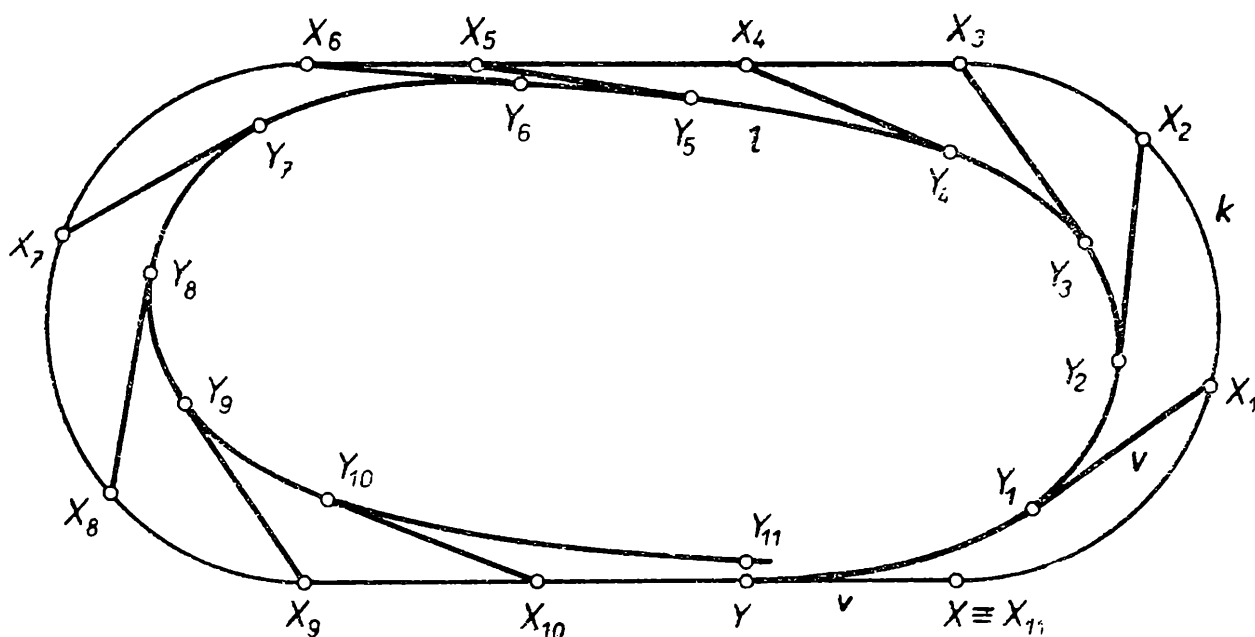
v každém bodě tečnu konstantní délky v (pohybující se úsečka má délku v .)

Úlohu můžeme nyní formulovat přesně takto:

Máme vyšetřit křivku l na jejíž tečných vytíná daná křivka k tečny konstantní délky v .



Obr. 1

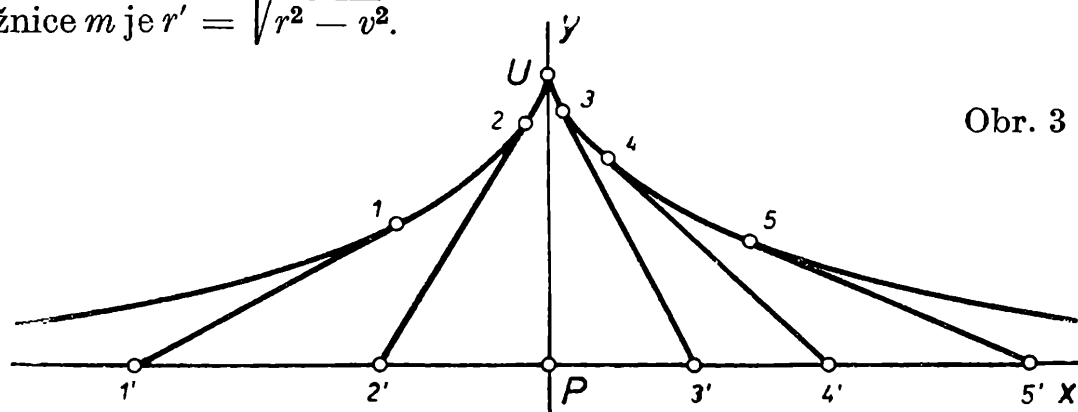


Obr. 2

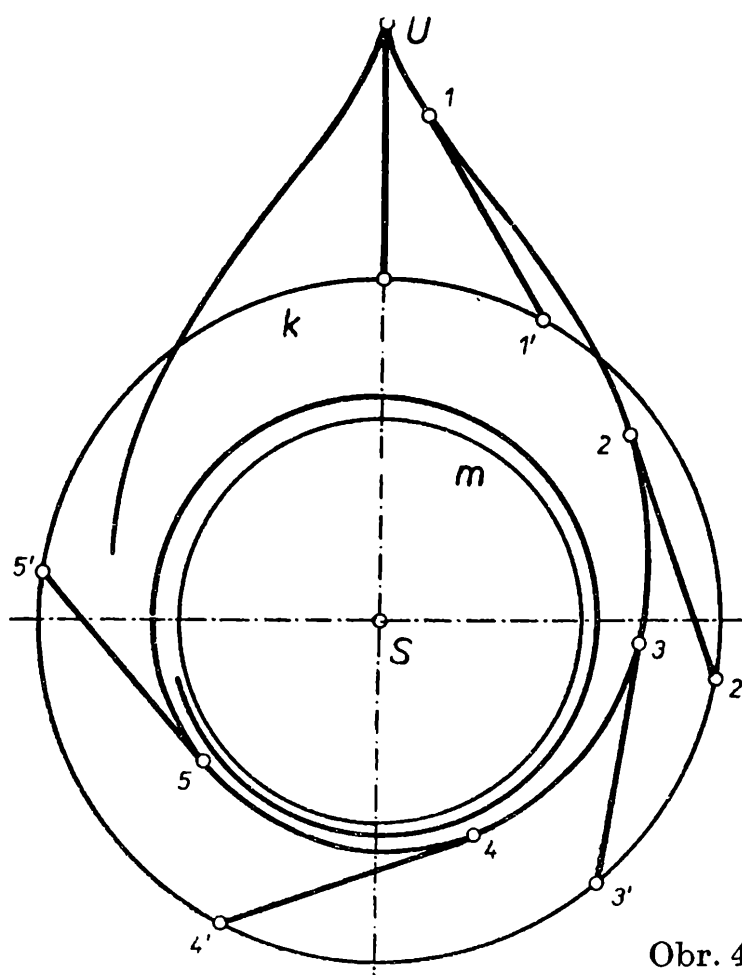
Tato křivka se nazývá v matematice *t r a k t r i x* křivky k . Protože se křivka k skládá jednak z oblouků kružnice a jednak z úseček, bude se hledaná křivka l skládat z oblouků traktrix kružnice a oblouků traktrix přímky. Na obr. 2 jsou oblouky $\widehat{Y Y_3}$, $\widehat{Y_6 Y_9}$ části traktrix kružnice a oblouky $\widehat{Y_3 Y_6}$, $\widehat{Y_9 Y_{11}}$ části traktrix přímky.

T r a k t r i x přímky (obvykle zvaná pouze traktrix) vidíte na obr. 3. Je to křivka, která má v bodě U tzv. b o d ú v r a t u a asymptoticky se blíží k oběma poloosám x .

Traktrix kružnice má různý tvar v závislosti na parametrech v a poloměru r kružnice. V naší úloze je $v < r$. Je to křivka (obr. 4), která se spirálovitě blíží v kladném i záporném smyslu kružnici m soustředné s kružnicí k . Bod U je opět jejím bodem úvratu. Poloměr kružnice m je $r' = \sqrt{r^2 - v^2}$.



Obr. 3



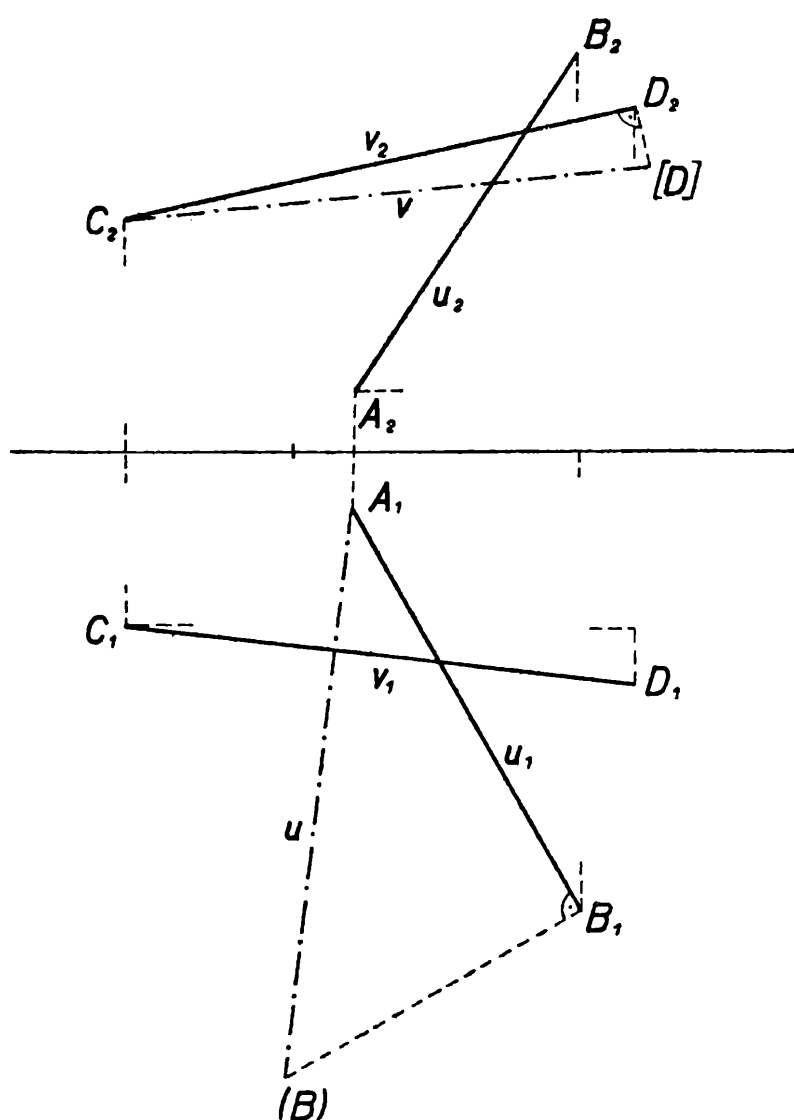
Obr. 4

Nyní již známe křivku l , po které se pohybuje bod Y . Z obr. 2 a z názoru je také patrné, že oblouk křivky l odpovídající jednomu oběhu křivky k má zřejmě kratší délku než křivka k . Odtud již plyne vysvětlení naší úlohy.

Na závěr ještě poznamenejme, že výsledek, ke kterému jsme došli jsme získali pouze na základě názoru. Přesný výpočet zde však nemůžeme provádět, protože vyžaduje znalosti vyšší matematiky.

Geometrické paradoxon

V pravouhlém promítání na dvě kolmé průmětny si zobrazíme (obr. 1) půdorysy i nárysy úseček $u = AB$, $v = CD$, přičemž $A (1; 1; 1)$, $B (5; 8; 7)$, $C (-3; 3; 4)$, $D (6; 4; 6)$. Z obr. 1 je zřejmé, že $u_1 < v_1$, $u_2 < v_2$. Neopatrný žák by mohl z těchto dvou nerovností usuzovat o skutečných délkách u a v , že také $u < v$. Jestliže si však skutečné délky úseček u , v sestrojí užitím prvního, resp. druhého promítacího trojúhelníka $A_1B_1(B)$, resp. $C_2D_2(D)$, kde $B_1(B) = z_B - z_A$ a $D_2(D) = y_D - y_C$, zjistí, že $u = A_1(B) > C_2(D) = v$.



Obr. 1

Došli jsme k paradoxnímu výsledku, že ze dvou nanejvýš dlouhých úseček má kratší z nich delší půdorys i delší nárys než druhá, delší úsečka.

Jak si vysvětlit tento paradoxní zjev? Delší úsečka u je skloněna

k půdorysně i k nárysně pod větším úhlem, proto se promítáním více zkracuje než úsečka v , která se od průměten odchyluje jen málo.

Pro kontrolu si můžeme svůj výsledek ověřit též početně. Z pravoúhlých trojúhelníků vypočteme Pythagorovou větou:

$$u_1^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 16 + 49 = 65, u_1 = \sqrt{65},$$

$$v_1^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 = 91 + 1 = 82, v_1 = \sqrt{82},$$

$$u_1 < v_1;$$

$$u_2^2 = (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 16 + 36 = 52, u_2 = \sqrt{52},$$

$$v_2^2 = (x_D - x_C)^2 + (z_D - z_C)^2 = 81 + 4 = 85, v_2 = \sqrt{85},$$

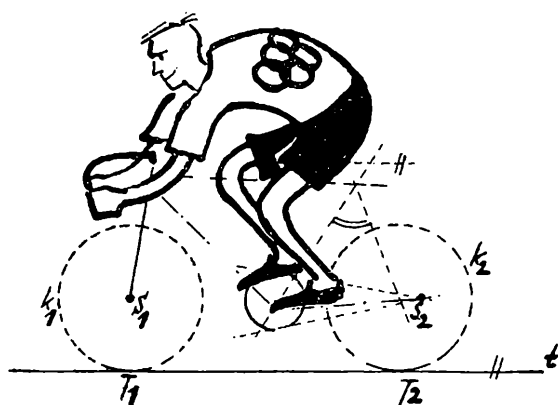
$$u_2 < v_2;$$

$$u^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 101, u = \sqrt{101},$$

$$v^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2 = 86, v = \sqrt{86},$$

$$u > v$$

(Pokračování)



Fyzikální olympiáda

J a n T e s a ř, Praha:

Děje v plynech

Studijní text pro první kolo VI. ročníku FO kategorie B.

(Dokončení)

b) D ě j i z o b a r i c k ý. Při izobarickém ději je tlak plynu konstantní (obr. 7). Podle stavové rovnice dokonalého plynu platí pro mechanickou práci vykonanou plynem vztah

$$A = p \Delta V_k = R \Delta T = R (T_2 - T_1)$$

a teplo plynu dodané je určeno výrazem

$$\Delta Q = C_v \Delta T + R \Delta T = (C_v + R) \Delta T = C_p \Delta T = C_p (T_2 - T_1).$$

Dodané teplo se tedy spotřebuje částečně na vzrůst vnitřní energie plynu, z části na vykonání mechanické práce.

Nekonečně malý přírůstek entropie má hodnotu

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} = C_p \frac{\delta T}{T}.$$

Integrací tohoto výrazu získáme podobně jako v rovnici (14) vztah

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (15)$$

Vnitřní energie plynu vzroste o $U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1)$.

Velikost práce vykonané při ději izobarickém se dá určit také z pracovního diagramu. Protože tlak plynu při tomto ději na objemu nezávisí, je průběh tlaku v $p - V$ diagramu zobrazen úsečkou rovnoběžnou s osou V (i z o b a r a). Pro velikost práce vychází z tohoto diagramu také

$$A = p \Delta V_k$$

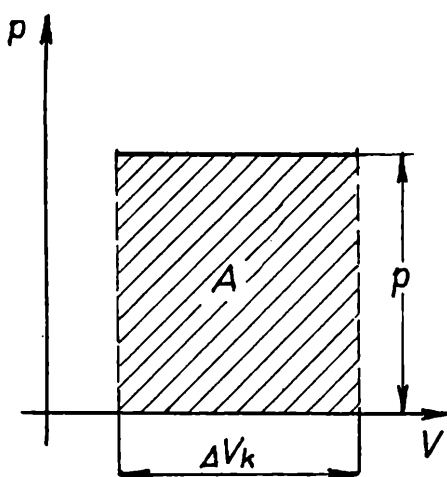
c) D ě j i z o t e r m i c k ý. Při tomto ději zůstává teplota plynu stálá, takže platí pro 1 kilomol dokonalého plynu vztahy $T = k_1$, $\Delta T = 0$ a podle stavové rovnice $p V_k = R T = k_2$; k_1 a k_2 jsou konstanty.

Závislost tlaku na objemu je v $p - V$ diagramu zobrazena rovnosou hyperbolou (i z o t e r m a). Podle obr. 8 je velikost práce při expanzi plynu z objemu V_1 na objem V_2 určena číselně obsahem vyčárkované plochy, který však nelze určit prostředky elementární matematiky.

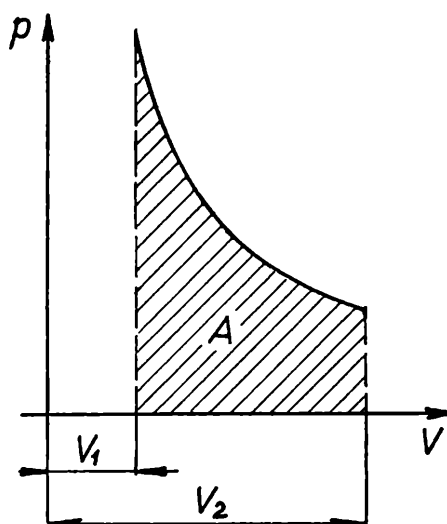
Protože teplota plynu se při tomto ději nemění, je

$$\Delta U = 0 \text{ a } U = \text{konst.}$$

Všechno teplo dodané plynu se přemění v mechanickou práci. Proto platí



Obr. 7



Obr. 8

pro nekonečně malé změny příslušných veličin rovnice

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p \delta V_k}{T} = R \frac{\delta V_k}{V_k},$$

neboť

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{V_k}.$$

Obdobně jako ve vztahu (14) vychází po integraci

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16a)$$

Protože teplota plynu je konstantní, lze upravit vztah

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T},$$

platný pro nekonečně malé přírůstky příslušných veličin, na vztah

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T},$$

platný pro konečné přírůstky těchto veličin. Pak platí

$$\Delta Q = T (S_2 - S_1) = R T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16b)$$

d) *D ě j a d i a b a t i c k ý*. Při adiabatickém ději je plyn dokonale tepelně izolován tak, aby z okolí nemohl teplo přijímat, ani je do okolí vydávat. Pak $\Delta Q = 0$. Ze stavové rovnice pro kilomol dokonalého plynu potom vychází pro práci hodnota

$$A = -\Delta U = -C_v \Delta T = -C_v (T_2 - T_1)$$

Ze vztahu

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

plyne

$$\delta S = 0, \Delta S = S_2 - S_1 = 0$$

a

$$S = \text{konst.} \quad (17)$$

Rovnici udávající závislost tlaku plynu na jeho objemu nelze odvodit při tomto ději bez znalostí vyšší matematiky. Proto ji uvádíme bez důkazu

$$p V_k^\kappa = \text{konst}, \quad (18)$$

kde $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ značí Poissonovu konstantu. Graficky je tato závislost zobrazena křivkou (*a d i a b a t a*), jejíž průběh je nakreslen na obr. 9.⁴⁾

Práce plynu je určena číselně obsahem vyčárkované plochy na obr. 9.

Carnotův kruhový děj

Carnotův kruhový děj je ideálním pracovním dějem pro tepelné a pro chladicí stroje. Jeho princip si vysvětlíme na tepelných strojích.

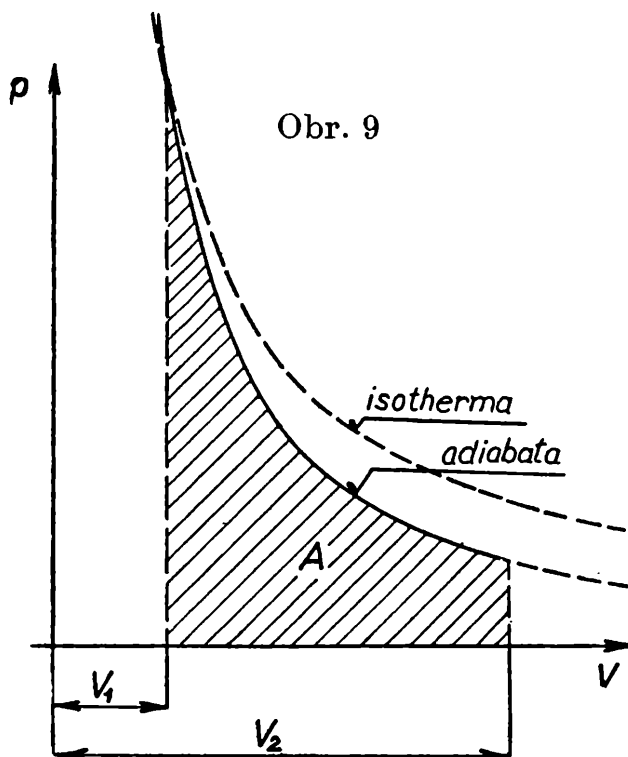
1. *C a r n o t ů v i d e á l n í t e p e l n ý s t r o j*. Při ideálním Carnotově kruhovém ději pracuje v tepelném stroji vratně dokonalý plyn mezi dvěma teplotami, T_1 ohříváče a T_2 chladiče. Protože při izotermických dějích se všechno teplo dodané plynu mění v práci, volil Carnot za první a třetí pracovní děj vratné izotermické děje. Poněvadž však na konci prvního děje, izotermické expanze, je teplota pracovního plynu T_1 a na počátku třetího děje, izotermické komprese, musí mít plyn teplotu T_2 , vložil Carnot mezi tyto dva děje jako druhý děj vratnou adiabatickou expanzi, při které se ohříváči neodebírání teplo. Z obdobných důvodů vložil mezi třetí a první děj jako čtvrtý děj vratnou adiabatickou kompresi, protože se při ní neodevzdává teplo chladiči. Carnotův ideální stroj pracuje tedy vratně s dokonalým plynem ve čtyřech dějích, které dávají dohromady jeden kruhový děj (obr. 10a).⁵⁾

⁴⁾ Při určité hodnotě konstanty v rovnici (18) závisí průběh adiabaty jen na velikosti κ , takže každé hodnotě κ odpovídá jiná adiabata. Všechny tyto adiabaty se však protínají na $p - V$ diagramu v jednom bodě, jehož souřadnice $V_k = 1$, neboť při $V_k = 1 \text{ m}^3$ je číselná hodnota $V_k^\kappa = 1$ pro všechny hodnoty κ . Protože izoterma je zvláštní případ adiabaty ($\kappa = 1$), prochází tímto bodem i příslušná izoterma.

Pracovní plyn je uzavřen ve válci, ve kterém se pohybuje bez tření píst. Plášť válce a píst jsou zhotoveny z dokonale tepelně izolujícího materiálu. Výměna tepla může nastat jen dnem válce. Aby stroj pracoval vratně, je nutno stále upravovat vnější tlak na píst tak, aby byl v každém okamžiku rovný tlaku pracovního plynu ve válci.

Úvahy provedeme pro kilomol dokonalého plynu.

Plyn má na počátku prvního děje teplotu T_1 ohříváče a objem V_1 při tlaku p_1 .



a) Dno válce je ve styku s ohříváčem A a plyn se při teplotě T_1 izotermicky rozpíná z objemu V_1 na objem V_2 (obr. 10b). Během tohoto děje předá ohříváč pracovnímu plynu teplo ΔQ_1 . Entropii plynu označíme na počátku děje S_1 , na jeho konci S_2 . Podle vztahů (16a) a (16b) platí

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ a } \Delta Q_1 = T_1 (S_2 - S_1)$$

b) Po ukončení prvního děje odpojíme ohříváč od pracovního válce a dno válce tepelně izolujeme izolační deskou B . Plyn se dále rozpíná adiabaticky z objemu V_2 na objem V_3 , kdy jeho teplota klesne na hodnotu T_2 , kterou má chladič (obr. 10c). Během tohoto adiabatického děje plyn nepřijímá teplo a koná práci na útraty své vnitřní energie. Označíme-li teplo přijaté při tomto ději ΔQ_2 a entropii na konci děje S_3 , platí podle vztahu (17)

$$\Delta Q_2 = 0 \text{ a } S_3 - S_2 = 0.$$

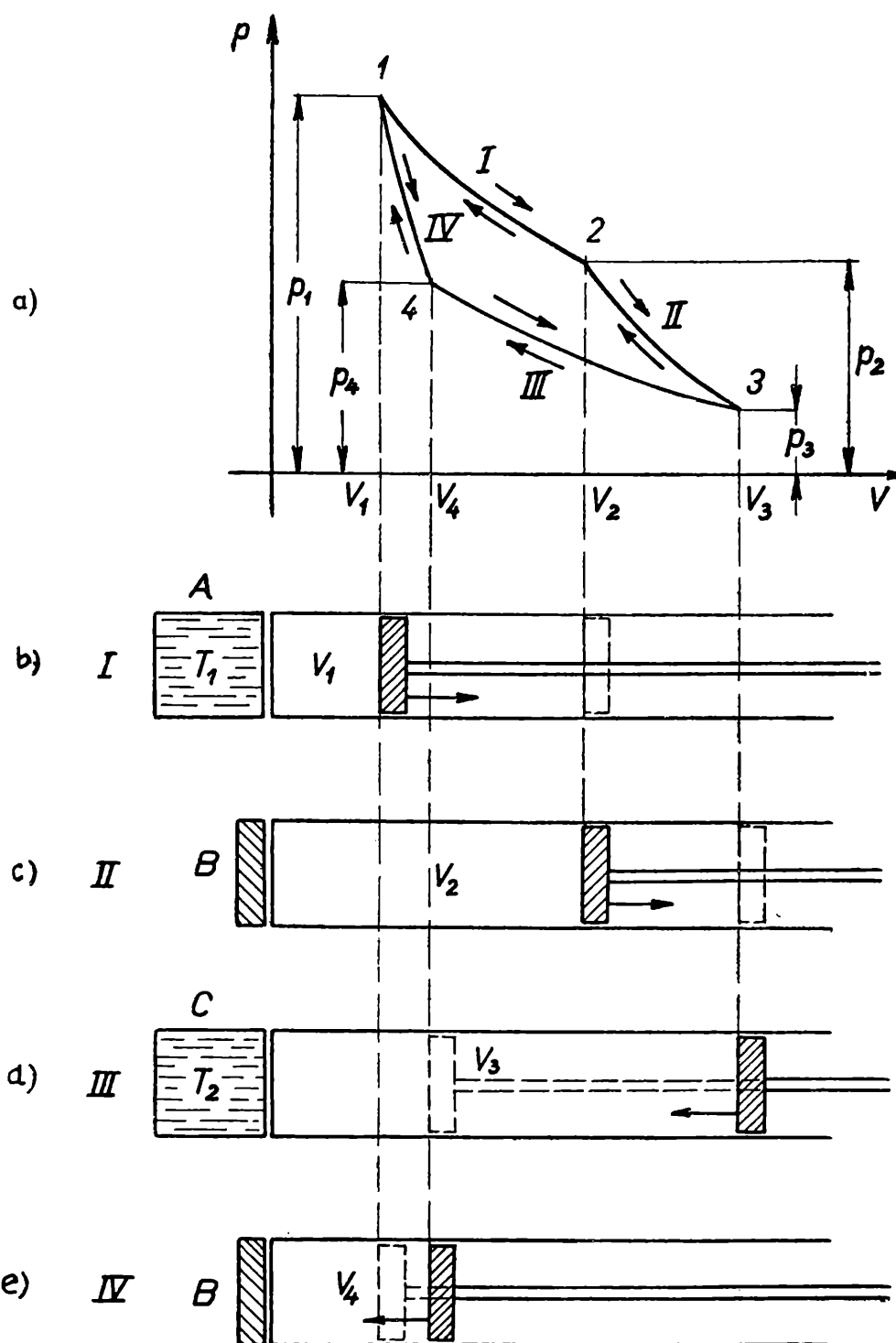
c) Po ukončení druhého děje odstraníme izolující desku B a dno válce uvedeme ve styk s chladičem C s tepelnou lázní o teplotě $T_2 < T_1$ (obr. 10d). Působením vnější síly na píst plyn izotermicky stlačujeme z objemu V_3 na takový objem V_4 , aby další adiabatická komprese převedla plyn do

⁵⁾ Na obr. 10a označují šipky vně kruhového diagramu průběh děje v Carnotově tepelném stroji a šipky uvnitř diagramu průběh děje v Carnotově chladičím stroji.

počátečního stavu. Na kompresi je nutno vynaložit práci, která se mění v teplo $\Delta Q_3'$ odevzdané chladiči. Označíme-li entropii plynu na konci třetího děje S_4 , platí pro rozdíl entropií na konci a na počátku tohoto děje a pro přijaté teplo $\Delta Q_3 = -\Delta Q_3'$ podle vztahů (16a) a (16b) rovnice

$$S_4 - S_3 = R \ln \frac{V_4}{V_3} \text{ a } \Delta Q_3' = -T_z (S_4 - S_3) = T_2 (S_3 - S_4).$$

d) Při čtvrtém ději se dno válce izoluje tepelně izolační deskou B a plyn se adiabaticky stlačuje na objem V_1 (obr. 10e). Při této kompresi se vy-



Obr. 10a, b, c, d, e

koná působením vnější síly na píst mechanická práce A_4 , která zvýší vnitřní energii plynu na původní hodnotu a plyn přejde do počátečního stavu. Entropie S_5 na konci tohoto děje má hodnotu $S_5 = S_1$. Proto platí

$$\Delta Q_4 = 0 \text{ a } S_5 - S_4 = 0,$$

kde ΔQ_4 značí teplo přijaté plynem během čtvrtého děje.

Poněvadž entropie je veličina skalární, nabude celková změna entropie během Carnotova kruhového děje hodnotu

$$\begin{aligned} S &= (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_3) + (S_5 - S_4) = \\ &= R \left(\ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \frac{V_4}{V_3} \right) = S_5 - S_1 = 0. \end{aligned}$$

Z této rovnice se určí objem V_4 , který je třeba znát, aby děj proběhl kruhově. Po její úpravě vychází

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} = r$$

Číslo r udává tzv. *expanzní poměr*, tj. poměr objemů plynu po expanzi a před expanzí při prvním ději. Z posledního výrazu je patrné, že při izotermické kompresi je nutno zmenšit objem plynu v témž poměru, ve kterém se jeho objem zvětšil při izotermické expanzi.

Podle zákona zachování energie odpovídá mechanická práce, vykonaná během jednoho cyklu, celkovému teplu, které přijal plyn během celého cyklu od obou lázní. Proto platí

$$A = \Delta Q_1 - \Delta Q'_3 = T_1 (S_2 - S_1) - T_2 (S_3 - S_4).$$

Protože však

$$S_3 = S_2 \text{ a } S_4 = S_5 = S_1,$$

je mechanická práce, kterou plyn během jednoho cyklu vykoná, určena rovnicí

$$A = T_1 (S_2 - S_1) - T_2 (S_2 - S_1) = (T_1 - T_2) (S_2 - S_1).$$

Tepelnou účinnost η nazýváme poměr tepla odpovídajícího mechanické práci vykonané strojem v průběhu jednoho kruhového děje a tepla, které plyn v téže době přijal od teplejší lázně. Je tedy účinnost Carnotova tepelného stroje pracujícího vratně s ideálním plynem mezi teplotami T_1 a T_2 , určena vztahem

$$\eta = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q'_3}{\Delta Q_1} = \frac{(T_1 - T_2) (S_2 - S_1)}{T_1 (S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (19)$$

Carnotův dokonalý stroj má největší tepelnou účinnost ze všech strojů pracujících vratně mezi týmiž teplotami T_1 a T_2 , neboť první a třetí děj, ze kterých se Carnotův kruhový děj skládá, jsou děje izotermické, při nichž se všechno teplo přijaté plynem mění v mechanickou práci, bez jakékoli změny vnitřní energie plynu a druhý a čtvrtý děj jsou děje adiabatické, při kterých plyn nepřijímá ani nevydává teplo do okolí. Proto se mění v mechanickou práci celkové teplo přijaté plynem během kruhového děje.

Vztah (19) platí jen pro ideální Carnotův stroj. Můžeme to ukázat také na tzv. tepelném čili T - S diagramu.

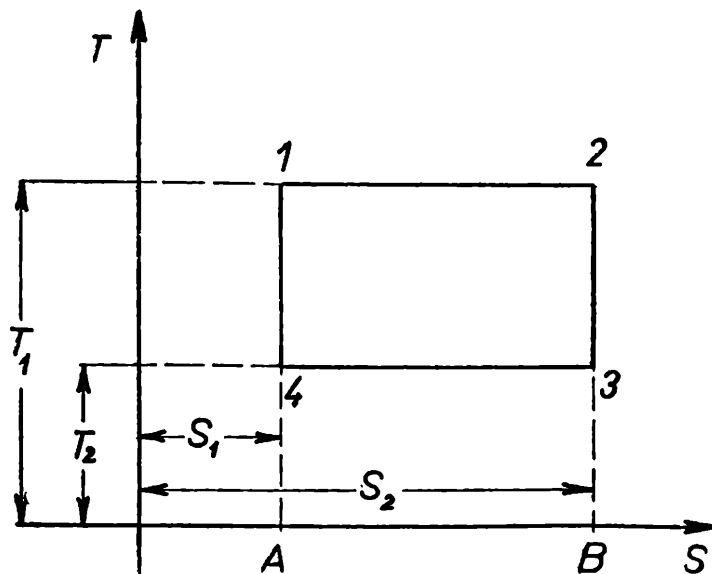
Tepelný diagram znázorňuje závislost absolutní teploty plynu na jeho entropii. V pravoúhlém souřadném systému, ve kterém nanášíme na osu x číselné hodnoty entropie a na osu y příslušné teploty, zobrazí se vratné adiabatické děje úsečkami rovnoběžnými s osou T , neboť při vratných adiabatických dějích je entropie konstantní (obr. 11). Vratné izotermické děje jsou v tomto diagramu zobrazeny úsečkami rovnoběžnými s osou S , neboť při vratných izotermických dějích je teplota konstantní.

Diagram vratného Carnotova kruhového děje je tedy obvod obdélníka 1, 2, 3, 4. Obsah tohoto obdélníka $(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)$ odpovídá práci vykonané plynem při jednom kruhovém ději a obsah obdélníka 1, 2, B, A teplotu, přijatému plynem při izotermické expansi. Účinnost Carnotova děje je tedy určena poměrem obsahů obdélníka 1, 2, 3, 4 a obdélníka 1, 2, B, A.

Ze vzorce (19) je patrné, že účinnost tepelného stroje je tím větší, čím vyšší je teplota ohřívače a čím nižší je teplota chladíče. Kdyby byla teplota chladíče $T_2 = 0^\circ\text{K}$, pak by měl Carnotův ideální stroj účinnost rovnou 1.

2. I d e á l n í C a r n o t ů v c h l a d i c í s t r o j. V Carnotově ideálním chladicím stroji probíhá vratný kruhový Carnotův děj v obráceném pořádku než ve stroji tepelném. Jeho průběh můžeme sledovat na obr. 10a, b, c, d, e.

a) Dokonalý plyn má na počátku prvního děje teplotu T_2 chladnější lázně. Dno pracovního válce je ve styku se studenější lázní a plyn se vratně izotermicky rozpíná. Při této expansi přijme ze studenější lázně teplo ΔQ_3 a zvětší svůj objem z hodnoty V_4 na V_3 .



Obr. 11

b) Při druhém ději je dno válce deskou B izolováno proti okolí. Plyn ve válci se působením vnější síly na píst vratně adiabaticky stlačuje a jeho teplota se zvětšuje. V okamžiku, kdy dosáhne teploty T_1 teplejší lázně, bude mít objem V_2 . Pak se odstraní izolační deska B a dno válce se uvede ve styk s teplejší lázní teploty T_1 .

c) Při teplotě T_1 se plyn vratně izotermicky stlačuje až na objem V_1 , který se určí z expanzního poměru

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Při této kompresi odevzdá teplejší lázni teplo $\Delta Q_1 > \Delta Q_3$. Potom se odpojí tepelná lázeň ode dna válce a dno se izoluje izolační deskou B.

d) Poslední děj je vratná adiabatická expanze z objemu V_1 na objem V_4 . Při tomto ději se plyn ochladí na teplotu T_2 a vrátí se do počátečního stavu.

Všechny uvedené děje jsou vratné, a proto je nutno upravovat vnější tlak na píst tak, aby se stále rovnal tlaku plynu ve válci.

Velikost práce, teplo přijaté nebo vydané plynem a změny entropie v průběhu jednotlivých dějů, se vypočítají obdobným způsobem jako u Carnotova tepelného stroje.

Pracovní plyn ve válci převede ze studenější do teplejší lázně teplo

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_3 + \Delta Q_2,$$

kde ΔQ_2 značí teplo, které je ekvivalentní práci A , vynaložené na udržení chodu stroje při stlačování plynu. Pracovní účinnost chladicího stroje je

$$\eta = \frac{\Delta Q_3}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_3}{\Delta Q_3 + \Delta Q_2}.$$

Obdobně jako u tepelného stroje se z vypočítaných změn entropie při jednotlivých dějích určí

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

U chladicích strojů se vedle tepelné účinnosti počítá i s tzv. **chladicí účinností**. Je to poměr

$$\chi = \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_3}.$$

Z posledních tří rovnic se určí

$$\chi = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (20)$$

Podobně jako tomu bylo u tepelného stroje, platí i u ideálního Carnotova chladicího stroje, že všechny vratně pracující chladicí stroje, které pracují mezi týmiž teplotami, mají stejnou tepelnou i chladicí účinnost. Nevratně pracující chladicí stroje mají vždy menší tepelnou i chladicí účinnost než stroje pracující vratně.

Druhá termodynamická věta

Carnotův tepelný stroj pracující vratně s dokonalým plynem odebírá ohřívací teplo, část ho změnil v práci a zbytek odevzdá chladiči. Mnohem výhodnější by byl stroj, který by změnil v práci celé množství tepla, které přijal z ohříváče. Pak by byl chladič zbytečný a stroj by mohl pracovat s jedinou tepelnou lázní, ze které by periodicky ubíral teplo a měnil je beze zbytku v práci. Takto pracující stroj, nazvaný *perpetuum mobile druhého druhu*, by neodporoval zákonu zachování energie. Mohl by získávat ohromná množství energie, např. ochlazováním mořské vody nebo ovzduší a mohl by pracovat zároveň jako chladicí stroj.

Takovýto stroj se nepodařilo sestavit a od druhé polovice minulého století se fyzikové důvodně domnívají, že není možný. Tento poznatek je vyjádřen druhou větou termodynamickou, která se dá formulovat různým způsobem. Našemu účelu nejlépe vyhovuje formulace Planckova:

Není možno sestavit stroj, který by pracoval periodicky a který by nezpůsoboval žádné jiné změny, než že by odebíral teplo tepelné lázni a měnil je v rovnomocnou práci.

Dieslov tepelný stroj

V Dieslově tepelném stroji probíhají periodicky v pracovním plynu kruhové děje, sestávající ze čtyř dějů, z adiabatické komprese, izobarické expanze, adiabatické expanze a z děje izochorického. Vyšetříme, jakou tepelnou účinnost má Dieslov tepelný stroj, pracující vratně s dokonalým plynem.

Při prvním ději (obr. 12) píst stlačuje adiabaticky vzduch, nasátý do válce z objemu V_0 na objem V_1 . Tlak přitom roste z hodnoty $p_0 = 1$ at na p_1 a teplota z T_0 na T_1 . Předpokládáme, že ve válci je jeden kilomol vzduchu. Entropii vzduchu označíme na počátku děje S_0 , na konci S_1 . Protože jde

o adiabatický děj platí vztahy

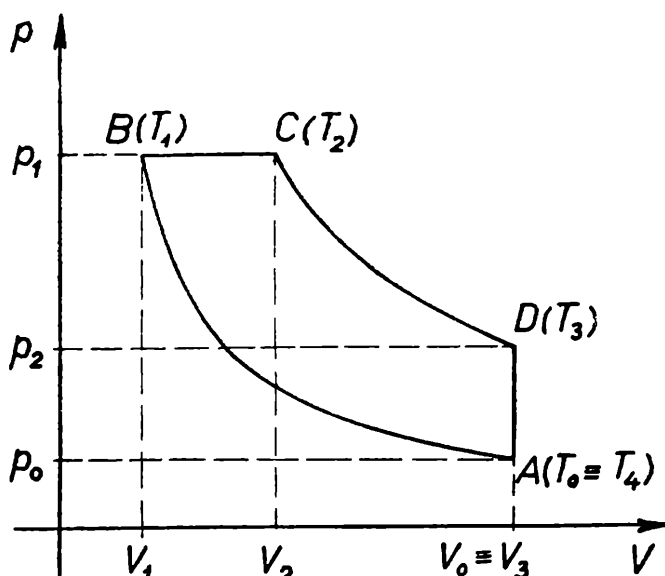
$$\Delta Q_1 = 0 \quad S_1 - S_0 = 0 \quad A_1 = -C_v (T_1 - T_0),$$

kde A_1 značí práci vykonanou plynem při tomto ději a C_v kilomolové teplo při stálém objemu. Poněvadž $A_1 < 0$, jde o práci přijatou stlačeným vzduchem.

Na začátku druhého děje se vstříkne do pracovního válce pohonná látka, která se ve stlačeném silně zahřátém vzduchu zapálí. Hořením se uvolní teplo ΔQ_2 , teplota ve válci vzroste z hodnoty T_1 na hodnotu T_2 , směs vzduchu a plynů, vzniklých hořením, zvětší svůj objem z hodnoty V_1 na hodnotu V_2 při konstantním tlaku p_1 . Jde tedy o děj izobarický. Označíme-li entropii plynu na konci tohoto děje S_2 , platí

$$\Delta Q_2 = C_p (T_2 - T_1), \quad S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad A_2 = R (T_2 - T_1),$$

kde C_p značí kilomolové teplo plynu při stálém tlaku.



Obr. 12

Při třetím ději se směs plynů dále rozpíná, avšak adiabaticky, a koná práci A_3 . Teplota směsi plynů dosáhne hodnoty T_3 , tlak klesne na p_2 a objem na $V_3 = V_0$. Entropii na konci třetího děje označíme S_3 ; pro tento děj platí

$$\Delta Q_3 = 0 \quad S_3 - S_2 = 0 \\ A_3 = -C_v (T_3 - T_2).$$

Na počátku čtvrtého děje se otevře výpustný ventil a tlak ve válci klesne při konstantním objemu $V_3 = V_0$ na p_0 a teplota směsi na $T_4 = T_0$. Jestliže označíme entropii na konci tohoto děje S_4 a teplo vzniklé při tomto ději ΔQ_4 , pak platí

$$\Delta Q_4 = C_v (T_0 - T_3) \quad S_4 - S_3 = C_v \ln \frac{T_0}{T_3},$$

neboť jde o děj izochorický. Protože $\Delta Q_4 < 0$, jde o teplo vydané směsí plynů.

Všechny uvedené vztahy platí za předpokladu, že stroj pracuje vratně. Proto je nutno upravovat vnější tlak na píst tak, aby se v průběhu celého kruhového děje stále shodoval s tlakem plynu ve válci.

Protože entropie je skalární veličina, je celková změna entropie

$$\Delta S = (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_3) = \\ = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v \ln \frac{T_0}{T_3}.$$

Protože $S_4 = S_0$, je $\Delta S = S_4 - S_0 = 0$.

Platí tedy rovnice

$$C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = -C_v \ln \frac{T_0}{T_3}.$$

Dělíme-li obě strany rovnice veličinou C_v , dostaneme

$$\frac{C_p}{C_v} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{T_3}{T_0},$$

takže

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\kappa = \frac{T_3}{T_0} \quad (21)$$

$$\text{kde } \kappa = \frac{C_p}{C_v}$$

je Poissonova konstanta.

Druhý děj Dieslova cyklu je děj izobarický. Proto platí

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1},$$

takže

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = q \quad (22)$$

Poměr q udává změnu objemu při druhém ději (hoření paliva) a nazývá se **p l n í c í p o m ě r**. Je vždy větší než 1.

Směs plynů přijme při jednom kruhovém ději teplo

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 = C_p (T_2 - T_1) + C_v (T_0 - T_3)$$

a vykoná práci odpovídající tomuto teplu.

Teplo přijaté plyny při hoření paliva má hodnotu ΔQ_2 . Je tedy tepelná účinnost Dieslova tepelného stroje pracujícího vratně s dokonalým plynem

$$\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta Q_2} = \frac{C_p (T_2 - T_1) - C_v (T_3 - T_0)}{C_p (T_2 - T_1)} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}. \quad (23)$$

Aby výraz (23) mohl být porovnán se vzorcem (19) $\eta = 1 - \frac{T_0}{T_2}$, udávajícím účinnost Carnotova ideálního cyklu, pracujícího při stejných mezních teplotách jako Dieslův kruhový děj, provedeme úpravu vztahu (23)

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\frac{T_3}{T_0} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \frac{T_0}{T_1}.$$

Dosadíme-li podle vztahů (21) a (22) za $\frac{T_3}{T_0} = q^\kappa$ a za $\frac{T_2}{T_1} = q$, je

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{q^\kappa - 1}{q - 1} \frac{T_0}{T_1} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{q^\kappa - 1}{q - 1} \frac{T_0}{T_2} \frac{T_2}{T_1} = 1 -$$

$$- \frac{1}{\kappa} \frac{q^\kappa - 1}{q - 1} q \frac{T_0}{T_2} = 1 - \varepsilon \frac{T_0}{T_2},$$

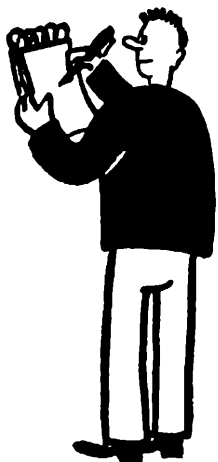
kde

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa} \frac{q^\kappa - 1}{q - 1} \cdot q$$

Pro $\kappa = 1,4$ ukazuje závislost výrazu ε na q tabulka

q	1,5	2	2,5	3
	1,64	2,34	3,10	3,92

Z tabulky je patrné a dá se i početně dokázat, že při všech vyskytujících se hodnotách x má výraz pro všechna $q > 1$ hodnotu větší než 1. Proto je účinnost Dieslova vratného kruhového děje, pracujícího s dokonalým plynem, menší než účinnost Carnotova ideálního kruhového děje, probíhajícího mezi stejnými teplotami T_2 a T_0 .



Různé

K sedmdesátinám doc. J. Holubáře

Naši čtenáři jistě znají knižnici *Škola mladých matematiků*, kterou v nakladatelství *Mladá fronta* vydává Ústřední výbor matematické olympiády. Jedno z posledních čísel této knižnice pojednává o geometrických místech bodů v prostoru; jeho autorem je dlouholetý přispěvatel našeho časopisu doc. *Josef Holubář*, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV, který dne 24. ledna 1965 dovršuje svou sedmdesátku. Poněvadž je svým celoživotním dílem našim čtenářům velmi blízký, bude je jistě jeho osobnost zajímat.

Doc. Holubář pochází z Českomoravské vysočiny ze Skutče a snad právě tento zvláštní kraj mu vtiskl řadu charakterových vlastností jako jsou přesnost, dochvilnost, pracovní houževnatost apod. Po ukončení vysokoškolských studií stal se středoškolským učitelem matematiky a deskriptivní geometrie a odchoval tu řadu našich úspěšných techniků a učitelů. Po roce 1945 byl zemským školním inspektorem matematiky a geometrie v Čechách, kterážto funkce mu usnadnila navázat těsnou spolupráci s našimi učiteli, kterou nepřerušil ani tehdy, když přešel na další pracoviště. Později se stal docentem pedagogické fakulty Karlovy university a poté přešel do Matematického ústavu ČSAV.

Již při své učitelské práci hluboce promýšlel odbornou i metodickou problematiku školské matematiky, zvláště pak své milované geometrie. To jej pak vedlo k napsání řady knih, učebnic, příruček a matematických pojednání, které měly přispět ke zvýšení připravenosti našich středoškoláků v matematice a pomoci i našemu učiteli. Tak např. jsou to dvě knížky *O metodách rovinných konstrukcí* a *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*; o tyto knížky si mohou účastníci matematické olympiády napsat *Jednotě čs. matematiků*

a fyziků, Maltézské nám. 1, Praha 1, která jim je zašle zdarma. Seznámí se v nich např. s Apolloniovou úlohou a řadou jiných zajímavých problémů. Doc. Holubář si zvláště zamiloval stereometrické problémy a proto se ve svých článcích usilovně snažil pomoci mladým matematickým adeptům při zvládnutí této, pro technika tak důležité partie matematiky. S tím souvisejí i Holubářovy práce z deskriptivní geometrie, která je pro svou názornost jednou ze základních kamenů pro každého inženýra. Značnou pozornost věnoval i otázkám vyučování algebry, základů matematické analýzy (posloupnostem čísel) aj.

Do našeho časopisu, jehož byl věrným přispěvatelem, zasílal zvláště úlohy pro čtenáře. Řadou svých úloh přispěl i matematické olympiádě, kterou pomáhá od jejího založení organizovat; v rámci této činnosti prováděl instruktáže olympioniků, přednášel jim, konsultoval s nimi apod.

Od svých studentských let je doc. Holubář oddaným a horlivým členem naší významné vědecké společnosti Jednoty čs. matematiků a fyziků. Po řadu let byl pracovníkem jejího předsednictva. Za zásluhy o tuto společnost i o naši matematiku jej Jednota v r. 1962 zvolila svým čestným členem u příležitosti 100. výročí svého založení. K významnému životnímu jubileu doc. Holubářovi srdečně blahopřejeme a přejeme mu hodně úspěchů v jeho další činnosti.

Rz

Josef Kotyk, Pardubice:

Galilei - otec principu relativnosti klasické mechaniky



Bylo? Nebylo?

Dojmy, které se vám, milí čtenáři, pokusím vylíčit úvodem k svému článku, prožil v hlubinách kosmu jeden astronom. Vypravoval:

„Na černém nebi, jedna z množství klidně zářících hvězd, se počala pojednou zvětšovat. Ze světlé tečky vznikl kruhový kotouč, jenž zvětšoval své rozměry, svítil však stále slaběji a slaběji. Po čase poměrně krátkém se stal již tak velkým jako Měsíc v úplňku - rostl však dále, rychleji a rychleji, až se zdálo, že tato skoro již temná koule se odtrhla od nebeské klenby a letí přímo na pozorovatele. Již zakrývá skoro polovinu oblohy. Není to však úplně temná koule; jedna část v podobě ohromného srpů září jako Měsíc, osvětlena slunečními paprsky, druhá, na kterou sluneční paprsky nedopadají, je pokryta noční temnotou. V nejbližší chvíli bude již zcela blízko! Přiblížila se vskutku rychlostí vichru, zableskla svou jasnou částí a proletěla mimo...“

Z e m ě !

Sen nebo skutečnost ?

N a š e Z e m ě !

Chtěli bychom ji zastavit! Chtěli bychom dohnati naši Zemi - ale marně!

Neuplynulo ani 7 minut a proletěla již délku svého průměru. Za hodinu urazila již dráhu přes 100 000 km. Tak uhání v dáli, zmenšuje se a zároveň zjasňuje. Za krátkou dobu září pak opět jako hvězdička uprostřed černého nebe. “

Od mládí slýcháme, že Země obíhá kolem Slunce, že se řítí světovým prostorem obrovskou rychlostí 30 km/s, a v ničem nesdílíme již obavy dřívějších dob, že její pohyb snad nějak ovlivní děje na ní probíhající či ohrozí dokonce trvání života na Zemi. Již A r i s t o t e l e s¹⁾ měl např. proti pohybu Země podobné vážné námitky. Tvrdil mj., že pohybem Země by prý povstal obrovský vichr, všechny budovy by se zřítily atd. Zejména však P t o l e m a i o s²⁾ byl si již plně vědom toho, že denní pohyb oblohy by bylo lze vysvětlit tím, že se Země jednou za den otočí okolo světové osy opačným směrem než obloha; domněle mocné námitky, vyplývající z tehdejší neznalosti zákonů mechaniky (zejména zákona setrvačnosti) ho nicméně přinutily, aby se rozhodl pro stanovisko geocentrické, jemně také smysly svědčily.

Jestliže tedy již starověcí učenci (mj. také A r i s t a r c h o s z e S a m u okolo roku 260 před n. l.) připouštěli m o ž n o s t i h e l i o - c e n t r i c k é h o n á z o r u, je nám těžko pochopitelný odpor, jaký právě z uvedených důvodů po staletích budilo učení Koperníkovo. Tehdy teprve byly však námitky, dosud považované za zcela přesvědčující, podrobeny kritickému rozboru. Např. byly konány pokusy na lodi, jež plula v přímé dráze stálou rychlostí; s koše lodního stěžně volně puštěná tělesa dopadala na palubu, a to vždy na totéž místo, jako když loď stála. Tyto a jiné zkušenosti potvrdily, že rovnoměrná translace lodi nemá vlivu na mechanické děje k ní vztahované.

V době nejprudších bojů o učení Koperníkovo zasáhl do podobných úvah velmi šťastně také G a l i l e o G a l i l e i (1564—1642)³⁾. Vystoupit přímo jako obhájce Koperníkovy soustavy si ovšem nedovolil, roku 1632 vydal však ve Florencii spis *D i a l o g o s o p r a i d u e m a s s i m i*

¹⁾ A r i s t o t e l e s z e S t a g e i r y (384 až 322 před n. l.), žák Platonův, vychovatel Alexandra Velikého, byl největší učenec starého věku. Jeho dílo, snůška veškeré vzdělanosti řecké, bylo také ještě střednímu věku vrcholem všeho vědění.

²⁾ K l a u d i o s P t o l e m a i o s žil v 2. stol. v Alexandrii. Sepsal dílo *Megalé syntaxis* (Veliké sestavení), v němž vyložil geocentrickou světovou soustavu. S kulturou arabskou dostal se Ptolemaiov spis do Evropy pod názvem *Almagest*.

³⁾ Viz autorův článek G a l i l e o G a l i l e i, uveřejněný k 400. výročí Galileiho narození v *R o z h l e d e c h*, roč. 42, čís. 6, str. 284 až 288.

sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano (Rozhovor o obou velikých soustavách světových Ptolemaiově a Koperníkově), v němž hájí Koperníkovy názory pod jménem Salviati proti jakémusi Simpliciovi, jenž obhajuje učení Ptolemaiovo. Salviati vyvrací také námitky výše připomenuté, což Galilei líčí neobyčejně poutavě těmito slovy:

„Uzavřete se s přítelem v prostorné místnosti v podpalubí velké lodi. Obstarejte si komáry, motýly a všelikou havěť létavou. Zaopatřte si tam i nádobu s vodou a rybkami; nahoru zavěste vědérko, z něhož nechte vytékat vodu po kapkách do úzkohrdlé nádoby postavené dole. Pozorujte nyní pečlivě! Pokud loď klidně stojí, zvířátka létají stejně rychle na všechny strany místnosti, rybky plují stejně bez rozdílu ve všech směrech, kapky padají všechny do nádoby dole postavené. Hodíte-li svému příteli nějaký předmět, není třeba, abyste jej hodil v jednom směru větší silou než v jiném, jsou-li vzdálenosti stejné. Skočíte-li, doskočíte v každém směru stejně daleko. Uvědomte si všechny tyto věci bedlivě! Není však pochybností, že se všechno takto má, pokud loď stojí.

Pohybuje-li se loď libovolnou rychlostí, nenajdete bude-li jen její pohyb rovnoměrný a nebude-li loď kolísati sem tam - v žádném z uvedených úkazů nejmenší změny. I nebudete moci ze žádného z nich rozhodnout, zdali loď pluje či stojí. Komáři a motýli budou zase létat ve všech směrech stejně a nestane se, že by se shromáždili u stěny na zádi lodi, jakoby unaveni námahou sledovati rychlý pohyb její. Rovněž rybky budou ve vodě spěchati stejně snadno za potravou, ať byla položena kamkoli na okraj nádoby; nebudou plavati dopředu namáhavěji než dozadu. Kapky budou dopadati jako dříve do hrdla nádoby dole postavené a nestane se, že by některá dopadla k zádi, ačkoli loď, zatím co je kapka ve vzduchu, urazí několik pídí. Hodíte-li svému příteli nějaký předmět, nebude třeba, abyste jej hodil větší silou, stojí-li přítel na přídi lodi a vy na její zádi, než obráceně. Při skákání urazíte na podlaze tytéž dráhy jako dříve, a byť i loď plula seberychněji, nedoskočíte dále, skáčete-li k zádi lodi, než když skáčete k její přídi, ačkoli v prvním případě, zatím co jste ve vzduchu, ujíždí pod vámi podlaha v opačném směru než je směr, ve kterém skáčete. A spálíte-li zrnko kadidla, vznikne kouř a vystoupí do výše, kde se bude vznášeti jako obláček, a nebude se pohybovati ani na tu, ani na onu stranu.

Příčina veškeré té shody v těchto úkazech jest, že se společně s lodí pohybují všechny věci, které v ní jsou. I vzduch. Proto je také třeba odebrati se do podpalubí, neboť nahore, na volném vzduchu, který se s lodí nepohybuje, ukázaly by se větší nebo menší rozdíly u některých úkazů. Kouř by se jistě opožďoval jako vzduch sám. Komáři a motýlové, vzduchem zdržováni, nemohli by již sledovati rychlý pohyb lodi, jakmile by se od ní dosti vzdálili; kdyby se však drželi blízko ní, mohli by ji ještě sledovati, poněvadž loď je stavbou nepravidelných tvarů a unáší sousední částice vzduchu s sebou.“

Všimněte si, milí čtenáři, s jakou pečlivostí dbá Galilei toho, aby náležitě zdůraznil, že loď nesmí kolísat sem a tam, musí konati pohyb rovnoměrný a jejího pohybu se musí účastnit vše, co má vliv na průběh pozorovaných dějů. Z vašich zkušeností připomenu zejména silné dojmy, které máte z cestování vlakem. Ve voze vlaku, který jede po přímých

kolejích stálou rychlostí, máme pocit, že vlak - stojí. Kdyby okna vozu byla při tom zastřena, nemáme opravdu, z čeho bychom usoudili, že se vlak skutečně pohybuje.

A jak je tomu s oběžným pohybem Země kolem Slunce? Kdybychom mohli Zemi zastavit, přesvědčili bychom se přímo, zdali její pohyb má vliv na mechanické děje na ní probíhající. Není toho však třeba. Čtenáři je známo, že pohyb Země se koná podle Keplerových zákonů na dráze eliptické a proměnlivou rychlostí. Tento pohyb není ovšem rovnoměrnou translací vůči stálícím. Při pozorování průběhu mechanických dějů na Zemi k němu přesto nepřihlížíme, neboť běží o děje v prostorech, jejichž rozměry jsou malé proti rozměrům Země; rozměry oběžné elipsy zemské jsou mimoto tak obrovské a Země potřebuje tak dlouhé doby, aby ji opsala, že dráhu, vykonanou za tu poměrně krátkou dobu, po kterou trvá pozorovaný děj, můžeme vždy považovat za přímou a pohyb Země po ní za rovnoměrný. S tímto omezením je pohyb Země kolem Slunce rovnoměrnou translací vůči stálícím a průběh mechanických dějů na Zemi je takový, jako kdyby onoho pohybu nebylo⁴⁾ Zdá se nám jen, že Slunce se pohybuje; jeho pohyb po ekliptice je však obrazem pohybu Země.

Jako Galilei dospíváme pak k tomuto závěru:

Jestliže skupina těles (loď, vůz vlak, Země) koná jako celek rovnoměrnou translaci, průběh mechanických dějů k ní vztahovaných se nemění. Pozorovatel, který se pohybuje s ní a zkoumá děje v ní probíhající, nemá, z čeho by mohl rozhodnout, že se vůbec pohybuje.

Tím se stal Galilei otcem principu relativnosti klasické mechaniky, z něhož se v nejnovější době spoluprací Minkowského, Einsteinovou a Lorentzovou vyvinul tzv. speciální princip relativnosti. Shledáváme tak, že práce antické astronomie se vtěluje do díla Koperníkova, dílo Koperníkovo pak vědeckou činností Galileiho do velké revoluce dneška, teorie relativnosti.⁵⁾

Literatura

Galileo Galilei, Dialóg o dvoch systémoch sveta. Přeložil dr. Mikuláš Pažitka. (SAV, Bratislava.)

⁴⁾ S otáčivým pohybem Země kolem vlastní osy je tomu ovšem jinak. Vložte, proč! Mechanické pokusy, v nichž se jeví vliv tohoto pohybu, popisuje učebnice Astronomie (1954) v čl. 27 Důkazy denního otáčení Země, str. 35 a 36.

⁵⁾ Viz autorův článek Relativnost pohybu v Rozhledech, roč. 22, čís. 1, v podrobnostech pak článek J. Horského, Základy teorie relativity v Rozhledech, roč. 42, čís. 3 až 7.

Slovníček

matematických výrazů

0,02 — ноль целых, две сотых
0,003 — ноль целых, три тысячных
0,45 — ноль целых, сорок пять сотых
0,0678 — ноль целых, шестьсот, семьдесят восемь десяти-
тысячных
1,1 — одна целая, одна десятая
1,23 — одна целая, двадцать три сотых
1,045 — одна целая, сорок пять тысячных
67,89 — шестьдесят семь целых, во-
семьдесят девять сотых
12,304 — двенадцать целых, триста
четыре тысячных

3. Znaky a symboly

+ плюс
— минус
± плюс минус
= равняется, равно (знак равенства)
() круглые скобки
[] квадратные скобки
{ } фигурные скобки
 $a = b$ a равно b
 $a \neq b$ a не равно b
 $a \approx b$ a примерно равно b
 $a > b$ a больше b ; a больше, чем b
 $a < b$ a меньше b ; a меньше, чем b
 $x \rightarrow \infty$ x стремится к бесконечности
 $a + b = c$ a плюс b равно (будет) c
 $a - b = c$ a минус b равно (равня-
ется) c

$35 + 16 = 51$ тридцать пять плюс
(прибавить) шестнад-
цать будет (составит)
пятьдесят один (равня-
ется, равно пятидесяти
одному)

$64 - 17 = 47$ шестьдесят четыре ми-
нус (отнять, вычесть)
семнадцать будет (со-
ставит) сорок семь (рав-
но, равняется сорока
семи)

, $\times$ умножить (знак умножения)
: разделить, поделить (знак деления)
 $1 \times 1 = 1$ единожды один (будет) один
 $2 \times 2 = 4$ дважды два (будет) четыре
 $4 \times 4 = 16$ четырежды четыре (будет)
шестнадцать

$a = c \times d$ a равно c , помноженное
(умноженное) на d

$1 : 2$ один к двум (отношение один
к двум)

$68 : 1$ шестьдесят восемь к одному
(отношение шестьдесят восемь
к одному)

$15 : 3 = 5$ пятнадцать, (по)деленное на
три, равно пяти

$22 : 7 = 3 \frac{1}{7}$ двадцать два, (по)деленное
на семь, равно трем (це-
лым) и одной седьмой

$12 : 3 = 16 : 4$ отношение двенадцать
к трем равно отноше-
нию шестнадцать к че-
тырем

$a = \frac{b}{c}$ a равно b , (по)деленному на c

$$a = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{d}{e}} = \frac{be}{cd} \quad a \text{ равно отношению } b, \text{ поделенного на } c \text{ к } d, \text{ поделенному на } e, \text{ равно (равняется) отношению произведения } be \text{ к произведению } cd$$

x^2 икс квадрат; икс в квадрате; икс во второй степени
икс куб; икс в кубе; икс в третьей степени

$6^2 = 36$ шесть в квадрате будет тридцать шесть

$3^3 = 27$ три в кубе будет двадцать семь

10^5 десять в пятой степени, пятая степень десяти

10^{-6} десять в степени минус шесть

$\sqrt{a}$ корень квадратный из a

$\sqrt[3]{y}$ корень кубический из y (игрек)

$\sqrt[4]{c}$ корень четвертой степени из c (це)

% процент

57 % пятьдесят семь процентов

$3/9$ % три девятых процента

$1/5$ % одна пятая процента

$1/2$ % одна вторая (половина, пол) процента

0,27 % (ноль целых) двадцать семь сотых процента

$$\frac{1 \times 100}{15} = \frac{62}{3} \% = 6,66 \% \text{ единица,}$$

умноженная на сто и поделенная на пятнадцать, составляет шесть и две третьих процента или приблизительно шесть целых и шестьдесят шесть сотых процента

4. Číslo pojmenováno

1 мм. один миллиметр

2 см. два сантиметра

3 дм. три дециметра

4 м. четыре метра

1 мг. один миллиграмм

2 г. два грамма

4 ц. четыре центнера

5 т. пять тонн

1 м³/ч. один кубический метр в час

1 л. один литр

$1/2$ л. одна вторая литра; пол-литра

1 ч. один час

1 л. с. одна лошадиная сила

0,75 км (ноль целых) семьдесят пять сотых километра

2 км/ч. два километра в час

1'12" одна минута двенадцать секунд; также один фут двенадцать дюймов

45 ° сорок пять градусов

20 °C двадцать градусов по Цельсию

16 °R шестнадцать градусов по Реомюру

—18 °F минус восемнадцать градусов по Фаренгейту

100 р. сто рублей

50 р. 25 коп. пятьдесят рублей двадцать пять копеек

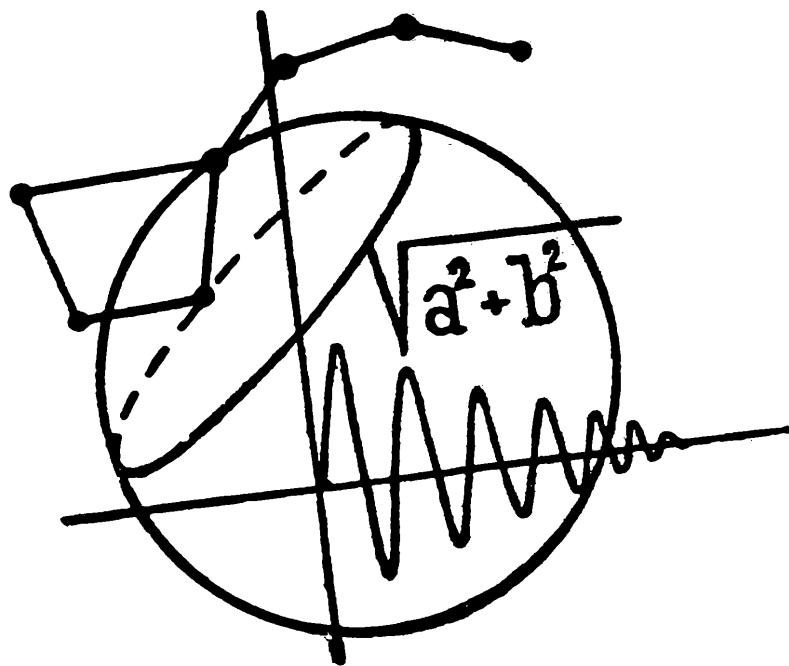
50 коп. пятьдесят копеек; полтинник

Rozhledy matematicko-fyzikální začaly v loňském ročníku otiskovat sérii cizojazyčných slovníků výrazů z elementární matematiky. Nejprve vyšel slovník rusko-český a v příštím čísle zahájujeme slovník česko-ruský. Jeho autor se při sestavování přidržel opět zásady maximální jednoduchosti a až na malé výjimky neuvádí rody podstatných jmen ani slova, jejichž ruský překlad lze najít v každém běžném česko-ruském slovníku. Jsou též vynechána ta ruská synonyma českých slov v slovníku zařazených, která se v matematických textech nevyskytují.

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



6

ROČ.
1964

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠK
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝ

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Únor 1965

Číslo 6

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

S. Horák: Souvislost mezi kořeny a koeficienty kvadratické	241
Inž. O. Lacina: Praktické řešení kubické rovnice	243
O. Lanta: Z geometrie trojúhelníka	246
J. Maňák: Vybrané úlohy o mířimech	248
Doc. B. Kepr: O některých křivkách	250
F. Hradecký: O určitých geometrických místech (Pokračování)	252
J. Dlouhá: Nízké teploty	256
O. Lepil: Lissajousovy obrazce	263
A. Skyva: Užití vakua ve vědě a technice	271
Řešení úloh loňské soutěže (Pokračování)	279
J. S.: Největší dosud známé prvočíslo	283
J. Šedivý: Kdo na tom vydělal?	283
J. Šedivý: Průsečík výšek v méně známé roli	284
Doc. O. Setzer: Geometrické paradoxon (Dokončení)	284
Recenze	286
Redakce hovoří se čtenáři	287
M. Zelenka: Česko-ruský slovník	3. a 4. stránka obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jln. dřižská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořál, studující FS.

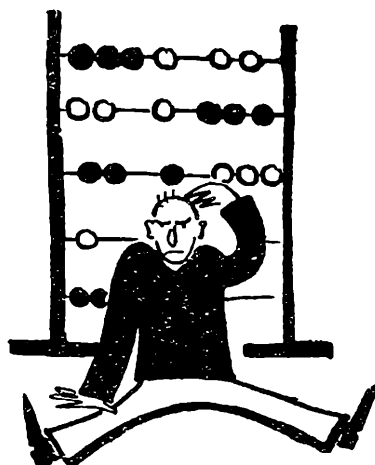
A-26*51045

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.

Matematika

Stanislav Horák st., ČVUT, Praha:

Souvislost mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice



I. Mějme rovnici druhého stupně

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

jejíž kořeny jsou α , β . O nich platí

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}. \quad (2)$$

Máme-li vypočítat, čemu se rovná součet druhých mocnin obou kořenů, nebo součet třetích mocnin obou kořenů, postupujeme zpravidla takto

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{c}{a},$$

přičemž jsme použili rovnic (2). Při součtu třetích mocnin postupujeme podobně

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \\ &= -\frac{b^3}{a^3} + 3 \frac{bc}{a^2} \end{aligned}$$

Opět jsme použili vzorců (2). Podobně postupujeme i při součtu vyšších mocnin.

II. Tato úloha se dá řešit i jinak a jednodušeji. Poněvadž α , β jsou kořeny rovnice (1), platí o nich

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha + c &= 0, \\ a\beta^2 + b\beta + c &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Sečtením obou těchto rovnic dostaneme

$$a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + 2c = 0$$

Vzhledem k první rovnici (2) změní se tato rovnice v jinou

$$a(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{b^2}{a} + 2c = 0$$

a odtud již máme

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{c}{a},$$

což je výsledek shodný s dřívějším.

Abychom vypočítali součet $\alpha^3 + \beta^3$, znásobíme první rovnici (3) číslem α a druhou rovnici (3) číslem β . Dostaneme tak rovnice

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha = 0,$$

$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta = 0$$

Po jejich sečtení obdržíme

$$a(\alpha^3 + \beta^3) + b(\alpha^2 + \beta^2) + c(\alpha + \beta) = 0$$

Poněvadž

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a},$$

dostáváme výsledek

$$\alpha^3 + \beta^3 = 3\frac{bc}{a^2} - \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

který souhlasí s výsledkem dřívějším.

Podobně by se daly vypočítat i součty vyšších mocnin.

Je zajímavé, že tohoto postupu je možno použít i pro součet mocnin kořenů, kde mocnina je vyjádřena jakýmkoli záporným celým číslem. Vypočtete například $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$. Rovnice (3) dělíme postupně čísly α, β . (Přitom mlčky předpokládáme, že $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.) Obdržíme tak

$$a\alpha + b + c\alpha^{-1} = 0,$$

$$a\beta + b + c\beta^{-1} = 0.$$

A odtud již po sečtení máme s použitím první rovnice (2)

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} = -\frac{b}{c}.$$

Součet $\alpha^{-2} + \beta^{-2}$ vypočteme tak, že rovnice (3) dělíme postupně čísly α^2, β^2

$$a + b\alpha^{-1} + c\alpha^{-2} = 0,$$

$$a + b\beta^{-1} + c\beta^{-2} = 0$$

Sečtením dostaneme

$$2a + b(\alpha^{-1} + \beta^{-1}) + c(\alpha^{-2} + \beta^{-2}) = 0.$$

Avšak součet $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$ jsme prve vypočítali a po dosazení obdržíme výsledek

$$\alpha^{-2} + \beta^{-2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2 \frac{a}{c}.$$

Cvičení Vypočtete: $\alpha^4 + \beta^4$; $\alpha^{-3} + \beta^{-3}$; $\alpha^{-4} + \beta^{-4}$.

Inž. O t a k a r L a c i n a, Praha:

Praktické řešení kubické rovnice

Úvod. V běžné výpočtářské praxi je výhodné používat takových početních metod, které vyžadují pouze základní početní výkony a výkony snadno řešitelné na logaritmickém pravítku. Dále je výhodné přehledné uspořádání výpočtu, čímž se sníží pravděpodobnost chyb a usnadní se kontrola. Konečně je vhodné, je-li to již během výpočtu patrné, s jakou přesností je výpočet prováděn. Musíme si uvědomit, že koeficienty dané rovnice jsou výsledkem předchozího výpočtu prováděného většinou na logaritmickém pravítku, tedy s přesností maximálně 1 %. Nemá tudíž význam počítat kořeny rovnice na větší počet míst výsledku.

Uvedeným požadavkům nevyhovují metody výpočtu algebraických rovnic třetího stupně (čili kubických rovnic) běžně uváděné v učebnicích, tj. řešení algebraické pomocí *C a r d a n o v a v z o r c e*, řešení pomocí tzv. *h y p e r b o l i c k ý c h f u n k c í* nebo řešení pomocí *g o n i o m e t r i c k ý c h f u n k c í*. Předně je nutno ve všech případech převádět danou rovnici na redukovaný tvar bez kvadratického členu. Cardanův vzorec má tvar poměrně nevhodný pro rychlé a spolehlivé vyčíslení. Řešení hyperbolickými funkcemi má nevýhodu v nutnosti použití tabulek hyperbolických funkcí, které nejsou běžné a výpočet těchto funkcí na logaritmickém pravítku není jednoduchý. Řešení goniometrické je sice snadné, ale vyhovuje pouze v případě, že rovnice má pouze reálné kořeny. Nutnost převodu na redukovanou rovnici zůstává.

Dále uvedená metoda nevyžaduje převod na redukovaný tvar, nemá vyšších početních výkonů než sečítání a násobení, výpočet se dá uspořádat do tabulek a z výpočtu je patrna jeho přesnost.

Odvození metody a postup výpočtu. Řešení algebraické rovnice třetího stupně vychází ze skutečnosti, že kubická rovnice má nanejmeně jeden kořen reálný. Lze tedy rovnice převést na tvar

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x + \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma). \quad (1)$$

Vynásobením pravé strany a porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostáváme vztahy, ze kterých vychází další výpočet

$$a = \alpha + \beta, \quad (2)$$

$$b = \alpha\beta + \gamma, \quad (3)$$

$$c = \alpha\gamma. \quad (4)$$

Popisovaná metoda spočívá ve výpočtu koeficientů α , β , γ . Nepočítají se tedy přímo kořeny rovnice jako při ostatních metodách. Postup výpočtu je tento:

a) Vhodnou substitucí upravíme rovnici na tvar s řádovou velikostí koeficientů vhodnou pro výpočet.

b) Zvolíme libovolnou hodnotu β_1 .

c) Vypočteme ze vztahu (2) hodnotu $\alpha_1 = a - \beta_1$.

d) Vypočteme ze vztahu (3) hodnotu $\gamma_1 = b - \alpha_1\beta_1$.

e) Určíme chybu volby $\Delta_1 = c - \alpha_1\gamma_1$.

f) Volíme jinou hodnotu β_2 a výpočet opakujeme.

Mají-li volby β_m a β_n chyby Δ_m a Δ_n různých znamének, pak správná hodnota β je v intervalu $(\beta_m; \beta_n)$. Vhodnou volbou sevřeme nejprve hodnotu β do úzkého intervalu, ve kterém pak lineární interpolací vypočteme hodnotu β s požadovanou přesností výpočtu. Tím získáváme i hodnotu jednoho kořene kubické rovnice

$$x_1 = -\alpha.$$

Další dva kořeny dostáváme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Pro přehlednost uspořádáme výpočet do výpočtové tabulky

Č.	β	$\alpha = a - \beta$	$\alpha\beta$	$\gamma = b - \alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\Delta = c - \alpha\gamma$

Pro interpolaci mezi hodnotami β_r a β_s pomocí hodnot Δ_r a Δ_s použijeme známého vzorce

$$\beta_t = \beta_r - \frac{\beta_s - \beta_r}{\Delta_s - \Delta_r} \cdot \Delta_r,$$

který také uspořádáme do výpočtové tabulky

Č.	β_s	β_r	Δ_s	Δ_r	$\beta_s - \beta_r$	$\Delta_s - \Delta_r$	$\frac{\beta_s - \beta_r}{\Delta_s - \Delta_r} \Delta_r$	β_t

Po výpočtu všech tří kořenů provedeme kontrolu výsledku podle známých závislostí kubické rovnice

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -a, \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= b, \\x_1x_2x_3 &= -c,\end{aligned}$$

čímž je výpočet dokončen.

Příklad.

$$x^3 - 9,91 \cdot 10^5 x^2 + 2,64 \cdot 10^{11} x - 1,67 \cdot 10^{16} = 0.$$

Volíme substituci pro úpravu řádu koeficientů u neznámé

$$x = 10^5 y.$$

Po dosazení substituce a vykrácení 10^{15} dostáváme tvar rovnice vhodný k řešení

$$y^3 - 9,91 y^2 + 26,4 y - 16,7 = 0.$$

Nejprve volíme $\beta_1 = 0$. Použitím této hodnoty vychází $\Delta_1 = +245$. Dále volíme $\beta_2 = a = -9,91$. Použitím $\beta_2 = -9,91$ vychází $\Delta_2 = -16,7$. Porovnáním velikosti chyb zjistíme, že β leží v intervalu $(0; -9,91)$ blíže hodnotě $-9,91$. Odhadneme $\beta_3 = -8,91$ a $\beta_4 = -9,01$, čímž dostáváme $\Delta_3 = +0,8$ a $\Delta_4 = -0,25$. Interpolací třetí a čtvrté řádky dostáváme $\beta_5 = -8,986$ a k němu příslušné $\Delta_5 = +0,01$. Tato odchylka je na mezi přesnosti zadaných koeficientů, další zpřesňování nemá význam. Tím jsme získali první kořen rovnice

$$y_1 = -\alpha = 0,924$$

a kvadratickou rovnici

$$y^2 - 8,986 y + 18,1 = 0,$$

jejímž řešením na logaritmickém pravítku dostáváme další dva kořeny

$$y_2 = 5,92$$

$$y_3 = 3,06.$$

Kořeny dané rovnice

$$x_1 = 9,24 \cdot 10^4,$$

$$x_2 = 5,92 \cdot 10^5,$$

$$x_3 = 3,06 \cdot 10^5$$

Kontrola výsledku

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,90 \cdot 10^5 = -a,$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1,672 \cdot 10^{16} = -c.$$

Tabulka výpočtu

Č.	β	$\alpha = -9,91 - \beta$	$\alpha \cdot \beta$	$\gamma = 26,4 - \alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\Delta = -16,7 - \alpha\gamma$
1	0	-9,91	0	+26,4	-262	+245
2	-9,91	0	0	+26,4	0	-16,7
3	-8,91	-1	+8,91	+17,5	-17,5	+0,8
4	-9,01	-0,9	+8,11	+18,29	-16,45	-0,25
5	-8,986	-0,924	+8,30	+18,1	-16,71	+0,01

Tabulka interpolace

Č.	β_s	β_r	Δ_s	Δ_r	$\beta_s - \beta_r$	$\Delta_s - \Delta_r$	$\frac{\beta_s - \beta_r}{\Delta_s - \Delta_r} \Delta_r$	β_t
3; 4	-9,01	-8,91	-0,25	+0,8	-0,1	-1,05	+0,076	-8,986

Uvádíme zajímavou ukázkou toho, jak technická praxe často postupuje při číselných výpočtech. Redakce.

Oldřich Lanta, Ostrava:

Z geometrie trojúhelníka

Obsahem tohoto článku je tato úloha:

Sestrojte trojúhelník, když je dána jedna jeho strana, úhel k této straně protější a velikost osy tohoto úhlu.

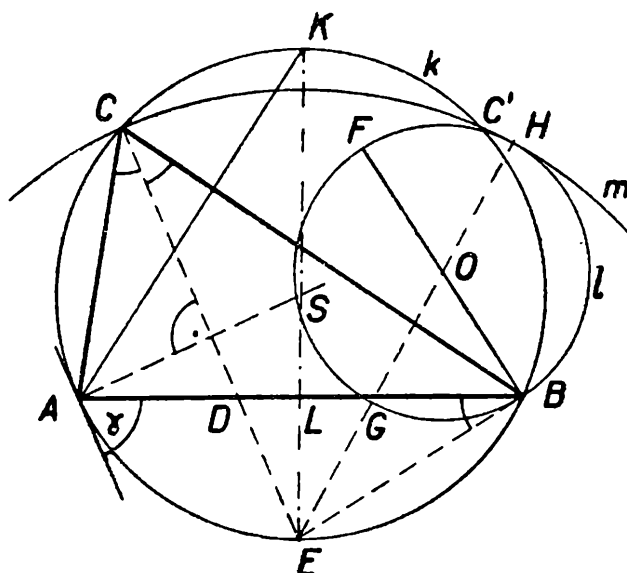
Tuto úlohu řeší s. Weigel v 5. čísle 41. roč. Rozhledů MF. Zde si ukážeme jiné řešení.

R o z b o r. Nechť ABC je hledaný trojúhelník, $AB = c$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, a konečně $AD = o$ jsou dané prvky. Protože $\sphericalangle ACB = \gamma$, vrchol C patří geometrickému místu bodů, ze kterých je úsečka AB viděna v zorném úhlu γ . V obr. 1 je to oblouk kružnice k v jedné polorovině určené hraniční přímkou AB . Protože $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$, protne osa CD kružnici k v bodě E v opačné polorovině k polorovině ABC . Bod E je společný kružnici k a ose úsečky AB . Zřejmě je $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ACD = \frac{\gamma}{2}$ (obvodové úhly nad tětivou AE), a proto je $\sphericalangle EBD =$

$= \sphericalangle DCB$; dále je $\sphericalangle BED = \sphericalangle BEC$. Je tedy $\triangle EBD \sim \triangle ECB$ (uu) a platí: $EB : ED = EC : EB$, tj. $EB^2 = ED \cdot EC$. Dále je $ED = EC - DC$.

Lze tedy úsečku EC sestavit užitím mocnosti bodu E ke kružnici nad průměrem $CD = o$, je-li bod B dotykovým bodem tečny z bodu E k této kružnici.

K o n s t r u k c e. V jedné polorovině určené hraniční přímkou AB sestavíme geometrické místo bodů, z nichž je úsečka AB viděna v úhlu γ . (V obr. 1 je to oblouk kružnice k .) Osa úsečky AB protne tuto kružnici v bodě E v polorovině opačné k polorovině uvažovaného geometrického místa. K úsečce EB sestavíme v bodě B kolmici a naneseme na ni úsečku $BF = o$. Nad průměrem BF sestavíme kružnici l o středu O . Přímka EO protne tuto kružnici v bodech G, H . Kružnice $m(E; EH)$ protne kružnici k v bodě C . ABC je hledaný trojúhelník.



Obr. 1

D ů k a z. $\triangle ACB$ má danou stranu c , $\sphericalangle ACB = \gamma$, neboť vrchol C patří geometrickému místu vrcholů obvodových úhlů γ nad tětivou AB . Přímka EC protne stranu AB v bodě D . Protože $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$, je EC osou úhlu γ . Dále je $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ECB$, a proto $\triangle EBD \sim \triangle ECB$ (uu). Je tedy $ED : EB = EB : EC$, tj. $EB^2 = ED \cdot EC$. Ale $EC = EH$ a protože je také $EB^2 = EG \cdot EH$, je nutně $ED = EG$. Je proto $DC = GH = BF = o$. Tím je důkaz proveden.

D i s k u s e. Zřejmě musí být $\gamma < 180^\circ$. Abychom dostali bod C , musí kružnice m o středu E a poloměru EH protnout geometrické místo bodů C . Průměr kružnice k bodem E protne tuto kružnici v dalším bodě K a stranu c ve středu L . Musí tedy $CD = o = KL$. Z $\triangle ALK$, kde $\sphericalangle AKL = \frac{\gamma}{2}$, plyne: $KL = AL \cotg \frac{\gamma}{2}$, tj. $o \leq \frac{c}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2}$. Jsou

tedy tyto možnosti: Je-li $o < \frac{c}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}$, jsou dvě řešení; v obr. 2 je druhý vrchol C' . Je-li $o = \frac{c}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}$, je řešení jedno a trojúhelník je rovnoramenný. Je-li $o > \frac{c}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}$, nemá úloha řešení.

J a r o s l a v M a ě á k, České Budějovice:

Vybrané úlohy o minimech

Pod tímto názvem jsem četl řešení několika úloh o minimech od s. inž. J a r o m í r a H r o n í k a, VUT Brno, v R o z h l e d e c h m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í c h, roč. 41, č. 10 z roku 1962/63 bez diferenciálního počtu se zdůrazněním problému, kterým hledáme optimální řešení dané úlohy. Takové úlohy můžeme řešit nejen bez znalosti derivací, ale také elementárními metodami, například pomocí algebraické věty:

A r i t m e t i c k ý p r ů m ě r k o n e č n ě h o p o č t u n -k l a d n ý c h č í s e l j e v ž d y v ě t š í n e b o j e n e j v ý š e r o v e n j e j i c h g e o m e t r i c k é m u p r ů m ě r u.

Všecky v Rozhledech, roč. 41, č. 10 uvedené úlohy lze řešit též pomocí rovnic druhého stupně. Bylo by jistě velmi účelné užít toho již na střední všeobecně vzdělávací škole, poněvadž to nedělá žádné obtíže a uplatnilo by se to na praktických příkladech. Uvedu tento postup na jednom z příkladů tam počítaných jak pro počítání maxima, tak i minima.

P ř í k l a d 1. Určete rozměry okenního profilu podle obrazu, který je složen z obdélníku a půlkružnice, a to tak, aby při daném obsahu P měl nejmenší obvod.

Obvod okenního profilu

$$s = 2x + 2y + \pi x ;$$

obsah okenního profilu

$$P = 2xy + \frac{1}{2} \pi x^2$$

Vyloučením hodnoty y z výrazu pro obvod, obdržíme

$$s = 2x + \frac{1}{2} \pi x + \frac{P}{x} .$$

Tuto rovnici řešíme podle x a dostaneme postupně

$$\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x^2 - sx + P = 0 ,$$

$$x_{1,2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - (8 + 2\pi) P}}{4 + \pi}$$

Pro reálné řešení platí

$$s^2 - (8 + 2\pi) \cdot P \geq 0 ,$$

$$s^2 \geq (8 + 2\pi) \cdot P ,$$

$$s_{\min} = \sqrt{2P(4 + \pi)} .$$

Příklad 2. Určete rozměry okenního profilu podle obrazu, který je složen z obdélníku a půlkružnice, a to tak, aby při daném obvodu s měl největší světlost (obsah).

$$s = 2x + 2y + \pi x ,$$

$$P = 2xy + \pi \frac{x^2}{2} .$$

Vyloučením hodnoty

$$y = \frac{s - 2x - \pi x}{2}$$

dostaneme pro obsah

$$P = x(s - 2x - \pi x) + \frac{\pi x^2}{2}$$

Upravíme tuto rovnici na řešení kvadratické rovnice a dostaneme

$$(\pi + 4)x^2 - 2sx + 2P = 0 ,$$

$$x_{1,2} = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 4(\pi + 4) \cdot 2P}}{2(\pi + 4)} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - (\pi + 4) \cdot 2P}}{\pi + 4}$$

Pro reálné řešení platí

$$s^2 - (\pi + 4) \cdot 2P \geq 0 .$$

Jinak

$$P \leq \frac{s^2}{2(\pi + 4)} ,$$

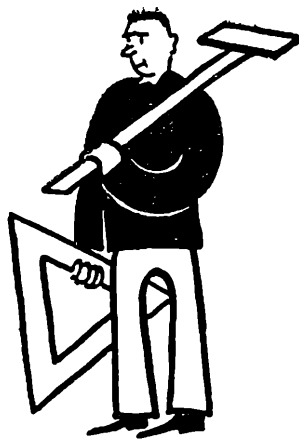
$$P_{\max} = \frac{s^2}{2(\pi + 4)} ,$$

pro

$$x = \frac{s}{\pi + 4} ,$$

což je poloviční šířka okna.

Obdobným způsobem je možno řešit všechny ostatní příklady tam uvedené.



Deskriptivní geometrie

Doc. Bořivoj Kepr, ČVUT, Praha:

O některých křivkách

1. Předmluva

Snahou autora tohoto článku je podchytit zájem mladých a zaujatých čtenářů *R o z h l e d ů* o partii geometrie, udanou nadpisem, a tím pak vlastně o geometrii vůbec a dále těm mladým nadšencům, kteří si třeba sami od sebe konstruují různé křivky a dumají nad nimi, udat jednu z obecnějších cest, jak celá spousta křivek vzniká a jak se vyšetřují po stránce poznání jejich vlastností. Protože *R o z h l e d y* jsou určeny v první řadě našim nejmladším zájemcům o matematiku a geometrii, je také výběr látky a její podání přizpůsobeno této skutečnosti. Čtenářům *R o z h l e d ů* není třeba vykládat, že obory matematiky a geometrie patří k nejhezčím disciplínám v lidském bádání. Názorem autora pak je, že mezi nejkrásnější partie geometrie patří teorie křivek. V této teorii se dá totiž celá řada matematických vzorců (jinak formálních) ukázat názorně na vlastnostech tak pro lidského ducha zajímavých a poutavých, že celé tisícileté dějiny vývoje geometrie jsou z velké části naplněny bádáním o křivkách nejrůznějších druhů, zkoumáním a vyšetřováním jejich vlastností. Podnětem k tomu byly jednak požadavky technického rozvoje, s nímž teorie křivek souvisí nesmírně úzce, a jednak vůbec hloubavost teoretického ducha člověka, který se snaží odjakživa ve své vrozené touze po poznání přijít „věcem na kloub“, i když se velmi často jednalo o věci, záležitosti a vlastnosti, které zdánlivě neměly v současnosti technickou použitelnost a teprve později, při dalším rozvoji techniky se ukázala krajní užitečnost takových výsledků.

Není tedy divu, že v historickém sledu se pojí s rozvojem teorie křivek řada jmen nejslavnějších matematiků, geometrů, fyziků a jiných vědců i umělců v dějinách lidské vědy a kultury. Jenom v největší stručnosti vystupují v této souvislosti již jména starých antických geometrů jako Archimédes, Dinostratos, Diokles, Menelaos, Nikodemes, Pappus, Perseus, Ptolemaios a mnozí další, dále pak slavná jména zejména italských, francouzských, holandských, anglických, německých a polských průkopníků vědy i umění jako Leonardo da Vinci, Cassini, Catalan, Galilei, Torricelli, Cremona, Loria, Cesàro, Chasles, Dandelin, Desargues, Descartes, Hôpital, Ocagne, Pascal, Quetelet, Mannheim, Serret, Bernoulli

Jakub a Johan, Huygens, Cayley, Newton, Maclaurin, Dürer, Leibnitz, Kepler, Möbius, Euler, Gauss (matematický génius, který dodnes drží titul krále matematiků, přestože žil ve druhé polovině 18. a v první polovině 19. století) Cantor, Steiner, Koperník, Kowalewski a mnoho jiných dalších. Z českých pracovníků v oboru teorie křivek nutno vyslovit jména Jeřábek, Lerch, Weyr Em., Machovec, Zahradník, Sobotka a Bydžovský, vesměs učitelů matematiky a geometrie na naší staroslavné Karlově universitě v Praze, jména, která se citují v tomto oboru ve světové literatuře. Je pravděpodobné, že se mladému čtenáři bude zdát tento výčet jmen pracovníků v oboru teorie křivek velmi obsáhlý. Zdaleka však tomu tak není. Autorovi tohoto pojednání dalo právě největší práci vybrat z pracovníků nejslavnějších jmen lidské kulturní historie, kteří se aktivně podíleli na bádání v teorii křivek, alespoň těch několik právě uvedených, aby při tom necítil kruté výčitky svědomí vzhledem k množství dalších významných vědců světového jména, jež zde nebylo možno vzhledem k elementárnímu poslání článku citovat. Při výčtu slavných jmen ve vývoji geometrie křivek omezil se autor hlavně na ty badatele, s jejichž jmény se mladý čtenář R o z h l e d ů setká i při studiu jiných odvětví, jako fyziky a astronomie (Archimédes, Ptolemaios, Galilei, Torricelli, Pascal, Huygens, Newton, Kepler, Koperník), výtvarného umění (Leonardo da Vinci, Dürer) a filosofie (zejména Descartes).

Čtenář R o z h l e d ů, který si vyvolí za svoje životní povolání studium matematiky a geometrie, bude pak jistě souhlasit s autorem článku, že kromě jiného jsou vlastnosti křivek vlastnostmi velmi zajímavými, velmi krásnými a že tudíž není vůbec divu, že řada matematiků a geometrů slavných jmen v průběhu kulturních dějin věnovala odhalování vlastností nejružnějších křivek většinu svého života, i když mnoho těchto pracovníků žilo v dobách, neposkytujících mnoho podmínek pro klidnou tvořivou práci, tj. v dobách jednak nepřátelsky založených ke všemu, co souviselo s rozvojem vědy, jednak v dobách neklidných, plných převratů, politických zmatků a většinou pak v nepochopení okolí. Pídivá touha lidská, vzrušení při bádání a velmi těžko popsatelný stav při odhalení krásné a jednoduché pravdy po mnoha nezdarech, trvajících i velmi dlouho, je vždy silnější, než jakékoliv strádání, a proto každý pravdivý pokrok ve všech oborech jde nutně stále kupředu.

Vzhledem ke všemu tomu, co bylo právě řečeno, je teorie křivek nesmírně obsáhlá a v odborné literatuře jí byla pochopitelně věnována již celá řada obširných monografií, většinou celoživotních děl autorů.¹⁾

¹⁾ Uvedme např. alespoň dvě z nejkrásnějších, a to dílo od dr. H. Wieleitnera, *Spezielle ebene Kurven* (speciální rovinné křivky) a od G. Lorii: *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven* (speciální algebraické a transcendentní rovinné křivky německý překlad z italštiny).

V důsledku toho bych rád v tomto článku dal vskutku jen primitivní úvod do teorie křivek, s ukázkou návodu cesty, jak lze studovat konstruktivně celou řadu křivek, užitečných zejména pro technické aplikace. Protože studenti našich středních škol se již při vlastním studiu seznamují se základními vlastnostmi kuželoseček, tj. s vlastnostmi kružnice, elipsy, paraboly a hyperboly, nebude v tomto článku probírána teorie těchto křivek (budeme je pouze potřebovat pro další výklad), ale zaměříme se v některých příkladech po trošce všeobecné teorie na jiné křivky. Autor se domnívá, že pro ty studenty, kteří budou dále rozšiřovat svoje vědomosti na vysokých školách technických nebo dokonce na matematicko-fyzikální fakultě, bude obsah tohoto článku užitečný, neboť se s teorií křivek ve výuce na těchto školách ještě setkají a pro ty studenty, kteří po maturitě již dále studovat nepůjdou, bude (podle neskromného názoru autora) tento článek ještě užitečnější.

Na závěr předmluvy doporučuje mladým čtenářům **R o z h l e d ů**, aby si přečetli populární a velmi stručně napsanou historii vývoje matematiky a geometrie od rakouského autora **E g m o n t a C o l e r a O d P y t h a g o r y k H i l b e r t o v i**. Tato knížka vyšla v českém překladu nákladem bývalé **D r u ž s t e v n í p r á c e** v roce 1941, zahrnuje dějinné období udané oběma jmény v názvu (tj. od Syrakusského Pythagora až po vznik tzv. moderní geometrie, jehož vyvrcholením jsou dosud práce geniálního německého matematika Hilberta) a coby hlavně, je psána nadšeně, aby tak demonstrovala nadšení všech pracovníků na poli vědy, pracovníků nejrozličnějších národností, kteří v nejtěžších chvílích svého života si dokázali vyměňovat soukromou korespondenci, jejímž obsahem hlavně byla ta nebo ona krásná pravda odhalená při zkoumání té nebo oné křivky.

(Pokračování)

F r a n t i š e k H r a d e c k ý, Praha:

O určitých geometrických místech

(Pokračování)

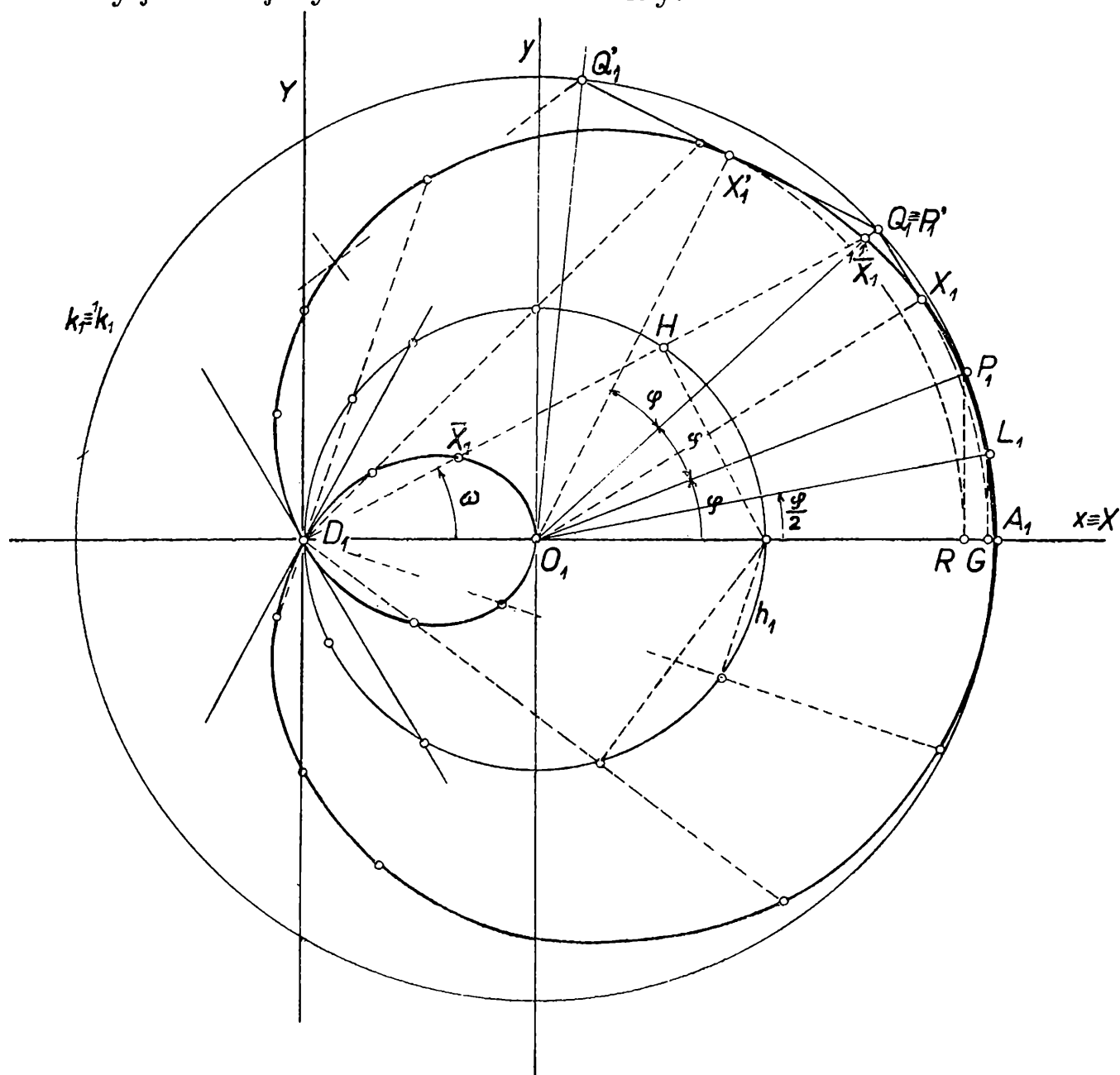
II. V následujících úlohách se budeme zabývat vyšetřováním geometrických míst středů úseček PQ , pohybují-li se body P, Q po kružnicích o téže poloměru, ležících v téže rovině nebo v rovinách rovnoběžných.

Ú l o h a 3. Je dán kolmý rotační válec, jehož podstavné kružnice jsou k a 1k . Po kružnici k se pohybuje rovnoměrně bod P a po kružnici 1k se pohybuje v téže smyslu a touž rychlostí bod Q . Určete geometrické místo středů úseček PQ . Počáteční body neleží na téže přímce válcové plochy, ani na přímce procházející středem válce (obr. 4).

Promítneme-li ve směru ${}^1O{}^1O'$ (${}^1O'$ je zvolen libovolně) kružnici l do roviny dolní podstavy do kružnice ${}^1k'$ a bod Q do bodu Q' a sledujeme-li geometrické místo středů úseček PQ' , když bod P se pohybuje po kružnici k a bod Q' po kružnici ${}^1k'$ v témže smyslu, vidíme, že hledaným geometrickým místem je kružnice l' o středu S' a poloměru $S'X'$, kde S' je střed úsečky $O_1{}^1O'$ a $S'X' = O_1X_1$. Tato kružnice je rovnoběžným průmětem kružnice l .

Hledaným geometrickým místem je jistá křivka v rovině procházející středem válce a rovnoběžná s rovinami obou podstav. Budeme opět sestrojovat body pravoúhlého průmětu hledaného geometrického místa do roviny kolmo k ose válcové plochy. Předpokládejme, že průmět počátků pohybů bodu P a Q je bod A_1 . Pokud budeme hovořit o úhlech, půjde vesměs o úhly orientované. Sestrojíme $\widehat{A_1O_1Q_1} = 2$, $\widehat{A_1O_1P_1} = 2\varphi$,

a pak určíme střed X_1 úsečky P_1Q_1 . Tento bod náleží průmětu hledaného geometrického místa. Z konstrukce plyne, že pro $\varphi = 180^\circ$ obsahuje křivka bod O_1 , pro $\varphi = 120^\circ$ a pro $\varphi = 240^\circ$ dojdeme k témuž bodu D_1 , který je dvojným bodem křivky.



Obr. 5

Jestliže zavedeme soustavu pravoúhlých souřadnic tak, aby bod O_1 byl počátek, polopřímka O_1A_1 kladnou poloosou x a zvolíme-li $O_1A_1 = 1$, mají body P_1 a Q_1 souřadnice $P_1 [\cos \varphi; \sin \varphi]$, $Q_1 [\cos 2\varphi; \sin 2\varphi]$ a bod $X_1 [x; y]$, kde

$$x = \frac{\cos \varphi + \cos 2\varphi}{2} \quad y = \frac{\sin \varphi + \sin 2\varphi}{2} \quad (1)$$

Rovnice (1) vyjadřují hledanou křivku pomocí parametru φ . Pokusíme se tento parametr vyloučit.

Umocníme-li obě strany rovnic (1) dvěma a sečteme-li jejich levé strany a jejich pravé strany, dostaneme po jednoduché úpravě

$$x^2 + y^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{2}, \quad \text{tj. } x^2 + y^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (2)$$

Poněvadž je

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 2(x^2 + y^2) - 1,$$

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= 2 \cos^2 \varphi - 1 = 2 \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right)^2 - 1 = \\ &= 8(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 + y^2) + 1, \end{aligned}$$

dostaneme po dosazení těchto výrazů do první rovnice z (1) a po jednoduché úpravě

$$x = 4(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2)$$

Posuneme-li počátek soustavy souřadnic do bodu $D_1 [-\frac{1}{2}; 0]$, což znamená transformaci souřadnic podle rovnic

$$x = X - \frac{1}{2}, \quad y = Y$$

dostaneme po úpravě rovnici

$$4(X^2 - X + Y^2)^2 = X^2 + Y^2 \quad (3)$$

Tuto rovnici vyjádříme opět v polárních souřadnicích.

Označíme-li vzdálenost $D_1 X_1 = \varrho$ a úhel $\widehat{O_1 D_1 X_1} = \omega^1$, je

$$\varrho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos \omega = \frac{X}{\varrho}$$

pak rovnice (3) po odmocnění dvěma přejde ve tvar

$$\varrho = \cos \omega \pm \frac{1}{2} \quad (4)$$

Kdybychom označili $2r$ poloměr kružnice k_1 , je

$$\varrho = 2r \cos \omega \pm r \quad (4')$$

Odtud plyne následující konstrukce naší křivky:

Kolem středu O_1 kružnice k_1 opíšeme pomocnou kružnici h o polovičním poloměru. Dvojným bodem D_1 , který leží na této kružnici, vedeme libovolnou přímku q a určíme její průsečík H s kružnicí h ; od bodu H naneseme v obou směrech na přímku q poloměr r kružnice h . Tím dostaneme body naší křivky. [$D_1 H = 2r \cos \omega$, $H \bar{X}_1 = H^1 \bar{X}_1 = r$, takže $D_1 \bar{X}_1 = 2r \cos \omega - r$, $D_1^1 \bar{X}_1 = 2r \cos \omega + r$]. To je výtvarný zákon křivky, která se nazývá *Pascalova závitnice*.

(Dokončení)

¹⁾ V obr. 5 je konstrukce provedena pro bod $\bar{X}_1$ a $^1\bar{X}_1$.



Jarmila Dlouhá, KU, Praha:

Nízké teploty

I. Úvod

Kdybychom si položili otázku, kam až lze postupovat po Celsiově stupnici teplot na obě strany od $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, zjistili bychom, že zatímco „na-pravo“ nelze dohlédnout hranici (např. již dnes je možno v laboratorních podmínkách dosáhnout při zvláštním způsobem stlačených výbojích teplot do $10^6\text{ }^{\circ}\text{C}$ a při atomovém výbuchu dosahuje teplota na krátkou dobu dokonce desítek miliónů stupňů), je „nalevo“ situace naprosto odlišná. Teplotu žádného tělesa není totiž možno snížit pod minus $273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tato hranice se nazývá **absolutní nulou** a tvoří počátek absolutní, čili Kelvinovy stupnice teplot. Podle jedné z hlavních fyzikálních vět je absolutní nula nedosažitelná. Přesto se, zvláště v posledních letech, vynakládají značné prostředky a vyvíjejí velká úsilí k dosažení teplot co nejbližších absolutní nule. Je tedy nasnadě otázka, jaký význam může mít takové počínání.

V technickém světě se teploty blízké absolutní nule staly velmi populární např. v souvislosti s raketovými palivy. Jednou z vhodných látek pro pohon raket je totiž vodík a ten se při teplotě nižší než $4\text{ }^{\circ}\text{K}$ rozpadá z molekulárního na atomární, který je jako raketové palivo mnohem účinnější než vodík molekulární. Ovšem v raketách není zvláštním problémem docílení teplot blízkých absolutní nule, neboť ve vesmíru v dostatečné vzdálenosti od všech těles existuje teplota blízká absolutní nule. Avšak v laboratorních podmínkách si dosažení takových teplot vyžaduje složité a nákladné aparatury. Stojí to skutečně za to?

Ještě koncem minulého století i fyzikům připadalo, že práce směřující k dosažení co nejnižších teplot nemohou vést k podstatné změně představ o vlastnostech hmoty a pro experimentální i teoretické obtíže byla tato oblast fyziky dlouho zanedbávána.

II. Energie v klasické a kvantové fyzice

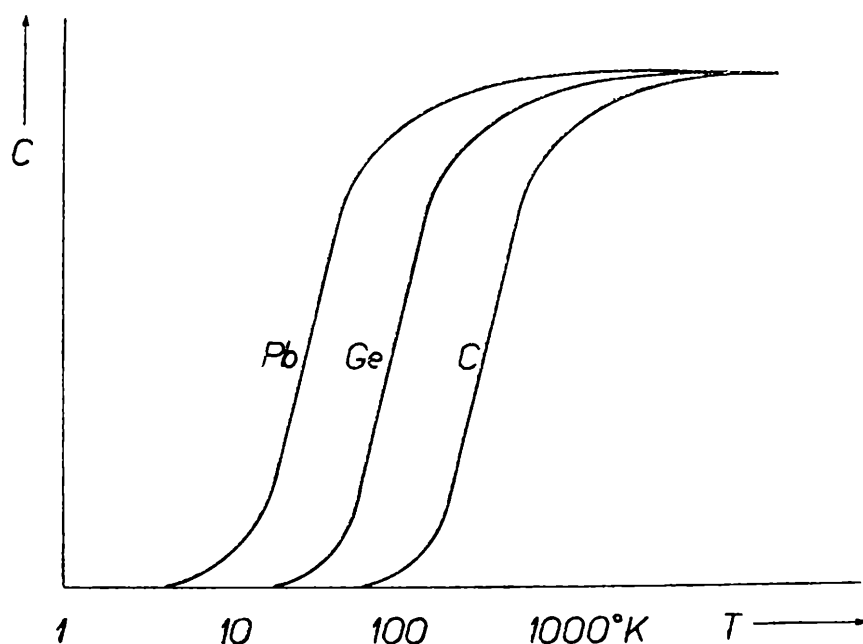
Fyzikální představy v té době byly založeny na učení klasické fyziky. Je známo, že teplota tělesa úzce souvisí s jeho tepelnou energií, tj. s energií chaotického pohybu částic atomů, molekul, z nichž je uvažované

těleso složeno. Klasická fyzika definuje teplotu tělesa jako střední kinetickou energii připadající na jednu částici tohoto tělesa a přiřazuje takové soustavě energii E danou vztahem

$$E = f \cdot \frac{k T}{2}, \quad (1)$$

kde k je konstanta zvaná Boltzmannova, stejná pro všechny látky, T je absolutní teplota uvažované soustavy částic a f je počet stupňů volnosti soustavy, tj. počet údajů, které jsou nutné k úplnému popisu poloh všech jejích částic.

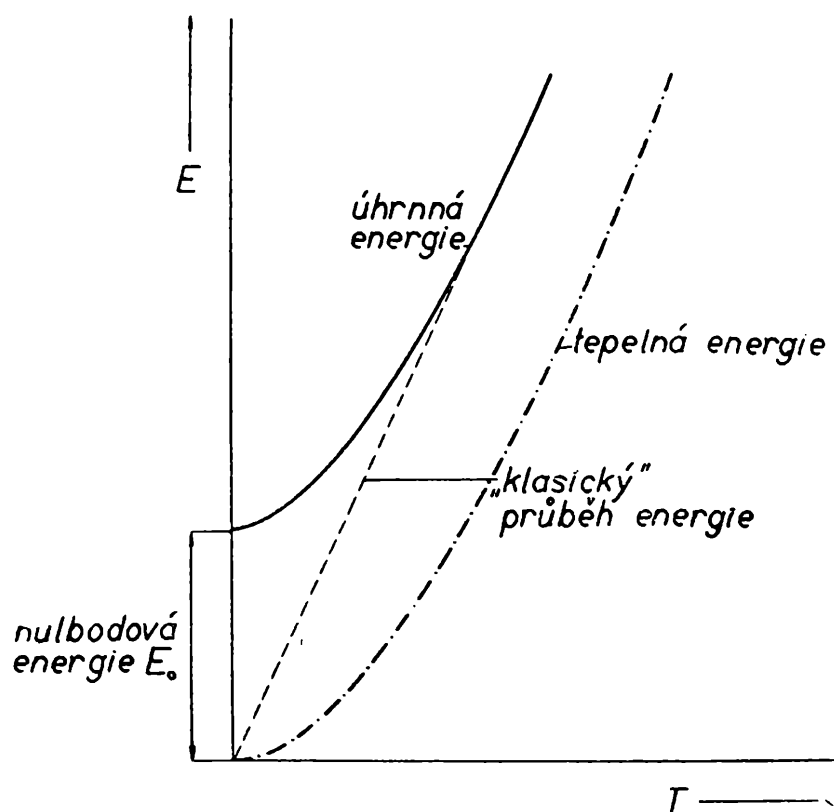
Podle vztahu (1) mohlo sice vést snižování teploty k postupnému zmenšování tepelné energie, ale nikoli k principiálně novým objevům.



Obr. 1. Závislost specifických tepel c pevných látek na teplotě T (teplota je nanášena v logaritmickém měřítku).

Začátkem 20. století se vlivem objevení kvantové teorie tento pohled radikálně změnil. Podle kvantové teorie není možno měnit energii nějakého tělesa spojitě, nýbrž pouze po určitých porcích, kvantech. Dělení na kvanta je vlastní všem druhům energie, tedy i energii tepelné. Kvantový charakter této energie se projevuje hlavně při nízkých teplotách. Při vyšších teplotách je tepelná energie připadající na stupeň volnosti podstatně větší než jednotlivá kvanta a kvantový charakter je téměř nepozorovatelný. Tepelná energie se rozdělí na všechny stupně volnosti a změna teploty je pak provázána jen nepatrnou změnou počtu kvant. V této oblasti vystihuje vztah (1) správně poměry. Jakmile však se snižováním teploty se stane tepelná energie srovnatelná s velikostí kvant pohybové energie, nemůžeme již tohoto vztahu užít. Názorně je to vidět na teplotní závislosti specifických tepel c , která je znázorněna na obr. 1. Protože specifické teplo je teplo potřebné ke zvýšení teploty

jednoho kilogramu dané látky o jeden stupeň (deg), měla by být podle vztahu (1) specifická tepla všech látek nezávislá na teplotě. Z obr. 1 je však zřejmé, že takový průběh vykazují specifická tepla jen při vysokých teplotách, kdežto při teplotách nízkých křivky se snižováním teploty prudce klesají. Dále se rozбором teplotní závislosti specifických tepel ukázalo, že tělesu není možno odebrat veškerou jeho energii. I při teplotě velmi blízké k absolutní nule má každé těleso určité množství energie E_0 , které nazýváme *nulbodo v á e n e r g i e* (obr. 2). Tato energie se projevuje např. v rozdílech teplot bodu tání a bodu varu různých izotopů látek s nízkými hodnotami těchto veličin, dále při ohybu rentgenových paprsků, ve spektrech dvouatomových molekul a jinde. Z obr. 2 je vidět, že při vysokých teplotách, kdy je hodnota tepelné energie podstatně větší než E_0 , blíží se celková energie soustavy klasické hodnotě, kdežto při nižších teplotách je úhrnná energie podstatně vyšší, než by odpovídalo výrazu (1).



Obr. 2. Závislost energie E pevné látky na teplotě. (Přerušovaná čára ukazuje tuto závislost podle představ klasické fyziky.)

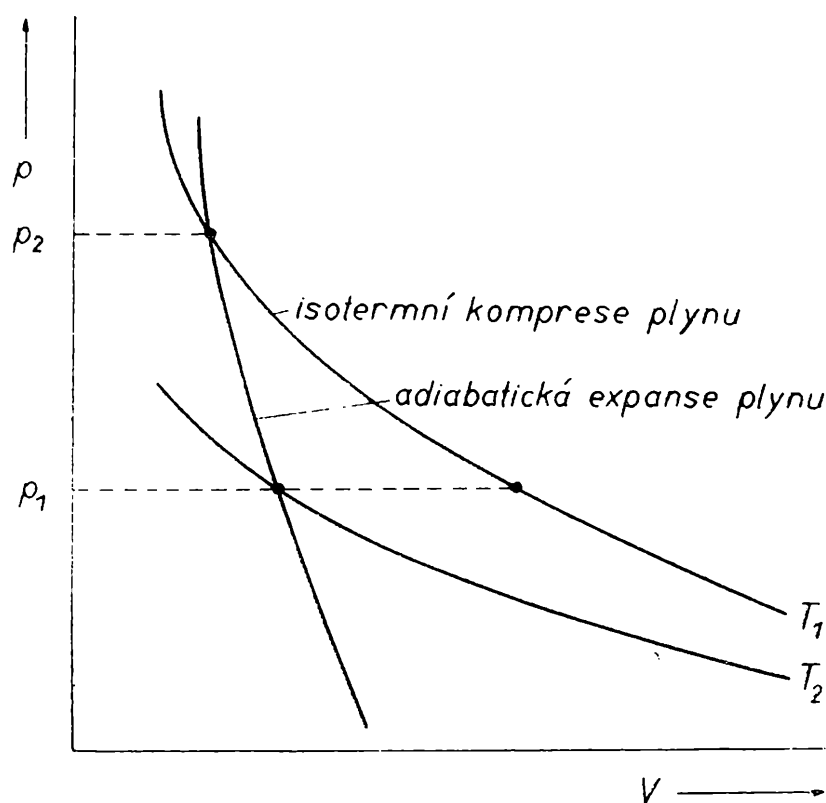
III. Snižování teploty

Chceme-li zvýšit teplotu tělesa, musíme mu dodat energii, která potom sama přechází v energii tepelného pohybu. Jak je však možno snížit teplotu tělesa, nemáme-li k dispozici jiné chladnější těleso? Ukazuje se, že není možno k ochlazení užít činnosti přesně opačné činnosti tepelného motoru, tj. není možno sestavit takový stroj, který by nedělal nic jiného, než odebíral energii určitému tělesu (a tím snižoval jeho teplotu) a měnil

ji všechnu v práci. Část odebrané energie musí přecházet na nějaké další těleso a ohřívat je. Proto jsou chladicí zařízení upravena vždy tak, že se část odebrané energie předává obklopujícím tělesům.

Teplota každého tělesa souvisí nejen s jeho složením, ale i s vnějšími podmínkami, v nichž se těleso nachází (s vnějším tlakem, vnějšími poli apod.). A právě tato souvislost teploty tělesa s vnějšími parametry tvoří podstatu ochlazování; změnou těchto parametrů podle určitého cyklu se snižuje teplota chlazeného tělesa. Na tomto principu pracují jak některé obyčejné ledničky, tak i většina zkapalňovačů plynů a další chladicí zařízení. Při tom je nutno vybrat pracovní látku tak, aby bylo možno vhodně měnit její teplotu pomocí vnějších parametrů.

V posledních třiceti letech se technika dosahování nízkých teplot značně zdokonalila.



Obr. 3. Postup chlazení pomocí izotermní komprese (T_1) a po ní následující adiabatické expanse (T_2) plynu.

IV Metody k dosažení nízkých teplot

a) **Komprese a expanse plynů.** Při pokojových nebo nepříliš nízkých teplotách jsou vhodnou pracovní látkou pro chlazení plyny. Pomocí nich lze snížit teplotu až na jejich teplotu zkapalnění (což znamená při použití vzduchu až na 80 °K, vodíku na 20 °K a helia na 4 °K).

Představu o jednom z užívaných postupů ochlazování si můžeme učinit z obr. 3, kde je znázorněna závislost tlaku p plynu na jeho

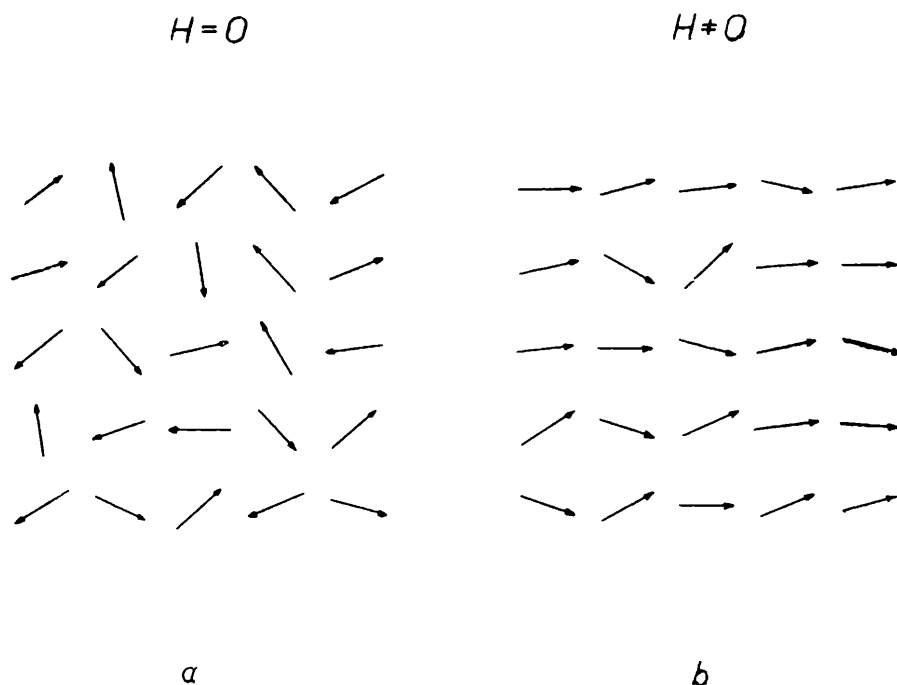
objemu V jednak při ději izotermním (tj. probíhajícím při konstantní teplotě), jednak při ději adiabatickém (tj. ději, kdy nedochází k výměně tepla mezi plynem a tělesy jej obklopujícími). Máme-li plyn teploty T_1 při tlaku p_1 a provedeme-li jeho izotermní kompresi na tlak p_2 (stálosti teploty dosahujeme zpravidla tím, že nádobu se stlačovaným plynem obklopíme plynem o původním tlaku) a po něm následující adiabatickou expanzi (tj. rozepnutí plynu při jeho tepelné izolaci od okolního prostředí) na původní tlak p_1 , dojde k ochlazení plynu na teplotu T_2 . Několikerým opakováním uvedeného cyklu dosáhneme postupného snižování teploty plynu; obvykle postupujeme až do jeho zkapalnění.

Protože ze všech plynů má nejnižší teplotu zkapalnění helium, je zřejmé, že jeho užitím jsou vyčerpány možnosti chlazení využívající závislosti teploty plynu na jeho tlaku a objemu. Ještě o trochu lze snížit teplotu intenzivním odpumpováváním par nad kapalným heliem, kdy se jeho teplota snižuje na základě odběru tepla na vypařování. Tímto způsobem lze dosáhnout teploty $0,72^\circ\text{K}$ u normálního helia a teploty $0,2^\circ\text{K}$ užitím velmi vzácného izotopu helia ^3H . Nižších teplot již snižováním tlaku nad kapalným heliem se docílit nedá, neboť by to vyžadovalo užití extrémně nízkých tlaků. Uvedených teplot se dosahuje při tlaku $3 \cdot 10^{-3}$ torru a dosažení teploty $0,01^\circ\text{K}$ u ^4H by pak vyžadovalo užití tlaku 10^{-31} torru, což odpovídá hustotě jednoho heliového atomu na 1 km^3 .

Helium kapalní při normálním atmosférickém tlaku při teplotě $4,2^\circ\text{K}$. Tehdy již tvoří 80 % veškeré jeho energie nulbodová energie, což má za následek abnormálně nízkou hodnotu vypařovacího tepla. Helium pak je velmi zajímavou kapalinou, jejíž nejpozoruhodnější vlastnosti se začnou projevovat při teplotách nižších než $2,16^\circ\text{K}$. Helium při těchto teplotách teče např. téměř bez tření, mohou se v něm šířit kmity úplně nového typu a projevovat další efekty. Tento stav helia se nazývá *supratekutostí*. Dále některé kovy zchlazené na teplotu několika stupňů Kelvina jeví jiný zajímavý efekt; elektrony se v nich pohybují téměř bez tření, takže elektrický odpor takových kovů je prakticky nulový. Tento jev se nazývá *supravodivostí*. Při supratekutosti a supravodivosti se projevují kvantové vlastnosti makroskopicky, zatímco u všech jiných pokusů se tyto vlastnosti projevují jen mikroskopicky. Proto si oba tyto jevy zaslouží větší pozornosti, než jakou je jim možno věnovat zde. Bude o nich zvláštní článek v některém z příštích čísel našeho časopisu.

b) **A t o m á r n í m a g n e t i s m u s.** V minulém odstavci jsme ukázali, že při vhodném experimentálním uspořádání lze snížit teplotu až na $0,2^\circ\text{K}$. Představuje již tato teplota nejzazší mez přiblížení k absolutní nule? Nikoliv. Lze jít ještě mnohem dále, je však nutno najít novou pracovní látku, jejíž teplota by vhodně souvisela s vnějšími

parametry. Látkou hledaných vlastností jsou p a r a m a g n e t i c k é soli. Jejich magnetické vlastnosti jsou vyvolány tím, že v nich existují atomy, které představují jakési elementární magnety působící na sebe navzájem poměrně slabými silami. Tyto magnety jsou obvykle za neexistence vnějšího magnetického pole zcela nahodile prostorově orientovány (obr. 4a). Jsou-li vloženy do vnějšího magnetického pole, stáčí se alespoň částečně do jeho směru (obr. 4b). Postup tohoto způsobu chlazení je tento: Paramagnetická sůl se pomocí kapalného helia ochladí na teplotu 1 °K a izotermně zmagnetuje. Potom se provede tepelná izolace soli od okolí a pole se vypne, čímž dochází k odmagnetování soli a k jejímu ochlazení (obr. 5). Účinnost uvedené metody roste s klesající teplotou, neboť stupeň orientace magnetů v poli roste s růstem jeho intenzity a s poklesem teploty. Stačí proto při nižších teplotách k ochlazování slabší magnetická pole.



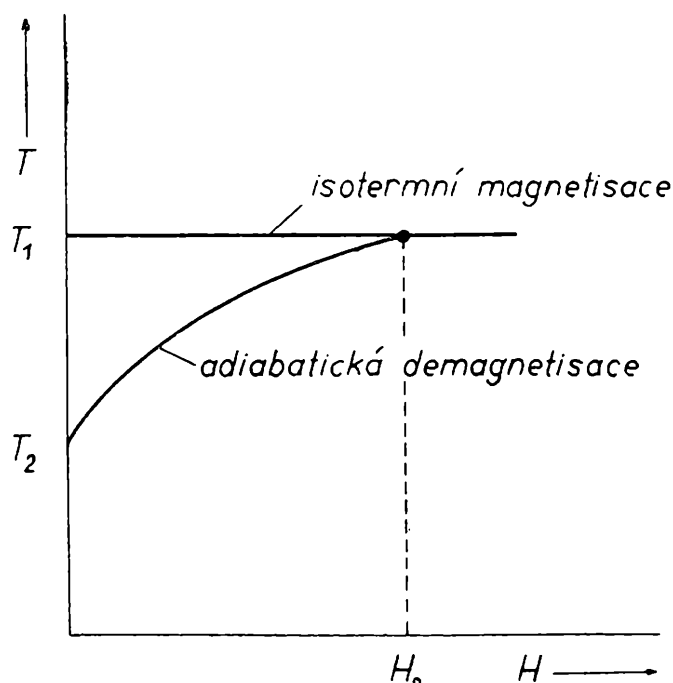
Obr. 4. Uspořádání elementárních magnetů v paramagnetické látce a) za nepřítomnosti vnějšího magnetického pole; b) ve vnějším magnetickém poli.

Popsané metody lze užít až do teplot, kdy se začne projevovat silové působení mezi jednotlivými elementárními magnety, které vede k jejich orientaci i za neexistence vnějšího magnetického pole. Působení mezi magnety závisí na jejich vzdálenosti, a proto lze vhodnou volbou paramagnetické soli, v níž by byly elementární magnety velmi vzdáleny, dosáhnout teplot až 0,001 °K¹⁾.

c) J a d e r n ý m a g n e t i s m u s. Ani uvedená hodnota teploty není posledním slovem fyziky. Využitím jaderného magnetismu lze

¹⁾ Přitom nutno mít na paměti, že úspěšnost chladicích metod určuje podíl mezních teplot metody a nikoliv jejich rozdíl!

jít ještě dále. Řada atomových jader není totiž prostorově symetrická. Asymetrická jádra se chovají jako malé magnety, a to podobně jako tomu bylo u „atomových magnetů“, tj. stáčí se v silném magnetickém poli při dostatečně nízkých teplotách do směru tohoto pole. Avšak jejich schopnost takového stáčení je zhruba tisíckrát menší než schopnost stáčení „atomových magnetů“, takže k jejich orientaci je třeba užít tisíckrát silnějších magnetických polí, a to lze velmi těžko realizovat. Ale u řady atomů vytváří v okolí jader magnetické pole vhodné intenzity jejich obalové elektrony. Takovými atomy jsou např. atomy železa, kobaltu a jiné. Ve vlastním poli těchto atomů orientují se jádra již při setinách stupně Kelvina. V důsledku toho stačí po ochlazení látky na tuto teplotu k orientaci jader otočit jedním směrem magnetická pole samotných atomů a k tomu postačují poměrně slabá vnější magnetická pole.



Obr. 5. Postup chlazení pomocí izotermní magnetizace (T_1) a po ní následující adiabatické demagnetizace (T_2) paramagnetické soli.

Snižování teploty využitím jaderného magnetismu se provádí na tomtéž základě jako snižování teploty paramagnetických solí ve vnějším magnetickém poli. Tímto způsobem se dosahuje teplot 10^{-4} až 10^{-5} °K, tj. teplot, při nichž se již začíná projevovat vzájemné silové působení mezi jednotlivými „jadernými magnety“. Principiálně lze při volbě vhodných látek jít touto metodou do teplot 10^{-6} až 10^{-7} °K, ale tak nízkých teplot nebylo ještě experimentálně dosaženo.

Docílené přiblížení k absolutní nule nemá však význam rekordu, nýbrž ukazuje řešení některých fyzikálních problémů. Pokusy provedené s orientovanými jádry odhalily existenci několika zajímavých jevů. Ukázaly např., že jaderné reakce mezi jádry a neutrony závisí na jejich

vzájemné orientaci a u některých nekulových radioaktivních jader byly pozorovány zvláštnosti rozdělení γ -záření.

V Závěr

Popsané metody dosažení extrémně nízkých teplot se zdají velmi jednoduché. Ve skutečnosti jsou však velmi náročné na přesnost experimentálního zařízení. Proto např. u metody jaderného chlazení uplynulo od návrhu k realizaci plných dvacet let. Vzhledem k úžasně nízkým hodnotám specifických tepel v této oblasti teplot stačí nepatrný přívod tepla k podstatnému zvýšení teploty látky. Proto práce při těchto teplotách vyžadují precisní tepelnou izolaci, jakož i vyloučení všeho mechanického chvění, kdy by se v důsledku tření mohlo vyvíjet nežádoucí teplo. Další problémy vznikají s tepelným stykem mezi pracovní látkou a látkou, jejíž vlastnosti při docílených teplotách chceme měřit (pokud tyto látky nejsou totožné), neboť tepelná vodivost v této oblasti je mizivě malá. A konečně velmi přesné měření tak nízkých teplot je značně složité.

Viděli jsme, že snižováním teploty se projevují stále slabší silová působení: při několika stupních Kelvina působení mezi kmity mříže a elektrony, při setinách stupně atomární magnetismus a při stotisícinách stupně jaderný magnetismus. A podaří-li se další snížení teploty, můžeme plným právem očekávat odhalení nových jevů, které rozšíří naše fyzikální znalosti. A v tom je cena největšího možného přiblížení k absolutní nule.

Literatura.

Buckel W., Naturwiss. 45 (1958), 431.

Eder F. X., Einführung in die Physik der tiefen Temperaturen, VED, Deutsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1955.

Simon F. E. et al., Low Temperature Physics, Pergamon Press, London 1952.

Zavarickij N. V. Priroda 1957, no. 7, str. 3.

Oldřich Lepil, Olomouc:

Lissajousovy obrazce

Zajímavý případ periodického děje nastává tehdy, když těleso koná pohyb, vzniklý skládáním dvou jednoduchých kmitavých pohybů, které probíhají ve směrech navzájem kolmých. Okamžitou výchylku jedné složky pohybu můžeme vyjádřit rovnicí

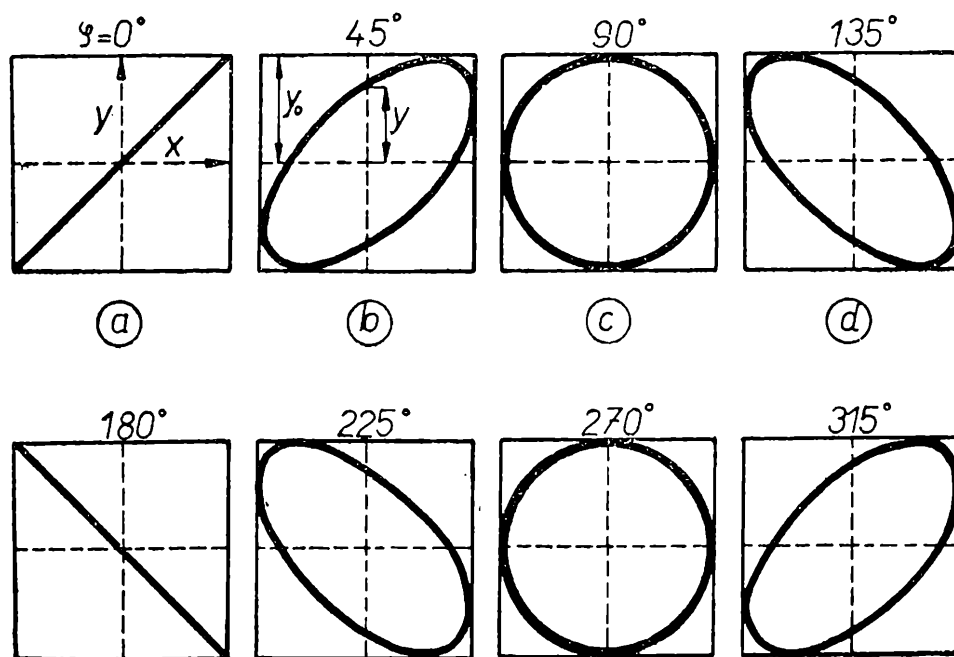
$$x = x_0 \sin \omega_1 t \quad (1)$$

a okamžitou výchylku druhé složky, kolmé ke složce x , vyjádříme rovnicí

$$x = y_0 \sin(\omega_2 t + \varphi), \quad (2)$$

kde x_0 a y_0 jsou amplitudy výchylek, ω_1 a ω_2 jsou úhlové kmitočty¹⁾ složek a φ je počáteční fáze složky y vzhledem ke složce x . Složením těchto dvou pohybů vzniká pohyb výsledný, který probíhá po křivce nazývané *Lissajousův obrazec* (vyslov Lisažu).

Tvar Lissajousova obrazce závisí především na úhlových kmitočtech ω_1 a ω_2 . Není-li poměr ω_1/ω_2 racionální číslo, nastane nikdy týž stav obou pohybů a výsledné kmitání nemá periodický ráz. Lissajousův obrazec je potom neuzavřená křivka (např. obr. 4).



Obr. 1. Lissajousův obrazec při poměru kmitočtů 1 : 1.

Jestliže lze vyjádřit poměr ω_1/ω_2 celým číslem, setkají se složky po určité době ve stejné fázi. Po znamená, že se těleso vrací do původní polohy a pohyb je periodický. Lissajousův obrazec má v tomto případě tvar uzavřené křivky. Pověsimneme si podrobněji případu, pro který platí

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

tzn., že kmitočty obou složek f_1 a f_2 jsou v poměru 1 : 1.

Abychom dostali rovnici dráhy výsledného pohybu, vyloučíme z rovnic (1) a (2) čas. Rovnici (1) můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{x}{x_0} = \sin \omega t \quad (3)$$

a také

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} = \cos \omega t. \quad (3')$$

¹⁾ Veličinu $\omega = 2\pi f$ nazýváme úhlový kmitočet nebo kruhová frekvence.

Rovnici (2) upravíme do tvaru

$$\frac{y}{y_0} = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \quad (4)$$

Dosazením rovnic (3) a (3') do rovnice (4) dostaneme

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} \cos \varphi + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \sin \varphi$$

a po úpravě

$$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \sin \varphi ;$$

povýšíme na druhou

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \frac{x}{x_0} \frac{y}{y_0} \cos \varphi + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \sin^2 \varphi$$

a opět upravíme

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \frac{x}{x_0} \frac{y}{y_0} \cos \varphi + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \sin^2 \varphi .$$

Poněvadž $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, bude

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \frac{x}{x_0} \frac{y}{y_0} \cos \varphi + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \sin^2 \varphi \quad (5)$$

Z rovnice (5) vyplývá, že v uvažovaném případě skládání kolmých kmitů stejného kmitočtu je Lissajousův obrazec tvořen kuželosečkou ve středové poloze. Její tvar posoudíme pro případ, že jsou amplitudy obou složek stejné, čili $x_0 = y_0$. Rovnice (5) potom nabude tvaru

$$y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2 = x_0^2 \sin^2 \varphi \quad (6)$$

Vidíme, že při stálé amplitudě ($x_0 = \text{konst.}$) závisí tvar Lissajousova obrazce na úhlu fázového posunutí φ obou napětí.

Snadno zjistíme tvar křivky při různých fázových posunutích:

a) Je-li $\varphi = 0^\circ$, bude $\cos \varphi = 1$ a $\sin \varphi = 0$, takže rovnice (6) bude

$$(y - x)^2 = 0 ,$$

čili

$$y = x .$$

Výsledný pohyb je opět jednoduchý pohyb kmitavý v přímce, svírající s osou x úhel 45° (obr. 1a).

b) Je-li $\varphi = 45^\circ$, je $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a rovnice (6) bude

$$y^2 - xy \sqrt{2} + x^2 = \frac{x_0^2}{2} .$$

Je to rovnice elipsy, jejíž osa svírá v tomto případě (když $x_0 = y_0$) s osou x úhel 45° (obr. 1b).

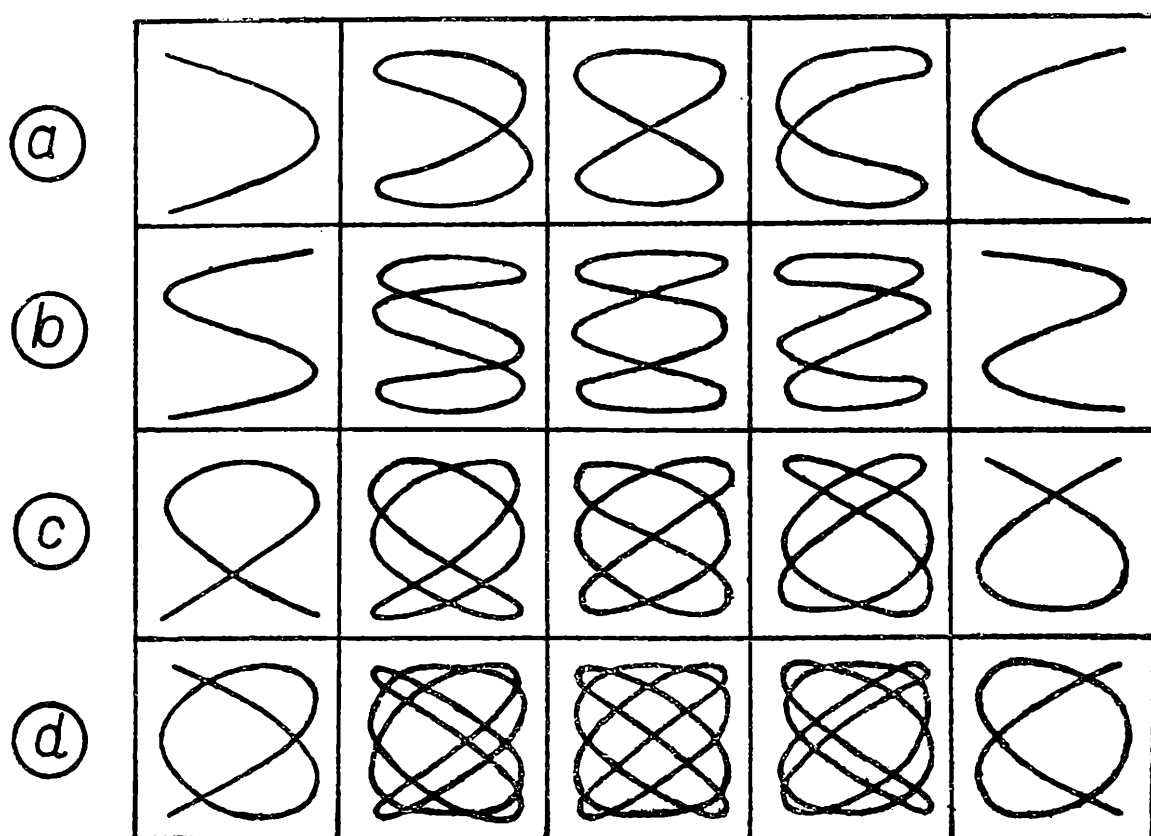
c) Je-li $\varphi = 90^\circ$, je $\sin \varphi = 0$ a $\cos \varphi = 1$ a po dosazení do rovnice (6) bude

$$y^2 + x^2 = x_0^2,$$

což je rovnice kružnice o poloměru x_0 (obr. 1c).

Podobnou úvahu dostaneme rovnice Lissajousova obrazce pro další úhly φ (např. 135° , 180° , 225° , ...), avšak opět dostaneme pro každý případ přímku, kružnici nebo obecně elipsu, jejíž poloha závisí na velikosti úhlu φ (obr. 1). V ostatních případech, kdy je poměr ω_1/ω_2 celistvé číslo, avšak neplatí, že $\omega_1 = \omega_2$, mají Lissajousovy obrazce různý tvar, závislý jak na poměru kmitočtů obou složek, tak na fázovém úhlu φ . Na obr. 2 jsou naznačeny některé jednoduché případy pro poměry kmitočtů:

a) 2 : 1; b) 3 : 1; c) 3 : 2; d) 4 : 3 (pro $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$).



Obr. 2. Lissajousovy obrazce při různých poměrech kmitočtů.

Pro pozorování Lissajousových obrazců byla sestrojena celá řada pokusných zařízení. Některá jsou velmi jednoduchá a můžeme si je snadno sestavit. Popíšeme tzv. *Blackburnovo kyvadlo* (čti Blekbern) a způsob, kterým si pomocí tohoto kyvadla pořídíme zajímavý fotografický záznam pohybu po křivce Lissajousova obrazce.

Blackburnovo kyvadlo je v podstatě dvojité matematické kyvadlo, jehož části mohou současně kývat v rovinách na sebe kolmých (obr. 3).

Hmotu kyvadla obvykle tvoří olověná miska s pískem, který vytéká otvorem na dně misky a zaznamenává tak dráhu kyvadla. Pro naše účely nahradíme misku s pískem světelným zdrojem a dráhu kyvadla budeme registrovat fotograficky.

Závěs kyvadla si zhotovíme ze zvonkového drátu, který nám bude současně sloužit jako přívod elektrického proudu ke zdroji světla. Provedení kyvadla je patrné z obr. 3. Kyvadlo je zavěšeno na dvou háčcích (A , B) vzdálených od sebe 1 m. Tím vznikne kyvadlo s dvojitým závěsem (l_1), jehož délku volíme asi 2 m. Toto kyvadlo kývá v rovině kolmé k nákresně. Kratší kyvadlo (l_2) vytvoříme spojením obou závěsů v bodě K drátěným kroužkem, kterým lze pohybovat nahoru nebo dolů a měnit tak délku kyvadla l_2 . Toto kyvadlo koná kmity v rovině nákresny.

Kvalita fotografií hodně závisí na provedení zdroje světla. Vytvoříme jej z trubičky, do níž zamontujeme objímku se žárovkou (hodí se autožárovka 4 W/6 V) a zatížení (asi 0,1 kp). Čím bude zdroj světla těžší, tím menší bude útlum pohybu kyvadla. Spodní otvor zakryjeme černým papírem, ve kterém vystříhneme otvor průměru asi 3 mm. Otvor překryjeme kouskem pauzovacího papíru, aby byl rovnoměrně osvětlen rozptýleným světlem.

Pro fotografický záznam Lissajousových obrazců se nejlépe hodí fotografický přístroj na desky, ale pokus se nám podaří i s dvouokou zrcadlovkou na film 6×6 cm. Přístroj položíme na podlahu pod kyvadlo tak, aby byl objektiv ve vzdálenosti 60 až 120 cm od světelného otvoru kyvadla.

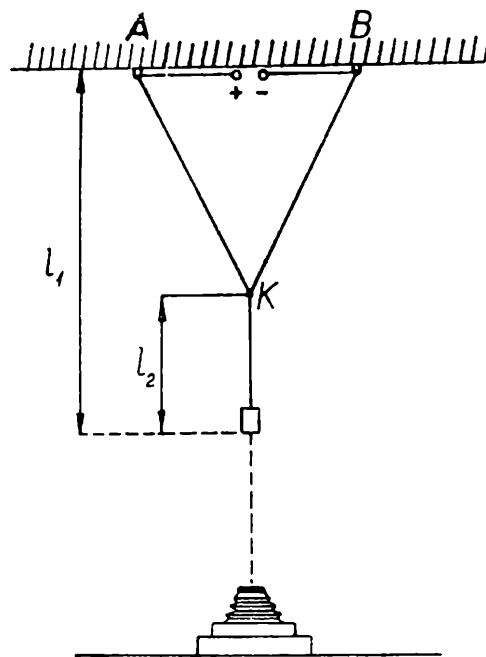
Než přistoupíme k fotografování, musíme samozřejmě nejdříve nastavit délky kyvadel a upravit poměr dob kmitů. Z rovnice matematického kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

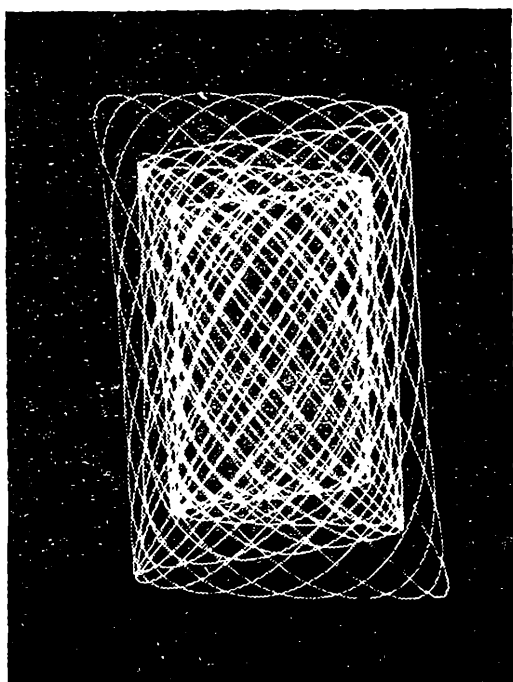
dostaneme pro poměr dob kmitů T_1/T_2 po úpravě

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$$

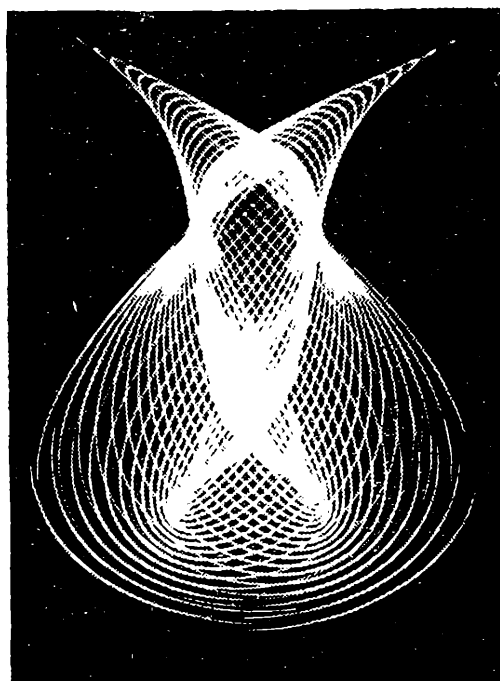
Poněvadž však naše kyvadlo není přesně kyvadlem matematickým,



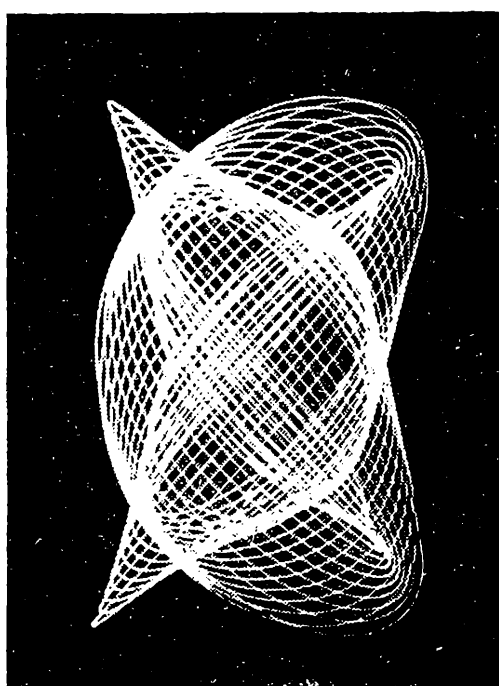
Obr. 3. Blackburnovo kyvadlo.



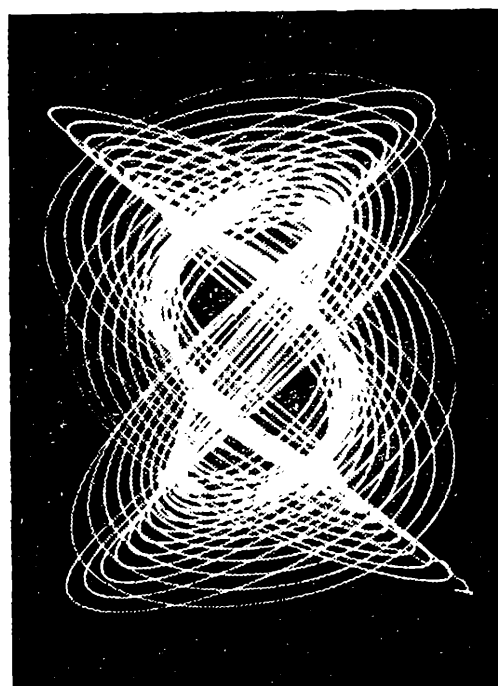
Obr. 4. Poměr kmitočtů 1 : 1
(rozladěno).



Obr. 5. Poměr kmitočtů 3 : 2.



Obr. 6. Poměr kmitočtů 4 : 3.



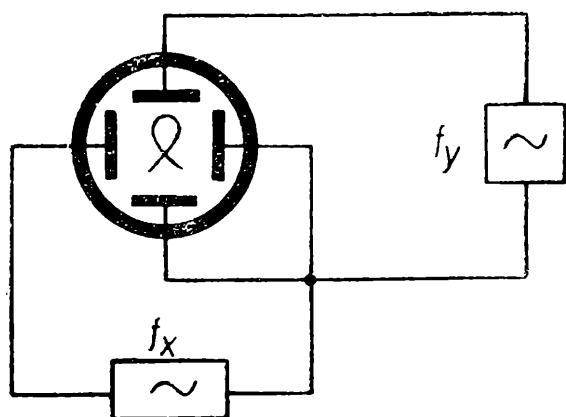
Obr. 7. Poměr kmitočtů 5 : 3
(rozladěno).

zjistíme si nejprve pokusně dobu kmitu T_1 , pro zvolený poměr dob kmitu najdeme T_2 a délku kyvadla l_2 vypočítáme ze vztahu

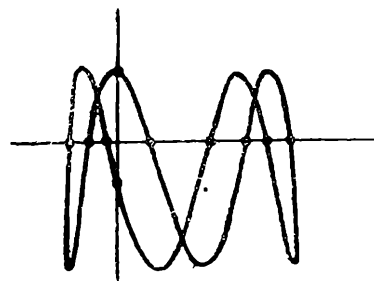
$$l_2 = \frac{g T_2^2}{4 \pi^2}$$

Jelikož se při posouvání kroužku K nepatrně mění i délka kyvadla l_1 , musíme při každém novém nastavení délky l_2 vyladit zkusmo kyvadla tak, abychom dostali Lissajousův obrazec, jehož vzhled se při pohybu nemění. Již při nepatrném rozladění se fáze obou skládaných pohybů plynule mění a kyvadlo se nevrací do výchozího bodu.

Kyvadlo uvádíme do pohybu tak, že jej vychýlíme pod úhlem 45° k rovinám kyvů obou kyvadel. Pak jej pustíme a sledujeme jeho pohyb. Přitom si všímáme hrotu Lissajousova obrazce. Jestliže se kyvadlo periodicky vrací do hrotu po téže dráze, je vyladěno. Mění-li se hrot v oblouk a kyvadlo se v oblouku dotkne nejdříve hranice maximální výchylky kyvadla l_1 , zkrátíme kyvadlo l_2 a naopak.



Obr. 8. Osciloskopický záznam Lissajousových obrazců.



Obr. 9. K určení poměru kmitočtů.

Na matnici fotografického přístroje ještě zkontrolujeme, že je obraz osvětleného otvoru zaostřen a ověříme si, že leží celý obrazec v zorném poli přístroje. Pak zhasneme v místnosti světlo a při otevřené závěrce (clona 5,6) exponujeme na citlivý film. Snímky kontrastně vyvoláme a kopírujeme na papír tvrdé gradace. Příklady získaných křivek jsou na obr. 4 až 7.

Lissajousovy obrazce se uplatnily také v technické praxi, zejména při vzájemném porovnávání dvou střídavých napětí. K tomu zpravidla používáme elektronkového osciloskopu, na jehož obrazovce můžeme sledovat časový záznam střídavého napětí, přiváděného na vychylovací destičky obrazové elektronky. Chceme-li porovnávat dvě střídavá napětí kmitočtů f_x a f_y , přivádíme jedno napětí na vodorovně vychylující destičky a druhé střídavé napětí na svisle vychylující destičky (obr. 8). Na stínítku obrazovky pak pozorujeme Lissajousovy obrazce stejného tvaru jako v předchozích případech.

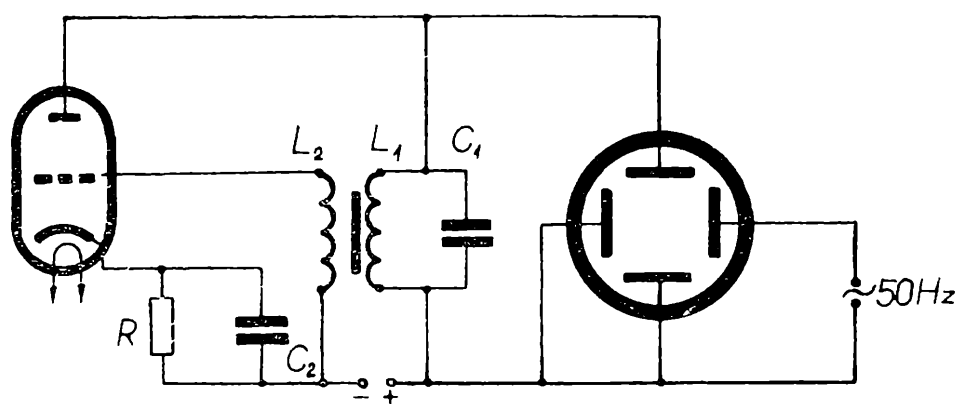
Pomocí Lissajousových obrazců v praxi nejčastěji určujeme kmitočet jednoho střídavého napětí, známe-li kmitočet druhého napětí, nebo určujeme hrubě vzájemné fázové posunutí obou napětí.

Při měření neznámého kmitočtu stačí kmitočet druhého napětí tak dlouho, až dostaneme na stínítku elipsu (resp. přímku nebo kružnici). Pak jsou oba kmitočty stejné. Přitom můžeme také určit vzájemnou fázi obou střídavých napětí. Úhel φ v rovnici (2) nám vlastně určuje fázové posunutí složky y v počátečním okamžiku, pro nějž platí, že $t = 0$ a $x = 0$. Z rovnice (2) pak plyne

$$y = y_0 \sin \varphi ,$$

kde y je pořadnice bodu, který leží na ose y nad počátkem, jak je naznačeno na obr. 1b. Fázové posunutí vypočítáme ze vztahu

$$\sin \varphi = \frac{y}{y_0}$$



Obr. 10. Zapojení pro studium Lissajousových obrazců.

Je-li poměr kmitočtů pozorovaných střídavých napětí v jiném poměru celých čísel než $1 : 1$, můžeme tento poměr rovněž určit z Lissajousova obrazce. Postupujeme při tom tak, že protněme obrazec vodorovnou přímkou (rovnoběžnou s osou x), která neprochází ani jediným místem, v němž se křivky obrazce protínají a spočítáme počet průsečíků přímky s křivkou obrazce — n_x . Podobně protněme obrazec přímkou svislou a počet průsečíků označíme — n_y (obr. 9). Poměr kmitočtů je potom

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{n_y}{n_x} .$$

Např. na obr. 9 je $n_x = 8$ a $n_y = 2$, takže kmitočty jsou v poměru $1 : 4$. Známe-li kmitočet $f_x = 40$ Hz, bude kmitočet f_y

$$f_y = \frac{n_x}{n_y} f_x = \frac{8}{2} 50 \text{ Hz} = 200 \text{ Hz}$$

Máme-li možnost použít ke svým pokusům osciloskopu (např. ve školní fyzikální laboratoři), připojíme na vodorovný vstup osciloskopu střídavé napětí z transformátoru (asi 5 až 10 V), jehož kmitočet je 50 Hz a na svislý vstup přivádíme střídavé napětí vyššího kmitočtu, např. z tóno-

vého generátoru. Nemáme-li takový zdroj střídavého napětí, můžeme si sestavit jednoduchý tónový generátor přímo ze školních pomůcek.

Schéma zapojení pro studium Lissajousových obrazců je na obr. 10. Hodnoty součástí: $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 32 \mu\text{F}$ elektrolyt., L_1 a L_2 jsou cívky z rozkladného transformátoru ke školním pokusům, které nasadíme na železné jádro a kmitočet generátoru měníme posouváním jha železného jádra. Cívka L_1 má 1200 závitů a cívka L_2 má 600 závitů. Generátor napájíme ze školního eliminátoru. Použijeme libovolné elektronky, triody nebo pentody, zapojené jako trioda.

A l o i s S k y v a, PU, Olomouc:

Užití vakua ve vědě a technice

1. Úvod

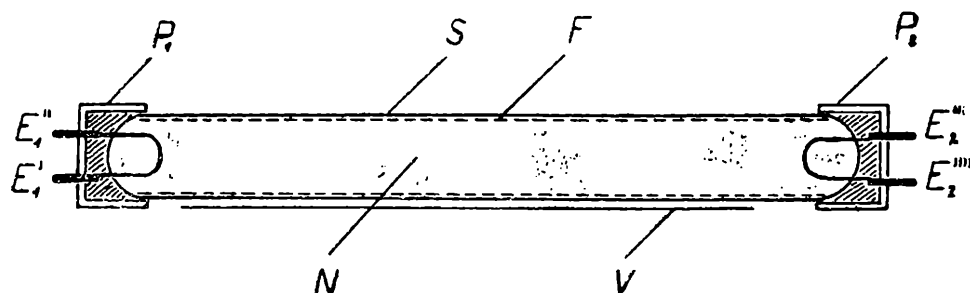
V krátkém článku není možno obsáhnout všechny možnosti užití vakua ve vědě a v technice, a nebylo by to ani žádoucí. Mnohá užití jsou si natolik podobná, že by čtenář nezískal nic nového a zajímavého. Chtěl bych proto v tomto článku ukázat jen na velkou rozmanitost v možnostech užití vakua.

2. Užití vakua v elektrotechnice

Žárovka je a jistě bude i v budoucnu nepostradatelným pomocníkem v našem denním životě. Užíváme jí v domácnostech, v kancelářích, v továrnách. Používáme jí v kapesních svítilnách i na osvětlovacích stožárech. K výrobě žárovky je třeba vakua. Dříve se baňka žárovky jen vyčerpávala na vysoké vakuum, aby nedošlo k přepálení wolframové spirály po nažhavení elektrickým proudem. V takových žárovkách však docházelo při žhavení ke značnému vypařování vlákna. To snižovalo trvanlivost žárovky a způsobovalo tmavnutí vnitřních stěn baňky, neboť na stěnách se usazoval vypařený wolfram. Proto se nyní tlak v žárovkách po vyčerpání zvyšuje pomocí inertního plynu, který s vláknem žárovky nereaguje a podstatně snižuje vypařování žhaveného vlákna. Nejčastěji se užívá k tomuto účelu dusíku nebo kryptonu. Tlak v takových žárovkách bývá zpravidla až několik torrů.

Zářivky (obr. 1), které jsou dnes už stejně rozšířeny jako žárovky, by nebylo rovněž možno vyrábět bez užití vakuové techniky. V nich se současně využívá výboje ve vhodné plynové náplni (náplň musí poskytovat při výboji záření bohaté na ultrafialové záření) a luminiscence pevných látek působením ultrafialového záření. Jako náplň se užívá například argonu tlak kolem 4 torrů) s příměsí rtuťových par.

Neonové reklamy, signální neonové lampy, doutnavkové stabilizátory napětí založené na konstantnosti katodového úbytku potenciálu doutnavého výboje, se také vyrábějí za pomoci vakua.



Obr. 1. Schéma zářivky. S - skleněná trubice; F - luminiscenční látka; N - plynová náplň; V - vodivý pásek na vnější stěně trubice k snadnějšímu zapálení výboje; P_1, P_2 - patice přitmelené k zataveným koncům trubice; E_1', E_2', E_3', E_4' - přívody elektrického proudu.

Elektronky zaujímají hned po žárovkách nejdůležitější místo v užití vakua. Nic na tom nemění ani široké využívání polovodičů v současné radiotechnice. Že je třeba v elektronce dosáhnout k zabezpečení její dokonalé činnosti vysokého vakua, o tom si nejlépe uděláme představu z tabulky 1, kde jsou uvedeny střední volné dráhy elektronů λ_e v některých plynech a parách při teplotě 0°C a tlaku těchto plynů $p = 1$ torr.

Tabulka 1. Střední volné dráhy elektronů λ_e v některých plynech a parách při teplotě 0°C a tlaku těchto plynů $p = 1$ torr

Plyn	He	Ne	Ar	H ₂	N ₂	O ₂	páry Na	páry Hg
$\lambda_e \cdot 10^6 \text{ cm}$	7,41	6,57	4,38	7,53	3,58	4,09	4,57	2,76

Srovnáme-li vzdálenosti mezi katodou a anodou v elektronkách s volnou dráhou elektronů v plynech udanou v tabulce, vidíme, že tlak plynů 1 torru by znemožňoval činnost elektronky. To však není jediný důvod, proč je třeba užít vysokého vakua. Má-li být totiž zředěný plyn izolantem, musí být jeho tlak menší než $5 \cdot 10^{-3}$ torru. Vakuum v elektronce má dále vliv na emisní schopnost katody. Napříkl. vliv kyslíku na snížení emise wolframové katody se dá pozorovat už od tlaku 10^{-5} torru kyslíku, Vakuum, kterého se užívá v elektronkách, bývá zpravidla řádově 10^{-6} až 10^{-7} torru.

Od elektronek se poněkud liší *thyatron*, neboli *trioda* plněná plynem. Thyatronu se hojně používá v generátorech pilových kmitů i v různých

relé. I při jeho výrobě se užívá vakua, neboť plynová náplň, ve které při činnosti thyatronu dochází k doutnavému výboji, musí mít přesné složení.

K elektronkám mají blízko *fotonky*, *fotonásobiče* a *televizní obrazovky*. Zvláště v televizních obrazovkách musí být vysoké vakuum, neboť je třeba v nich dosáhnout velké volné dráhy elektronů.

Impregnace různých izolačních materiálů, používaných v elektrotechnice, se provádí pomocí vakua. Prostřednictvím vakua odstraníme plyny a páry z materiálu, který chceme impregnovat, a potom zaplníme uvolněné póry speciálními látkami (bitumeny, směsemi, laky). Tak zabráňujeme možnosti vzniku vnitřní ionizace v izolačním materiálu a zvyšujeme životnost izolace, ztěžujeme proniknutí vlhkosti do izolace, zpomalujeme oxydační procesy v ní probíhající a zlepšujeme její tepelnou odolnost.

3. Užití vakua v metalurgii a potravinářství

V metalurgii se užívá vakua při *výrobě kovů* jako je titan, zirkon, tantal, niob, čisté železo atd. Prášek příslušného kovu získaný z rudy se lisuje do tyčinek (kuliček). Tyto tyčinky se pak spékají ve vakuu. Vakuum umožňuje odstranit snadno z těchto polotovarů předtím pohlcené plyny a provést kvalitní spečení při značně menším ohřevu.

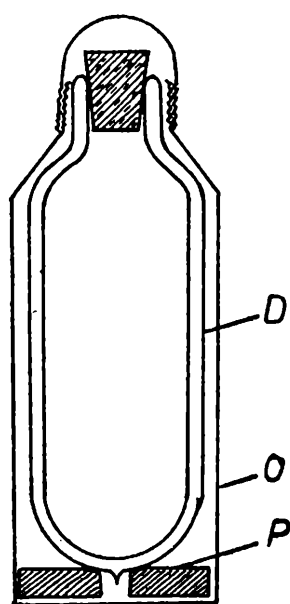
Kromě spékání ve vakuu se ve značné míře provádí též *tavení kovů* ve vakuu. Umožňuje to získání různých druhů železa s malým obsahem uhlíku, různých speciálních ocelí s malým obsahem pohlceného plynu. Vysoká teplota, nutná pro tavení kovů, se ve vakuových pecích získává převážně indukčním ohřevem. *Odlévání kovů* se provádí rovněž ve vakuu, aby byly zachovány přednosti tavby kovů ve vakuu.

V potravinářském průmyslu se hojně užívá *sušení* ve vakuu. Suší se tak maso, suchary, zelenina apod., poněvadž při sušení ve vakuu se zachovává biologická hodnota potravin i jejich tvar a vzhled. Zatím co při sušení potravin při atmosférickém tlaku se potraviny jen zahřejí, aby se z nich vypařila voda, tak při vakuovém sušení se potraviny nejdříve zmrazí. Ve vakuu, při teplotě menší než 0 °C dochází potom k přímé přeměně zmrzlé vody v páru (k sublimaci). Potraviny takto zbavené vody se pak ještě podrobí tepelnému vakuovému sušení při teplotě kolem 50 °C.

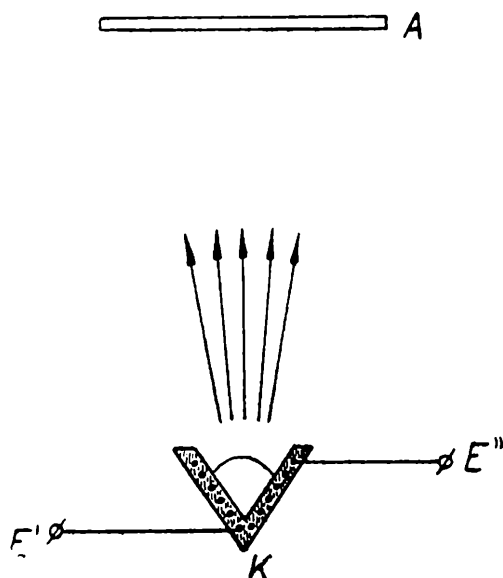
Při výrobě thermosek (Dewarových nádob), se užívá závislosti tepelné vodivosti plynu na jeho tlaku při nízkých tlacích. *Thermoska* (obr. 2) je skleněná nádoba s dvojitými stěnami, mezi nimiž je vakuum. Volná dráha molekul je značně větší než vzdálenost mezi stěnami. To způsobuje, že tepelná vodivost mezi těmito stěnami je značně menší, než když je mezi nimi vzduch při atmosférickém tlaku. Thermosky nám tak dobře slouží k delšímu uchování tepla v potravinách, nebo naopak k uchování jejich nízké teploty.

4. Užití vakua v optice

V roce 1901 profesor moskevské university P. N. L e b e d ě v objevil a změřil tlak záření. Ve vyčerpané baňce umístil torsní vlákno, na něž zavěsil lehkou, zcela začerněnou kovovou destičku, vyváženou pomocí druhé destičky, která měla obě strany lesklé. Světlo z obloukové lampy soustředil na jedno křídélko (destičku). Působením tlaku záření se závěs otočil a zkroutil torsní vlákno. Srovnáním zkroucení při osvětlení začerněné a lesklé destičky určil, že tlak na začerněnou destičku je dvakrát menší než na lesklou, což bylo v souladu s teorií. Měření bylo spojeno se značnými obtížemi. Otočení zavěšeného systému může být totiž vyvoláno řadou vedlejších příčin. K nim patří zvláště tak zvaný radiometrický tlak, vyvolaný zahříváním zbytků plynů na povrchu křídélka.



Obr. 2. Řez termoskou. *D* - skleněná nádoba s dvojitými stěnami; *O* - ochranný obal; *P* - podložka pro usazení skleněné nádoby.



Obr. 3. Nanášení tenkých kovových vrstev metodou vypařovací. *K* - kelímek, do něhož se vkládá nanášený kov; *E'*, *E''* - přívody elektrického proudu do topného vinutí kelímku; *A* - předmět, na který nanášíme kovovou vrstvu.

Při výrobě zrcadel pro optická měření, např. pro výrobu astronomických zrcadel, bývá třeba nanést tenkou, dokonalou odraznou kovovou vrstvu na sklo nebo jiný kov. Pokrývacími kovy bývají nejčastěji Al a Ag. Dosavadním nejrozšířenějším způsobem *nanášení tenkých kovových vrstev* je metoda vypařovací (obr. 3). Spočívá v tom, že kov, který chceme vypařit, zahřejeme na tak zvanou vypařovací teplotu, již rozumíme teplotu, při níž páry daného kovu mají tlak 10^{-2} torru. Udržíme-li potom v okolním prostoru vakuum 10^{-4} torru, nebo ještě nižší tlak, dochází zřejmě k intenzivnímu vypařování zahřátého kovu. Většina

kovů se taví dříve, nežli dojde k intenzivnímu vypařování. Zahřívání kovu se provádí buď pomocí přímého ohřevu průchodem elektrického proudu, za pomoci nepřímého ohřevu elektrickým proudem, za pomoci indukčního ohřevu, nebo za pomoci ohřevu elektronovým bombardováním. Horší vakuum než 10^{-4} torru se nehodí, poněvadž by to bylo na úkor kvality vrstvy. Je-li vakuum horší, je kovová vrstva bez lesku a měkká.

Vakuum má dále význam pro taková optická měření, kde je třeba *omezit rozptyl světla*. Fluktuace hustoty plynu, které způsobují tzv. *molekulární rozptyl*, lze za pomoci vakua vyloučit. Tím se zároveň omezí *kombinační rozptyl světla*, který má původ v existenci kmitavých stavů molekul. K tomuto účelu užil vakua např. D. S. Rožďestvenskij při zkoumání anomální disperze par kovu.

V *elektronovém mikroskopu* se zobrazování uskutečňuje pomocí elektronů pohybujících se ve vakuu. Jeho zvětšení je až 100násobně větší než lze dosáhnout u optického mikroskopu. Tento mikroskop je dnes již nepostradatelným pomocníkem v laboratořích různých výzkumných ústavů.

Elektrony v atomu mohou být vzbuzeny do vyšších stavů, tj. do stavů, jimž odpovídá větší energie elektronu. Tyto vyšší *energetické hladiny* mohou být určeny metodou, navrženou Hughesem, Rožanským a McMillanem. Podle jejich metody se paprsek elektronů s dokonale stejnou energií, která je vyšší než nejvyšší stupeň buzení vyšetřovaných atomů nechá procházet velmi zředěným plynem. Elektrony při nepružných srážkách s atomy ztrácejí tu část své energie, která odpovídá možným stupňům vzbuzení atomů. Pravděpodobnost opakovaných srážek je velmi malá, protože plyn je velmi zředěn. Zjistíme-li hodnoty úbytku energie elektronů, které prodělaly srážku, dostaneme zároveň i energetické hladiny. Znalost energetických hladin umožňuje stanovit frekvence světla, které mohou atomy daného prvku vysílat. Vakuová fyzika a technika nám tedy i zde prokazuje velmi dobré služby. V prostoru, kde zjišťujeme úbytky energie elektronů svazku je pochopitelně podstatně lepší vakuum než v prostoru, kde udržujeme plyn ve velmi zředěném stavu.

5. Užití vakua v atomové fyzice

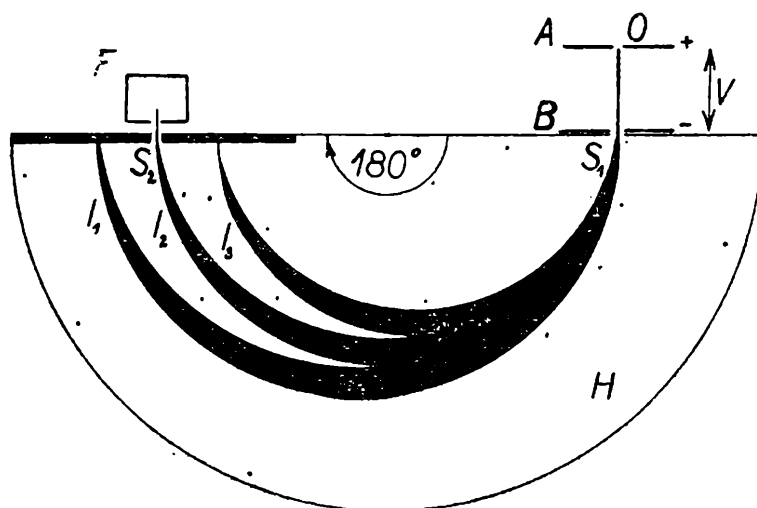
V tabulce 2 jsou střední volné dráhy dusíku při teplotě 0°C a pro různé tlaky. Z ní vidíme, že za normálního tlaku 760 torrů je střední volná dráha $5,9 \cdot 10^{-8}$ m. Je tedy nepatrná ve srovnání s rozměry nejrozličnějších přístrojů. Teprve při vakuu 10^{-3} torru, kdy činí přibližně 45 mm, začíná být srovnatelná s rozměry přístrojů, s nimiž se setkáváme v laboratořích.

V atomové fyzice často pracujeme se svazky částic, nebo s jednotlivými částicemi, zkoumáme pohyb těchto částic v elektrickém poli, nebo v mag-

netickém poli, urychlujeme tyto částice na vysoké energie. Nechceme-li, aby částice - s nimiž pracujeme - přicházely do styku s jinými částicemi plynů, musíme příslušné pokusy provádět ve vakuu. Bude zřejmě nutné pracovat co možná s nejlepším vakuem.

Tabulka 2. Střední volná dráha dusíku λ při 0 °C a při různých tlacích p

Tlak p v torrech	Střední volná dráha λ v m
760	$5,9 \cdot 10^{-8}$
1	$4,5 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	$4,5 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$4,5 \cdot 10^{-1}$
10^{-5}	4,5
10^{-6}	$4,5 \cdot 10$

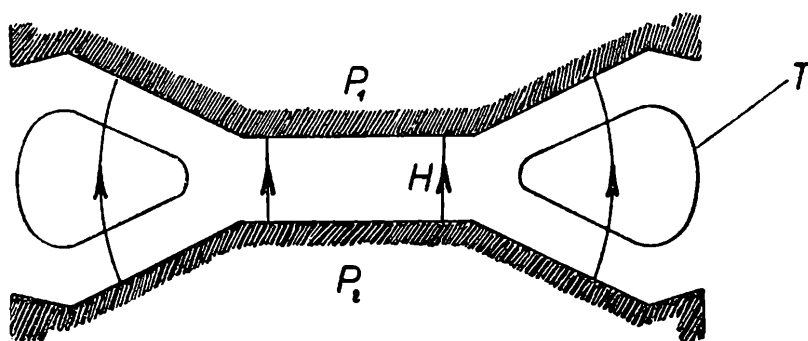


Obr. 4. Schéma hmotového spektrometru s fokusací na 180°. O - otvor sloužící jako zdroj iontů; A, B - desky mezi nimiž se všechny ionty urychlují na stejnou energii potenciálním rozdílem V ; S_1, S_2 - štěrby; F - Faradayova klec; I_1, I_2, I_3 - svazky iontů odpovídající různým hmotám izotopů; H - příčné homogenní magnetické pole.

Mezi nejzákladnější experimenty, které byly provedeny v atomové fyzice, patří bezpochyby měření specifického náboje elektronu, tj. velikosti podílu náboje a hmoty elektronu. Pro měření specifického náboje elektronu byla vypracována řada metod. Nejstarší známou metodou je metoda J. J. Thomsona. Zkoumá se v ní pohyb elektronového svazku ve vakuu pod vlivem elektrického a magnetického pole. Z pokusu s výchylkou jen v jednom poli, tj. jen v elektrickém nebo jen v magnetickém poli, nelze určit hodnotu e/m , poněvadž výchylka v příčném poli elektrickém nebo magnetickém závisí nejen na e/m , ale i na rychlosti

elektronů *v*. Prvé pokusy byly prováděny při tlaku okolního plynu řádově 10^{-2} torru, což nevylučovalo interakce elektronů s částicemi plynu. Teprve rozvoj vakuové techniky umožnil provést tato měření v lépe kontrolovatelných podmínkách.

Pomocí elektrického a magnetického pole můžeme provádět oddělování izotopů. Každý *hmotový spektrograf*, nebo zvláště *hmotový spektrometr* (obr. 4), je v podstatě přístroj k dokonalému oddělení izotopů. Ve hmotovém spektrografu nebo hmotovém spektrometru se provádí elektromagneticky analýza paprskového svazku iontů. Kladně nabitě ionty můžeme získávat výbojem v trubici se sníženým tlakem. Otvorem v katodě vniknou ionty do prostoru za katodou jako svazek kanálových paprsků a jsou analyzovány. Částice o stejné hmotě se fokusují ve společném ohnisku. Představíme-li si, že v místech, která odpovídají polohám ohnisek jednotlivých hmot izotopů jsou umístěny jímače, budou se v nich hromadit čisté izotopy. Poněvadž v hmotovém spektrografu se částice normálně registrují pomocí jejich působení na fotografickou desku a ve hmotovém spektrometru elektricky, na základě velikosti náboje, který přenášejí ionty určité hmoty do Faradayovy klece, je vidět, že zvláště hmotový spektrometr se hodí k přímému užití na oddělování izotopů.

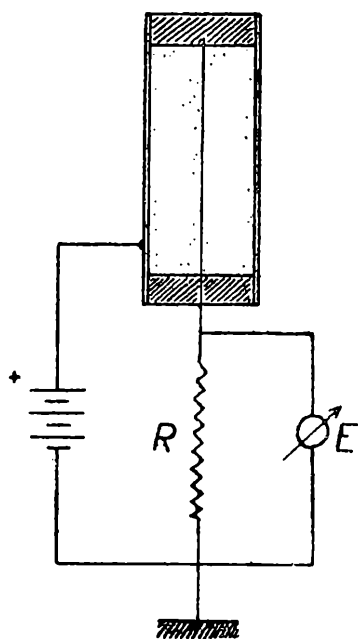


Obr. 5. Řez betatronem. P_1 , P_2 - pólové nástavce elektromagnetu; H - siločáry magnetického pole; T - kruhová skleněná trubice, v níž se urychlují elektrony.

Přístroje užívané v praxi k rozdělování izotopů elektromagnetickým způsobem, jsou také v podstatě hmotové spektrometry o velké výkonnosti.

Dalšími přístroji používanými v atomové fyzice, jejichž činnost by byla nemožná bez vakua, jsou *urychlovače částic*. V těchto zařízeních elektricky nabitě částice, jako elektrony, protony, částice α , urazí velmi dlouhé dráhy v krátkém čase, během něhož jsou urychleny na značné energie. V *betatronu* (obr. 5), což je přístroj, v němž se urychlují elektrony, např. za časový interval 10^{-3} s proletí elektron dráhu řádově i několik set kilometrů. To vyžaduje nejen dobrou fokusaci elektronového svazku, ale i dobré vakuum v přístroji, neboť elektrony které se srazí s molekulami zbytků plynů narušují fokusaci svazku.

Rovněž v některých počítačích částic se užívá vakua. *Vláknový počítač* (obr. 6) je tvořen kovovým válcem, jehož základny jsou z izolačního materiálu. V ose válce je tenké kovové vlákno. Počítač se po vyčerpání plní plynem za sníženého tlaku 100 až 200 torrů. Pomocí velmi značného odporu R je vlákno spojeno se zemí a mezi válec a vlákno je vložen rozdíl potenciálu poněkud menší, než je průrazný potenciál. Dostane-li se do počítače rychlá částice, ionizuje plyn a v počítači vznikne výboj. Parametry počítače se volí tak, aby výboj přestal, jakmile částice přestane ionizovat plyn. Dopad každé rychlé částice způsobí tedy v počítači krátký proudový impuls. Ten vyvolá na odporu R spád napětí, který měříme přístrojem E .



Obr. 6. Schéma vláknového počítače. R odpor spojující vlákno se zemí; E - přístroj pro měření spádu napětí na odporu.

Nelze zapomenout na *Stern-Gerlachův pokus*, který dokazuje existenci spinu elektronu a který se provádí ve vysokém vakuu. Patří mezi základní pokusy atomové fyziky. Odkrývá jednu z nejdůležitějších vlastností hmoty, a to tu, že elektron má vlastní mechanický moment impulsu (spin), tj. chová se jako setrvačnick. Poněvadž elektron má elektrický náboj, přísluší mu současně vlastní magnetický moment, tj. elektron se chová také jako magnet. Po stránce experimentální spočívá jejich pokus v tom, že se jim podařilo rozštěpit úzký rovnoběžný svazek atomů stříbra, atomový svazek, při průchodu silně nehomogenním magnetickým polem na dva svazky, symetrické kolem svazku procházejícího za nepřítomnosti pole.

6. Závěr

Vakuových vývěv se též používá v chemii k odčerpávání plynů při různých chemických reakcích, prováděných za sníženého tlaku. Rovněž v lékařství se projevuje snaha užít vakua k prodloužení uschovávací doby krevní plasmy a k měření krevního tlaku.

Vývoj užití vakua pokračuje a bude zřejmě zvyšovat rychlé tempo, tak jako se rychle zvyšují v dnešní době nároky na kvalitu různých výrobků. Nepochybně také výzkumy prováděné ve vesmíru budou podnětem pro další rozvoj vakuové fyziky, vakuové techniky a jejich aplikací.

Literatura

- N. A. Kapcov, Elektronika, Vydavateľstvo slovenskej akadémie vied, Bratislava 1959.
B. S. Danilin, Vakuum, Izdatel'stvo „Znanie“, Moskva 1960.
E. V. Špolskij, Atomová fyzika I (II), SNTL, Praha 1957 (1958).
S. E. Friš, A. V. Timoreva, Kurs fyziky III, NČSAV, Praha 1954.
Z. Horák, F. Krupka, V. Šindelář, Technická fyzika, SNTL, Praha 1961.
L. Zobač, Základy vakuové techniky, SNTL, Praha 1954.
Strong John, Modern physical laboratory practice, London and Glasgow 1949.

Úlohy k řešení

Řešení úloh loňské soutěže

(Pokračování)



Matematika:

10. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky l . Bod X probíhá rovnoměrným pohybem obvod čtverce $ABCD$ (v tomto smyslu); výchozí poloha je bod A . Bod X' probíhá rovnoměrným pohybem a dvojnásobnou rychlostí obvod čtverce $A'B'C'D'$ (v tomto smyslu); výchozí poloha je bod A' . a) Sestrojte dráhu, kterou opíše střed Y úsečky XX' a vypočtete její délku. b) Na úsečce XX' leží bod Z tak, že $XX : ZX' = k$, kde k je kladné číslo. Určete k tak, aby dráha bodu Z měla délku 6.

Jan Vyšín

(Došlo 24 řešení)

Řešil Jaroslav Zemánek, III.d, SVVŠ, Praha-Nusle:

Nejprve určíme dráhu bodu Z . Zvolme polopřímky AB , AD , AA' po řadě za kladné poloosy soustavy kartézských souřadnic x , y , z s počátkem A . Ukážeme, že geometrické místo bodů Z je lomená uzavřená čára $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_1$, kde

$$P_1 \left[0 ; 0 ; \frac{k}{1+k} \right], P_2 \left[\frac{\frac{1}{2} + k}{1+k} ; 0 ; \frac{k}{1+k} \right], P_3 \left[1 ; \frac{k}{1+k} ; \frac{k}{1+k} \right]$$

$$P_4 \left[\frac{1}{1+k}; \frac{\frac{1}{2}+k}{1+k}; \frac{k}{1+k} \right], P_5 \left[\frac{1}{1+k}; \frac{1}{1+k}; \frac{k}{1+k} \right],$$

$$P_6 \left[\frac{\frac{1}{2}+k}{1+k}; \frac{1}{1+k}; \frac{k}{1+k} \right], P_7 \left[\frac{k}{1+k}; 1; \frac{k}{1+k} \right],$$

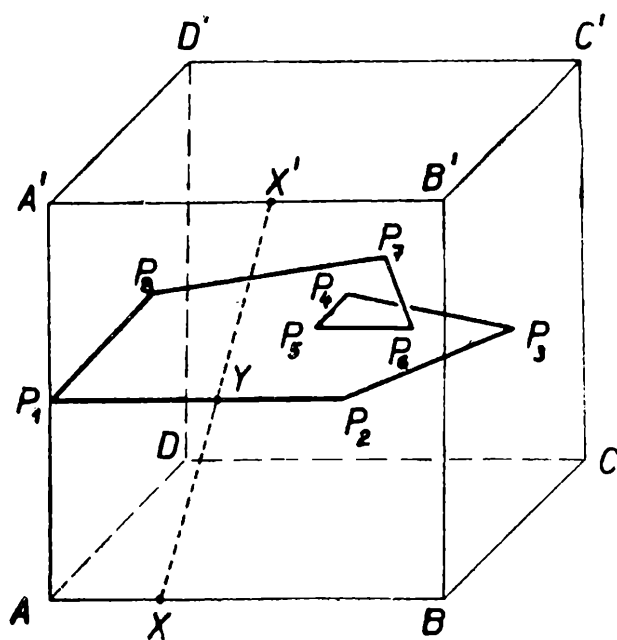
$$P_8 \left[0; \frac{\frac{1}{2}+k}{1+k}; \frac{k}{1+k} \right].$$

Nechť $X [x_1; y_1; z_1]$, $X' [x_2; y_2; z_2]$ jsou uvažované body.

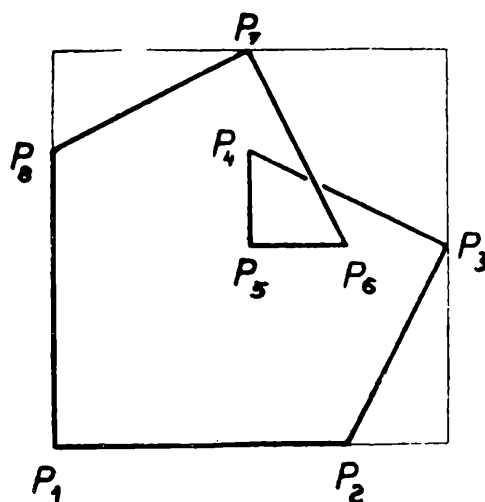
Je známo, že

$$Z \left[\frac{x_1 + kx_2}{1+k}; \frac{y_1 + ky_2}{1+k}; \frac{z_1 + kz_2}{1+k} \right].$$

Poloha bodu X je známa, víme-li, že urazil při svém pohybu od počátku A po obvodu čtverce $ABCD$ dráhu velikosti t (kde $0 \leq t \leq 4$); bod X' urazil ze svého počátku A' po obvodu čtverce $A'B'C'D'$ dráhu velikosti $2t$. Přehled o poloze bodů X , X' , Z v závislosti na t udává tabulka. Z této tabulky poznáme snadno, že dráha bodu Z je zmíněná lomená čára. Tabulka na str. 281.



Obr. 1



Obr. 2

Případ $Z \equiv Y$ nastane, právě když $k = 1$. Dráha bodu Y je tedy právě lomená uzavřená čára $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_1$, kde

$$P_1 (0; 0; \frac{1}{2}), P_2 (\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}), P_3 (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), P_4 (\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}),$$

$$P_5 (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), P_6 (\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), P_7 (\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}), P_8 (0; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}).$$

Tím je dráha bodu Y určena; viz obr. 1 a 2.

bod řadni- ce	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$	$1 \leq t \leq 1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \leq t \leq 2$	$2 \leq t \leq 2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2} \leq t \leq 3$	$3 \leq t \leq 3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2} \leq t \leq 4$
X	x_1	t	t	1	$3-t$	$3-t$	0	0
	y_1	0	0	$t-1$	1	1	$4-t$	$4-t$
	z_1	0	0	0	0	0	0	0
X'	x_2	$2t$	1	$3-2t$	0	$2t-4$	$7-2t$	0
	y_2	0	$2t-1$	1	$4-2t$	0	1	$8-2t$
	z_2	1	1	1	1	1	1	1
Z	x	$\frac{t+2tk}{1+k}$	$\frac{t+k}{1+k}$	$\frac{1+(3-2t)k}{1+k}$	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{3-t+k}{1+k}$	$\frac{(7-2t)k}{1+k}$	0
	y	0	$\frac{(2t-1)k}{1+k}$	$\frac{t-1+k}{1+k}$	$\frac{t-1+(4-2t)k}{1+k}$	$\frac{1+(2t-5)k}{1+k}$	$\frac{4-t+k}{1+k}$	$\frac{4-t+(8-2t)k}{1+k}$
	z	$\frac{k}{1+k}$	$\frac{k}{1+k}$	$\frac{k}{1+k}$	$\frac{k}{1+k}$	$\frac{k}{1+k}$	$\frac{k}{1+k}$	$\frac{k}{1+k}$

Délku dráhy bodů Z označme d . Platí

$$d = P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 + P_4 P_5 + P_5 P_6 + P_6 P_7 + P_7 P_8 + P_8 P_1$$

Použijeme známého vzorce pro vzdálenost dvou bodů a zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= \frac{\frac{1}{2} + k}{1 + k}, P_2 P_3 = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + k^2}}{1 + k}, P_3 P_4 = \frac{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}}{1 + k}, \\ P_4 P_5 &= \frac{\sqrt{(k - \frac{1}{2})^2}}{1 + k}, P_5 P_6 = \frac{\sqrt{(k - \frac{1}{2})^2}}{1 + k}, P_6 P_7 = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + k^2}}{1 + k}, \\ P_7 P_8 &= \frac{\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}}{1 + k}, P_8 P_1 = \frac{\frac{1}{2} + k}{1 + k} \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme

$$d = \frac{1 + 2k + 2\sqrt{(k - \frac{1}{2})^2} + 4\sqrt{\frac{1}{4} + k^2}}{1 + k}$$

Pro $k = 1$ plyne odtud, že délka dráhy bodu Y je

$$d = 2 + \sqrt{5}.$$

Zbývá již jen určit k tak, aby dráha bodu Z měla délku 6. Hledáme takové kladné číslo k , pro které platí

$$\frac{1 + 2k + 2\sqrt{(k - \frac{1}{2})^2} + 4\sqrt{\frac{1}{4} + k^2}}{1 + k} = 6. \quad (1)$$

Hledejme nejprve kladné číslo $k \leq \frac{1}{2}$, které splňuje (1). O něm musí platit

$$\begin{aligned} 1 + 2k + 2(\frac{1}{2} - k) + 4\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} &= 6 + 6k, \\ 4\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} &= 4 + 6k, \\ 2\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} &= 2 + 3k, \\ 1 + 4k^2 &= 4 + 12k + 9k^2, \\ 5k^2 + 12k + 3 &= 0, \end{aligned}$$

avšak tuto poslední rovnici zřejmě nesplňuje žádné kladné číslo k . Pro $k > \frac{1}{2}$ je rovnice (1) ekvivalentní s rovnicemi

$$\begin{aligned} 1 + 2k + 2(k - \frac{1}{2}) + 4\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} &= 6 + 6k, \\ 2\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} &= 3 + k, \\ 1 + 4k^2 &= 9 + 6k + k^2, \\ 3k^2 - 6k - 8 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Rovnice (2) je pro $k > \frac{1}{2}$ ekvivalentní s rovnicí (1). Rovnice (2)

má právě dva kořeny $k = k_1$, $k = k_2$, kde

$$k_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{3}, \quad k_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{3}.$$

Číslo k_2 je záporné, takže o něm dále nebudeme uvažovat. Kořen k_1 je větší než $\frac{1}{2}$ a proto je také kořenem rovnice (1).

Rovnici (1) tedy splňuje jediné kladné číslo

$$k = \frac{3 + \sqrt{33}}{3}$$

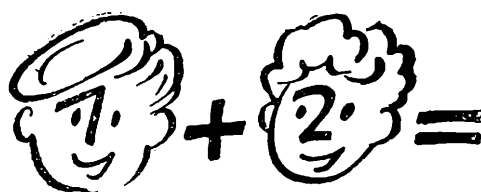
Dráha bodu Z má délku 6 tehdy a jen tehdy, je-li

$$k = \frac{3 + \sqrt{33}}{3}$$

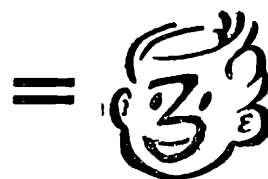
Tím je daná úloha rozřešena.

(Pokračování)

Matematické zábavy



Největší dosud známé prvočíslo



Jak bylo nedávno zjištěno, je to číslo tvaru $2^{4423} - 1$. Čtenáři, kteří se zabývali teorií čísel, vědí, že toto prvočíslo patří mezi tzv. Mersenneova prvočísla, jež mají tvar $2^n - 1$. Je též známo, že $2^n - 1$ může být prvočíslem jen tehdy, je-li také číslo n prvočíslem. Zamysleme se nad největším dosud známým prvočíslem. Dáváme čtenářům tři otázky. Kolik číslic má v desítkové soustavě toto číslo, kterou číslicí začíná a kterou končí? Řešení této úlohy pošlete na známou adresu naší redakce. Nejlepší z došlých příspěvků uveřejníme.

J. S.

Kdo na tom vydělal?

V době egyptských faraónů platili rolníci daně podle výměry obdělávaných pozemků. Na tom není nic zvláštního, pozoruhodný je po matematické stránce způsob, jak určovali výběrci daní výměru pozemků. Měřili-li pozemek, který měl tvar trojúhelníka nebo čtyřúhel-

níka, zjistili pouze délky stran těchto geometrických útvarů. Za obsah čtyřúhelníka se stranami a, b, c, d pak prohlašovali číslo $P' = \frac{1}{2} (a + c) \cdot \frac{1}{2} (b + d)$, tj. součin průměrů délek protějších stran. Pro trojúhelník používali v podstatě stejného vzorce, považovali v něm jen čtvrtou stranu za nulovou, tj. $d = 0$, číslo $P' = \frac{1}{2} (a + c) \cdot \frac{1}{2} b$.

Pro čtvercový pozemek vychází při použití „egyptského“ vzorce správný výsledek $P' = a^2$. Pro všechny trojúhelníky vychází však číslo P' větší než skutečný obsah P trojúhelníka. To je okamžitě patrné z nerovností mezi stranami a výškou trojúhelníka. Zamyslete se nad tím, jaký je vztah mezi čísly P, P' u rovnoběžníků a lichoběžníků, popřípadě deltoidů. Dokažte vztah, který odhadnete. Při jakém tvaru pozemku platil rolník daň odpovídající skutečné výměře, kdy prodělával a mohl vůbec někdy vydělat?

Jména správných řešitelů uveřejníme.

Jaroslav Šedivý

Průsečík výšek v méně známé roli

Představme si, že máme v terénu vytyčen nepravoúhlý trojúhelník ABC a jeho průsečík výšek - bod V . Umístíme-li do bodu V svou pozorovatelnu, pod jakými úhly budeme vidět strany AB, BC, CA trojúhelníka ABC ? Pro ostroúhlý trojúhelník ABC provedete výpočet jistě snadno, nezapomeňte si však ověřit, zda vaše úvahy platí beze změny i pro *tupoúhlý* trojúhelník ABC . Je průsečík výšek jediným bodem v rovině trojúhelníka, ze kterého jsou vidět strany trojúhelníka pod vypočtenými úhly?

Jména správných řešitelů uveřejníme.

Jaroslav Šedivý

Doc. Ota Setzer, Praha:

Geometrické paradoxon

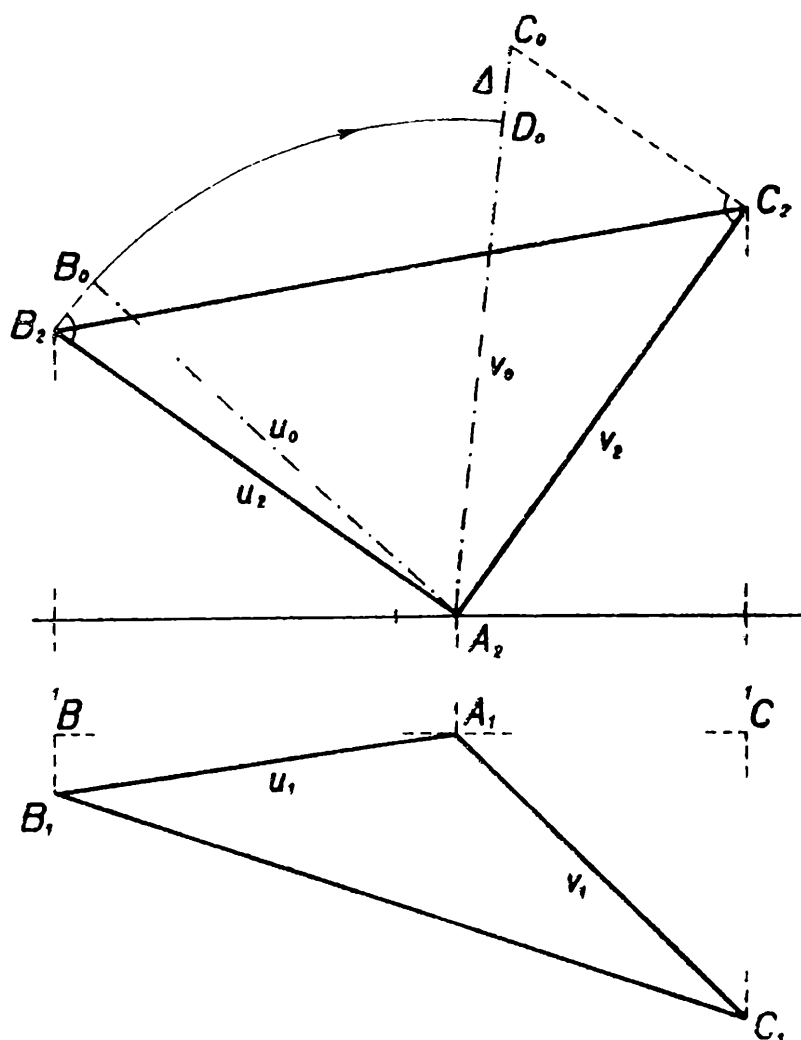
(Dokončení)

Obdobné vysvětlení lze podat i k obr. 2, v němž půdorysem trojúhelníka ABC je rovnoramenný trojúhelník $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = A_1C_1$) a jeho nárysem opět rovnoramenný trojúhelník $A_2B_2C_2$ ($A_2B_2 = A_2C_2$).

Sestrojíme-li však druhými promítacími trojúhelníky $A_2B_2B_0$ a $A_2C_2C_0$ skutečné délky u_0, v_0 úseček AB a AC , zjistíme, že strana AB je o Δ

kratší než strana AC ($\Delta = C_0D_0$). Trojúhelník ABC , který má v průmětech vždy dvě odpovídající strany stejně dlouhé, není ve skutečnosti rovnoramenný.

Početně si může čtenář ověřit toto paradoxní tvrzení na trojúhelníku $ABC : A(1; 2; 0), B(-6; 3; 5), C(6; 7; 7)$.



Obr.

Absolventi všeobecně vzdělávacích a odborných škol nezapomeňte, že letos budou na vysoké školy přijímací zkoušky a nikoliv jen pohovory. Písemné pozvání dostane každý uchazeč. Některé vysoké školy zašlou i podrobnější instrukce.

Redakce



J a r o m í r D u b s k ý, SPN, Praha:

Dvanáctý ročník Matematické olympiády

(Vydalo SPN, Praha 1964, 136 stran)

Brožura XII. ročníku *M a t e m a t i c k é o l y m p i á d y* (MO) se zprávou o řešení úloh ze soutěže ve školním roce 1962/63, vyšla v červenci roku 1964. Včasnou edicí může tato pomocná kniha splnit cíle, pro něž je pravidelně každého roku vydávána. Má totiž být především návodem pro začínající olympijské řešitele a platnou pomocnicí v jejich snaze řešit úlohy zadané v novém ročníku. Má propagovat matematiku a zvyšovat zájem o její studium mezi žactvem našich škol. Proto uvádí jednak průběh i výsledky XII. soutěžního ročníku, jednak souhrnnou zprávu o páté mezinárodní MO.

I tentokrát jsou jejími hlavními autory docent J. Vyšín a R. Ze-linka. První je místopředsedou a druhý jednatelem Ústředního výboru matematické olympiády. Ostatní členové ÚVMO spolupracovali na díle přímo a nepřímými spolupracovníky jsou také všichni úspěšní řešitelé XII. ročníku naší hlavní matematické soutěže.

Olympiády se účastnili v kategorii D žáci posledního ročníku všeobecně vzdělávacích škol a v kategoriích A až C žáci středních škol. Během XII. ročníku soutěže vyšel nový organizační řád, který sleduje zkvalitnění soutěže. Mezi opatření, která pomáhají tomuto cíli, patří zřizování oddělení odborné matematické literatury při žákovských knihovnách, zintenzívnění publicistické činnosti v ediční řadě *Škola mladých matematiků* a uspořádání dvou celostátních soustředění vybraných olympioniků pod patronátem ministerstva školství a kultury.

Dobré výsledky se očekávají zvláště od zřizování speciálních tříd vyhrazených pro matematicky nadané žáky.

Všechna tato opatření pomáhají zajišťování kvalitních matematických kádrů. Že je třeba podpory, vyplývá ze zhoršujících se výsledků jak v naší národní, tak i v mezinárodní MO. Špatnou připravenost z matematiky lze sledovat při obtížích, s nimiž se setkávají

absolventi SVVŠ jak po vstupu na vysokou školu, tak i v praxi.

Brožura navazuje na předešlé ročníky, je však o něco stručnější. První kapitola informuje o průběhu soutěžního ročníku, druhá zachycuje přehledně výsledky jednotlivých kol soutěže a třetí uvádí přípravné úlohy I. kola ve všech čtyřech kategoriích.

Těžiště publikace leží ve čtvrté kapitole, v níž jsou vzorně řešeny příklady z jednotlivých soutěží v kategoriích A až D. Asi třetina textu příkladů byla převedena do slovenštiny.

Poslední, pátá kapitola, je věnována zprávě o zhodnocení pátého ročníku mezinárodní MO, která byla ve Vratislavi v Polsku. Mezi soutěžícími z osmi socialistických zemí dostalo se československé

družstvo až na páté místo za SSSR, MLR, RLK a SFRJ. Toto nezáviděníhodné umístění mohlo být ještě kritičtější, kdyby nej-schopnější z našich olympioniků, vítěz XII. ročníku národní MO Josef Daneš, nezískal jednu ze sedmi prvních cen. Musíme neradostně konstatovat, že sice každého roku upozorňujeme na nutnost nápravy, že se však naše umístění v mezinárodní soutěži spíše horší. Musí se proto hledat účinnější cesty, které by nás vyvedly z dnešní neutěšené situace. Zlepšení nezáleží jen ve zdokonalené přípravě několika vybraných olympioniků, ale v zásadním prohloubení péče o naše matematické kádry a ve zkvalitnění výuky matematice vůbec.

Brožura je k dostání v prodejnách n. p. KNIHA za 3,50 Kčs.

Chcete se stát přispěvatelem Rozhledů?

V tomto článku si pohovoří redakce s autory rukopisů určených našemu časopisu. Pisatelé si musí v první řadě uvědomit, komu jsou Rozhledy matematicko-fyzikální určeny. Čtenáři jsou především žáci posledních tříd všeobecně vzdělávacích škol, škol odborných a prvního ročníku vysokých škol technického směru. Na mnoha besídkách se čtenáři jsme se přesvědčili, že vyžadují krátké, zajímavé články psané lehce a srozumitelně. Články nesmí příliš přesahovat svou úrovní znalosti maturantů uvedených škol. Všude, kde obsah článku seznamuje čtenáře s novými pojmy nebo s nezvyklou formou odborné mluvy, musí autor vše podrobně a srozumitelně vysvětlit. Úkolem časopisu není uveřejňovat náročná pojednání, v nichž přispěvatel staví na obdiv své odborné znalosti. Víme, že i vědci světové úrovně (Einstein aj.) dovedli přiblížit svůj vědní obor normálním čtenářům, a to často i zábavnou formou, aniž tím utrpěla vědecká přesnost.

Nejčtenější jsou články v rozsahu asi nejvýš 5 až 6 strojem psaných stránek. Čtenáři nejraději si přečtou článek, v němž autor je seznámí

s historickým vývojem příslušného problému i s jeho praktickým uplatněním. Stačí k tomu mnohdy několik zajímavě napsaných vět.

Pisatel nesmí zapomenout ani na redaktory a sazeče. Proto píše pečlivě na stroji po jedné straně papíru, nejvíce však 30 řádek na stránku normalisovaného formátu. Matematické a fyzikální vzorce, které nelze tisknout strojem, vpisuje čitelně perem. Protože rukopisy jsou recenzovány členy redakční rady je třeba, aby rukopis nebyl příliš hustý a aby tak recenzenti mohli jej eventuálně upravovat přímo mezi řádky. I když uveřejňované články podléhají též jazykové úpravě, musí autoři respektovat pravopis a nesmí např. psát dlouhé toporné věty. Naproti tomu ani text příliš strohý není u mladších čtenářů oblíben.

Recenzní řízení trvá často delší dobu a není proto nutno redakci urgovat. Není-li rukopis přijat, je s odůvodněním vrácen. Po provedené recenzi vracíme rukopisy autorům k úpravě jen tehdy, jde-li o podstatné úpravy,

Obrázky tvoří mnohdy nezbytnou část článku, a proto je jim nutno věnovat obzvláštní pozornost. Mohou být provedeny buď na pauzovacím papíru nebo na kreslicí čtvrtce tuší nebo přesně tužkou. Reprodukci se obrázků dvakrát zmenšuje, takže největší šířka originálu může být 22 cm. Popis vyžadujeme bezpodmínečně normalizovaným písmem šablonou 5 mm. Každý obrázek se provede zvlášť a opatří tužkou číslem i jménem autora. Nemá-li pisatel možnost provést obrázek tuší, provede jej přesně tužkou, aby jej náš kreslič mohl tuší obtáhnout. Reprodukujeme i fotografie na lesklém papíru.

Abychom ušetřili papír, nevyžadujeme opisy rukopisů. Uveřejněné články jsou honorovány podle běžných směrnic a autor obdrží poštou i jeden autorský výtisk zdarma.

Redakce zvláště vítá rukopisy mladých začínajících autorů, a ráda jim poradí. Dobře míněné rady nesmí je však případně odpudit od další publikační činnosti.

Při každém písemném styku s redakcí je třeba uvádět podrobnou a přesnou adresu.

M. S.

* *

*

Redakční rada děkuje zasloužilému školskému pracovníku M i l o š i J e l í n k o v i za dlouholetou práci věnovanou Rozhledům matematicko-fyzikálním a přeje mu současně mnoho úspěchu v jeho další školské činnosti v Beyrutu.

Slovníček

matematických výrazů

■ A ■

abeceda
abecední pořadí
absolutní
absolutní člen rovnice
absolutní hodnota
abstrahovat
abstraktní
absurdum
afinita
afinní
algebra
algoritmus
alternující

amplituda komplexního čísla
analogie
analogický
analytický
analýza
anulování (výrazu)
anulování (rovnice)
anulovat
aparát
aplikace
aplikovaná matematika
aproximace
argument (funkce)
aritmetický průměr
aritmetika
arkus
asi
asociativní
aspoň

азбука, алфавит
алфавитный порядок
абсолютный
свободный член уравнения
абсолютная величина, модуль
абстрагировать, отвлекать
абстрактный, отвлеченный
абсурд
аффинита, аффинность
аффинный
алгебра
алгоритм
альтернирующий, знакопеременный,
чередующийся
аргумент комплексного числа
сходство
аналогичный
аналитический
анализ
исчезновение
обращение правой стороны в нуль
обратить в нуль, аннулировать
прибор
приложение
прикладная математика
аппроксимация
аргумент (функции)
среднее арифметическое значение
арифметика
аркус
около
ассоциативный
по крайней мере

asymptota
axiom
axiomatický
axonomie
azbuka
azimut

асимптота
аксиома
аксиоматический
аксонометрия
азбука
азимут

В

bezrozměrný
běžec na logaritmickém pravítku
binomická věta
blízko
blížit se
bočná stěna
bod
bokorys
buď... anebo...

безразмерный
бегунок
биномиальная теорема
вокруг
стремиться
боковая грань
точка, пункт
вторая вертикальная проекция
либо либо

С

cifra platná, římská, zaručená, sou-
čet cifer
cvičení
cyklická záměna

цифра значащая, римская, верная
сумма цифр
упражнение
круговая подстановка

Č

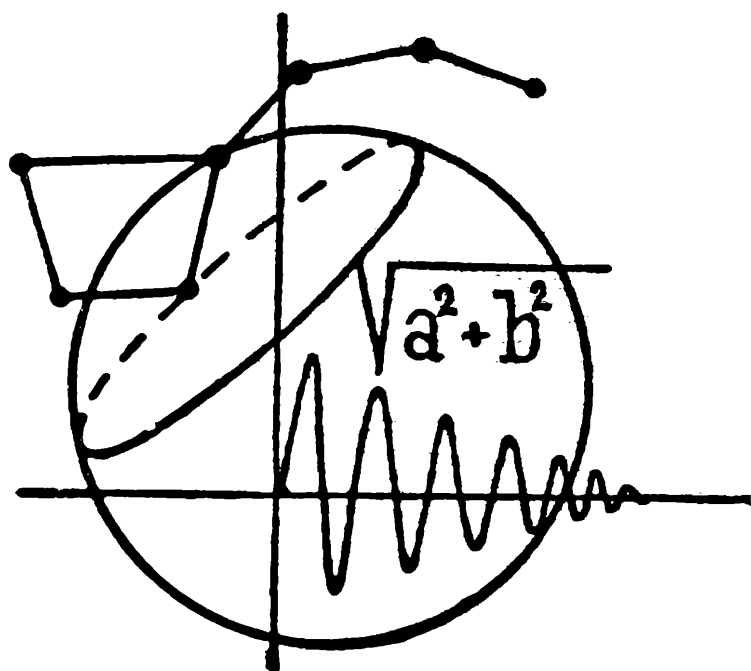
čára, čára lomená
čas
část
částečně
činitel
číslice
číslo celé, desetinné, imaginární, i-
racionální, kladné, komplexní, lo-
mené, opačné, periodické, převrá-
cené, přibližné, přirozené, reálné,
relativní, složené
číslovka
čitatel
čítat
člen mnohočlenu obsahující nejvyš-
ší mocninu
člen po členu
čtvercový, čtvereční
čtverec
čtveřina, čtveřice
čtvrtina
čtvrtkruh, čtvrtkružnice

линия, ломаная
время
доля, раздел, участок
частично
множитель, фактор, сомножитель
цифра
число целое, десятичное, мнимое, ир-
рациональное, положительное, ком-
плексное, дробное, противополож-
ное, периодическое, обратное, при-
ближенное, натуральное, веществен-
ное, относительное, сложное
числительное
числитель
высчитывать
старший член
почленно
квадратный
квадрат
четвёрка
четверть
четверть круга, окружности

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



7

ROČ. 43

1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Březen 1965

Číslo 7

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

I. Rohlíčková: Co je to teorie grafů?	289
V. Potočný: O jedné vlastnosti stran některých trojúhelníků	293
O. Berka: Dilatace	295
J. Maňák: Kružnice devíti bodů	300
F. Hradecký: O určitých geometrických místech (Dokončení)	303
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování)	308
O. Lepil: Peltierův jev	315
P. Chmela: Optický obraz v dalekohledu z hlediska geometrické optiky	320
M. Filip: Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky	324
Řešení úloh ložské soutěže Rozhledů (Dokončení)	328
Inž. B. Machková: Přijímací zkoušky na vysokých školách	335
M. Zelenka: Česko-ruský slovník	3. str. obálky



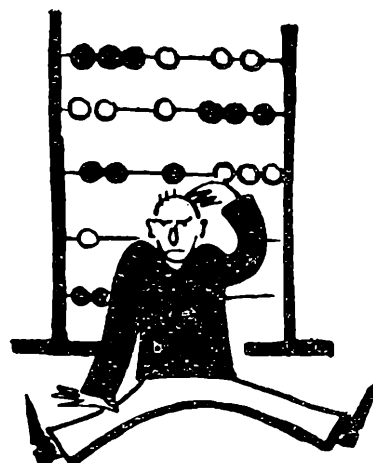
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novín. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

A-04*51115

Matematika

I v a R o h l í č k o v á, Praha:

Co je teorie grafů?



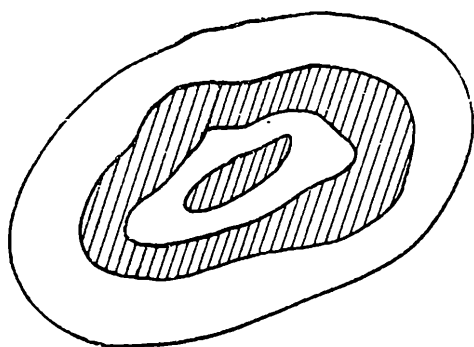
Studenti, kteří prošli středoškolským kursem geometrie a algebry a kteří se seznámili se základy diferenciálního a integrálního počtu, mají ve velké většině dojem, že už poznali matematiku ve všech jejích odvětvích a že jim postačí pouze prohlubovat znalosti v jednotlivých disciplínách. A přitom matematika - právě tak jako jiné vědní obory - se stále vyvíjí. Nyní existují matematické disciplíny, o kterých jste asi nikdy neslyšeli; např. v posledním století byla propracována *a x i o m a t i c k á* *v ý s t a v b a* *g e o m e t r i e*, v algebře se rozvíjí *t e o r i e* *m n o ž i n* a *t e o r i e* *g r u p*, usiluje se o axiomatickou výstavbu ostatních partií matematiky apod. Vývoj však nepostihuje pouze klasické matematické disciplíny; zdánlivě zcela odlehlé obory na sebe navazují, hledají se jejich styčné body, vznikají nové obory. Mezi takové nové matematické disciplíny patří také *t e o r i e* *g r a f ů*, o které si chceme něco říci.

Teorie grafů se obvykle zařazuje do *t o p o l o g i e* jako její samostatná část. Nejde tu však - jak byste si snad mysleli - o grafické znázorňování funkcí; to, co matematici nazývají *t e o r i í* *g r a f ů*, je něco zcela odlišného. Doufám, že po přečtení tohoto článku získáte aspoň neúplnou představu o tom, co se pod tímto názvem skrývá.

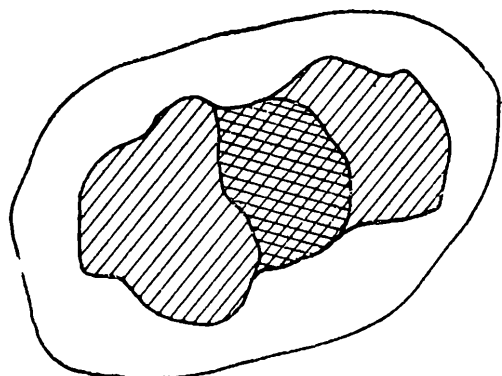
Dá se říci, že jako vědní obor se teorie grafů rozvinula až v posledních desetiletích, ačkoliv některé problémy, o kterých jedná, se vyskytly už u *L. E u l e r a* (1707—1783). Užitím grafů se dají řešit mnohé úlohy rekreační matematiky: nakreslení obrázku jedním tahem, úlohy o šachovnici, různé hry. Ovšem podnět k rozvoji teorie grafů nedala rekreační matematika, nýbrž některé vážnější problémy: např. *p r o b l é m* *č t y ř* *b a r e v*, *d o p r a v n í* *p r o b l é m*, využití grafů pro elektrotechniku (elektrické obvody), pro organickou chemii (strukturní vzorce), pro lingvistiku apod. O některých uvedených problémech si povíme v tomto článku, k ostatním se snad vrátíme v některém z příštích čísel Rozhledů.

Nebudeme zde udávat přesnou definici grafu; spokojíme se pouze tím, že uvedeme jednotlivé příklady, z nichž bude patrné, co to asi je pojem grafu a jak se s ním pracuje.

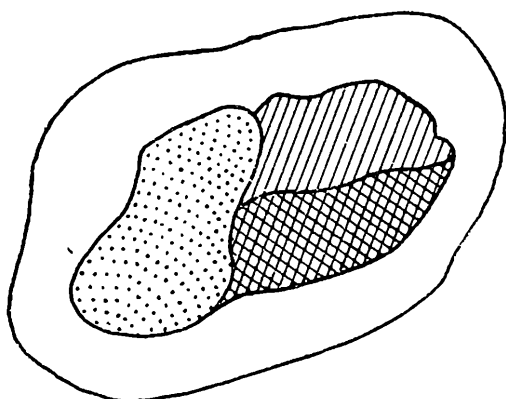
1. *Problém čtyř barev.* Pod tímto názvem se skrývá dosud nevyřešený problém, zdánlivě velmi jednoduchý. Na zeměpisné mapě máme několik států a pro přehlednost ji máme vybarvit tak, aby žádné dva sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou. Přitom sousedními státy rozumíme ty, které mají společnou hraniční čáru (nikoliv jednobodový styk).



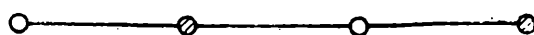
a



b



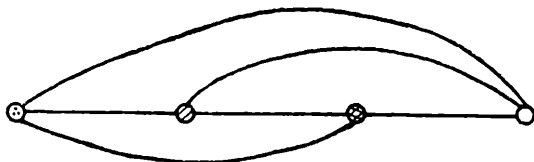
Obr. 1a, b, c



a

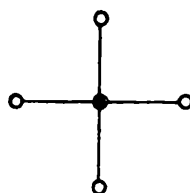


b

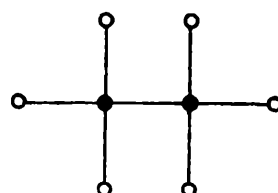


c

Obr. 2a, b, c



a



b

Obr. 3a, b

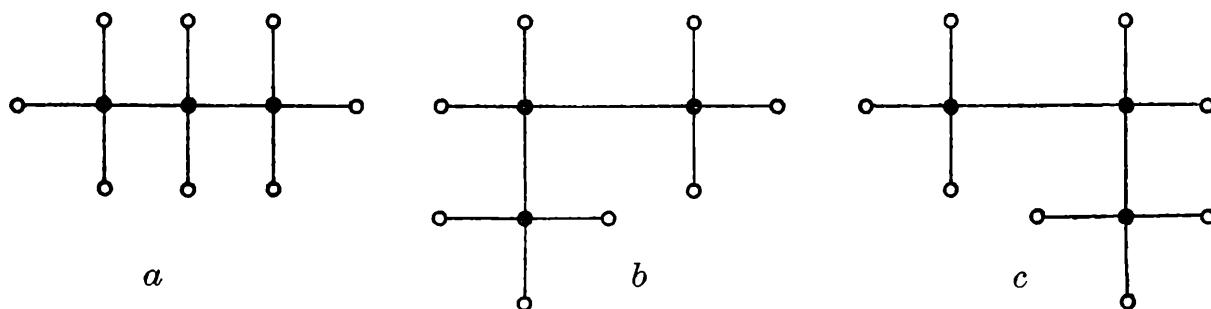
Otázka zní, kolik barev nám stačí k obarvení jakékoli mapy. Obr. 1abc ukazuje případy pro mapu se čtyřmi státy; v případě a) stačí k obarvení dvě barvy, v případě b) tři, v případě c) musíme použít čtyř barev.

Místo abychom zakreslovali celé mapy a jejich obarvení, můžeme se umluvit na tomto schematickém značení. Každý stát na mapě nahradíme

některým jeho vnitřním bodem, např. hlavním městem; mají-li dva státy společnou hraniční čáru, spojíme příslušné body čarou (úsečkou, obloukem křivky). Získáme tak *r o v i n n ý g r a f*, v němž se vyskytují dvě množiny objektů: body jsou tzv. *u z l y g r a f u*, čáry se nazývají *h r a n y g r a f u*. Naše úloha zní nyní takto: Kolika barev je minimálně potřeba k obarvení uzlů libovolného grafu, jestliže žádné dva uzly spojené hranou nemají být obarveny touž barvou. Obr. 2abc zachycuje grafy odpovídající mapám v obr. 1abc.

Je zajímavé, že problém čtyř barev, o kterém se zmiňuje již A. F. M o b i u s (1840), není dodnes vyřešen. Zatím se nepodařilo sestavit mapu, k jejímuž obarvení by nestačily čtyři barvy. Ovšem s obecnou platností jsou dokázány pouze dvě věci:

- a) K obarvení každé mapy stačí pět barev.
- b) Každou mapu, která má méně než 38 států, lze obarvit čtyřmi barvami.



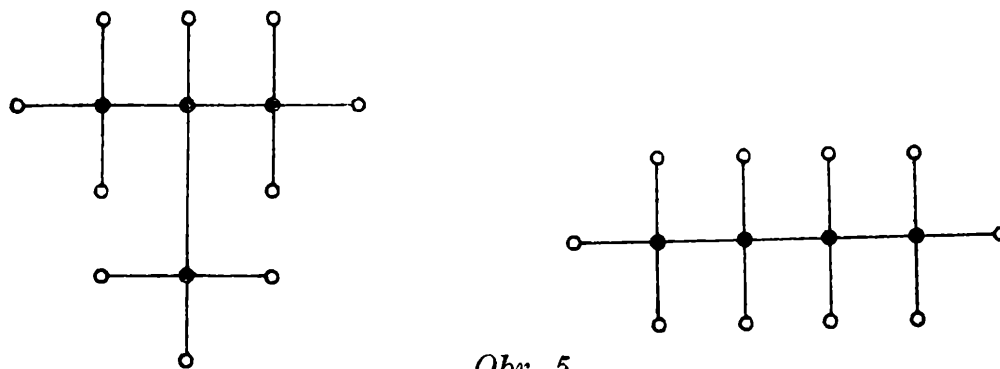
Obr. 4a, b, c

2. *Strukturní vzorce v organické chemii.* Jak víme, lze molekulu organické látky zapsat jednak vzorcem empirickým, jednak strukturním. Tak např. parafin má empirický vzorec C_nH_{2n+2} pro n přirozené. Pak je pro $n = 1$ vzorec metanu CH_4 , pro $n = 2$ vzorec etanu C_2H_6 , pro $n = 3$ vzorec propanu C_3H_8 , pro $n = 4$ vzorec butanu C_4H_{10} , pro $n = 5$ vzorec pentanu C_5H_{12} atd. Napišme si strukturní vzorec metanu a etanu:

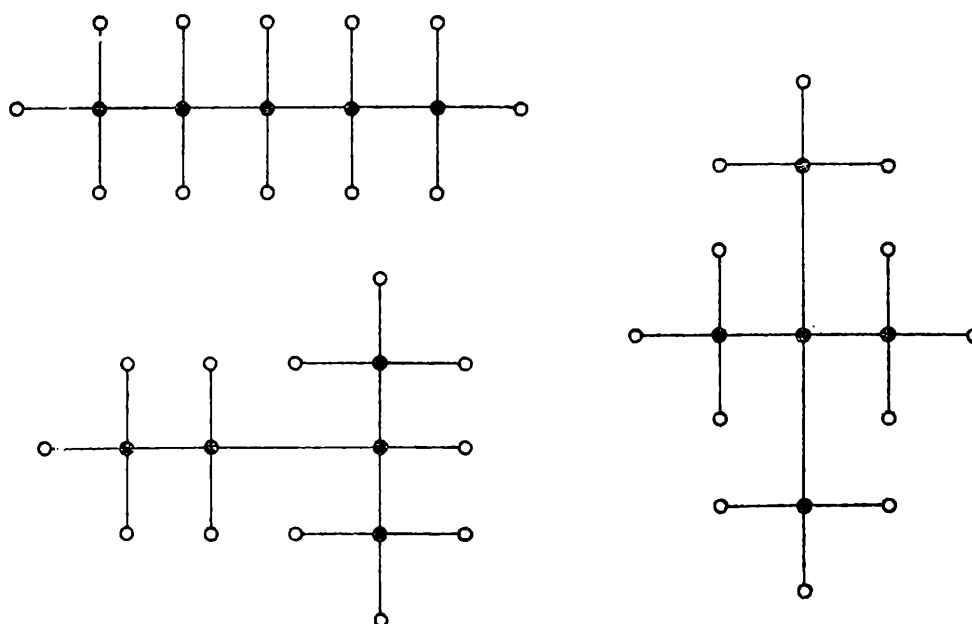


Nyní nahradme tyto vzorce schematicky grafy tak, že atomy uhlíku a vodíku zachytíme jako uzly grafu, vazby (tj. valence) jako hrany grafu (obr. 3ab). Každému uzlu grafu přiřadíme nezáporné celé číslo, které udává počet hran vycházejících z tohoto uzlu; toto číslo se nazývá *s t u p n ě m* příslušného uzlu grafu. Z obr. 3ab je vidět, že uzly, které odpovídají atomům uhlíku, jsou vesměs stupně čtyři, uzly odpovídající

atomům vodíku jsou stupně jedna. To však souhlasí s tím, že atom vodík je jednomocný, atom uhlíku čtyřmocný. Tedy naopak: každý uzel, který odpovídá atomu vodíku, musí být stupně prvního, každý uzel, který odpovídá atomu uhlíku, musí být stupně čtvrtého.



Obr. 5



Obr. 6

Graf strukturního vzorce propanu bychom mohli zakreslit některým ze způsobů na obr. 4abc; všimněte si však, že v podstatě jde ve všech třech případech o týž graf, neboť vždy na dva z atomů uhlíku je vázáno po třech atomech vodíku a na třetí atom uhlíku dva atomy vodíku. Existuje tedy jediný strukturní vzorec propanu, který obvykle zakreslujeme typem grafu z obr. 4a. Zato strukturní vzorce butanu existují dva; příslušné grafy jsou na obr. 5. Ověřte si, v čem spočívá jejich „různost“; všimneme-li si totiž počtu atomů uhlíku, na něž je vázáno po třech atomech vodíku, pak v jednom z obou grafů jsou takové atomy dva, ve druhém tři. Zjistěte si sami, že jiný typ grafu pro strukturní vzorec butanu neexistuje. Podobně si ověřte, že pro pentan existují tři strukturní vzorce, jejichž grafy jsou na obr. 6.

A čo znamená pro chemii existence různých strukturních vzorců téže organické sloučeniny? Jde o jev nazývaný *i s o m e r i e*; např. existují dva butany se společným empirickým vzorcem C_4H_{10} (normální butan a izobutan), které se však liší svými chemickými vlastnostmi ve shodě s rozličností svých strukturních vzorců. Tak také tři různé strukturní vzorce pentanu odpovídají třem jeho izomérům (normální pentan, izopentan a tetrametylmethan). Na tomto místě ještě připomeňme, že studiem strukturních vzorců v organické chemii z matematického hlediska se zabýval již A. C a y l e y (1821—1895).

(Pokračování)

V o j t e c h P o t o č n ý, Chtelnica:

O jednej vlastnosti strán niektorých trojuholníkov

P a v e l B a r t o š na konci svojho článku O jednej špecifickej vlastnosti pravouhlých trojuholníkov (Rozhľady matematicko-fyzikální, čís. 1, str. 2) predložil čitateľom túto úlohu na riešenie

Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka. Čísla

$$x = \frac{b^2 + c^2}{a^2}, \quad y = \frac{c^2 + a^2}{b^2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{c^2} \quad (1)$$

sú prirodzené čísla vtedy a len vtedy, keď pomer veľkostí strán trojuholníka je alebo

$$1 \quad 1 \quad 1,$$

(rovnostranný trojuholník), alebo

$$1 \quad 1 \quad \sqrt{2},$$

(rovnoramenný pravouhlý trojuholník), alebo

$$1 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{3},$$

(pravouhlý trojuholník, ktorý tvorí hrana kocky, jej stenová a telesová uhlopriečka).

Riešenie.

1. Najprv dokážeme, že každý z uvedených trojuholníkov má vyslovenú vlastnosť.

a) U rovnostranného trojuholníka, kde $a = b = c$ a kde pomer veľkostí strán trojuholníka je $1 \quad 1 \quad 1$, je po dosadení do (1)

$$x = y = z = 2$$

b) Tiež každý rovnoramenný pravouhlý trojuholník vyslovenú vlastnosť má. Pre jeho strany $a, b = a, c = a\sqrt{2}$ (pomer veľkostí strán je $1 : 1 : \sqrt{2}$) po dosadení do (1) je

$$x = y = 3, z = 1$$

c) Konečne i pravouhlý trojuholník, ktorý tvorí hrana kocky, jej stenová a telesová uhlopriečka, vyslovenú vlastnosť má. Pre jeho strany $a, b = a\sqrt{2}, c = a\sqrt{3}$ (pomer veľkostí strán je $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$) po dosadení do (1) je

$$x = 5, y = 2, z = 1$$

2. Treba ešte dokázať, že ak trojuholník uvedenú vlastnosť má, je buď trojuholníkom rovnostranným, alebo rovnoramenným pravouhlým, alebo pravouhlým trojuholníkom, ktorý tvorí hrana kocky, jej stenová a telesová uhlopriečka.

Majme teda trojuholník so stranami a, b, c , pričom čísla x, y, z určené vzťahmi (1) sú prirodzené čísla.

Označme najmenšiu stranu trojuholníka (u rovnostranného trojuholníka ide o ktorúkoľvek stranu) a . Potom vždy možno nájsť také čísla k_1, k_2 , že platí

$$b = k_1 \cdot a, c = k_2 \cdot a, \quad (2)$$

pričom $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$.

Dosadením do vzťahov (1) pre čísla y a z dostaneme

$$y = \frac{k_2^2 + 1}{k_1^2}, \quad z = \frac{k_1^2 + 1}{k_2^2}$$

a odtiaľ

$$yk_1^2 = k_2^2 + 1, \quad zk_2^2 = k_1^2 + 1 \quad (3)$$

Sčítaním obidvoch vzťahov obdržíme

$$yk_1^2 + zk_2^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2$$

a po úprave

$$k_1^2(y - 1) + k_2^2(z - 1) = 2 \quad (4)$$

Ľahko teraz usúdime, že pre prirodzené čísla y a z musí platiť

$$1 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 3,$$

pričom krajné hodnoty 1 a 3 nemôžu vo vzťahu (4) platiť pre čísla y a z súčasne. Pre $y = 1, z = 1$ by sme totiž na ľavej strane vzťahu (4) dostali nulu a $0 < 2$, pre $y = 3, z = 3$ by ľavá strana bola väčšia ako číslo 2.

Môžu teda nastať iba tieto prípady:

a) $z = 1, y = 2$, potom vychádza $k_1^2 = 2$ a teda $k_1 = \sqrt{2}$. Zo vzťahu

(1) pre $z = 1$ dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2$$

čo nám ukazuje, že ide o pravouhlý trojuholník. Dosadením $z = 1$, $k_1^2 = 2$ dostaneme $k_2^2 = 3$, a teda $k_2 = \sqrt{3}$.

Pre strany trojuholníka obdržíme z (2)

$$b = a\sqrt{2}, c = a\sqrt{3},$$

teda vskutku ide o pravouhlý trojuholník, ktorý tvorí hrana kocky, jej stenová a telesová uhlopriečka;

b) $z = 1$, $y = 3$, potom vychádza $k_1^2 = 1$, a teda $k_1 = 1$. Rovnakým postupom ako prv obdržíme teraz $k_2 = \sqrt{2}$ a pre strany trojuholníka, ktorý je zasa pravouhlý ($z = 1$), dostaneme

$$b = a, c = a\sqrt{2}$$

Ide teda o rovnoramenný pravouhlý trojuholník;

c) $z = 2$, $y = 2$, potom musí $k_1^2 = 1$ aj $k_2^2 = 1$, teda $k_1 = 1$, $k_2 = 1$. Pre strany trojuholníka obdržíme z (2) $b = a$, $c = a$, trojuholník je rovnostranný.

Tým je tvrdenie vety dokázané, lebo prípady

$$y = 1, z = 2 \quad \text{a} \quad y = 1, z = 3$$

vedú analogicky k takým trojuholníkom, k akým sme došli v prípadoch a), b).

O t t o B e r k a, Gottwaldov:

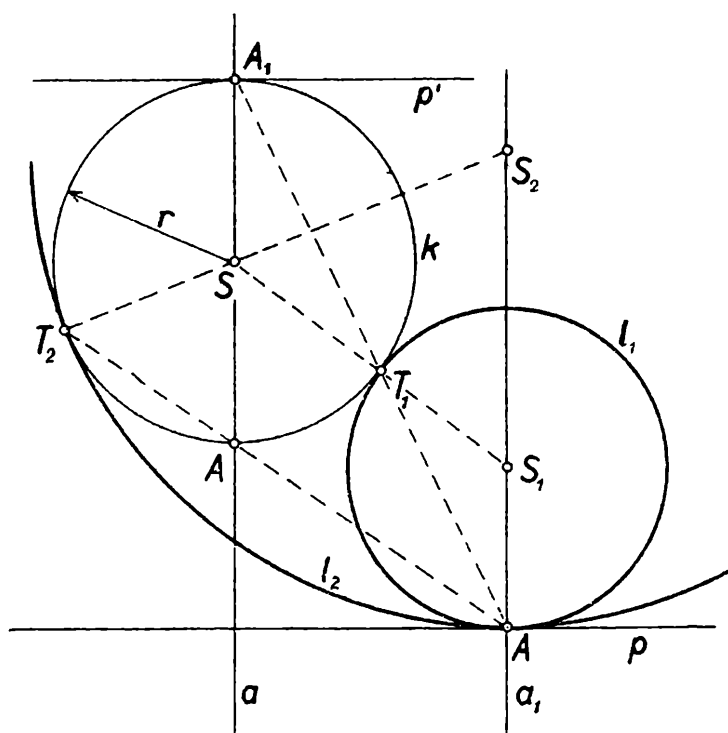
Dilatace

Na bývalých reálkách učili väčšinou skvelí matematikové. Mezi ně patřil i prof. Václav Ingriš. Nevzpomínám si, že by se na nás žáky někdy usmál, ale přesto jsme ho zbožňovali. Jeho oborem byla hlavně geometrie, a tak při každé příležitosti pečoval o naši rovinnou nebo prostorovou představivost. Zvláště rád probíral partie z geometrie, kde se něco dělo, zvětšovalo nebo zmenšovalo, posunovalo, otáčelo atd. Nikdy nám nedonesl do třídy model nějakého tělesa nebo geometrického problému. Všechno jsme si museli „vymodelovat“ sami vlastními prostředky: tužka - přímka, trojúhelník - rovina, konec prstu - bod atd. Složitější modely jsme dělali dva. Na tyto „modely“ jsme se museli dívat shora (půdorys), zboku (nárys), spojovali jsme různé pomyslné body, nám však jasné v naší představivosti. Když na to vzpomínám, myslím, že na nás musel být milý pohled, asi jako na chovance nějakého ústavu. Každou chvíli někdo vstal, aby na to „lépe“ viděl shora.

Měl v ruce jen tužku, bod A byl konec prstu, další tužka ležela na lavici. Nezasvěcený by nad tím zakroutil hlavou, ale onen žák v tomto modelu viděl prostorově vyřešenou úlohu: Daným bodem A vedte příčku s mimoběžek p, q . A on tam viděl i tu rovinu Ap !

Když to tak srovnávám s dnešní situací na školách, myslím, že to množství precizně provedených modelů neučí žáky představivosti. Žák pak zpravidla jen popisuje, co vidí. A tím se představivost necvičí.

Co však má společného nadpis článku s tímto úvodem? V dalším se bude také něco dít, zvětšovat, zmenšovat, posunovat. A to bude klást na vaši představivost určité nároky.



Obr. 1

Nejprve vyřešíme pomocí stejnolehlosti jeden příklad a pak tentýž příklad novou metodou, pomocí *dilatace*.

Příklad 1. Je dána kružnice $k(S, r)$, přímka p a na ní bod A . Sestrojte kružnici l_1 , která se dotýká kružnice k a přímky p v bodě A (obr. 1).

Představme si, že příklad je již vyřešen. Kružnice l_1 splňuje dané podmínky, neboť se dotýká kružnice k a dané přímky p v jejím daném bodě A . Z teorie stejnolehlosti víme, že střed stejnolehlosti dvou dotýkajících se kružnic je právě bod T_1 dotyku těchto kružnic. V této stejnolehlosti odpovídá středu S_1 hledané kružnice l_1 střed S dané kružnice k . Dále bodu A na kružnici l_1 odpovídá bod A_1 na kružnici k , přičemž přímka A_1A prochází středem T_1 stejnolehlosti a tečně p odpovídá tečna $p' \parallel p$, vedená bodem A_1 ke kružnici k . Jelikož $S_1A \perp p$, pak také $A_1S \perp p$.

Z tohoto rozboru plyne konstrukce:

1. Středem S vedeme přímku $a \perp p$ a určíme její průsečíky A_1, A_2 s kružnicí k .

2. Průsečík $T_1 \equiv A_1 A$ je bodem dotyku kružnice k a hledané kružnice l_1 a zároveň střed stejnolehlosti.

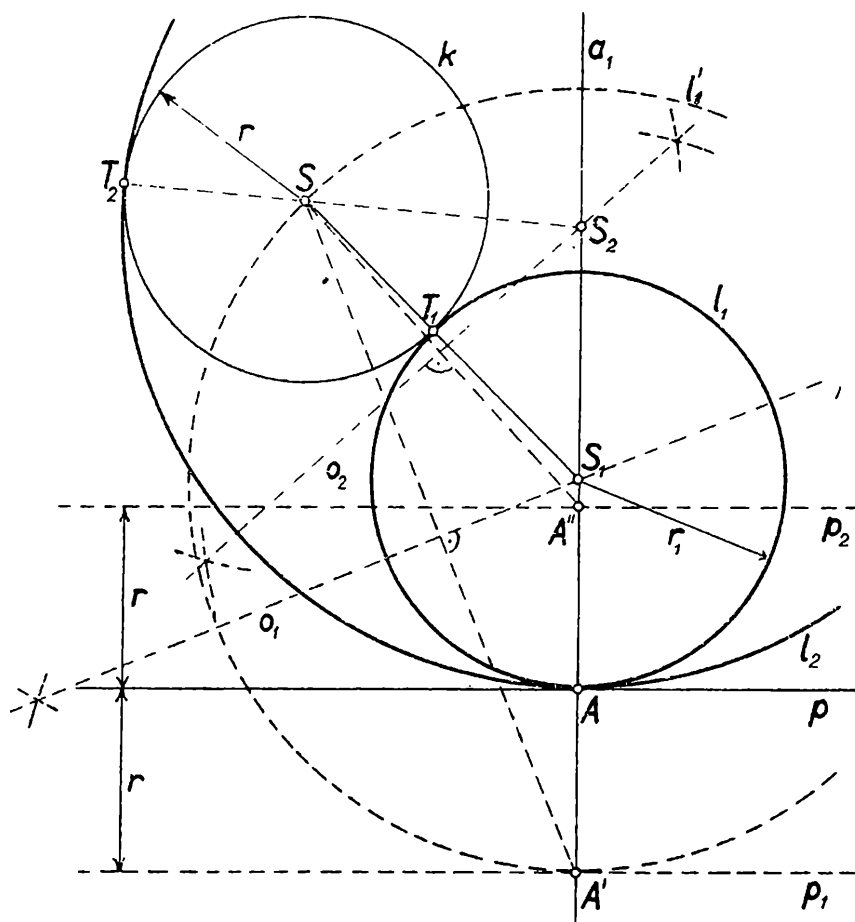
3. Bodem A vedeme $a_1 \perp p$.

4. $ST_1 \cdot a_1 \equiv S_1$, střed hledané kružnice l_1 ($S_1, S_1 T_1$).

5. $AA_2 \cdot k \equiv T_2$.

6. $T_2 S \cdot a_1 \equiv S_2$, střed kružnice l_2 , která je druhým řešením dané úlohy.

Správnost konstrukce vyplývá z provedeného rozboru. Zajímavou diskusi si čtenář provede sám. A nyní tutéž úlohu vyřešíme jiným způsobem.



Obr. 2

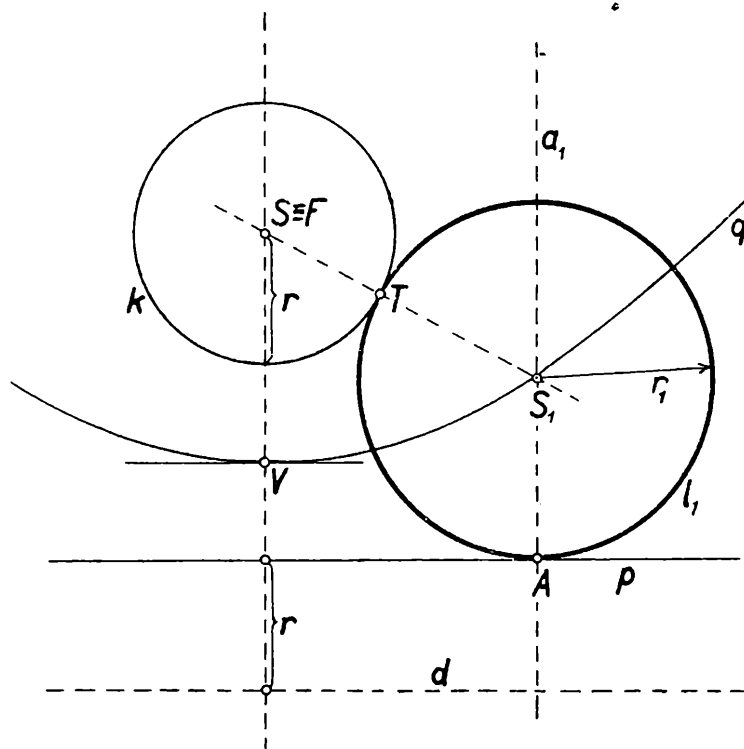
Na obr. 2 je úloha již vyřešena. Představme si, že hledaná kružnice $l_1 \equiv (S_1, r_1)$ se „zvětšuje“, až prochází středem S dané kružnice k . Tuto kružnici o poloměru $r_1 + r$ označme l'_1 . Při tomto zvětšování posouváme přímku p až do polohy $p' \parallel p$. Bod A přejde do A' na přímce p_1 . Současně se daná kružnice k „zmenšuje“ až na bod S . Z obrázku je zřejmé, že hledaná kružnice l_1 a l'_1 jsou soustředné.

Touto transformací jsme převedli původní dosti obtížnou úlohu na úlohu elementární: Je dán bod S a přímka p_1 , která neprochází bodem S . Dále na přímce p_1 je dán bod A' . Sestrojte kružnici l'_1 , která se dotýká přímky p_1 v bodě A' a prochází bodem S .

Tuto dovedeme velmi lehce vyřešit. Symetrála o_1 úsečky SA' protíná přímku a_1 v bodě S_1 , který je středem kružnice l'_1 . Avšak podle rozboru je S_1 také středem hledané kružnice l_1 , protože l'_1 a l_1 jsou soustředné. Poloměr kružnice l_1 je $r_1 = S_1A$. Bod T_1 dotyku obou kružnic je v průsečíku přímky S_1S s danou kružnicí k .

Kdybychom poloměr r_1 hledané kružnice l_1 zmenšili o r , pak přímka p přejde v $p_2 \parallel p$ a bod A v A'' na p_2 . Symetrála o_2 úsečky SA'' protne přímku a_1 v bodě S_2 , který je středem kružnice l_2 . Kružnice l_2 je druhým řešením dané úlohy.

Této metodě řešení předcházejícího příkladu říkáme *dilatace*¹⁾. Spo-



Obr. 3

čívá v tom, že zvětšením, zmenšením a příslušným posunutím některých prvků převedeme danou úlohu na jinou, jednodušší. Velikost zvětšení nebo zmenšení se nazývá *velikost dilatace*.

Daný příklad se dá řešit ještě třetím způsobem (obr. 3). Platí věta: Množina středů S_1 všech kružnic, které se dotýkají přímky p a kružnice k (S, r) je parabola q , která má ohnisko F ve středu S dané kružnice k a její řídicí přímka d je rovnoběžná s přímkou p ve vzdálenosti rovné poloměru r dané kružnice.

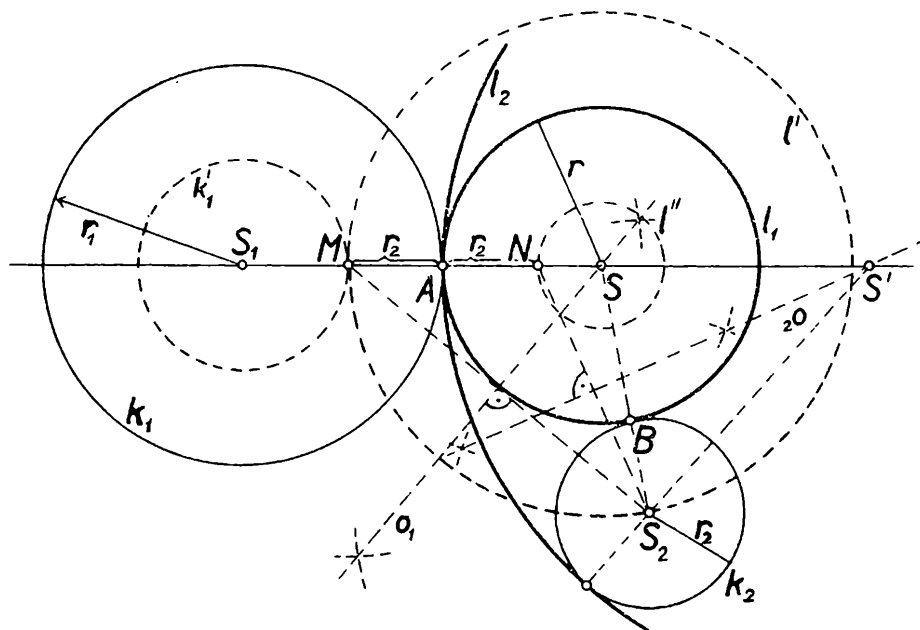
Jestliže se tedy hledaná kružnice l_1 má dotýkat přímky p v bodě A , pak střed S_1 kružnice l_1 je v průsečíku paraboly q a přímky $a_1 \perp p$, jdoucí bodem A . Podíváme-li se dobře na obrázek, jistě uvidíme v řídicí přímce d přímku p_1 z předcházejícího řešení. Pokuste se najít tímto způsobem druhé řešení.

¹⁾ Dilatace z lat. dilatare = rozšiřovat, prodlužovat, zvětšovat.

Příklad 2. Sestrojte kružnici $l_1 \equiv (S, r)$, která se dotýká kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ v jejím daném bodě A a mimoto jiné dané kružnice $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ (obr. 4).

Řešení. Představme si, že hledaná kružnice $l_1 (S, r)$ se zvětšuje a přejde v kružnici l' , která má poloměr $r + r_2 = SM$. Současně kružnice k_2 se zmenší na bod S_2 a kružnice k_1 se zmenší na kružnici k'_1 o poloměru $r_1 - r_2$. Velikost dilatace je tedy r_2 .

Touto transformací se převede daná úloha na úlohu: Sestrojte kružnici $l' (S)$, která prochází bodem S_2 a dotýká se kružnice k'_1 v bodě M .



Obr. 4

To je však elementární úloha. Střed S leží na polopřímce S_1A a ose o_1 úsečky MS_2 . Tento střed S je zároveň středem hledané kružnice $l_1 (S, r = SA)$. Jestliže hledaná kružnice l_1 se zmenší a přejde v kružnici l'' o poloměru $r - r_2 = SN$, pak symetrála o_2 úsečky NS_2 protne polopřímku S_1A v bodě S' a kružnice $l_2 \equiv (S', S'A)$ je druhým řešením dané úlohy.

Cvičení

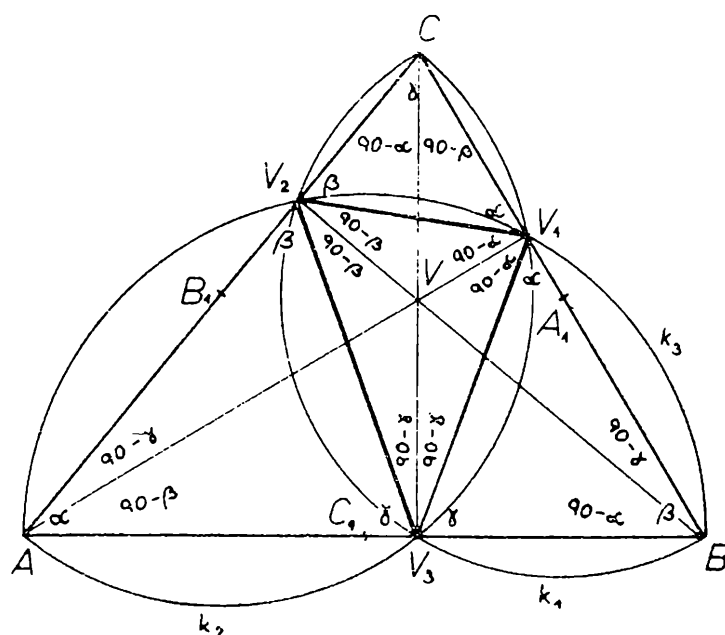
1. Sestrojte kružnici k , která se dotýká tří daných kružnic o stejném poloměru.
2. Sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala dvou daných různoběžek a, b a dané kružnice l .
3. Sestrojte druhé řešení poslední úlohy v textu pomocí paraboly.

Kružnice devíti bodů

Přípravné úvahy, a) Výška trojúhelníka je osou úhlu trojúhelníka, vzniklého spojením pat výšek uvažovaného trojúhelníka (obr. 1).

Daný trojúhelník ABC má výšky AV_1 , BV_2 , CV_3 , kde V_1 , V_2 , V_3 jsou paty výšek. Sestrojíme-li nad průměrem AB půlkružnici k_3 (střed její je C_1), jsou v této polokružnici obvodové úhly nad týmž obloukem BV_1 sobě rovny:

$$\sphericalangle BAV_1 = \sphericalangle BV_2V_1 = 90^\circ - \beta$$



Obr. 1. Výška trojúhelníku spuštěná na protější stranu je osou úhlu trojúhelníka vzniklého spojením pat výšek původního trojúhelníka.

Obdobně bychom zjistili, že

$$\sphericalangle BV_2V_3 = \sphericalangle BCV_3 = 90^\circ - \beta,$$

tj.

$$\sphericalangle BV_2V_3 = \sphericalangle BV_2V_1,$$

tj. výška BV_2 půlí úhel trojúhelníka $V_1V_2V_3$, což jsme měli dokázat. Platí-li to však pro jeden úhel trojúhelníka $V_1V_2V_3$, platí to i pro druhé dva.

P o z n á m k y. 1. Čtenáři doporučuji, aby si sestrojil tupouhlý trojúhelník a snažil se dokázat vyslovenou větu i v tomto případě.

2. Z dokázané věty plyne, že

$$\triangle ABC \sim \triangle AV_2V_3 \sim \triangle V_1BV_3 \sim \triangle V_1V_2C$$

Vyjádríme slovy:

Trojúhelník, vzniklý spojením pat výšek daného trojúhelníka, odděluje od původního trojúhelníka tři trojúhelníky, které jsou vzájemně podobné a podobné trojúhelníku danému.

b) Osa vnitřního úhlu trojúhelníka se s osou protější strany protíná na kružnici opsané danému trojúhelníku.

Budiž C_3 průsečík kružnice k opsané trojúhelníku ABC s osou strany AB . Strana AB i oblouk $\widehat{AB}$ jsou osou strany AB půleny. Proto obvodový úhel ACC_3 se rovná obvodovému úhlu BCC_3 a tím je vyslovená věta dokázána.

Vzájemná poloha těžiště, ortocentra a středu opsané kružnice trojúhelníka (obr. 3). V trojúhelníku ABC označíme A_1, B_1, C_1 středy jeho stran, V_1, V_2, V_3 paty jeho výšek, S_0 střed kružnice jemu opsané, V průsečík výšek (ortocentrum), T těžiště a S_0 střed kružnice k_9 opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Potom platí, že body S_0, T, S_9 a V leží v přímce a přitom S_9 půlí úsečku S_0V a $2S_0T = TV$.

To dokážeme užitím stejnolehlosti. Zvolíme-li za střed stejnolehlosti bod T a bodu A přiřadíme v ní bod A_1 , je poměr stejnolehlosti

$$\frac{TA_1}{TA} = \frac{1}{2}$$

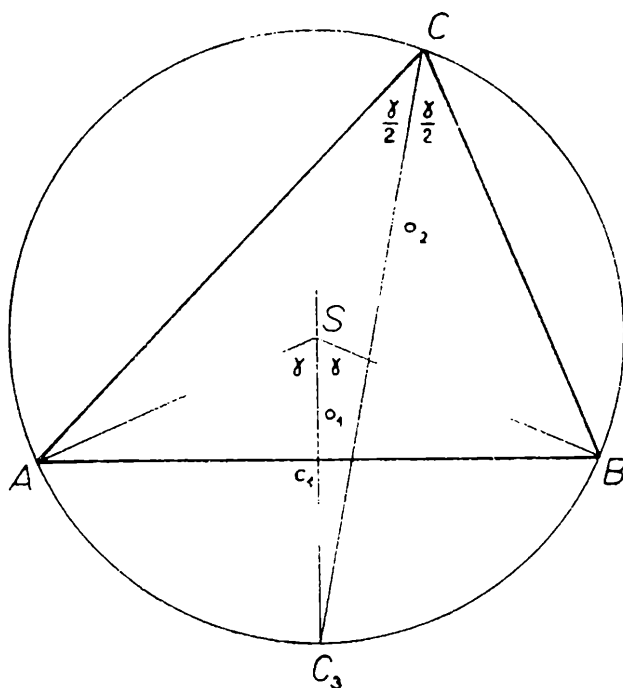
Bodu B pak odpovídá bod B_1 .

Poněvadž $S_0A_1 \parallel AV$, leží bod V' odpovídající v této stejnolehlosti bodu V na S_0A_1 . Poněvadž také $S_0B_1 \parallel BV$, je V' průsečík přímek S_0A_1 a S_0B_1 , tj. $V' \equiv S_0$. Potom

$$\frac{TV'}{TV} = \frac{TS_0}{TV} = \frac{1}{2},$$

jak bylo třeba dokázat. Přitom S_0 a V leží na opačných polopřímkách s počátkem T .

Trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ mají stejné těžiště T . Dále S_0 je průsečík



Obr. 2. Osa úhlu trojúhelníka protíná se s osou protější strany trojúhelníka na obvodu opsané kružnice.

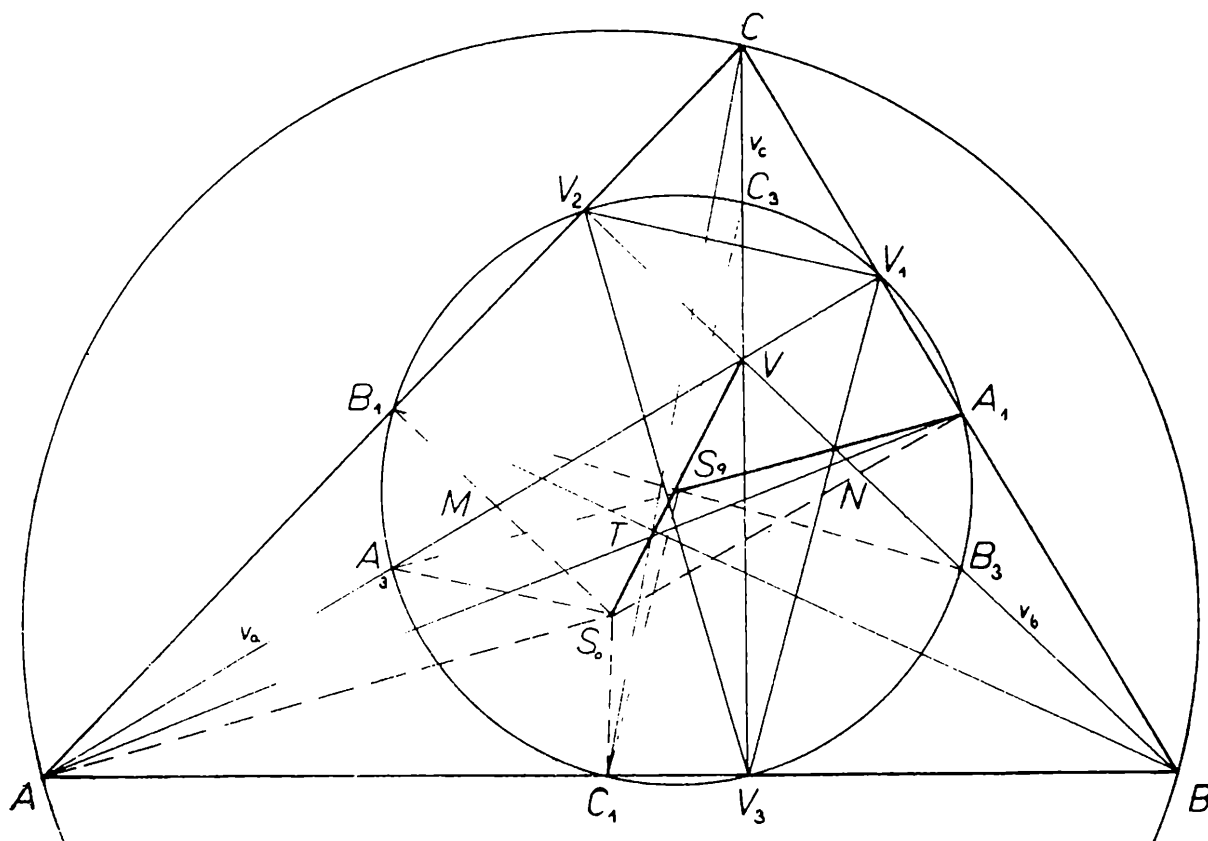
výšek trojúhelníka $A_1B_1C_1$. Podle toho, co bylo dokázáno, platí tedy

$$\frac{TS_9}{TS_0} = \frac{1}{2},$$

při čemž S_0 a S_9 leží na opačných polopřímkách s počátkem T . Je pak

$$\begin{aligned} S_9 V &= TV - TS_9 = 2 TS_0 - \frac{1}{2} TS_0 = \frac{3}{2} TS_0 = TS_0 + \frac{1}{2} TS_0 = \\ &= TS_0 + TS_9 = S_0 S_9, \end{aligned}$$

jak mělo být dokázáno.



Obr. 3. Kružnice jdoucí devíti body trojúhelníku, a to: Třemi středy stran, třemi patami výšek, třemi průsečíky os úhlů trojúhelníku vzniklého spojením pat výšek s osami jeho protějších stran.

Kružnice jdoucí devíti body trojúhelníka (obr. 3). Budtež A_3, B_3, C_3 průsečíky výšek v_a, v_b, v_c trojúhelníka ABC s kružnicí k_9 . Potom A_1A_3, B_1B_3 a C_1C_3 jsou průměry kružnice k_9 . To plyne ze stejnolehlosti s poměrem -1 a středem S_9 . Je to vlastně středová souměrnost. Tato stejnolehlost převádí bod A_1 v bod A'_1 , který leží na k_9 , a bod S_0 v bod V . ($A_1A'_1$ je tedy průměr kružnice k_9). Poněvadž $S_0A_1 \perp BC$ a $VA \perp BC$, je

$$S_0A_1 \parallel VA$$

a tedy A'_1 leží na VA , tj. $A'_1 \equiv A_3$, jak bylo třeba dokázat. Cyklickou záměnou pak plynou analogická tvrzení o B_1B_3 a C_1C_3 .

Nad průměrem A_1A_3 kružnice jdoucí třemi středy stran je sestrojen pravý úhel, jehož jedno rameno je část výšky a druhé část strany $BC = a$.

Vrchol tohoto pravého úhlu sestrojeného podle věty Thaletovy je patou výšky AV_1 . Proto V_1 leží na kružnici jdoucí jak středy stran, tak patami výšek, neboť co platí pro jednu patu výšek, platí i pro ostatní paty. Tím jsme dokázali první část věty o kružnici.

V přípravném studiu jsme prokázali jednak, že výška trojúhelníku spuštěná na protější stranu je osou úhlu trojúhelníku vzniklého spojením pat výšek původního trojúhelníku, jednak že tato osa trojúhelníku se protíná s osou protější strany na obvodu opsané kružnice. Např. výška AV_1 , která je osou úhlu $V_2V_1V_3$, protíná se s osou protější strany V_2V_3 v bodě A_3 , který leží na kružnici opsané trojúhelníku sestrojenému z pat výšek daného trojúhelníku. Obdobné platí o průsečících ostatních výšek (které jsou osami úhlů) s osami protějších stran.

Tím jsme odvodili vlastnosti kružnice devíti body trojúhelníku, a to třemi středy stran, třemi patami výšek, třemi průsečíky os úhlů trojúhelníku vzniklého spojením pat výšek a os jeho protějších stran.

Kružnice devíti bodů trojúhelníka má ještě jiné vlastnosti, a to

1. Spojnice středu kružnice opsané trojúhelníku S_0 , těžiště T , průsečík výšek a střed kružnice devíti bodů leží na téže přímce.

2. Střed kružnice devíti bodů leží uprostřed spojnice středu S_0 kružnice opsané trojúhelníku a průsečíků výšek, jak vyplývá také z rovnoběžníku $S_0NV M$.

3. $S_9T = \frac{1}{3} S_9S_0$, jak vyplývá také z kosodélníku $AS_0A_1A_3$ a jeho poloviny $\triangle S_0A_1A_3$.

Trojúhelník, ačkoliv je ze všech rovinných obrazců nejjednodušší, poskytuje možnost nacházet v něm zajímavé vlastnosti a vztahy. Je mezi nimi i další vyplývající z odvozených poznatků, že průměr kružnice devíti bodů je poloměrem kružnice trojúhelníku opsané.

Deskriptivní geometrie

František Hradecký, Praha:

O určitých geometrických místech

(Dokončení)



Pascalovu závitnici můžeme sestavit též tak, že určíme délku úsečky $O_1G = O_1X_1 = \cos \frac{\varphi}{2}$ a tuto nanese na koncové

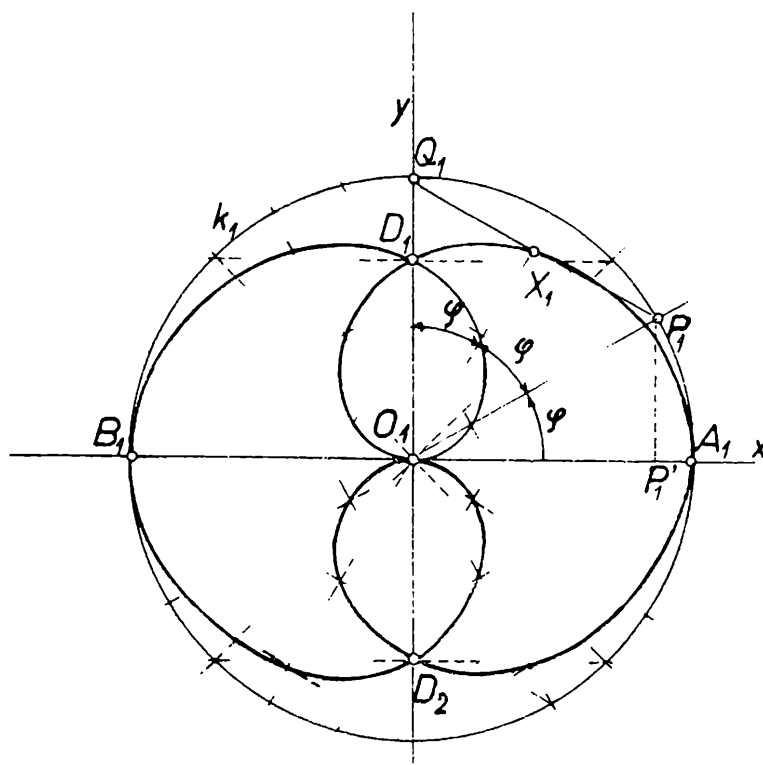
rameno úhlu $\widehat{A_1O_1X_1} = 3 \frac{\varphi}{2}$

Úloha 5. Po obvodu dolní podstavy válce se pohybuje rovnoměrně bod P , po obvodu horní podstavy se pohybuje v témže smyslu trojnásobnou rychlostí bod Q . Máme určit geometrické místo středů úseček PQ (obr. 6).

Budeme postupovat analogicky jako v předcházející úloze. Sestrojíme-li $\widehat{A_1O_1Q_1} = 3 \cdot \widehat{A_1O_1P_1}$, náleží střed X_1 úsečky P_1Q_1 pravoúhlému průmětu hledaného geometrického místa do roviny kolmé k ose rotační válcové plochy.

Pro souřadnice bodu X_1 v pravoúhlé soustavě souřadnic s počátkem v bodě O_1 a kladné poloose x v polopřímce O_1A_1 ($A_1O_1 = 1$) platí

$$x = \frac{\cos \varphi + \cos 3\varphi}{2} \quad y = \frac{\sin \varphi + \sin 3\varphi}{2} \quad (5)$$



Obr. 6

Umocněním těchto rovnic dvěma a jejich sečtením dostaneme po úpravě

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \varphi \quad (6)$$

Odtud dostaneme $\cos \varphi = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$,

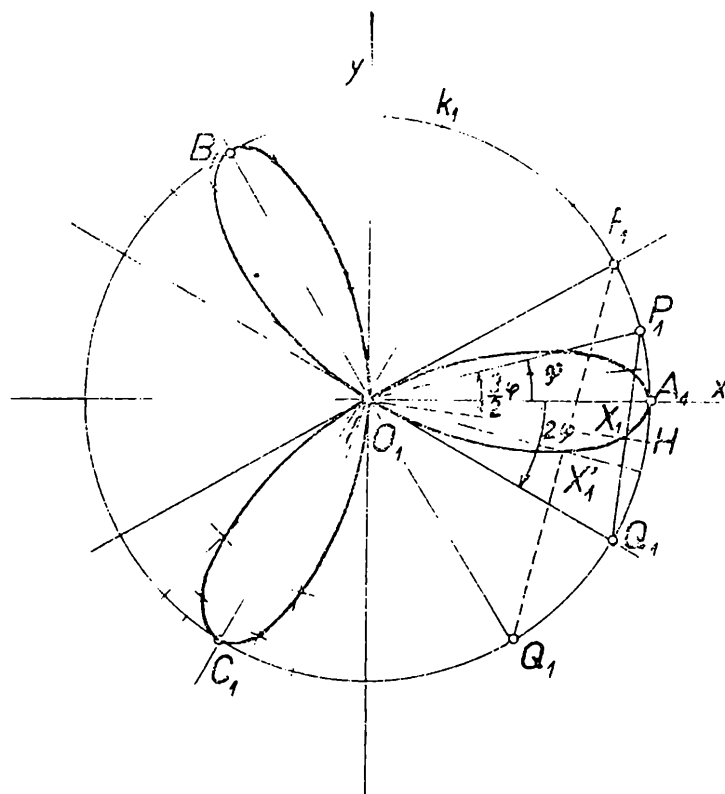
$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi = \pm \sqrt{x^2 + y^2} [4(x^2 + y^2) - 3].$$

Po dosazení do první rovnice z (5), po umocnění dvěma a úpravě dostaneme rovnici

$$y^2 = 4(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)^3 \quad (7)$$

Vedle dříve uvedené konstrukce můžeme křivku sestřít jednoduše takto: Zvolíme libovolný úhel $\widehat{A_1 O_1 P_1} = \varphi$ a určíme délku úsečky $O_1 P'_1 = \cos \varphi$. Pak sestrojíme úhel $\widehat{A_1 O_1 X_1} = 2\varphi$ a na jeho koncové rameno nanese úsečku $O_1 X_1 = O_1 P'_1$ (obr. 6). Tím dostaneme bod X_1 hledaného geometrického místa.

Z rovnice (7) a z provedené konstrukce plyne, že křivka je souměrná podle osy x i podle osy y . Křivka má dvojnásobné body v bodech $D_1 \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$, $D_2 \left[0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ a v počátku, kde má bod sebedot-



Obr. 7

ty k u. K bodům D_1 a D_2 přísluší úhly $\varphi = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$ a k bodu O_1 úhel $\varphi = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, kde k je nezáporné celé číslo.

Je-li rychlost bodu Q n -krát větší než rychlost bodu P (n je přirozené celé číslo) a pohybují-li se body v témže smyslu, je konstrukce geometrického místa středů úseček PQ analogická. Parametrické vyjádření těchto křivek (pro n přirozené číslo) je

$$x = \frac{\cos \varphi + \cos n\varphi}{2} \quad y = \frac{\sin \varphi + \sin n\varphi}{2} \quad (8)$$

Určení rovnic těchto křivek v pravoúhlé soustavě souřadnic vyžaduje vyloučení parametru φ z rovnic (8), což je ve většině případů úloha značně obtížná. Pro sestrojování uvedených křivek však odvození těchto rovnic není nutné.

Přenechávám čtenáři, aby uvažoval o konstrukci geometrického místa středů úseček PQ , jestliže se body P a Q pohybují v témže smyslu po dvou shodných různých kružnicích ležících v téže rovině, je-li rychlost bodu Q rovna celým násobkům rychlosti bodu P .

V další úloze budeme předpokládat, že body P a Q se pohybují po shodných kružnicích, ale v opačných smyslech.

Ú l o h a 6. Po obvodech kruhových podstav na rotačním válci se pohybují body P a Q v navzájem opačných smyslech. Rychlost bodu Q je rovna dvojnásobku rychlosti bodu P . Určete geometrické místo středů úseček PQ (obr. 7).

Hledané geometrické místo vyplní jistou křivku v rovině σ procházející středem válce a rovnoběžné s rovinami obou podstav. Budeme opět vyšetřovat geometrické místo pravoúhlých průmětů středů úseček P_1Q_1 .

Zvolíme-li libovolný úhel $\widehat{A_1O_1P_1} = \varphi$ a přeneseme jej dvakrát v opačném smyslu od počátečního ramene O_1A_1 , takže úhel je $\widehat{A_1O_1Q_1} = -2\varphi$. Střed X_1 úsečky P_1Q_1 náleží pravoúhlému průmětu hledaného geometrického místa.

Zvolíme-li soustavu souřadnic jako v předcházející úloze, je parametrické vyjádření hledané křivky

$$x = \frac{\cos \varphi + \cos (-2\varphi)}{2}, \quad y = \frac{\sin \varphi + \sin (-2\varphi)}{2}. \quad (9)$$

Po stejné úpravě jako v předcházejících příkladech dostaneme

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \frac{3\varphi}{2}, \quad \text{tj.} \quad O_1X_1 = \left| \cos \frac{3\varphi}{2} \right| \quad (10)$$

Odtud plyne další jednoduchá konstrukce křivky: Je-li $\widehat{A_1O_1P_1} = \varphi$, přeneseme v opačném smyslu $\widehat{P_1O_1H_1} = \frac{3\varphi}{2}$. Z bodu P_1 sestrojíme kolmici na O_1H_1 ; pata X_1 této kolmice náleží hledané křivce.

Křivka má rovnici

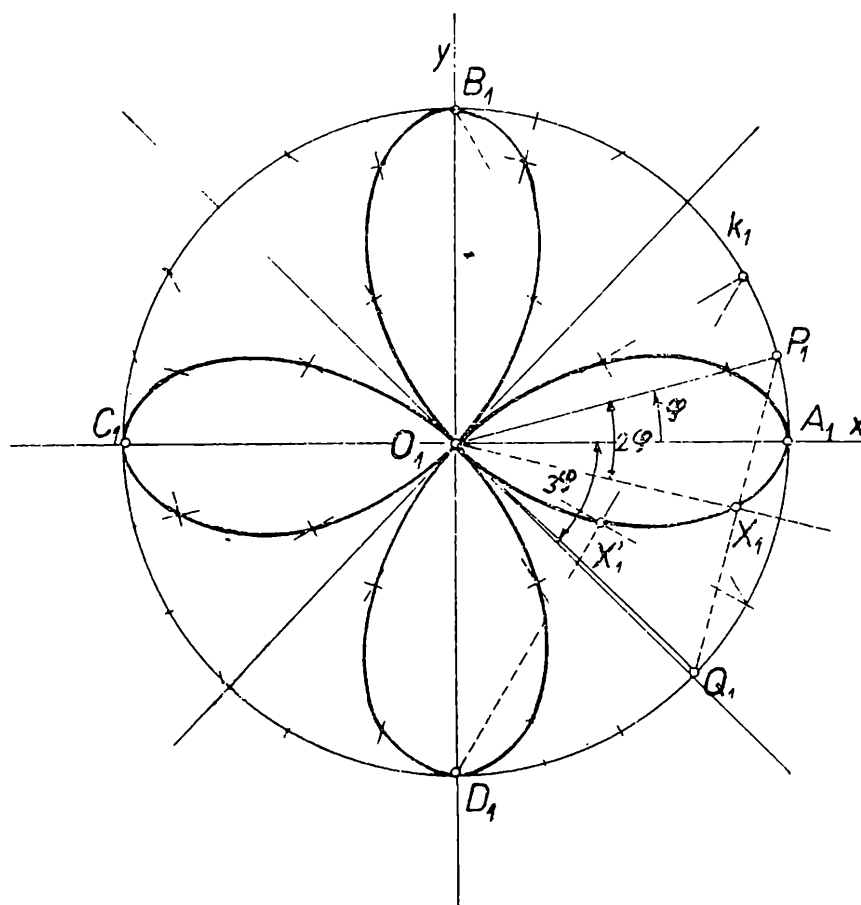
$$(x^2 + y^2)^2 = x \cdot (x^2 - 3y^2) \quad (11)$$

Můžete se přesvědčit o správnosti dosazením rovnic (9) do (11). Z rovnice (11) a z provedené konstrukce plyne, že křivka je souměrná podle osy x . Ze vztahu (10) plyne, že pro $\varphi = (2k + 1) \frac{\pi}{3}$, kde k je celé číslo, prochází křivka počátkem, neboť pro tyto parametry je $\cos \frac{3\varphi}{2} = 0$.

Proběhne-li bod P_1 celou kružnicí k_1 , projde křivka třikrát počátkem (pro $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$). Je proto bod O_1 pro křivku bodem trojnásobným.

Pohybuje-li se bod Q_1 trojnásobnou rychlostí než bod P a v opačném smyslu, dostaneme jako geometrické místo středů úseček P_1Q_1 křivku zobrazenou na obr. 8.

Přenechávám čtenáři, aby uvážil, co je geometrickým místem středů úseček PQ , pohybují-li se body P a Q po obvodech podstav kosého válce v témže nebo v opačném smyslu za předpokladu, že rychlost bodu Q je celým násobkem rychlosti bodu P ($n = 1, 2, 3 \dots$).



Obr. 8.

P o z n á m k a. Při rýsování uvedených křivek je výhodné napřed rozdělit kružnici k_1 na 24 shodných dílů a pak vhodným spojováním bodů na základní kružnici k_1 přímkami a sestrojováním průsečíků těchto přímek určovat body hledaných křivek. Konstrukce všech zde uvedených křivek jsou pak velmi jednoduché.

Příklady k 2. části.

1. V rovině jsou dány dvě různé kružnice k_1 a k_2 o témže poloměru. Určete geometrické místo středů úseček PQ , pohybuje-li se rovnoměrně bod P po kružnici k_1 a bod Q v témže smyslu rychlostí dvojnásobnou po kružnici k_2 .

2. Řešte tutéž úlohu za předpokladu, že oba body se pohybují navzájem v opačných smyslech.

3. Po obvodech kruhových podstav kolmého válce se pohybují rovnoměrně body P a Q v témže smyslu, přičemž rychlost bodu Q se rovná čtyřnásobku rychlosti bodu P . Narýsujte křivku, která je geometrickým místem středů úseček PQ . (V pravoúhlém promítání na rovinu kolmou k ose válcové plochy. Zvolte $O_1A_1 = 10$ a obvod kružnice k , rozdělte předem na 48 shodných dílů.)

4. Odvodte rovnici (11) vyloučením parametru φ z rovnic (9). [Pokyn. První rovnici z (9) uveďte na tvar $x = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2}$ a pak užitě vztahu (10).]

5. Řešte příklad 3. pro případ, že smysly pohybujících se bodů jsou opačné a rychlost bodu Q se rovná trojnásobku rychlosti bodu P . Odvodte rovnici této křivky (zobrazené na obr. 8) v pravoúhlé soustavě souřadnic. [Výsledek: $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^3$.]

D o c. B o ř i v o j K e p r, ČVUT, Praha:

O některých křivkách (Pokračování)

2. Úvod a základní pojmy

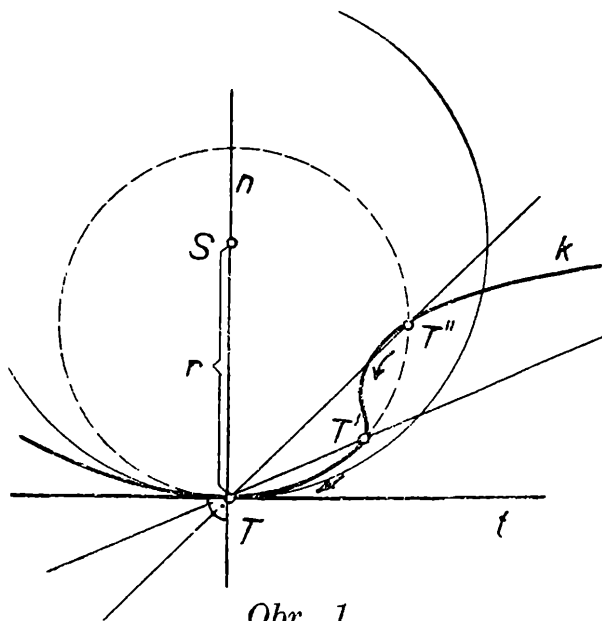
V tomto článku se zaměříme pouze na základy teorie *křivek rovinných* (tj. křivek, které leží celé v jedné rovině), a to takových, které vznikly jako *dráhy* (neboli *trajektorie*) pohybujícího se bodu v rovině (tedy jako stopa, již po sobě zanechává bod, podrobený v rovině nějakému pohybu), nebo (a to jenom ve zmínce) jako tzv. *obálky* pohybující se přímky v rovině. Taková křivka vzniká jako „obalová“ křivka všech svých tečen, které jsou postupně jednotlivými polohami pohybující se přímky v rovině.

Je řada metod, které se při svém použití všelijak prolínají a doplňují, jimiž je možno jako účinným aparátem zkoumat obecné vlastnosti celých skupin a tříd křivek, z nichž pak ihned vyplývají speciální vlastnosti vždy té nebo oné křivky, která patří do té nebo oné třídy křivek. Celé množství křivek však podle svých různých vlastností a zejména podle různých možností svého vzniku patří současně do různých skupin, takže je současně možná různá „klasifikace“ (roztrídění) týchž křivek. Těmito problémy, jinak však podstatnými, se tu nebudeme zabývat. Bylo již vlastně naznačeno, kterou z metod pro účely tohoto článku si vyvolíme. Budeme-li se na křivku (rovinnou) dívat jako na dráhu pohybujícího se bodu v rovině, pak dospíváme k nejučinnější metodě, kterou je tzv. *kinematická geometrie (rovinná)*. Této metody lze používat jednak *analyticky* (tj. početně prostřednictvím soustavy souřadnic), jednak *synteticky* (tj. konstruktivně).

Pro čtenáře *R o z h l e d ů* bude jistě přístupnější metoda konstruktivní kinematické geometrie. Pro budoucí studenty geometrie je však nutno říci, že metoda analytická, doplněná konstruktivními důsledky je přesnějším a hlavně účinnějším aparátem pro odhalování vlastností křivek a lze říci, že je dosud aparátem nejúčinnějším. Kinematická geometrie obsahuje tedy možnosti zkoumání vlastností křivek, které vznikly jako dráhy bodů (nebo jako obálky přímek) při pohybu *v rovině* (v našem případě), tj. při tzv. pohybu *komplanárním*. Kinematická geometrie má tedy svou metodou schopnost zkoumat obrovské množství skupin a tříd křivek a lze říci, že má schopnost zkoumat všechny křivky technické praxe, které vznikají při pohybech technických mechanis m ů.

Pro vybudování základů naší teorie budeme potřebovat zavést některé *základní pojmy*, které jsou asi čtenářům *R o z h l e d ů* možná již běžné, ale neuškodí, podíváme-li se na ně zevrubněji ještě jednou.

Zavedeme si nejdříve pojem *křivky*. Čtenář, který ví, že např. kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, čára, kterou zapisuje hrot na nej-různějších tlakoměrech a nej-různější grafy, ukazující např. pohyb výroby za určité období apod., jsou křivkami, bude se divit, proč zavádět pojem křivky. Každý, kdo bude jednou studovat matematiku nebo geometrii, pozná, že vystihující obecná definice křivky je komplikovaná záležitost (lajkovi až k nevíře, ale zatím tomu tak bohužel vskutku je). Pro účely našeho článku stačí úplně, jak bylo ostatně již dříve uvedeno, uvažovat křivku *k* jako dráhu (trajektorii) bodu *T*, podrobeného v rovině pohybu²⁾ (obr. 1).



Budeme dále potřebovat pojem *tečny t* a *normály n* křivky *k* v jejím bodě *T*. Bodem rovinné křivky prochází nekonečně mnoho přímek, ležících v rovině křivky a tvořících tzv. *svazek přímek*. Mezi těmito přímkami jsou dvě přímky privilegované. Jedna z nich je tečna, kterou dále zavedeme a druhá je normála. *Normála n* křivky *k* v jejím bodě *T*

²⁾ Čtenáři *R o z h l e d ů* se zdá tato definice jistě jednoduchá a nechápe, proč bylo tolik řečí kolem toho předem. Autor se totiž domnívá, že „takováto“ křivka je každému studentu „od narození“ jasná, protože pojem „pohybu“, kterého se tu používá, je čtenáři zatím nyní rovněž od narození jasný. Pojem pohybu se mu zkomplikuje až později při dalším hlubším studiu, ale to už zase mu bude jasný pojem křivky, takže se nic zlého nestane.

je přímka kolmá v tomto bodě na její tečnu t ($n \perp t$) (obr. 1). Přímka, která spojuje bod T křivky k (píšeme $T \in k$) s jejím jiným bodem T' , různým od T (píšeme $T \neq T'$) se nazývá *sečnou* této křivky. Má-li přímka s křivkou k společné pouze dva různé body T a T' , říkáme takové sečně *bisekanta*. Představme si, že bod T je na křivce k pevný a že bod T' se po křivce k blíží k bodu T . Spojnice TT' , tedy sečny křivky k , jak říkáme „probíhají“ svazek přímek, o kterém byla řeč. Spojnice TT' je stále určitá, pokud $T \neq T'$. Pozorujme, co se stane, při bližení se bodu T' po křivce k k bodu T v jediném okamžiku, kdy T' právě splyne s bodem T (píšeme $T \equiv T'$). Přímka TT' , která byla stále sečnou křivky k , má právě v tomto jediném okamžiku ($T \equiv T'$), jak říkáme s křivkou k společné dva „splývající“ „soumezné“, „sousední“ body v jejím bodě T ³⁾. V okamžiku právě popsaném stává se sečna křivky k její *tečnou* s *dotykovým bodem* v bodě T . Přibližování se bodu T' po k neomezeně k bodu T , a tudíž bližení se sečny TT' křivky k neomezeně k její tečně t v bodě T říkáme *limitní* (čili *mezní*) *přechod*. Takový limitní přechod je v tzv. „vyšší“ matematice pojem zcela běžný a souvisí velmi úzce s pojmem *derivace funkce*. Tento proces se dá zcela přesně zachytit pouze početně. Zde jsme ukázali pouze jeho tzv. geometrické znázornění. Při početním projednání se dá zcela přesně ukázat, kdy taková mezní poloha sečny - již říkáme *tečna* - v tom kterém bodě křivky vůbec existuje a kdy nikoliv.

Má-li křivka k ve svém bodě T tu vlastnost, že připouští existenci jediné určité tečny, takovému bodu říkáme *regulární bod* křivky. Bod křivky, který není jejím bodem regulárním, se nazývá *singulárním bodem* křivky. Ukážeme později na příkladech, jak vypadá singulární bod křivky.

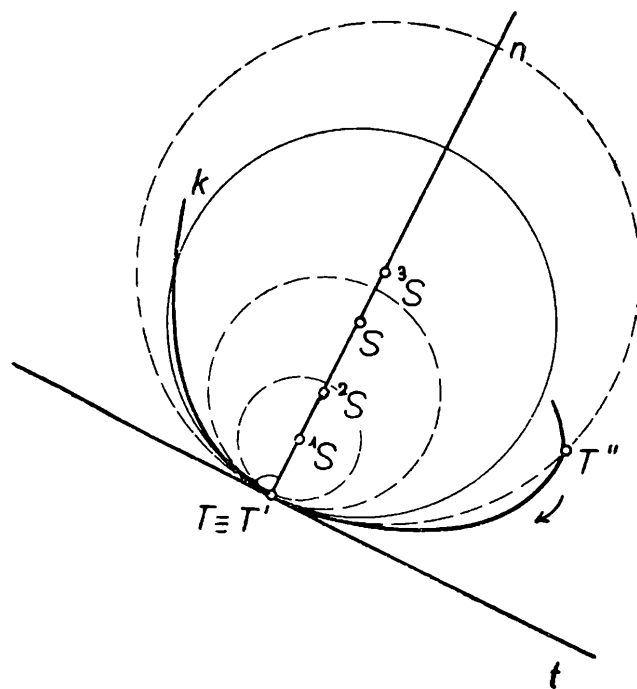
Z technického hlediska má tečna křivky v jejím bodě veliký význam. Jak bylo totiž ukázáno na vzniku tečny křivky, je to přímka, která se ve zkoumaném bodě T křivky ze všech možných přímek, jdoucích tímto bodem k této křivce v bodě T „přimyká“ nejvíce³⁾. Z praktického hlediska - při rýsování nebo při výpočtech - pak tečna ze všech možných takových přímek nejlépe imituje čili nahrazuje křivku ve vhodně malém okolí bodu dotyku. Vzhledem k popsanému vzniku tečny říkáme, že tečna má s křivkou v bodě dotyku tzv. *styk nejméně dvoubodový*.⁴⁾ ³⁾ Přímka je určena právě dvěma různými body. Tak byla určena sečna křivky a popsaným postupem jsme od sečny přišli limitním přechodem k tečně křivky, která měla v regulárním bodě

³⁾ Řčení uvedené v uvozovkách nejsou po stránce geometrické dosti přesná.

⁴⁾ Při podrobnějším vyšetřování se dá ukázat, že v některých zvláštních případech (izolovaných) má tečna v bodě dotyku s křivkou *styk vícebodový*, trojbodový, čtyřbodový atd. V takových, pouze výjimečných bodech křivky (např. *bodech inflexních*, jak bude ukázáno dále na příkladech) se její tečna přimyká ke křivce ještě úžeji.

křivky, jakožto v bodě dotyku s touto křivkou styk nejméně dvou-
bodový. V obecném případě je to styk přímky s křivkou nejvýše možný
až na výjimky uvedené v poznámce 4 pod čarou.

Jak známo, je kružnice určena jednoznačně třemi různými body,
které neleží na téže přímce. Zvolíme-li za takové tři body T , T' , T''
na křivce k , je jimi určena jediná určitá kružnice, opsaná trojúhelníku
o vrcholech T , T' , T'' (na obr. 1 je narýsována čárkovaně). Představme
si nyní, podobně jako u vzniku tečny ze sečny křivky, že bod T je
na křivce k pevný a že body T' a T'' se po křivce k blíží (jak říkáme)
neomezeně k bodu T . Kružnice určená takovými třemi body se tedy
stále mění a je stále určitá, pokud $T \neq T' \neq T'' \neq T$. Kdyby se ná-
hodou při uvedeném pohybu dostaly tyto tři různé body T , T' , T''
do přímky, považovali bychom tuto přímku za kružnici o „nekonečně
velkém“ poloměru.



Obr. 2

Pozorujme, co se stane při zmíněném bližení se bodů T' a T'' po
křivce k k bodu T v jediném okamžiku, kdy všechny tři body T , T' ,
 T'' splynou v jediný bod $T \in k$ ($T \equiv T' \equiv T''$). Kružnice, která je pak
příslušnou limitní polohou zkoumané měnící se kružnice (za předpo-
kladu, že taková mezní poloha vůbec existuje), má právě v tomto
jediném okamžiku s křivkou k v jejím bodě T , jak říkáme, společné
tři *splývající* (*soumezné*, *sousední*) body. Kružnici, která má v daném
bodě T křivky k s touto křivkou tři splývající body, nazýváme *kružnicí*
křivosti (*oskulační*) této křivky v jejím bodě. Střed S této kružnice
(na obr. 1 je oskulační kružnice vytažena slabě plně) nazýváme *středem*

křivosti dané křivky v jejím bodě, poloměr r této kružnice nazýváme *poloměrem křivosti* dané křivky k v jejím bodě. Převrácená hodnota $\frac{1}{r}$ poloměru křivosti je tzv. *křivost* [přesněji první křivost⁵⁾] zkoumané křivky v jejím bodě. Pojem kružnice křivosti ještě neopustíme, protože má v geometrii křivek nesmírný význam, stejně jako tečna, ale vzhledem k ní význam ještě větší, protože dovoluje vniknout mnohem hlouběji do konstruktivního zvládnutí křivky.

V obr. 2 je dána křivka k , v jejím bodě $T \equiv T'$ tečna křivky t , která má tento bod za bod dotyku a dále normála $n \perp t$. Každá kružnice, která má střed na normále n a prochází bodem $T \in k$, má v tomto bodě za tečnu přímku $t \perp n$, tj. každá taková kružnice (a je jich tedy nekonečně mnoho), má v T společnou tečnu t s danou křivkou k . Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o tečně křivky plyne, že všechny takové kružnice na obr. 2 jsou narýsovány některé z nich čárkovaně o středech $^1S, ^2S, ^3S$ na n - mají (prostřednictvím společné tečny) s danou křivkou k v jejím bodě T styk nejméně dvoubodový, tj., že se všechny takové kružnice křivky k v jejím bodě T „přinejmenším“ dotýkají. Všimněme si na obr. 2 kružnice o středu 3S , která se v bodě $T \equiv T'$ přinejmenším dotýká dané křivky k (má tam s ní společnou tečnu t) a dále ji protíná v bodě $T'' \neq T$. Bude-li se střed 3S pohybovat spojitě po normále n , bude příslušná kružnice nabývat postupně polohu všech kružnic, dotýkajících se v bodě T dané křivky k . Rovněž tak průsečík T'' této měnící se kružnice s křivkou k se bude pak pohybovat po křivce k . Pohybujme středem 3S zmíněné kružnice po normále n tak, aby bod T'' se po křivce k blížil neomezeně k bodu $T \equiv T'$. V tom okamžiku, kdy bod $T'' \in k$ splyne s bodem $T \equiv T'$, bude střed 3S pohybuje se kružnice v té poloze S na n , kdy příslušná kružnice bude mít v bodě $T \equiv T' \equiv T''$ se zkoumanou křivkou k společně splývající nejméně tři body (styk nejméně trojbodový), tj. kdy bod 3S se stane právě středem S křivosti a příslušná kružnice oskulační kružnicí dané křivky v jejím bodě T . Na obr. 2 je oskulační kružnice narýsována slabě plně. Z této úvahy plynou závěry:

1. *Střed oskulační kružnice křivky v jejím bodě T leží na normále této křivky v bodě T .*

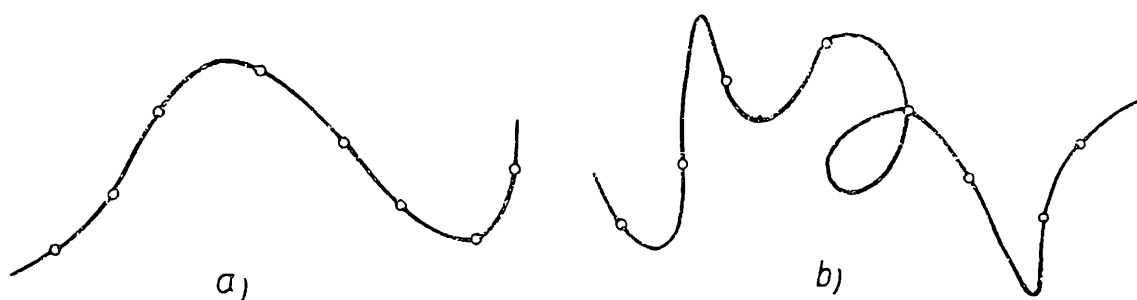
Vlastní konstrukci příslušné oskulační kružnice si ukážeme pouze na některých jednoduchých příkladech křivek. Dále ukážeme dvě přibližné konstrukce oskulační kružnice v případě tzv. *křivky empirické*, tj. v pří-

⁵⁾ Kromě křivek rovinných existují i *křivky prostorové* (např. šroubovice), jejichž všechny body neleží v téže rovině. Křivky prostorové mají ve svých regulárních bodech vždy dvě křivosti: první *flexi* a druhou tzv. *torsi*. U křivek rovinných, o které nám tu jediné jde, je druhá křivost ve všech jejích bodech rovna stále nule. Vystupuje tedy u křivek rovinných pouze první křivost, a proto v tomto případě hovoříme ve stručnosti pouze o křivosti.

padě obecné křivky „jen tak“ narýsované, křivky bez udaného, větší-
nou neznámého, tzv. výtvarného zákona. Je to křivka, která je dána
a není buď známo jak vznikla, nebo víme jak vznikla, ale neznáme
přesnou, geometrickou nebo matematickou definici jejího vzniku. Sem
patří všechny tzv. *grafické křivky*, vytvořené např. zápisem seismografu,
tlakoměru, získané měřeními, prostě pokusně, empiricky.

2. V daném bodu křivky se jí dotýká nekonečně mnoho kružnic.
*Oskulační kružnice je ta z nich, která se ke křivce v okolí jejího daného
bodu nejvíce „přimyká“.*

Učiníme nyní nutnou a užitečnou odbočku od vlastního výkladu.
Snad téměř všichni výkonní technici na světě jsou při své běžné *grafické*
práci odkázáni v současné době v podstatě na pravítko a kružítko.⁶⁾



Obr. 3a, b

Mohou tedy bez rozpaků graficky přesně při své práci vytvářet přímky
a kružnice. Všechny jiné křivky, které se v jejich praxi vyskytují v téměř
nezměrném množství, by mohli „vyrábět“ tedy tak, že by zkonstruovali
potřebný počet bodů těchto křivek podle daného výtvarného zákona té
které křivky a tyto body by pak plynule spojili třeba podle křivítka
a měli by potřebnou část určité křivky. Pro názornou a předběžně orien-
tační potřebu ve výrobě by to jistě mnohdy stačilo, zejména následuje-li
přesný výpočet. V mnohem přesnějších záležitostech vědeckého a tech-
nického výzkumu to ovšem zdaleka nestačí a stačit nemůže.

Ukažme si malý, pro názornost poněkud přehnaný příklad, na kterém
však se dá ukázat, jak je možno dospět k nehorázným závěrům ze zcela
přesně získaných hodnot při neznalosti věci. Dejme tomu, že nějaká
podstatně důležitá technická záležitost je vyjádřena křivkou. Technik
pro tuto křivku zjistí podle svého uvážení dostatečný počet bodů a body
takto získané spojí plynule křivkou křivítkem (obr. 3a) a s křivkou
takto získanou manipuluje při svém dalším bádání. Po dlouhých údobích
neúspěchů, chybných závěrů a někdy při neosvědčení se v praxi po
mnohdy katastrofálních důsledcích se přijde dodatečně na to, že křivka

⁶⁾ Nedá se např. hovořit o zcela běžném používání *elipsografů* nebo
hyperbolografů, přístrojů, které slouží jak již sám název říká k rýsování
elips a hyperbol. O přesném rýsování jiných křivek pomocí jednoduchých
aparatur se nedá zatím běžně hovořit.

znázorňující určitou technickou zákonitost skutečně získanými (naměřenými) body sice prochází, ale *zdaleka jinak*. Na obr. 3b jsou tytéž body jako na obr. 3a, ale křivka znázorňující potřebnou technickou záležitost, byť danými body prochází, probíhá zcela jinak než křivka na obr. 3a. K čemu autor míří tímto výkladem, vyplývá z tohoto:

Pro mnohem přesnější grafické zachycení jakékoliv křivky je důležité znát nikoliv pouze některé její body, ale hlavně její tečny v těchto bodech.

Je-li dán bod, víme pouze, že křivka (předem většinou neznámá) prochází tímto bodem. Známe-li však v tomto bodě i tečnu křivky, víme pak, jakým směrem hledaná křivka tímto bodem prochází a vzhledem k vlastnosti tečny lze průběh křivky v okolí takového bodu s tečnou odhadovat mnohem lépe a přesněji. Znalost oskulační kružnice v daném bodě vyšetřované křivky je pak pro její grafické zachycení a pro odhad jejího průběhu v okolí tohoto bodu ještě výhodnější než pouhá znalost tečny v takovém bodě. Jak jsme již poznali, tato skutečnost plyne z vlastnosti oskulační kružnice. Kinematická geometrie svými metodami umožňuje prakticky konstruktivní sestavení oskulační kružnice v obecném bodě zkoumané křivky ve velkém množství případů. Teoreticky to lze provést ve všech případech, kdy křivka je drahou čili trajektorií bodu podrobeného pohybu. Mnohdy je však taková konstrukce komplikovaná natolik, že se nevyplatí vyhledávat oskulační kružnici pro přesnější konstrukci projednávané křivky zejména tehdy, je-li málo času, jindy je opět konstrukce velmi jednoduchá.

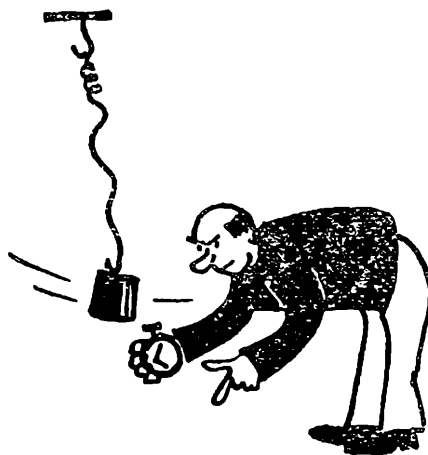
Vzhledem k výběru látky pro náš článek ukážeme si konstrukci oskulační kružnice v obecném bodě křivky jenom v některých jednoduchých příkladech. Mnohý čtenář zná již ze školy např. konstrukci oskulační kružnice ve vrcholech kuželošek, tj. nikoliv v jejích obecných bodech, ale v bodech speciálních. O této věci bude dále pojednáno z hlediska poněkud obecnějšího ještě podrobněji. Z hlediska konstruktivního nečiní narýsování kružnice žádných potíží, a proto také v jednodušších případech je použití oskulační kružnice i v obecném bodě projednávané křivky pro její konstruktivní zvládnutí velmi užitečné. Je však třeba odpovědně informovat čtenáře v tom smyslu, že pro výpočetní účely se kružnice vůbec (a tedy i oskulační kružnice) jako imitace části křivky v okolí zkoumaného bodu příliš nehodí. Kružítkem se totiž kružnice sestojí časově téměř okamžitě s přesností (z hlediska konstruktivního) úplnou, ale pro výpočet není kružnice právě výhodná. To pozná každý čtenář, který bude dále studovat na technice. Zde tuto věc vskutku nelze rozvádět.

(Pokračování)

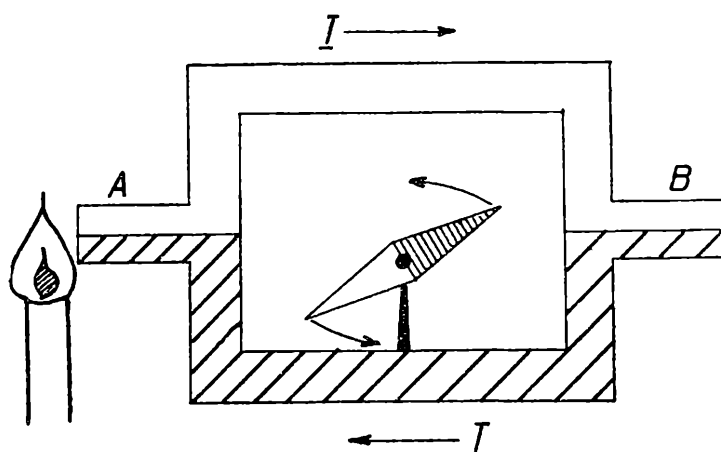
Fyzika

Oldřich Lepil, Olomouc:

Peltierův jev



V současné době je ve fyzikálním výzkumu věnována velká pozornost termoelektrickým jevům v pevných látkách. Čtenáři znají ze školy jeden z těchto jevů *jev Seebeckův*, objevený v roce 1821. Německý fyzik T. J. Seebeck¹⁾ k sobě přiložil proužek antimonu a vizmutu a vy-



Obr. 1. Seebeckův jev.

tvořil tak vodivý obvod, v jehož blízkosti umístil magnetickou střílku (obr. 1). Když zahřál spoj *A* mezi antimonem a vizmutem tak, že spoj *B* zůstal chladný, magnetická střílka se vychýlila ze své polohy. Tím bylo dokázáno, že obvodem protéká proud. Byl-li však zahřát na stejnou teplotu i spoj *B*, proud zanikl a magnetka se vrátila do původního směru. Když však teplota spoje *B* překročila teplotu spoje *A*, začal protékat obvodem proud v opačném směru.

Tak probíhal přibližně historický pokus, kterým byl objeven jev přímé přeměny energie tepelné v energii elektrickou. Dnes známe celou řadu vhodných dvojic kovů i polovodičů, u nichž lze pozorovat Seebeckův jev. To umožnilo praktické využití tohoto termoelektrického jevu např. v měřicí technice, v automatických zařízeních pro dálkové řízení a jinde.

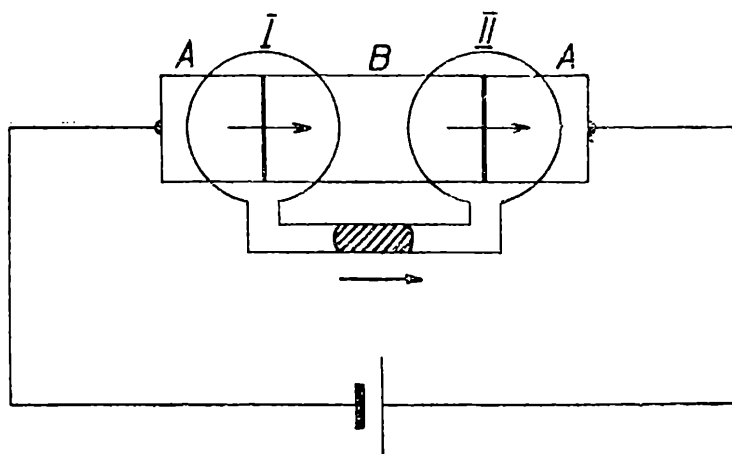
¹⁾ T o m a s J o h a n n S e e b e c k (1770—1831), lékař a fyzik německý, objevitel termoelektřiny. Red.

V tomto článku se seznámíme s dalším zajímavým termoelektrickým jevem, který objevil v roce 1834 francouzský fyzik *J e a n P e l t i e r*.

Peltierův jev byl po dlouhou dobu pouhým fyzikálním poznatkem bez praktické aplikace. Teprve v r. 1928 obrátil akademik *A. F. I o f f e*, známý sovětský fyzik, pozornost k teorii termoelektrických jevů v souvislosti se studiem vlastností polovodičů. V r. 1949 vyslovil myšlenku konstrukce praktických zařízení, v nichž je využito Peltierova jevu.

1. *Klasická teorie Peltierova jevu*

Peltierův jev si vyložíme na obvodu znázorněném na obr. 2. Obvod je tvořen třemi navzájem spojenými vodiči *A - B - A*. Průřezy vodičů jsou dostatečně velké, takže Jouleovo teplo, vznikající při průchodu proudu, je zanedbatelné. Aby mohl sledovat teplotní změny na přechodech vodiče *A* do vodiče *B* a opět vodiče *B* do vodiče *A*, obklopil Peltier přechody skleněnými baňkami, spojenými navzájem vodorovnou trubičkou s kapalinovým indexem.



Obr. 2. K výkladu Peltierova jevu.

Protékal-li obvodem proud v naznačeném směru, posouval se kapalinový index od baňky I k baňce II. Peltier tento jev vysvětloval tím, že se přechod *AB* zahřívá, kdežto přechod *BA* se ochlazuje. Po určité době se pohyb indexu zastavil, což znamená, že nastal rovnovážný stav, při němž se na přechodech vytvořil konstantní teplotní rozdíl. Tento výklad popsaneho děje potvrdil ruský fyzik *L e n c*, který Peltierovy pokusy opakoval a dokázal, že kapka vody na přechodu při jednom směru proudu zmrzla, kdežto při směru opačném se vypařila.

Poznali jsme tedy, že prochází-li proud z jednoho vodiče do jiného v jednom směru, uvolňuje se určité množství tepla a přechod se zahřívá, kdežto při obráceném směru proudu se spotřebuje stejné množství tepla a spoj se ochlazuje.

Klasický výklad Peltierova jevu vychází z termodynamických úvah, podle nichž je tento jev důsledkem jevu Seebeckova. U Seebeckova jevu

se koná práce na úkor tepelné energie. Část tohoto tepla se mění v energii elektrickou a zbytek je přenášen materiálem vodiče ke druhému, ochlazenému spoji. Tento děj musí vždy nastat, když proud prochází stykovým místem. Protéká-li proto spojem proud v takovém směru, v jakém by tekla, kdyby byl spoj zahříván, pak se odpovídající množství tepelné energie spotřebuje a spoj se ochladí, kdežto druhé stykové místo se naopak přiváděným teplem ohřívá.

Další studium Peltierova jevu ukázalo, že množství tepla Q , spotřebovaného nebo vyvinutého, je dáno vztahem

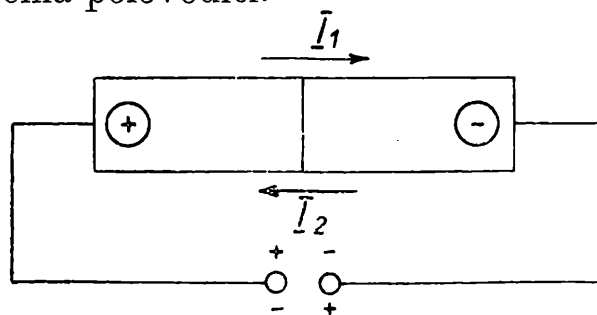
$$Q = q I t,$$

kde I je proud tekoucí spojem, t je čas, po který proud protéká, a koeficient q (teplo vyvinuté proudem 1 A za 1 s) závisí na absolutní teplotě spoje.

2. Peltierův jev v polovodičích

Klasický Peltierův jev byl pozorován na kovech (antimon a vizmut), pro praktické využití však mají význam pouze termoelektrické děje, které probíhají na přechodu mezi dvěma polovodiči.

Jak víme, je vedení proudu v polovodičích zprostředkováno jednak elektrony, jednak dírami, chovajícími se jako kladné elektrické náboje.²⁾ Proto se nejprve podívejme, jak probíhá Peltierův jev v obvodu se dvěma různými polovodiči stejného typu vodivosti (elektronovým nebo děrovým), a potom v obvodu s polovodiči různého typu vodivosti.



Obr. 3.

Děje na přechodech mezi polovodiči.

V různých látkách, z nichž jsou vytvořeny části obvodu, mají elektrony nebo díry různou energii. Má-li potom proud v obvodu takový směr, že např. elektrony přecházejí z látky, v níž mají větší energii, do látky s energií menší, předávají elektrony svoji energii atomům této látky a přechod mezi oběma polovodiči se zahřívá. Je-li směr proudu opačný, přecházejí elektrony do oblasti polovodiče s vyšší energií elektronů, kde dojde k doplnění energie nových elektronů na úkor tepelné energie atomů polovodiče a přechod se ochlazuje.

Obdobně lze vyložit Peltierův jev na přechodu mezi dvěma polovodiči s vodivostí děrovou. Popisovaný jev však velmi účinně probíhá na přechodu mezi dvěma polovodiči s různým typem vodivosti. Takový obvod je naznačen na obr. 3.

²⁾ Nezbytné poznatky o vodivosti polovodičů najde čtenář např. v knize Draroun, Šmirous, Polovodiče, SNTL, Praha 1962 nebo Klier, Polovodiče, SPN, Praha 1962.

Teče-li proud ve směru naznačeném horní šipkou, děje se skutečný pohyb děr ve směru proudu, kdežto pohyb elektronů ve směru opačném. Obojí nositelé proudu se tak pohybují proti sobě a na přechodu mezi oběma polovodiči nastává jejich rekombinace.

Tento děj si představujeme tak, že se elektron, který přichází z oblasti polovodiče s elektronovou vodivostí do oblasti s vodivostí děrovou, zachytí ve volném místě s nižší energií, díra zanikne a původní energie elektronů se změní v teplo, které se uvolní a na úkor této tepelné energie se přechod zahřeje.

Má-li proud jdoucí přechodem směr opačný (I_2), probíhá děj obrácený. Elektrony, které mají v polovodiči s děrovou vodivostí nižší energii, přecházejí do polovodiče, kde je volných elektronů přebytek. Současně zůstává v původním polovodiči po každém elektronu díra, která se pohybuje ve směru proudu a od přechodu se vzdaluje. Na vytvoření páru elektron—díra se spotřebuje určité množství energie na úkor tepelné energie atomu polovodiče a přechod se ochlazuje.

Můžeme tedy vyslovit toto pravidlo: Teče-li proud od polovodiče s vodivostí děrovou (typ P) k polovodiči s vodivostí elektronovou (typ N), teplo na přechodu se uvolňuje; teče-li proud ve směru opačném (od N k P), teplo se spotřebuje.

Již z tohoto stručného výkladu je zřejmé, že Peltierův jev skýtá významnou možnost konstrukce chladicího zařízení, které se výrazně liší od dnešních chladicích systémů především svou jednoduchostí. Budou-li nalezeny vhodné polovodičové materiály, mohou být tato zařízení také značně hospodárnější než zařízení klasická. Proto se Peltierovým jevem v polovodičích začala zabývat nejprve skupina fyziků, soustředěná kolem akademika A. F. Ioffe a později celá řada dalších, takže lze dnes již hovořit o určitých praktických výsledcích i technických aplikacích tohoto jevu.

3. Praktické využití Peltierova jevu

Základem chladicích zařízení, využívajících Peltierova jevu v polovodičích, je soustava dvojic polovodičů s různým typem vodivosti, spojených navzájem kovovými destičkami (obr. 4). Těchto řetězů s chladicími články je zapojena řada vedle sebe, takže vznikne z horních kovových destiček téměř souvislá chladicí plocha.

Uplatníme-li pravidlo, které jsme již vyslovili, dokážeme, že se horní kovové destičky budou ochlazovat (proud teče od N k P), kdežto dolní se budou zahřívat (proud od P k N) a nastane rovnovážný stav, který určuje teplotní rozdíl $\Delta T = T_2 - T_1$, jehož velikost je dána vztahem

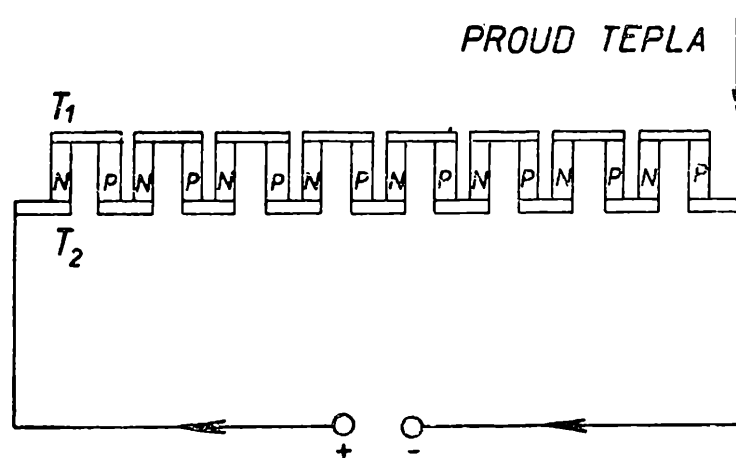
$$\Delta T = \frac{1}{2} Z T_1^2 \quad (1)$$

Jak vyplývá ze vztahu (1), je chladicí efekt závislý na materiálové konstantě Z , která dnes u některých polovodičů dosahuje hodnoty

$Z = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$. Jako nejvhodnější polovodičové materiály se ukazují tuhé roztoky těžkých prvků Bi, Te, Se, Sb, Pb. S těmito látkami lze dosáhnout ve vakuu $\Delta T = 80 \text{ deg}$ a na vzduchu prakticky $\Delta T = 35$ až 40 deg , přičemž účinnost přeměny energie je 20 až 40%.

Teplotní rozdíl lze do jisté míry zvětšit ještě tím, že se kladou na sebe vrstvy chladicích článků, takže nižší teplota spodního článku je současně vyšší teplotou článku horního. Zdálo by se, že touto cestou by bylo možné snižovat teplotní rozdíl neomezeně. Avšak ze vztahu (1) plyne, že teplotní rozdíl je úměrný čtverci absolutní teploty chladnějšího spoje, takže ΔT se postupně zmenšuje a účinnost klesá. Praktický význam má vytvoření nejvýše tří vrstev.

Aby bylo dosaženo největšího ochlazení, je současně nutné, aby proud v obvodu měl určitou optimální hodnotu I_0 . Protéká-li proud podstatně větší než I_0 , začne se naopak přechod zahřívat. To je ovšem další výhoda termoelektrického chlazení, poněvadž změnou proudu lze změnit chladicí účinek zařízení v ohřívací a oba účinky lze plynule regulovat. Tento efekt má sice omezené užití, poněvadž při velkých proudech převládne nad teplem Peltierova jevu (které závisí na první mocnině I) teplo Jouleovo, jehož velikost závisí na čtverci I . Dosažené výsledky však mají praktický význam.



Obr. 4. Princip chladicího zařízení.

Z technických zařízení využívajících Peltierova jevu uvedme alespoň některé. Byla konstruována domácí chladnička, v jejíž skříni jsou umístěny chladné spoje, kdežto teplé jsou vně. Hospodárnost chladničky je zatím mezi hospodárnostmi systému kompresorového a absorpčního. Životnost zařízení je přitom podstatně vyšší než u chladničky kompresorové. Termoelektrických zařízení lze využít jako účinných klimatizačních zařízení se snadnou regulací teploty.

Peltierův jev se značně uplatňuje v nejrůznějších vědeckých zařízeních především tam, kde je třeba udržovat konstantní teplotu s velkou přesností (až $0,001 \text{ deg}$) a tam, kde má mít chladicí zařízení malé rozměry.

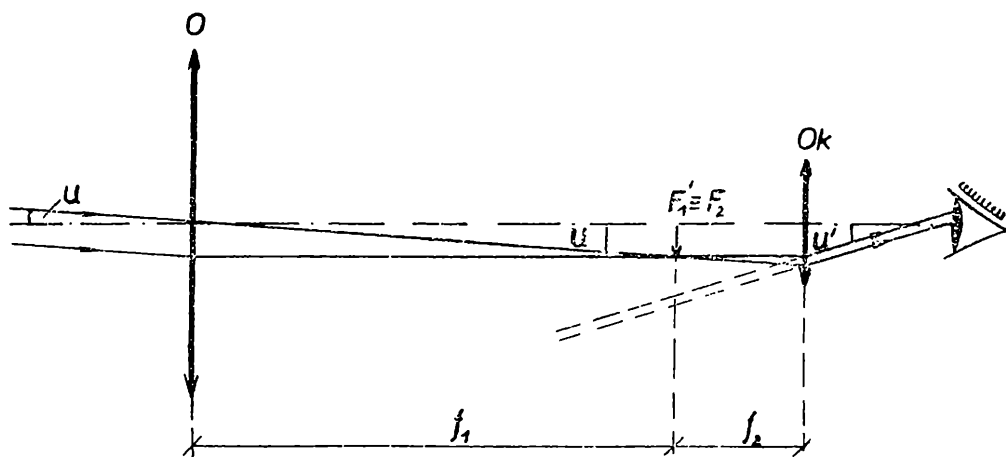
Tak byly konstruovány různé termostaty udržující konstantní teplotu polovodičových elektronek, krystalů ve vysílacích zařízeních, foto-odporů i v různých biologických přístrojích. Mikrochladicích zařízení se používá v biologických laboratořích, v meteorologii jako termoelektrických vlhkoměrů, ke konstrukci tzv. umělé nuly, sloužící jako srovnávací teplotní normál $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ apod.

Studium termoelektrických jevů v polovodičích je stále ještě v začátcích, avšak již z toho, co jsme poznali vyplývá, pro praxi veliký význam těchto fyzikálních jevů. Proto přikládáme rozvoji fyziky pevné fáze a zejména polovodičům takovou důležitost.

P a v e l C h m e l a, Universita Palackého, Olomouc:

Optický obraz v dalekohledu z hlediska geometrické optiky

Bez újmy na obecnosti se budeme v tomto článku zabývat optickým obrazem, kterým vzniká v K e p l e r o v ě d a l e k o h l e d u. Stejně úvahy bychom však mohli provést například pro dalekohled Galileův, triedr, nebo pro jiné typy dalekohledu.



Obr. 1

V převážné většině fyzikálních učebnic se předpokládá, že předmět leží ve velmi značné vzdálenosti, která se při výpočtu polohy obrazu klade rovna prakticky nekonečnu. Objektiv Keplerova dalekohledu O vytvoří tedy skutečný a převrácený obraz ve svém obrazovém ohnisku F'_1 . Poněvadž předmětové ohnisko okuláru F'_2 je totožné s obrazovým ohniskem objektivu F'_1 (obr. 1), pozorujeme obraz, vytvořený objektivem, pomocí okuláru podobně jako lupou.

Jelikož obraz vytvořený objektivem leží v předmětovém ohnisku okuláru, bude výsledný neskutečný obraz ležet opět prakticky v nekonečné vzdálenosti.

Zvětšení dalekohledu Γ je definováno jako poměr úhlu, pod kterým se jeví okrajové body pozorovaného předmětu při pozorování dalekohledem, k úhlu, pod kterým se jeví okrajové body při pozorování pouhým okem a je dáno vztahem

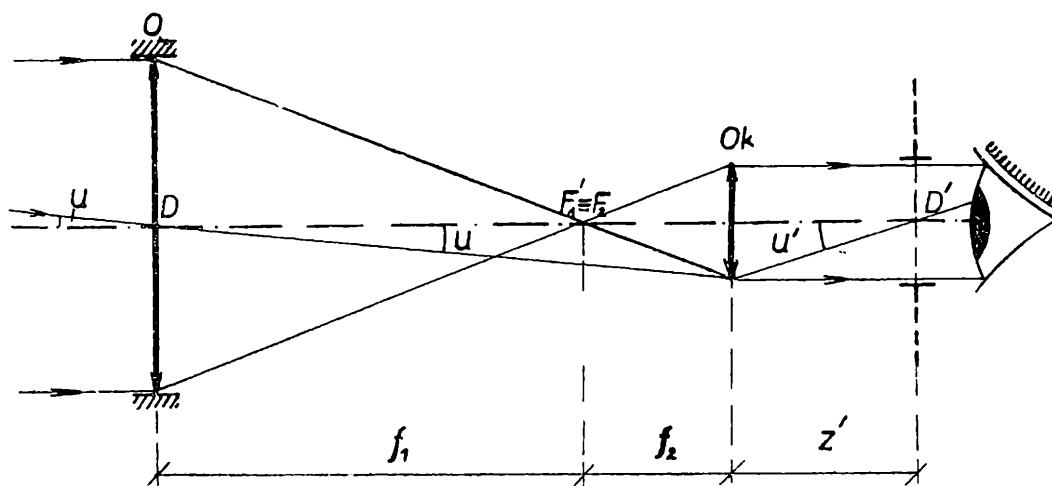
$$\Gamma = \frac{u'}{u} = \frac{f_1}{f_2} \quad (1)$$

Tento výklad optického obrazu je poněkud nepřesný proto, že předpokládá, že předmět i obraz leží prakticky v nekonečné vzdálenosti, a dále proto, že nám nic neříká o geometrii samotného obrazu.

Pro další výklad je nutné, abychom kromě ohniskových vzdáleností objektivu a okuláru definovali ještě další parametr dalekohledu, a to vstupní a výstupní pupilu.

Vstupní pupilou rozumíme otvor, který nejvíce omezuje paprskový svazek vstupující do optického přístroje. V případě dalekohledu je vstupní pupilou objímka objektivu. Výstupní pupila je pak určena zobrazením vstupní pupily pomocí dalších členů optické soustavy, v našem případě pomocí okuláru, do obrazového prostoru.

Označíme D průměr vstupní pupily a D' průměr výstupní pupily. Písmenem z' označíme vzdálenost výstupní pupily od okuláru. ¹⁾



Obr. 2

Z obr. 2 vidíme, že pro z' platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{f_1 + f_2} = \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

¹⁾ Předpokládáme, že objektiv i okulár jsou velmi tenké čočky.

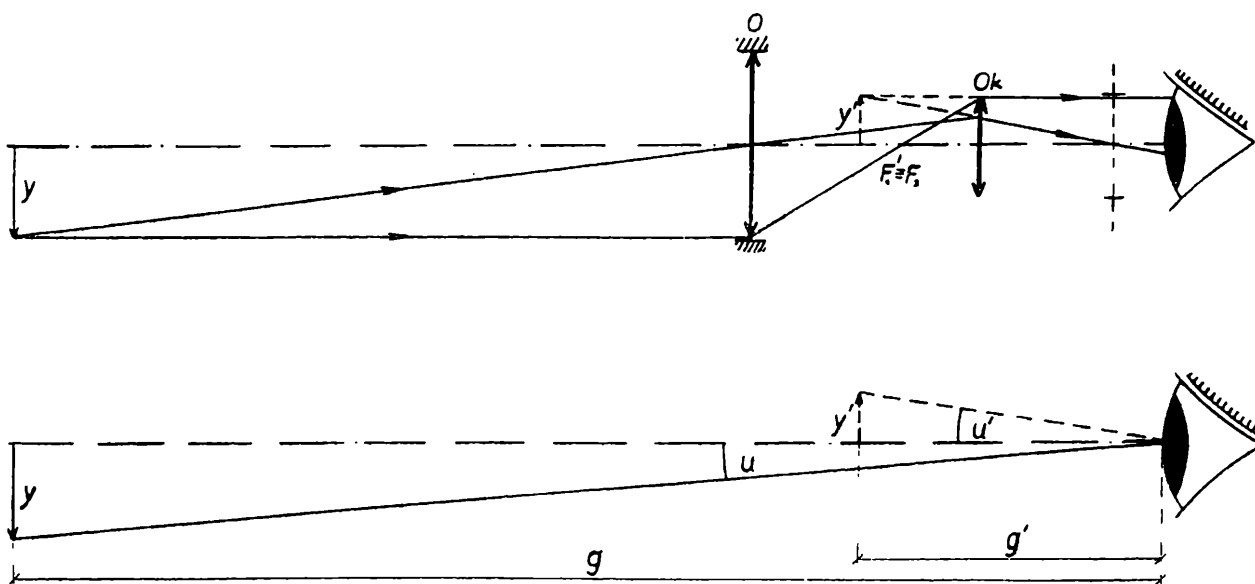
Pro průměr vstupní a výstupní pupily z trojúhelníkové podobnosti plyne vztah

$$\frac{D'}{D} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{\Gamma} \quad (3)$$

Vezmeme nyní v úvahu vzdálenost, ve které leží zobrazovaný předmět. Bez újmy na obecnosti můžeme volit velikost zobrazovaného předmětu rovnu poloměru vstupní pupily (tj. $y = \frac{D}{2}$). Zobrazovaný předmět umístíme tak, že jeden jeho koncový bod leží na optické ose dalekohledu.

Protože pro úhly u a u' platí

$$u = \frac{\frac{D}{2}}{g}, \quad u' = \frac{\frac{D'}{2}}{g'} \quad (4)$$



Obr. 3a, b

(obr. 3), můžeme zvětšení dalekohledu Γ vyjádřit pomocí g , g' a D , D'

$$\Gamma = \frac{u'}{u} = \frac{D'}{D} \cdot \frac{g}{g'} \quad (5)$$

a vezmeme-li v úvahu vztah (3), je možno vzdálenost obrazu vyjádřit pomocí předmětové vzdálenosti a zvětšení takto

$$g' = \frac{g}{\Gamma^2} \quad (6)$$

Pro příčné zvětšení dalekohledu, které je zde definováno jako poměr velikosti neskutečného obrazu k velikosti předmětu,

platí vztah

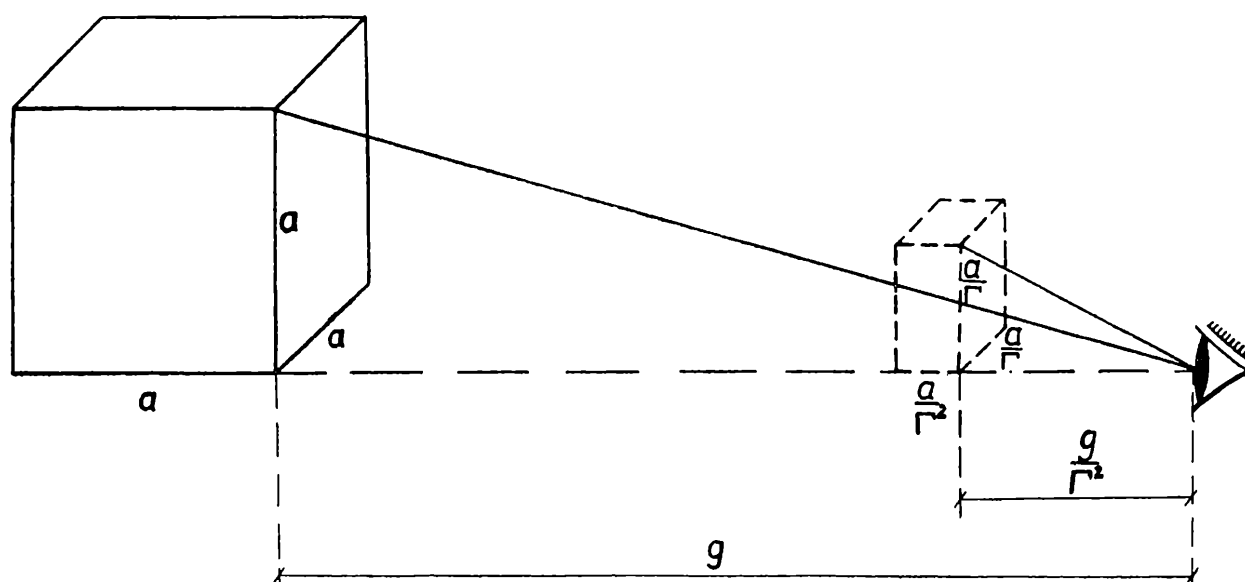
$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{D'}{D} = \frac{1}{\Gamma} \quad (7)$$

Velikost obrazu je tedy

$$y' = \frac{y}{\Gamma} \quad (8)$$

Ze vztahů (6) a (8) vidíme, že výsledný obraz je vlastně $\Gamma \times$ zmenšen, ale je $\Gamma^2 \times$ přiblížen. Proto se pozorovateli jeví pod větším zorným úhlem. Je možno lépe rozlišit jednotlivé detaily pozorovaného předmětu, neboť úhel, pod kterým pozorujeme dva body předmětu, se $\Gamma \times$ zvětší.

Uvedené skutečnosti mají však i vliv na deformaci optického obrazu v dalekohledu. Kdybychom např. pozorovali krychli o hraně a , jejíž jedna hrana je rovnoběžná s optickou osou dalekohledu, jeví se nám tato ve



Obr. 4

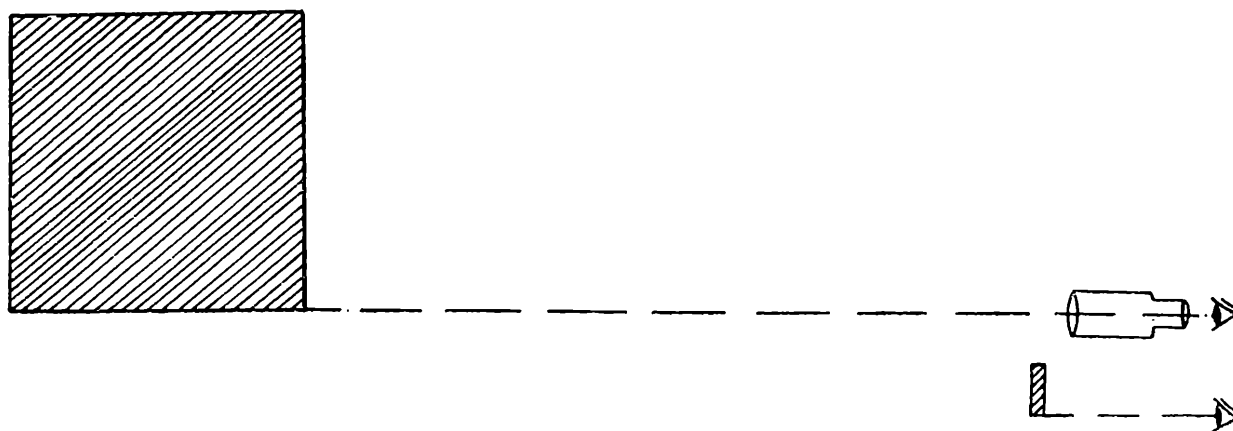
vzdálenosti $\Gamma^2 \times$ bližší, při čemž příčná hrana má velikost $\frac{a}{\Gamma}$ a podélná hrana velikost $\frac{a}{\Gamma^2}$ (obr. 4).

Při pozorování krychle o straně a dalekohledem se zvětšením Γ vzniká tudíž stejný optický vjem, jako bychom pozorovali kvádr o stranách $\frac{a}{\Gamma^2} \times \frac{a}{\Gamma} \times \frac{a}{\Gamma}$ ze vzdálenosti $\frac{g}{\Gamma^2}$.

O této skutečnosti se můžeme přesvědčit jednoduchým pokusem. K pozorování použijeme například dalekohledu, který zvětšuje $6 \times$. Z lepenky zhotovíme krychli o straně 36 cm a kvádr o stranách 1 cm $\times$ 6 cm $\times$ 6 cm. Krychli umístíme do vzdálenosti 36 m, kvádr do vzdá-

lenosti 1 m, a to tak, že hrana o délce 1 cm je rovnoběžná s osou pozorování. Jedním okem pozorujeme kvádr a současně druhým okem vyzbrojeným dalekohledem pozorujeme krychli (obr. 5).

Při vhodném uspořádání jsou optické vjemy obou očí stejné.



Obr. 5

Obvykle si „zploštění“ obrazu při pozorování dalekohledem neuvědomujeme, neboť zrakový vjem je z velké části záležitostí nervové soustavy, kde velkou úlohu hraje otázka předcházejících zrakových vjemů. Vzájemné poměry velikostí úseček podélných a příčných hodnotíme tedy hlavně na základě dřívějších zkušeností. Zploštění obrazu se však výrazně projeví při pozorování předmětů, které mají periodickou strukturu, například při pozorování dlažebních kostek, bloku typizovaných domů a podobně.

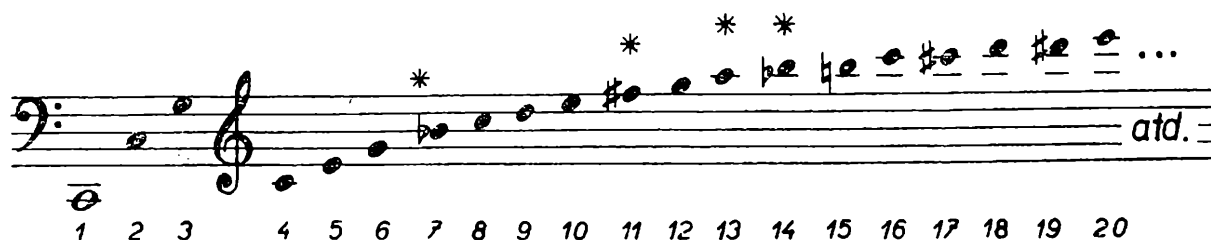
M i r o s l a v F i l i p, Univerzita Komenského, Bratislava:

Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky

Každé umění vyjadřuje svůj obsah pomocí smyslově vnímatelných procesů. Dosud vzniklé druhy umění využívají z lidských smyslů dvou nejdokonalejších a to zraku a sluchu. Z fyzikálního hlediska jsou tedy materiálem uměleckých děl procesy optické a akustické. V dalším se omezíme pouze na hudbu, umění sdělující výhradně prostřednictvím zvukových jevů. Základní stavební kameny hudebního díla - tóny se od ostatních zvuků liší tím, že mohou po určitý delší časový interval trvat co do výšky, hlasitosti a barvy neproměnné, jako třeba tón trubky nebo klarinetu, na rozdíl od úderu na činel, gong a podobně. Je zcela přirozené, že hudební umění potřebovalo kromě podnětů měnících se s časem

i podněty vyznačující se neproměnností v čase. Těm odpovídají v nauce o kmitání *p e r i o d i c k é* jevy.

Jakýkoliv periodický děj (pohyb) lze pokládat za složený z dostatečného počtu jednoduchých harmonických pohybů (tj. majících sinusový průběh), jejichž kmitočty jsou *c e l i s t v ý m i* násobky nejnižšího z kmitočtů, který nazýváme základním.¹⁾ Pro tóny z toho plyne, že kterýkoliv (trvající) tón hudebního nástroje nebo lidského hlasu je složen z určitého počtu tzv. *a l i k v o t n í c h t ó n ů*, které si můžeme zobrazit v notách například pro tón velké C takto:



Obr. 1

Tóny označené na obr. 1 „*“ jsou zřetelně nižší, než odpovídá notaci; odchylka je u hes asi šestinotón, u ostatních dvou asi čtvrttón. Čísla pod notami nejsou jen pořadovými čísly jednotlivých alikvotních tónů, ale udávají i tzv. *p o m ě r n ý k m i t o č e t* určitého alikvotního tónu vzhledem ke kmitočtu nejnižšího z nich, základního tónu. Základní kmitočet je vnímán jako výška tohoto tónu, složení z alikvotních tónů různých intenzit je vnímáno jako jeho zabarvení (timbre). Protože poměry kmitočtů se do vědomí promítají jako *h u d e b n í i n t e r v a l y* mezi tóny, můžeme vyslovit závažné tvrzení, že prakticky s každým znějícím tónem hudebního nástroje i lidského hlasu, od pravěku až podnes, vstupovala do vědomí člověka po celý jeho život stále táž intervalová zákonitost, vyjádřená skladem alikvotních tónů. Nemůže být pochyb o tom, že tato intervalová zákonitost sehrála rozhodující úlohu při utváření tónových představ a formování tónových vztahů ve vědomí lidí jako jakýsi vzor intervalových vztahů mezi tóny. K realizaci intervalů, latentně daných v souzvuku alikvotních tónů, dochází v evropské umělé hudbě vznikem vícehlasu, přibližně kolem začátku našeho tisíciletí. Protože intenzita alikvotních tónů obecně klesá od nižších k vyšším a dále proto, že v témž směru stoupá složitost kmitočtových poměrů, uplatnily se nejprve a nejdůrazněji intervaly blízké základnímu tónu, tj. 2 1 (oktáva), 3 2 (kvinta), 4 3 (kvarta), 5 4 (velká tercie), 6 5 (malá tercie).

¹⁾ Za obecné řešení tohoto problému a důkaz vděčíme francouzskému matematikovi J. B. F o u r i e r o v i.

Z psychologie víme, že intenzita počítku E závisí na intenzitě podnětu R za jistých podmínek přibližně podle známého W e b e r o v a - F e c h n e r o v a zákona

$$E = C \log \frac{R}{R_0}$$

kde R_0 je p r a h o v á i n t e n z i t a p o d n ě t u a C je konstanta. Tato závislost platí i pro vnímání tónových výšek, a proto velikost hudebního intervalu x můžeme vyjádřit jako

$$x = k \cdot \log \frac{\nu_2}{\nu_1} \quad (1)$$

kde ν_2 a ν_1 jsou kmitočty obou tónů intervalu a konstanta k závisí na tom, v jakých jednotkách se má vyjádřit velikost intervalu. Je zřejmé, že místo skutečných kmitočtů můžeme jednoduše dosazovat poměrné kmitočty zmíněné výše. Z uvedeného plyne, že součet dvou intervalů $x_1 \{ \nu_1, \nu_2 \}$ a $x_2 \{ \nu_3, \nu_4 \}$ je

$$x_1 + x_2 = k \left(\log \frac{\nu_2}{\nu_1} + \log \frac{\nu_4}{\nu_3} \right) = k \cdot \log \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_4}{\nu_3} \quad (2)$$

Je třeba si tedy uvědomit, že sečítání intervalů odpovídá násobení příslušných kmitočtových poměrů a analogicky odečítání intervalů odpovídá dělení kmitočtových poměrů.

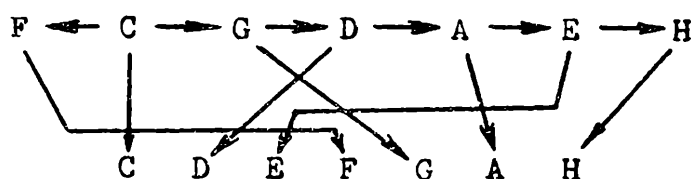
Podíváme-li se na počáteční (nejnižší) intervaly souzvuku alikvotních tónů, vidíme, že nejsou navzájem nezávislé; „odečteme-li“ totiž od oktávy kvintu, dostáváme následující interval kvartu, protože $2 \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{4}{3}$ a podobně kvinta a velká tercie určují zase interval následující malou tercii, protože $\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$. V tomto smyslu můžeme za základní intervaly považovat oktávu, kvintu a velkou tercii, protože nelze žádný z nich odvodit z druhých dvou.

Představme si, že jsme postaveni před úkol vybudovat tónovou soustavu z těchto základních intervalů, daných přírodou v každém trvajícím tónu. Připustíme-li, že soulad intervalu vytvořeného člověkem s intervalem daným přírodou v skladbě alikvotních tónů je kritériem jeho přijatelnosti, že tedy tónová soustava se musela vyvíjet tak, aby nebyla v neřešitelném rozporu s přírodní zákonitostí, realizovanou v každém tónu, je náš vytčený úkol vybudovat tónovou soustavu s použitím uvedených základních intervalů vlastně zjednodušeným modelem historického vývoje tónové soustavy a ladění.

Vezmeme-li nyní první interval oktávu a odvozujeme-li od libovolně zvoleného výchozího tónu, například C, samé oktávy, dostáváme stále tentýž tón v různých oktávách. Vznikají jakési pilíře naší budoucí tónové soustavy, ovšem žádným způsobem nelze zatím vyplnit mezery mezi nimi. Je zajímavé, že téměř všechny tónové soustavy na světě jsou v souladu s tímto předpokladem.

Na překlenutí našich oktávových mezer musíme teď přibrat další základní interval kvintu. Odvozujeme-li teď od výchozího tónu ostatní tóny pomocí samých kvintových kroků, můžeme po sedmi takových krocích získat tónový materiál, například durové stupnice tak, že všechny tóny soustředíme do rozsahu jedné oktávy jejich vhodným přeložením o jednu nebo více oktáv (obr. 2):

Tím jsme dostali tzv. *pythagorejské* nebo *kvintové ladění*: všechny tóny jsou odvozeny kvintovými kroky (a případnou oktávovou transpozicí)²⁾. Kdybychom teď náš výsledek bedlivě kontrolovali sluchem, například na smyčcovém nástroji, ukázalo by se (při přesné intonaci), že některé tóny, v našem případě A, E, H, znějí jinak, než by odpovídalo intervalovým poměrům daným v souzvuku alikvotních tónů. Toto vnímá hudební sluch jako nevhodnost, až nepříjemnost uvedených tónů; říkáme, že



Obr. 2

jsou „falešné“ Dokažme početně tento rozpor: přiřadíme-li například tónu C poměrný kmitočet 1, bude mít tón E, který je čtvrtou kvintou od něho, podle (2) poměrný kmitočet $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$; přeložme toto E nyní o dvě oktávy níže, abychom dostali velikost tzv. *pythagorejské velké tercie* $\frac{81}{16} : 4 = \frac{81}{64}$. Rozšíříme-li $\frac{5}{4}$ na $\frac{80}{64}$, vidíme, že pythagorejská tercie nesouhlasí s přirozenou tercií a rozdíl těchto dvou intervalů je dán kmitočtovým poměrem

$$\frac{\frac{81}{64}}{\frac{80}{64}} = \frac{81}{80}$$

a nazývá se *syntónické koma*. Pro zajímavost: Například na houslích v blízkosti pražce odpovídá syntónickému komatu změna délky struny přes 3 mm! Takovou nepřesnost v intonaci si žádný houslista nemůže dovolit. Podobně bychom odvodili velikost pythagorejských tercií F-A, G-H.

(Dokončení)

²⁾ Pro odvození jednoho tónu - F kvintovým krokem opačného směru jsou harmonické důvody, na něž není v tomto článku místo. Na věc lze nahlížet také tak, že v jednosměrné kvintové posloupnosti se stává základním tónem durové stupnice druhý tón C právě z těchto harmonických důvodů.



Úlohy k řešení

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů

(Dokončení)

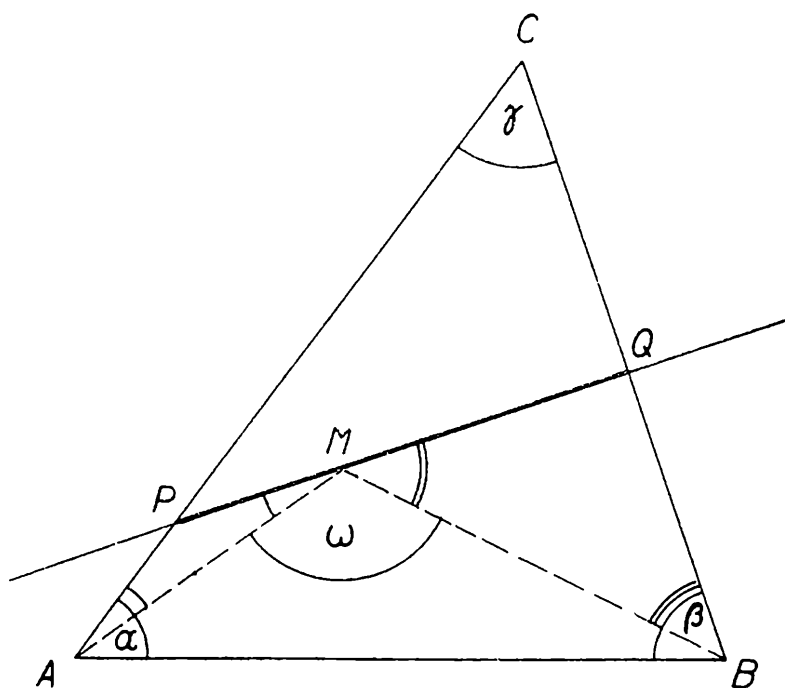
11. Je dán trojúhelník ABC .

a) Určete množinu všech bodů M , které leží uvnitř trojúhelníka ABC a kterými lze vést přímky PQ protínající úsečky AC , BC v bodech P (na AC), Q (na BC) takových, že platí vztahy $PM = AP$, $QM = BQ$.

b) Dokažte, že přímky PQ se dotýkají jedné kružnice a určete její střed a poloměr.

(Došlo 12 řešení)

Josef Holubář



Obr. 1

Řešení podle Pavola Hella, SPŠ hutnícka, Košice (odst. A a C) a podle Jaroslava Zemánka, 3.D SVVŠ, Praha 4, Nusle (odst. B):

A. a) Nechť je M bod vyšetřované množiny. Protože je $PM = AP$, je trojúhelník $\triangle AMP$ rovnoramenný a má úhly při základně AM shodné, velikosti α_2 (obr. 1). Podobně je $QM = QB$, trojúhelník $\triangle BMQ$

je rovnoramenný a má úhly při základně BM shodné, velikosti β_2 .

Označme ω velikost úhlu $\sphericalangle AMB$. Platí:

$$\omega = 2R - (\alpha_2 + \beta_2)$$

a v trojúhelníku $\triangle AMB$

$$\omega = 2R - (\alpha_1 + \beta_1)$$

proto je $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$. Dále je $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Z těchto vztahů dostáváme

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = R - \frac{\gamma}{2},$$

kde α , β , γ jsou vnitřní úhly trojúhelníka $\triangle ABC$. Odtud je

$$\omega = 2R - \left(R - \frac{\gamma}{2}\right) = R + \frac{\gamma}{2},$$

což je pro daný trojúhelník úhel konstantní velikosti. Leží tedy bod M na kruhovém oblouku AMB , z jehož bodů je vidět úsečku AB v úhlu velikosti ω , a to uvnitř trojúhelníka $\triangle ABC$.

B. Nechť nyní obráceně je N libovolný bod vnitřku oblouku AMB , a to takový, že N leží uvnitř $\triangle ABC$. Pak je $\sphericalangle ANB = R + \frac{\gamma}{2}$. Dále platí:

$$\begin{aligned}\sphericalangle CAN + \sphericalangle CBN &= (\sphericalangle CAB - \sphericalangle NAB) + (\sphericalangle CBA - \sphericalangle NBA) = \\ &= (\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA) - (\sphericalangle NAB + \sphericalangle NBA) = \\ &= (2R - \sphericalangle ACB) - (2R - \sphericalangle ANB) = \\ &= \sphericalangle ANB - \sphericalangle ACB = R + \frac{\gamma}{2} - \gamma = R - \frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

Každý z úhlů $\sphericalangle CAN$ a $\sphericalangle CBN$ je ostrý (neboť součet těchto dutých úhlů je úhel velikosti $R - \frac{\gamma}{2}$, což je úhel ostrý).

Sestrojíme-li v polorovinách (ANC) a (BNC) po řadě úhly $\sphericalangle ANP' = \sphericalangle CAN$ a $\sphericalangle BNQ' = \sphericalangle CBN$, protnou se polopřímky AC , NP' (a BC , NQ') v bodě P' (a Q') a je

$$\sphericalangle ANP' + \sphericalangle BNQ' = \sphericalangle CAN + \sphericalangle CBN = R - \frac{\gamma}{2}$$

(Bod P' sestrojíme nejlépe jako průsečík osy úsečky AN se stranou AC a bod Q' jako průsečík osy úsečky BN se stranou BC .)

Potom je

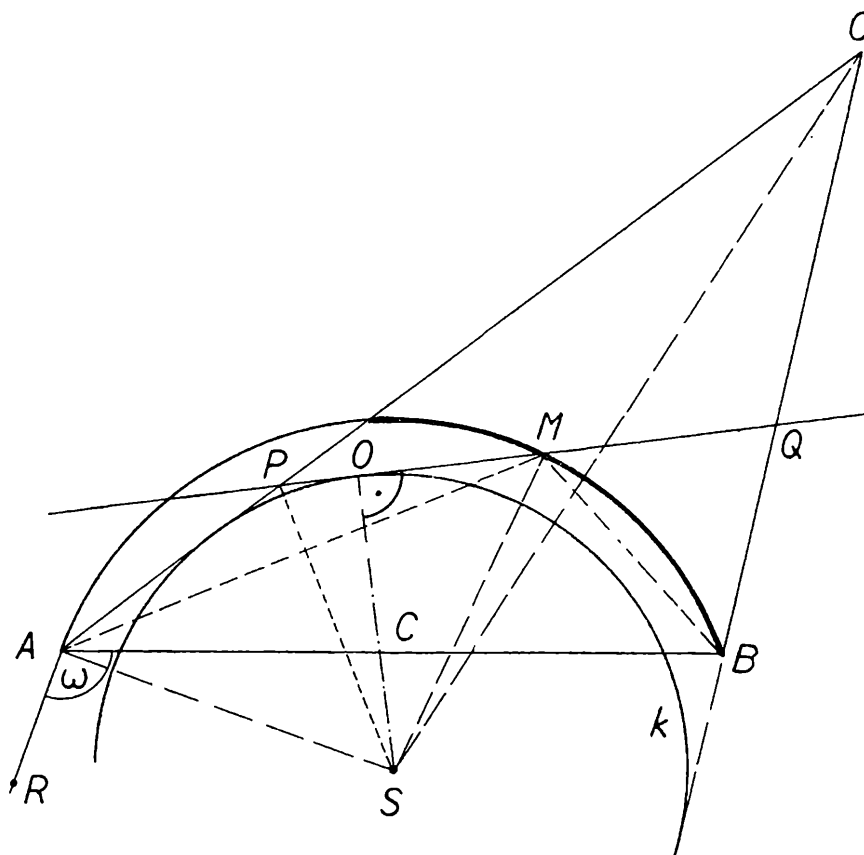
$$\begin{aligned}\sphericalangle P'NQ' &= \sphericalangle ANP' + \sphericalangle ANB + \sphericalangle BNQ' = R - \frac{\gamma}{2} + R + \frac{\gamma}{2} = \\ &= 2R,\end{aligned}$$

což znamená, že body P , N , Q' leží v přímce. Lze tedy bodem N sestrojit

přímku $P'Q'$, která má vlastnost požadovanou v naší úloze. Hledanou množinou všech bodů M je tedy část kruhového oblouku ANB , a to jeho část, která leží uvnitř trojúhelníka $\triangle ABC$.

C. Konstrukce oblouku AMB : V polorovině opačné k polorovině ABC sestrojíme úhel $\sphericalangle BAR$ velikosti ω . V bodě A sestrojíme kolmici na přímce AR a její průsečík S s osou úsečky AB je střed oblouku AMB s poloměrem rovným úsečce $SA = SB$.

b) Přímky PQ se dotýkají kružnice k , která má střed v bodě S , který jsme právě sestrojili.



Obr. 2

D ů k a z provedeme takto: Zvolíme libovolný bod M naší množiny, sestrojíme přímku PQ a vypočítáme vzdálenost přímky PQ od bodu S . Bude-li tato vzdálenost (označme ji x), nezávislá na poloze bodu M , bude pro všechny přímky PQ stejná a rovna poloměru x kružnice k (obr. 2).

Protože je $AP = NP$ a $AS = NS = r$, jsou trojúhelníky $\triangle ASP$, $\triangle MSP$ shodné. Je tedy úhel $\sphericalangle PMS = \sphericalangle PAS = \alpha + \omega - R = \alpha + R - \frac{\alpha + \beta}{2} = R + \frac{\alpha - \beta}{2}$. Z pravoúhlého trojúhelníka OSM (kde bod O je pata kolmice SO sestrojené k přímce PQ) vyplývá

$$x = r \sin \left(R + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = r \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

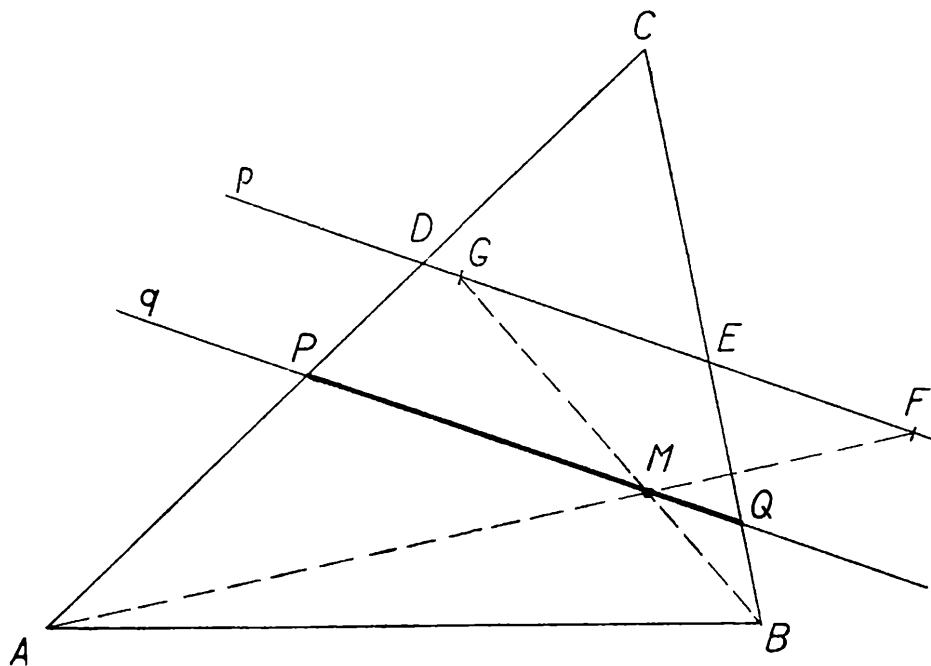
Protože je

$$r = AS = \frac{c}{2} \cos(\omega - R) = \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(kde $c = AB$), platí, že je

$$x = \frac{c}{2} \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}},$$

tj. skutečné číslo nezávislé na volbě bodů M uvažované množiny. Tím je důkaz tvrzení proveden.



Obr. 3

D. P o z n á m k a. Za zmínku stojí vtipná, třeba drobná konstrukce přímky PQ ze zvoleného směru, kterou poslal ve svém řešení Jan Vobr, žák SVVŠ v Č. Budějovicích (obr. 3):

Zvolme libovolnou přímku p , která protíná strany trojúhelníka $\triangle ABC$, a to stranu AC v bodě D a stranu BC v bodě E . Přenesme na přímku p úsečky: $DF = DA$, $EG = EB$ (obr. 3). Průsečík přímek AF , BG je bod M , jímž prochází přímka $q \parallel p$: $P = q \cdot AC$, $Q = q \cdot BC$ a platí, že $PM = AP$, $QM = QB$. To se snadno dokáže z podobných trojúhelníků

$$\triangle ADF \sim \triangle APM, \triangle BEG \sim \triangle BQM$$

E. P o z n á m k a a u t o r a. Ze vztahů odvozených v odst. A—C se snadno dokáže, že bod S (obr. 2) náleží kružnici opsané trojúhelníku $\triangle ABC$ a že bodem S prochází jednak osa strany AB , jednak osa úhlu $\sphericalangle ACB$ trojúhelníka $\triangle ABC$.

12. Určite všetky riešenia rovnice

$$x = \frac{(y + 1)^2}{y^2 - y + 1}, \quad (1)$$

v ktorých je x celé a y racionálne číslo, a tiež všetky riešenia rovnice

$$x = \frac{y^2 - y + 1}{(y + 1)^2} \quad (2)$$

tejže vlastnosti.

(Došlo 17 riešení)

Pavel Bartoš

Úlohu riešila väčšina tak, že najprv určili hodnoty x a potom hodnoty y , dvaja však postupovali opačne; najprv určili hodnotu y a potom hodnotu x .

R e š e n í 1. Řešil Jaroslav Dittrich, II.A SVVŠ, Praha 5:

a) Jelikož $y^2 - y + 1 = (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, můžeme y vyjádřit pomocí x

$$x = \frac{(y + 1)^2}{y^2 - y + 1}, (x - 1)y^2 - (x + 2)y + (x - 1) = 0$$

Je-li $x = 1$, je $y = 0$, což je řešení dané rovnice. Je-li $x \neq 1$,

$$y_{1,2} = \frac{x + 2 \pm \sqrt{-3x^2 + 12x}}{2(x - 1)}$$

Aby rovnice měla řešení v oboru reálných čísel, musí být diskriminant nezáporný: $-3x^2 + 12x \geq 0$, $x(x - 4) \leq 0$, tedy $0 \leq x \leq 4$.

Dosazením se přesvědčíme, která celá čísla z intervalu $< 0,4 >$ vyhovují.

x	0	1	2	3	3	4
y	-1	0	$2 \pm \sqrt{3}$	2	$\frac{1}{2}$	1

Vyhovují tedy kořeny

1) $x = 0$, $y = -1$; 2) $x = 1$, $y = 0$; 3) $x = 3$, $y = 2$; 4) $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$; 5) $x = 4$, $y = 1$

b) Podobně u druhé rovnice $x = \frac{y^2 - y + 1}{(y + 1)^2}$, $y \neq -1$ máme pro $x \neq 1$

$$y_{1,2} = \frac{-(2x + 1) \pm \sqrt{12x - 3}}{2(x - 1)}$$

Pro $x = 1$ dostaneme $y = 0$, což je řešení rovnice. Diskriminant musí být nezáporný: $12x - 3 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{4}$. Číslo x je tedy přirozené. Aby y bylo racionální číslo, musí být $12x - 3 = 3(4x - 1)$ druhou mocninou celého čísla. Musí tedy platit $4x - 1 = 3p^2$,

$$x = \frac{3p^2 + 1}{4},$$

kde p je přirozené číslo větší než 1 (případ $x = 1$ je vyloučen). Číslo $3p^2 + 1$ je sudé, tedy p je liché číslo a platí $p = 2q - 1$, kde q je přiro-

zené číslo větší než 1. Máme tedy

$$x = \frac{3(2q-1)^2 + 1}{4} = 3q^2 - 3q + 1$$

Dosazením vypočteme

$$y_1 = \frac{1-q}{q}, \quad y_2 = \frac{q}{1-q},$$

kde q je libovolné přirozené číslo větší než 1. Rovnice pro $y = -1$ nemá význam, tento případ však nemůže nastat, neboť rovnice $-1 = \frac{1-q}{q}$,

$-1 = \frac{q}{1-q}$ nemají kořen.

Rovnice (2) má tedy nekonečně mnoho řešení:

$$x_1 = 3q^2 - 3q + 1, \quad y_1 = \frac{1-q}{q}$$

$$x_2 = 3q^2 - 3q + 1, \quad y_2 = \frac{q}{1-q},$$

kde q je libovolné přirozené číslo větší než 1. Zvláštní případ tvoří řešení $x = 1, y = 0$, které můžeme dostat z první množiny kořenů pro $q = 1$.

Riešenie 2. a) Rovnicu (1) upravíme delením na tvar

$$x = 1 + \frac{3y}{y^2 - y + 1}$$

Ak je $y = 0$, je $x = 1$, čo je riešenie rovnice. Ak je $y \neq 0$, píšme racionálne číslo y vo forme zlomku v základnom tvare $y = \frac{p}{q}$, kde prirodzené číslo q a celé číslo $p \neq 0$ sú nesúdeliteľné čísla. Rovnica potom dostane tvar

$$x = 1 + \frac{3pq}{p^2 - pq + q^2}$$

Keďže x je celé číslo, je ním i číslo

$$\frac{3pq}{p^2 - pq + q^2}$$

Avšak čísla $pq, p^2 - pq + q^2$ sú nesúdeliteľné. Skutočne, keby nejaké prvočíslo bolo deliteľom pq , teda napr. deliteľom p a súčasne deliteľom $p^2 - pq + q^2$, bolo by aj deliteľom čísla q^2 , teda deliteľom q , čo je nemožné, lebo p a q sú nesúdeliteľné. Zlomok

$$\frac{pq}{p^2 - pq + q^2}$$

je teda v základnom tvare, a preto je nutné buď

$$p^2 - pq + q^2 = 1, \text{ buď } p^2 - pq + q^2 = 3, \quad (3)$$

lebo číslo $p^2 - pq + q^2 = \left(p - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}q^2$ je pre všetky prirodzené čísla q kladné. Z rovníc (3) dostaneme

$$p_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{4 - 3q^2}}{2}, \quad p_{3,4} = \frac{q \pm \sqrt{12 - 3q^2}}{2} \quad (4)$$

Diskriminant vo vzorcoch (4) bude štvorcom celého čísla len vtedy, keď pre prvú rovnicu $q = 0$ alebo $q = 1$ a pre druhú rovnicu $q = 1$ alebo $q = 2$. Z rovníc (4) potom určíme príslušnú hodnotu p a dostaneme

p	1	0	2	-1	1
q	1	1	1	1	2

Prípady $p = 0, q = 1$ je tu vlastne vylúčený, ale môžeme ho tam nechať, lebo privedie k riešeniu $x = 1, y = 0$, ktoré sme už dostali. Keďže $\frac{p}{q} = y$, určíme príslušné x z rovnice (1) a dostaneme

x	4	1	3	0	3
y	1	0	2	-1	$\frac{1}{2}$

To sú všetky riešenia rovnice (1).

b) Pri riešení rovnice (2) je táto metóda zvlášť výhodná. Po úprave tu dostaneme

$$x = 1 - \frac{3pq}{(p+q)^2}$$

Ak je $p = 0$, máme riešenie $x = 1, x = 0$. Ak je $p \neq 0$, usúdime opäť, že $pq, p+q$ sú nesúdeliteľné, a preto musí byť

$$(p+q)^2 = 1$$

lebo $(p+q)^2 = 3$ nedáva racionálne čísla p, q , teda racionálne číslo y . Teda $|p+q| = 1$. Ak je $p+q > 0$, je $p+q = 1, p = 1-q, y = \frac{1-q}{q}, x = 1 - 3(1-q)q = 3q^2 - 3q + 1$, kde q je prirodzené číslo väčšie než 1 (pre $q = 1$ máme vylúčený prípad $x = 1, y = 0$). Ak je $p+q < 0$, je $p+q = -1, p = -q-1$. Tu q je ľubovoľné prirodzené číslo ($q = 1$ tu nie je vylúčené) a $y = \frac{p}{q} = \frac{-p}{-p-1}, x = 1 + 3p(p+1) = 3p^2 + 3p + 1$. Tu p je záporné celé číslo menšie než -1 a teda $-p$ je prirodzené číslo väčšie než 1. Píšme teda $-p = q$, kde q je prirodzené

číslo větší než 1 a máme $y = \frac{q}{1-q}$, $x = 3q^2 - 3q + 1$

Rovnica (2) teda má tieto riešenia:

$$x_1 = 3q^2 - 3q + 1 \quad y_1 = \frac{1-q}{q}$$

$$x_2 = 3q^2 - 3q + 1 \quad y_2 = \frac{q}{1-q}$$

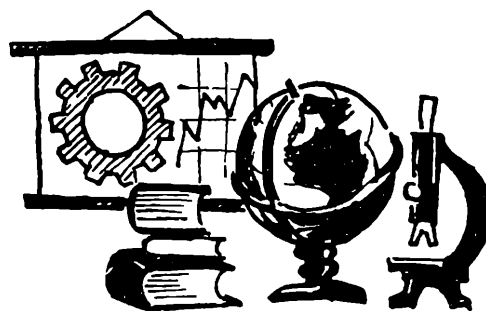
$$x_3 = 1 \quad y_3 = 0,$$

kde q je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie než 1.

Různé

Inž. Běla Machková, MŠK, Praha:

Přijímací zkoušky na vysokých školách



Po zkušenostech z přijímacích pohovorů od r. 1962 přistupují letos vysoké školy k *přijímacím zkouškám*. Ukázalo se totiž, a to nejen na vysokých školách, ale i na středních školách, že dosavadní forma pohovorů nevyhovuje, že nedává dost objektivní obraz o uchazeči. Je třeba mít stále na mysli to, že vysoké školy jsou školami výběrovými, na které mají přijít a zde studovat ti nejlepší z nejlepších. Tento způsob výběru není žádnou novinkou na zahraničních vysokých školách. Tak např. v Sovětském svazu dělají uchazeči na vysoké školy přísné zkoušky, trvající i několik dnů, ve Francii procházejí uchazeči náročným konkursem, který vyžaduje předběžnou až tříletou přípravu ve speciálních třídách. V USA je systém přijímacího řízení organizován tak, že se absolventi po maturitě a psychotechnické zkoušce na střední škole, při nichž dosáhli alespoň stanovené hranice vědomostí, zúčastňují užší soutěže na universitách. Určitý počet nejlepších studentů vybraných při soutěži dostává pak možnost studovat částečně zdarma.

Naše vysoké školy si od tohoto způsobu slibují, že budou mít spravedlivější měřítko a získají o vědomostech uchazečů spolehlivější přehled, než tomu bylo dosud. Ten jim pomůže v následující práci se studenty prvních ročníků. Přijímací komise na fakultách budou mít k dispozici písemný projev uchazečů v předmětech, kde to uznají za vhodné (písemná zkouška bude zejména v takových předmětech, jako je matematika, deskriptivní

geometrie, kreslení apod.) a ještě si prověří uchazečovy znalosti ústní zkouškou. Při pohovorech dělalo vysokým školám jisté potíže zhodnocení pohovorů a porovnání výsledků jednotlivých uchazečů a stanovila se různá kritéria slovní nebo bodová. Nyní se budou výsledky klasifikovat, a to čtyřstupňovou klasifikací, zavedenou na vysokých školách.

Těm, kteří mají skryté nebo projevené obavy ze zkoušek, je třeba připomenout, že byli již přece mnohokrát svými učiteli zkoušeni, protože jinak se zatím zjistit znalosti nedají, a že budou tentokrát prokazovat své schopnosti jen před jinou skupinou učitelů. Na vysokoškolských učitelích bude záležet, aby přistupovali k mladým lidem s pochopením a s pozitivním stanoviskem, to znamená, aby se co nejvíce snažili vystihnout schopnosti uchazečů a nikoliv aby objevovali jen mezery a nedostatky v jejich vědomostech.

Z kterých předmětů se budou zkoušky konat — to je dáno disciplínami, které tvoří základ příslušného oboru studia. Zkouší se nejméně ze dvou a nejvíce ze čtyř předmětů. Matematika s fyzikou převládají na všech vysokých školách technického směru, budou se tedy vyžadovat u přijímacích zkoušek na strojních, elektrotechnických, hornických a dopravních fakultách, na textilní a matematicko-fyzikální fakultě v odborném i učitelském studiu, na fakultě technické a jaderné fyziky a na mechanizačních fakultách vysokých škol zemědělských. Na hutnických fakultách a na fakultách vysokých škol chemicko-technologických bude mimo matematiku a fyziku zkouška rozšířena o chemii. Na agronomické fakultě vysoké školy zemědělské se vyžaduje zkouška na studijním oboru zemědělské meliorace z matematiky, fyziky a biologie; na provozně ekonomické fakultě z matematiky, biologie a chemie a na fakultě lesnické z matematiky a biologie. Na stavebních fakultách se k matematice a fyzice ještě řadí zkouška z deskriptivní geometrie, v oboru architektury mimoto i z kreslení. Na vysokých školách ekonomických se bude matematika zkoušet vedle dalších předmětů, jako je dějepis, vyučovací jazyk a cizí jazyky. Na přírodovědeckých fakultách v odborném studiu matematiky a fyziky se budou konat zkoušky z těchto disciplín a mimoto ještě z chemie, v učitelském studiu se zkoušky konají z aprobačních předmětů. Na přírodovědeckých fakultách se zkouší při studiu geofyziky, meteorologie, astronomie, chemie a geologie vedle příslušného předmětu pro určitý obor i matematika a fyzika. Při studiu zeměpisu se zkouška rozšiřuje o matematiku a při studiu biologie o fyziku. Na pedagogických fakultách se při studiu matematiky v kombinaci s jiným předmětem dělají zkoušky rovněž z matematiky a z dalšího předmětu podle výběru kombinace.

V letošním roce poprvé přišli na vysokou školu absolventi SVVŠ z diferencovaných větví. Zatím nelze sdělit, jak se diferenciací osvědčila a jak se projevuje v dalším vysokoškolském studiu. V současné době však musí vysoké školy počítat s tím, že se ke studiu na vysoké škole hlásí absolventi SVVŠ ze všech tří diferencovaných větví, kteří se učili na středních školách podle různých učebních osnov. Citelné rozdíly v učivu jsou právě např. v matematice a ve fyzice. Proto musí přijímací a zkušební komise na vysokých školách zaměřit zkoušky tak, aby nevyžadovaly maximálních znalostí, jako např. z matematiky podle učebních osnov matematicko-fyzikální větve, ale aby si prověřily základní znalosti uchazeče v rozmezí učební látky základní větve, protože i na tomto učivu se vědomosti uchazečů dají bezpečně zjistit. Bude potom záležet na uchazečích samotných, aby si dodatečně prohloubili vědomosti v těch oborech, které budou na vysoké škole studovat a které jim diferencovaná příprava na střední škole nemohla dát.

Slovníček

matematických výrazů

čtyřhran
čtyřstěn
čtyřstran, úplný —
čtyřroh, úplný —
čtyřúhelník

четырёхгранный угол
четырёхгранник
четырёхсторонник, полный —
четырёхугольник, полный —
четырёхугольник

■ D ■

daná veličina
dané (určující) prvky
definice
definovaný
deformace
degenerovat (rozpadnout se)
deltoid
délka
desetina
desetinná čárka
desetinné místo
desetinný
desetiúhelník
desítková soustava
dělenec
dělení
dělený, vydělený
dělitel, největší společný dělitel

dělitelnost čísel
dělitelný dvěma
diagram
diference
díl
dilatace
dílek
dílo

заданная величина
данные, исходные данные
определение
определенный
искажение
вырождаться
дельтоид
длина
десятая доля
запятая
десятичный знак
десятичный
десятиугольник
десятичная система счисления
делимое
деление
разделенный
делитель, общий наибольший делитель

делимость чисел
делящийся на два
диаграмма
разность
доля
растяжение
часть, отрезок
произведение

dimenze	измерение, размер
dimetrie	диметрическая проекция
diskriminant	дискриминант
diskuse (rozbor)	дискуссия
divergentní	расходящийся
divergovat	расходиться
dodatek	добавление, приложение
dokázat	доказать
dolní	нижний
doplňkový (úhel)	дополнительный
dosadit	подставить
dosadit y za x	подставить, заменить x через y
dosáhnout, dosahovat	достигнуть, достигать
dosazení	подстановка, замена
dotyk	касание
dotýkat se	касаться, соприкасаться

(Pokračování)

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

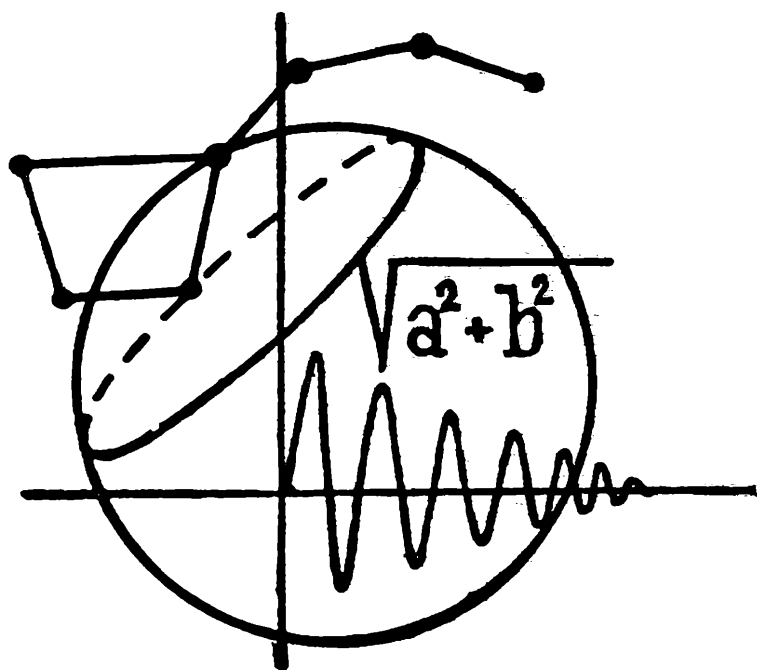
*Ústřední sekretariát Jednoty čs. matematiků
a fyziků má na skladě omezený počet svazků Školy
mladých matematiků:*

<i>M. Šisler—J. Jarník: O funkcích</i>	<i>1.80 Kčs</i>
<i>F. Veselý: O nerovnostech</i>	<i>2.50 Kčs</i>
<i>R. Výborný: Matematická indukce</i>	<i>2.— Kčs</i>
<i>J. Šedivý: O podobnosti v geometrii</i>	<i>3.— Kčs</i>
<i>J. Váňa: O rovnicích s parametry</i>	<i>2.— Kčs</i>
<i>J. Vyšín: Konvexní útvary</i>	<i>3.— Kčs</i>
<i>J. Sedláček: Faktoriály a kombinační čísla</i>	<i>3.— Kčs</i>
<i>Hradecký—Koman—Vyšín: Několik úloh z geometrie jednoduchých těles</i>	<i>5.50 Kčs</i>
<i>J. Šedivý: Shodná zobrazení v konstrukt. úlohách</i>	

*Zájemci mohou objednat brožury hromadnou objednávkou za
celou školu a obdrží potom brožury poštou se složenkou.
Jednotlivci mohou koupit brožury za hotové v ústředním
sekretariátě JČMF, Praha 1, Malá Strana, Maltézské nám. 1,
2. patro, č. dveří 24.*

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



8

ROČ. 43
1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Duben 1965

Číslo 8

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

M. Hejný: Steinerov střed v trojúhelníku	337
Prof. dr. J. Metelka: Univerzální kritérium dělitelnosti	340
Dr. L. Janko: Jednoduché pravidlo dělitelnosti sedmi	343
S. Havlíček: Součty 2., 3. mocnin přirozených čísel	345
I. Rohlíčková: Co je teorie grafů (Dokončení)	347
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování)	351
Prof. dr. J. Skotnický: Význam Carnotovho cyklu pre termodynamiku	358
A. Skyva: Pokusy k představě povrchového napětí kapalin	367
M. Filip: Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky (Pokračování)	374
H. Hofmanová: Řešení úlohy „Problém města Kocourkova“	376
Red.: Nepřítel se nebojte, na množství nehleďte	378
Recenze	380
J.. S.: Poznámka k jedné úloze MO	380
J. Horský: Albert Einstein	381
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: M. Kořář, studující FS.

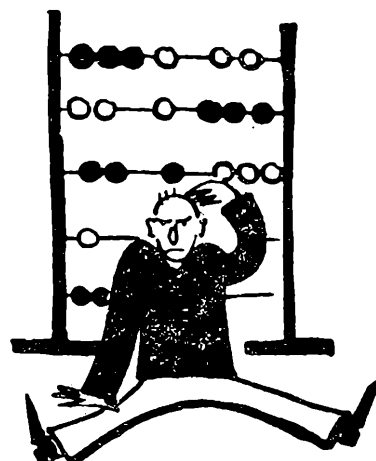
A-04*51168

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.

Matematika

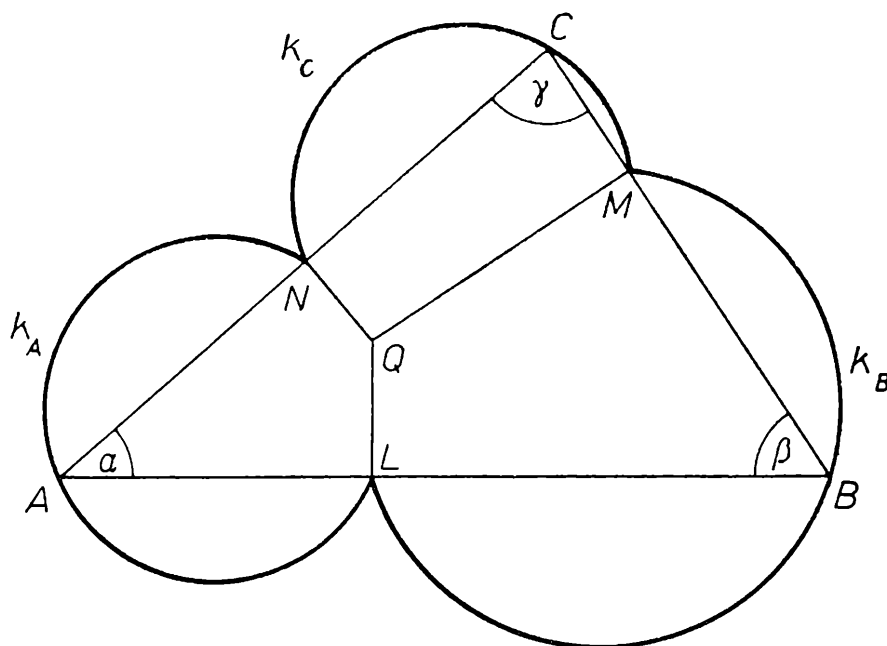
M i l a n H e j n ý, VŠD, Žilina:

Steinerov stred v trojuholníku



Článok je nepriamym pokračovaním autorovho článku O úpätnici kružnice (Rozhledy, č. 9, 1961) a je písaný vo forme úloh, ktoré pomocou návodu, bude čitateľ sám riešiť.

Buď daný ostrouhlý trojuholník ABC . Priamka, ktorá prechádza niektorým z jeho vrcholov, ale neobsahuje ani jediný bod ležiaci vo vnútri trojuholníka ABC , sa nazýva oporná priamka. Buď Q bod ležiaci vo vnútri trojuholníka ABC ; päty kolmíc spustených z bodu Q na strany AB , BC , CA označme po rade L , M , N (obr. 1). Vedme



Obr. 1.

všetky možné oporné priamky trojuholníka a na každú spustíme z bodu Q kolmicu. Geometrické miesto piat kolmíc je krivka $u(Q)$, ktorú nazývame úpätnicou trojuholníka ABC a bodu Q . Bod Q sa nazýva pólom úpätnice $u(Q)$.

Úloha 1. Geometrické miesto piat kolmíc spustených z bodu Q na oporné priamky prechádzajúce vrcholom A , je časť kružnice k_A ; úsečka AQ je priemerom kružnice k_A . Dokážte! (Obr. 2.)

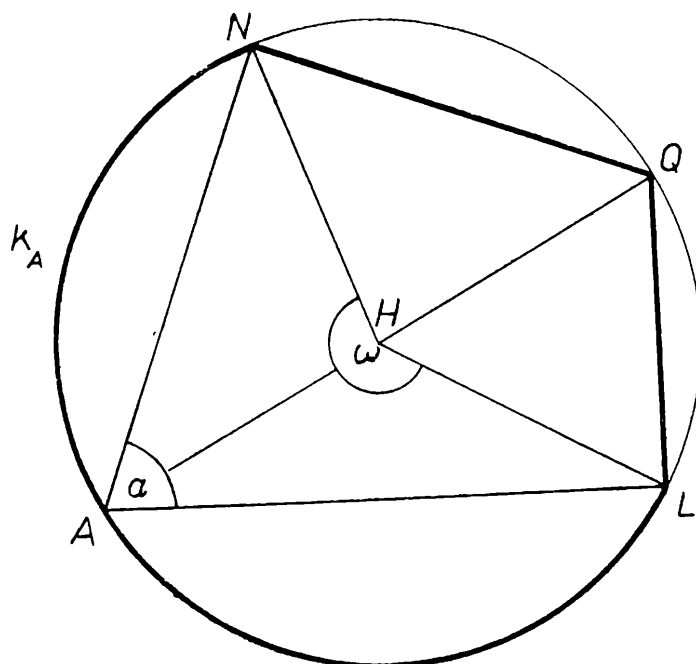
Ú l o h a 2. Úpätnica $u(Q)$ je uzavretá krivka, skladajúca sa z troch kruhových oblúkov kružníc k_A, k_B, k_C , opísaných po rade nad úsečkami AQ, BQ, CQ , ako nad priemerami. Dokážte!

N á v o d. Ku dôkazu uzavretosti krivky $u(Q)$ si musíme uvedomiť, že aj priamky, v ktorých ležia strany trojuholníka ABC sú opornými priamkami a teda že všetky tri body L, M a N sú bodmi úpätnice.

Stred kružnice opísanej trojuholníku ABC označme O .

Ú l o h a 3. Narysujte úpätnicu $u(O)$ obecného ostrouhlého trojuholníka ABC . Čo možno povedať o kružniciach k_A, k_B a k_C ?

Ďalej sa budeme zaujímať o veľkosť plochy obmedzenej úpätnicou $u(Q)$. Túto plochu budeme značiť $P(Q)$ a budeme hovoriť o p l o c h e ú p ä t n i c e.



Obr. 2.

Ú l o h a 4. Plocha útvaru, ktorý je na obr. 2 obmedzený silnou čiarou, je

$$\frac{1}{4} A Q^2 (\pi - \alpha) + \frac{1}{4} (A L L Q + A N N Q), \quad (1)$$

kde $\alpha = \angle L A N$. Dokážte!

Ú l o h a 5. Plocha úpätnice $u(Q)$ je daná výrazom

$$P(Q) = \frac{1}{4} [A Q^2 (\pi - \alpha) + B Q^2 (\pi - \beta) + C Q^2 (\pi - \gamma)] + \frac{1}{2} P_{\Delta} \quad (3)$$

kde P_{Δ} je plocha trojuholníka ABC . Dokážte!

N á v o d. Užijeme vzťahu (1) a vzťahov obdobných pre vrcholy B a C .

Ú l o h a 6. Označme plochu kruhu opísaného trojuholníku ABC znakom P_o . Plocha $P(O)$ úpätnice bodu O je rovna súčtu

$$\frac{1}{4} P_o + \frac{1}{2} P_{\Delta}$$

Dokážte!

Plocha $P(Q)$ závisí značne od toho, ktorý bod Q sme vybrali za pól. Budeme sa snažiť najst' vo vnútri trojuholníka ABC všetky také body $S_1, S_2, \dots$, ktorých plochy $P(S_1), P(S_2), \dots$ sú zo všetkých možných plôch $P(Q)$ najmenšie. Predpokladajme, že S je jeden z hľadaných bodov S_1, S_2 , Trojuholník ABC položíme do roviny komplexných

čísiel (do roviny Gaussovej) tak, aby bod S padol do počiatku. Vrcholy A, B, C budú obrazmi komplexných čísiel a, b, c po rade. Buď Q ľubovoľný bod ležiaci vo vnútri trojuholníka ABC . Nakoľko je podľa predpokladu $P(S)$ minimálna, je výraz $W = 4P(Q) - 4P(S)$ nezáporný, nech Q volíme kdekoľvek vo vnútri trojuholníka ABC . Bod Q je obrazom istého komplexného čísla q .

Ú l o h a 7. Dokážte, že platí

$$W = 2q\bar{q} - (q\bar{z} + \bar{q}z), \quad (3)$$

kde $z = a(\pi - \alpha) + b(\pi - \beta) + c(\pi - \gamma)$.

N á v o d. Pretože bod S leží v počiatku, platí

$$\overline{AQ^2} = |q - a|^2 = (q - a)(\bar{q} - \bar{a})$$

a $\overline{AS^2} = |a|^2 = a\bar{a}$.

Podobne pre BQ, CQ, BS a CS . Dosadíme do vzťahu (2) a upravíme.

Pre ľubovoľné komplexné číslo q , ktorého obraz Q leží vo vnútri trojuholníka ABC , je výraz W , daný vzťahom (3) nezáporný. Tento fakt sme konštatovali hneď pri zavedení výrazu W . Špeciálne, pre $q = \frac{1}{2}z$ musí byť W nezáporné, nakoľko bod, odpovedajúci komplexnému číslu $\frac{1}{2}z$ leží vo vnútri trojuholníka ABC . (Dokážte!) Ak však dosadíme do (3) uvedenú špeciálnu hodnotu, obdržíme nerovnosť

$$-|z|^2 = -z\bar{z} \geq 0,$$

ktorá je splnená iba pre $z = 0$.

V e t a 1. V ostrouhlom trojuholníku ABC existuje jeden a iba jeden bod S , ktorého plocha úpätnice je minimálna. Bod S je ťažiskom sústavy troch hmotných bodov A, B, C , pričom hmota bodu A je číselne rovná číslu $\pi - \alpha$, hmota bodu B je číselne rovná číslu $\pi - \beta$ a hmota bodu C číslu $\pi - \gamma$.

Ú l o h a 8. Dokážte vetu 1! Pri dôkaze užite známych tvrdení z mechaniky: sústava troch hmotných bodov má jedno a iba jedno ťažisko, ťažisko dvoch hmotných bodov leží vo vnútri úsečky vytatej týmito bodmi.

D e f i n í c i a. Bod S , zavedený vo vete 1 sa nazýva S t e i n e r o v s t r e d t r o j u h o l n í k a ABC . Poznamenajme ešte, že sa tento bod v obecnom trojuholníku nedá euklidovsky zostrojiť.

Ú l o h a 9. Buď S Steinerov stred trojuholníka ABC a Q bod ležiaci vo vnútri tohoto trojuholníka. Dĺžku úsečky QS označme r . Potom plocha $P(Q)$ je daná rovnicou

$$P(Q) = P(S) + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi.$$

Dokážte!

Všimnime si, že oba výrazy na pravej strane tejto rovnice vyjadrujú plochy istých geometrických útvarov. Ktorých? Vyslovte vetu, ktorej algebraické vyjadrenie je dané hornou rovnicou!

D ô s l e d o k. Pre dva rôzne body Q_1, Q_2 ležiace vo vnútri trojuholníka ABC platí $P(Q_1) = P(Q_2)$ vtedy a iba vtedy, ak body Q_1 a Q_2 sú rovnako vzdialené od stredu S . Výsledok zhrnie nasledovná

V e t a 2. *Bud' $k(S; r)$ kružnica (S je Steinerov střed ostrohleho troj-
uholnika ABC), ktorá celá leží vo vnútri trojuholníka ABC . Pre všetky
body X ležiace na k je číslo $P(X)$ konštantné (rovnaké) a rovné číslu*

$$P(S) + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi.$$

Rovnako ako sme definovali Steinerov střed ostrohleho trojuhol-
níka, dá sa tento bod definovať i pre tupohlý trojuholník, vypuklý
štvoruholník, či dokonca obecný vypuklý n -uholník. Ďalej sa dá prejsť
na oblú čiar (uzavreté a konvexné) ako kružnicu, elipsu apod. O prvé
„zobecnenie“, totiž o Steinerov střed vo tupohlom trojuholníku sa
čitateľ môže pokúsiť. Obe vety platia i pre tento prípad.

Řešení úloh otiskneme příště.

Prof. dr. Josef Metelka, Olomouc:

Univerzální kritérium dělitelnosti

Jednoduchým způsobem se odvozuje jisté univerzální kritérium děli-
telnosti, tj. znak, podle něhož se pozná, zda libovolné celé číslo, psané
v jakékoli číselné soustavě, je nebo není dělitelné daným celým číslem
různým od nuly.

A. Mnohočlenem n -tého stupně jedné (neurčité) proměnné z s celo-
číselnými koeficienty nazýváme výraz

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ jsou celá čísla, $a_n \neq 0$. Může být i mnohočlen nultého
stupně, $a_0 \neq 0$, tj. celé číslo různé od nuly. Je-li nejvyšší koeficient mno-
hočlenu $a_n = 1$, mluvíme o *normovaném mnohočlenu n -tého stupně*.
Normovaný mnohočlen nultého stupně je číslo 1.

V množině mnohočlenů s celočíselnými koeficienty platí věta, popisu-
jící dělení se zbytkem. Je dobře známa ze školy, a proto nebudeme po-
dávat její celkem jednoduchý důkaz.

*Věta. Nechť je $P(z)$ mnohočlen s celočíselnými koeficienty stupně p a $Q(z)$
normovaný mnohočlen s celočíselnými koeficienty stupně $q \leq p$. Pak lze
jediným způsobem najít mnohočlen s celočíselnými koeficienty $S(z)$, takže
platí*

$$P(z) = Q(z) \cdot S(z) + R(z).$$

*Přitom $R(z)$ je buď rovno nule (dělení beze zbytku), nebo je $R(z)$ jednoznačně
daný mnohočlen s celočíselnými koeficienty stupně $r < q$ (zbytek).*

Jestliže je dělitel $Q(z) = z - b$, tj. prvního stupně, je zbytek buď nula
nebo celé číslo různé od nuly. Můžeme tedy psát

$$P(z) = (z - b) \cdot S(z) + c. \quad (1)$$

Rovnost (1) platí pro každé číslo z , a tedy i pro $z = b$, kdy dostáváme

$$P(b) = 0 \quad S(b) + c, \text{ tj. } c = P(b)$$

Tak máme

$$P(z) = (z - b) \cdot S(z) + P(b) \quad (2)$$

To je tzv. *Bézoutova věta*.¹⁾

Zbytek při dělení mnohočlenu $P(z)$ dvojčlenem $z - b$ je číslo $P(b)$, tj. číslo, které dostaneme, dosadíme-li do $P(z)$ číslo b místo z . $P(b)$ může být též rovno nule.

B. Mějme dáno číslo m , vyjádřené v soustavě o základě z zápisem $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, tj.

$$m = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (3)$$

kde pro každé a_i platí $0 \leq a_i \leq z - 1$. Z Bézoutovy věty (2) dostáváme *universální kritérium dělitelnosti*:

Číslo m , psané ve tvaru (3), je dělitelné číslem $z - b$ právě tehdy, jestliže je číslem $z - b$ dělitelné číslo

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0. \quad (4)$$

Z obecného tvaru našeho kritéria dostaneme nejprve některá kritéria speciální. Položíme-li $b = 0$, máme

1. *Číslo m je dělitelné číslem z právě tehdy, je-li $a_0 = 0$.*

Položíme-li $b = 1$, dostáváme

2. *Číslo m je dělitelné číslem $z - 1$ právě tehdy, je-li součet $a_n + \dots + a_1 + a_0$ dělitelný číslem $z - 1$.*

Položíme-li $b = -1$, dostáváme

3. *Číslo m je dělitelné číslem $z + 1$ právě tehdy, je-li výraz $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$ dělitelný číslem $z + 1$.*

Nechť je z složené číslo $z = r \cdot s$. Položme $b = (r - 1) \cdot s$.

4. *Číslo m je dělitelné číslem s právě tehdy, je-li a_0 dělitelné číslem s .*

V desítkové soustavě znáte kritéria 1, 2, 3, 4 jako znaky dělitelnosti pořadě desíti, devíti, jedenácti, dvěma a pěti. Pravidla však platí v jakékoli číselné soustavě.

Např. číslo $m_1 = 135$ se v šestkové soustavě píše $m_1 = 343$. Je-li číslo m_1 takto dáno, nemusíme je převádět do soustavy desítkové a vidíme podle pravidla 4, že m_1 je dělitelné číslem 3, a podle pravidla 2, že je dělitelné číslem 5.

Číslo $m_2 = 10\,560$ se v jedenáctkové soustavě píše $m_2 = 7\alpha 30$, kde $\alpha = 10$. Podle pravidel 1, 2, 3 je vidět bez převodu do desítkové soustavy, že m_2 je dělitelné pořadě jedenácti, desíti, dvanácti.

C. Pro jiná b než v oddíle B se výraz (4) nepočítá snadno. Je výhodné napsat jej v tomto tvaru

$$P(b) = \{ - [(a_n b + a_{n-1}) b + a_{n-2}] b + \dots + a_1 \} b + a_0. \quad (5)$$

¹⁾ Etienne Bézout (čti Bezu), 1730–1783, francouzský matematik, autor všeobecné teorie algebraických rovnic. Red.

Algoritmus výpočtu, udaný vzorcem (5), se dá ještě dále zformalizovat a nazývá se pak v algebře *Hornerovým schématem*. Ponecháme vzorec ve tvaru (5) a budeme počítat $P(b)$ takto:

Násobíme nejprve číslem b číslo a_n a k součinu přičteme a_{n-1} . Výsledek násobíme opět číslem b a k součinu přičteme číslo a_{n-2} atd., až nakonec přičteme poslední číslo a_0 . Protože máme zjistit, zda konečný výsledek je nebo není dělitelný číslem $z - b$, můžeme kterýkoli z dílčích výsledků dělit číslem $z - b$ a pro další výpočet použít zbytku z tohoto dělení. Vyhneme se tak velikým číslům.

Použití kritéria v této úpravě ukážeme na několika příkladech.

1. Rozhodněte, zda číslo 17 045 v desítkové soustavě je dělitelno sedmi.

V tomto případě je $z = 10$, $z - b = 7$, tj. $b = 3$. Částečné výsledky budeme redukovat dělením sedmi. Počítáme podle vzoru (5):

$$3 \cdot 1 + 7 = 10, \text{ zbytek po dělení sedmi je } 3,$$

$$3 \cdot 3 + 0 = 9, \text{ zbytek je } 2,$$

$$3 \cdot 2 + 4 = 10, \text{ zbytek je } 3,$$

$$3 \cdot 3 + 5 = 14.$$

Výsledek je dělitelný sedmi, tzn., že číslo 17 045 je dělitelné sedmi.

2. Rozhodněte, zda číslo 16 484 v desítkové soustavě je dělitelné třinácti.

V tomto případě je $b = -3$.

$$(-3) \quad 1 + 6 = 3,$$

$$(-3) \quad 3 + 4 = -5,$$

$$(-3) \quad (-5) + 8 = 23, \text{ zbytek je } 10,$$

$$(-3) \quad 10 + 4 = -26$$

Číslo 16 484 je dělitelné třinácti.

3. Rozhodněte, zda číslo 402 303 v sedmičkové soustavě je dělitelné dvanácti.

Nyní je $z = 7$, $b = -5$. Výpočet probíhá takto:

$$(-5) \quad 4 + 0 = -20, \text{ zbytek je } -8,$$

$$(-5) \quad (-8) + 2 = -42, \text{ zbytek je } 6,$$

$$(-5) \quad 6 + 3 = -27, \text{ zbytek je } -3,$$

$$(-5) \quad (-3) + 0 = 15, \text{ zbytek je } 3,$$

$$(-5) \quad 3 + 3 = -12$$

Číslo, psané v sedmičkové soustavě zápisem 402 303, je dělitelné dvanácti. Protože se v sedmičkové soustavě dělení neprovádí příliš snadno, můžete správnost kritéria zkontrolovat buď převedením čísla 402 303 do soustavy desítkové, anebo zůstanete-li v sedmičkové soustavě, dalším dvojím použitím našeho kritéria tak, že zjistíte, že dané číslo je dělitelné třemi a čtyřmi ($b = 4$, $b = 3$).

Po jistém cviku lze tyto výpočty provádět z paměti, pokud není číslo b příliš velké v absolutní hodnotě.

Je-li b kladné a větší než $\frac{z}{2}$, je číslo $z - b$ menší než b a pak mů-

žeme před výpočtem podle vzorce (5) redukovat číslo b dělením číslem $z - b$. Ve vzorci (5) použijeme místo b zbytku z tohoto dělení. Ukážeme si tento postup na dalších dvou příkladech.

4. Udejte zjednodušené kritérium pro dělitelnost třemi v desítkové soustavě.

Ve vzorci (5) bychom měli použít čísla $b = 7$. Avšak číslo $z - b = 3$ je menší než b , a proto dělíme $\frac{b}{z - b} = 7 : 3$ a ve vzorci (5) použijeme zbytku dělení, tj. čísla 1. Dostáváme tak známé kritérium:

Číslo v desítkové soustavě je dělitelné třemi právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi.

5. Rozhodněte, zda číslo 855, psané v jedenáctkové soustavě, je dělitelné čtyřmi.

I v tomto případě je $b = 7$ a je větší než $z - b = 4$. Zbytek při dělení $7 : 4$ je 3, ale ještě výhodnější je použít ve vzorci (5) místo čísla b *absolutně nejmenšího zbytku* při dělení $7 : 4$, tj. čísla -1 . Při použití tohoto čísla je kritérium totéž jako při dělitelnosti dvanácti: $5 - 5 + + 8 = 8$. Číslo 855 v jedenáctkové soustavě tedy není dělitelné dvanácti, ale je dělitelné čtyřmi, neboť číslo $P(-1) = 8$ je dělitelné čtyřmi.

Dr. L a d i s l a v J a n k o, VŠCHT, Praha:

Jednoduché pravidlo dělitelnosti sedmi

Ačkoliv učebnice obvykle nejednají o dělitelnosti sedmi, přece taková pravidla existují. Např. v knize H r o m á d k o S t r n a d, S b í r k a ú l o h z a l g e b r y, JČMF. Praha 1906, je v paragrafu 13 uvedena úloha 32

Číslo $a_0 + 10 a_1 + 100 a_2$ jest dělitelné sedmi, je-li z rozdílů $a_1 - 2 a_0 = b$, $a_2 - 2 b = c$ poslední dělitel sedmi. Pravidlo toto jest dokázati a na čísla vícemístná rozšířit. (Citováno s přizpůsobením symboliky symbolice tohoto článku.)

Několikamístné dekadické číslo A lze napsat ve tvaru

$$A = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 = \sum_{k=0}^n 10^k a_k, \quad (1)$$

kde a_k jsou číslice v jednotlivých řádech daného čísla, tedy celá nezáporná čísla 0, 1, 2, ..., 9. Poslední rozdíl, o němž je řeč v citované úloze, má tvar

$$r = (-2)^0 a_n + (-2)^1 a_{n-1} + (-2)^2 a_{n-2} + \dots + (-2)^{n-1} a_1 + + (-2)^n a_0 = 7m \quad (2)$$

což není obtížno dokázat, a musí být roven $7m$, má-li být $A = 7N$. Přitom m a N jsou celá čísla kladná, záporná nebo nula.

D ů k a z. Z (1) osamostatníme a_0 , dosadíme do (2) a odtud znovu vyjádříme dané číslo A

$$a_0 = A - 10^n a_n - 10^{n-1} a_{n-1} - 10^{n-2} a_{n-2} - \dots - 10^2 a_2 - 10^1 a_1, \quad (1')$$

$$\begin{aligned} r = & (-2)^0 a_n + (-2)^1 a_{n-1} + (-2)^2 a_{n-2} + \dots + (-2)^{n-2} a_2 + \\ & + (-2)^{n-1} a_1 + (-2)^n A - (-2)^n 10^n a_n - (-2)^n 10^{n-1} a_{n-1} - \\ & - (-2)^n 10^{n-2} a_{n-2} - \dots - (-2)^n 10^2 a_2 - (-2)^n 10^1 a_1 = 7 m, \quad (2') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2)^n A = & (-2)^0 [(-20)^n - 1] a_n + (-2)^1 [(-20)^{n-1} - 1] a_{n-1} + \\ & + (-2)^2 [(-20)^{n-2} - 1] a_{n-2} + \dots + (-2)^{n-2} [(-20)^2 - 1] a_2 + \\ & + (-2)^{n-1} [(-20)^1 - 1] a_1 + 7 m = (-2)^n 7 N \quad (2'') \end{aligned}$$

Není třeba hledat podmínky, při jejichž splnění by tento složitý součet jako celek byl dělitelný sedmi; to proto, že výrazy v hranatých závorkách jsou všechny dělitelné sedmi,

$$[(-20)^k - 1] = 7 p_k, \quad (*)$$

kde p_k je celé číslo kladné, záporné nebo nulové, k je celé číslo kladné, a $0 \leq k \leq n$. To se pro $k = 0$ až 3 snadno přezkouší. Platí-li tento vztah pro jedno takové k_a , pak platí pro každé k_x , dokáže-li se, že platí pro $k_a + 1$ (v dalším bude zase k místo k_a), tedy ve tvaru

$$[(-20)^{k+1} - 1] = 7 p_{k+1};$$

podmínky pro čísla p_{k+1} a $k + 1$ jsou stejné jako pro p_k a k . K důkazu vynásobíme obě strany rovnice (*) činitelem (-20) , čímž dostaneme

$$(-20)^{k+1} + 20 = -140 p_k,$$

a odečtením čísla 21 na obou stranách získáme vztah

$$(-20)^{k+1} - 1 = -140 p_k - 21 = 7(-20 p_k - 3) = 7 p_{k+1},$$

který bylo třeba dokázat. Jsou tedy všechny členy vyjádření (2'') daného čísla A (resp. jeho násobku $(-2)^n A$) dělitelné sedmi a tudíž je sedmi dělitelno i číslo A , je-li sedmi dělitelno číslo r .

Existuje však pravidlo jednodušší, které navíc umožňuje stanovit podíl bez dělení:

Číslo A je dělitelno sedmi, je-li sedmi dělitelno číslo B , vytvořené z něho jako součet poslední číslice s rozdílem této poslední číslice a skupiny číslic předcházejících - neboli jako rozdíl dvojnásobku poslední číslice a skupiny číslic předcházejících; tedy když

$$\begin{aligned} B = & a_0 + (a_0 - 10^{n-1} a_n - 10^{n-2} a_{n-1} - \dots - 10^1 a_2 - 10^0 a_1) \quad (3) \\ = & a_0 + \left(a_0 - \frac{A - a_0}{10} \right) \\ = & 2a_0 - \frac{A - a_0}{10} = 7 m, \end{aligned}$$

kde m má vlastnosti jako prve; pak existuje celé číslo N takové, že platí

$A = 7N$. Když nelze jednoduše zjistit, zda je číslo B dělitelno sedmi, je třeba postup opakovat, tj. vytvořit udaným postupem číslo B' .

D ů k a z. Je-li splněn poslední řádek ze (3), lze odtud vyjádřit dané číslo A , dělitelné sedmi, ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= 21 a_0 - 70 m \\ &= 7 (3 a_0 - 10 m) = 7 N. \end{aligned} \quad (4)$$

Číslo a_0 , poslední číslice daného čísla A , je rovno některému z deseti čísel 0, 1, 2, ..., 9, neboť jinak býti nemůže. Z deseti možných součinů $3 a_0$ končí každý jinou z deseti číslic 0, 1, ..., 9; číslo m může být jedno-místné nebo několikamístné, takže připojení členu $10 m$ znamená přičtení nebo odečtení nějakého násobku deseti. Proto lze výrazem $3 a_0 - 10 m$ z druhého řádku (4) vyjádřit *jakékoli* celé číslo; a jeho sedminásobek je ovšem dělitelný sedmi. Tudíž *každé* číslo A dělitelné sedmi lze napsat ve tvaru (4). - Poloha desetinné čárky v čísle nemá vlivu na jeho dělitelnost.

P o z n á m k y. 1. Dělení sedmi není třeba provádět obvyklým postupem. Podle (4) platí pro podíl

$$N = 3 a_0 - 10 m ; \quad (5)$$

vypočteme tedy číslo m ze vztahu (3) a dosadíme do (5), čímž ihned získáme výsledek dělení, potřebujeme-li sériově provádět numerické dělení sedmi.

2. Z pravidla plynou bezprostředně pravidla pro dělitelnost čtrnácti (číslo A musí být zároveň sudé), pro dělitelnost dvacetijednou (A musí být dělitelno současně třemi i sedmi) a další; ta nechť si čtenář stanoví sám.

3. Čtenář nechť se přesvědčí o platnosti pravidla i o výhodnosti dělení podle poznámky 1 na číselných příkladech (7, 14, 63, 154, 2499 atd.) a nechť porovná pravidlo s pravidlem citovaným na začátku tohoto sdělení.

S t a n i s l a v H a v l í č e k, Karlovy Vary:

Součty 2., 3. mocnin přirozených čísel

Ve škole se odvozují součty posloupnosti metodou matematické indukce. Ukážeme odvození součtu tvaru

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

(bez použití matematické indukce), kde p značí přirozené číslo.

Odvodíme uvedený vzorec pro $p = 1, 2, 3$. Pro $p = 4, 5$ atd. si jej můžete odvodit snadno za cvičení.

Součet členů přirozené posloupnosti znáte ze školy. Je to součet aritmetické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a s diferencí $d = 1$. Je tedy

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Součet druhých mocnin. Naznačeného postupu uijeme k určení součtu

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

V rovnosti

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

dosadíme za n postupně čísla $n-1$, $n-2$ atd., až dojdeme k číslu jedna. Dostaneme posloupnost rovností

$$\begin{array}{rcll} (n+1)^3 & = & n^3 & + 3n^2 & + 3n & + 1, \\ n^3 & = & (n-1)^3 & + 3(n-1)^2 & + 3(n-1) & + 1, \\ (n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + 3(n-2)^2 & + 3(n-2) & + 1, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 2^3 & = & 1^3 & + 3 \cdot 1^2 & + 3 \cdot 1 & + 1 \end{array} \quad (3)$$

Sečtením těchto n nerovností dostaneme

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n.$$

Za S_1 dosadíme podle (1), takže máme

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n,$$

$$\text{tj. } 3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

Z toho

$$3S_2 = (n+1) \left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1 \right] = n(n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

a konečně

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (4)$$

Součet třetích mocnin. Vyjdeme z rovnosti

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

a dostaneme posloupnost rovností

$$\begin{array}{rcll} (n+1)^4 & = & n^4 & + 4n^3 & + 6n^2 & + 4n & + 1, \\ n^4 & = & (n-1)^4 & + 4(n-1)^3 & + 6(n-1)^2 & + 4(n-1) & + 1, \end{array}$$

$$2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

Z toho pak je

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (5)$$

Podobně můžeme odvodit součty S_4 , S_5 atd.

Poznamka. Porovnáním vzorců (1) a (5) vidíme, že $S_3 = S_1^2$

neboli

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

Například

$$1^3 + 2^3 = 9 \quad \text{a} \quad (1 + 2)^2 = 9,$$

nebo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \quad \text{a} \quad (1 + 2 + 3)^2 = 36,$$

nebo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 \quad \text{a} \quad (1 + 2 + 3 + 4)^2 = 100 \text{ atd.}$$

Vzorce (1), (4) a (5) je možno napsat přehledně pomocí značky Σ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

I v a R o h l í č k o v á, Praha:

Co je teorie grafů?

(Dokončení)

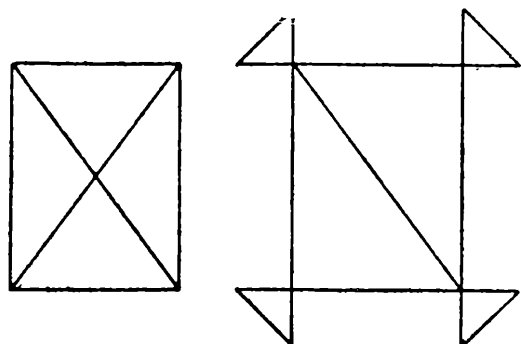
3. *Úlohy z rekreační matematiky.* Mezi typické úlohy rekreační matematiky patří nakreslení daného souvislého obrázku jedním tahem. Rozumí se tím, že každou čáru obrázku smíme obtáhnout jen jednou; průsečíky těchto čar můžeme probíhat bez omezení. Víte asi sami, že mnohdy jednoduchý obrázek jedním tahem nakreslit nejde, zatímco jiný - mnohem složitější - je možné nakreslit jedním tahem; příklady vidíte na obr. 7.

Jednou z nejstarších úloh tohoto typu je „úloha o mostech v Královci“.

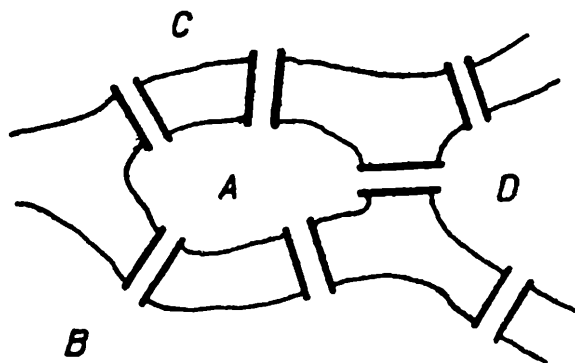
Město Královec (nynější Kaliningrad) bylo vybudováno tak, že jeho jednotlivé části na obou březích řeky i na ostrově byly spojeny sedmi mosty (plánek je na obr. 8). Otázka zněla, zda je možné přejít přes všech sedm mostů tak, abychom každý přešli pouze jedenkrát. Tuto úlohu můžeme převést do teorie grafů; oblasti A, B, C, D města Královce (viz obr. 8) nahradíme uzly grafu, a jestliže existuje most spojující dvě z těchto oblastí, spojíme příslušné uzly hranou. Odpovídající graf je na obr. 9; problém sedmi mostů přejde nyní v otázku, zda lze tento graf

nakreslit jedním tahem. Odpověď na ni dal už L. Euler, když v příspěvku předloženém r. 1736 Petrohradské akademii věd nejen dokázal, že úloha o sedmi mostech v Královci není řešitelná, ale také vyslovil nutnou a postačující podmínku pro to, aby daný souvislý obrázek bylo možno nakreslit jedním tahem. Rozlišujeme přitom dva případy tahu:

- a) *tah uzavřený*, tj. uzel, v němž tah začíná, splyne s uzlem, v němž tah končí,
- b) *tah otevřený*, tj. uzel, v němž tah začíná, je různý od uzlu, v němž tah končí.

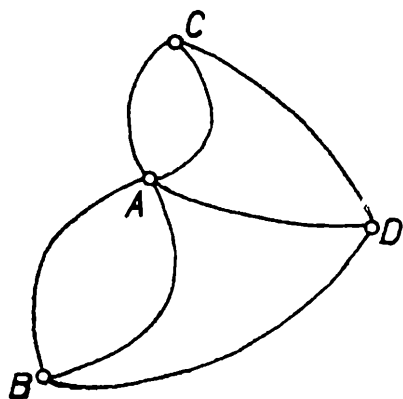


Obr. 7.



Obr. 8.

Pak platí, že souvislý graf bez izolovaných uzlů lze sestrojit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, je-li v něm každý uzel sudého stupně, a jedním otevřeným tahem právě tehdy, je-li to graf s právě dvěma uzly lichého stupně (pak v jednom z těchto uzlů tah začíná a ve druhém končí). Podle uvedených podmínek nelze tedy graf na obr. 9 sestrojit jedním tahem ani uzavřeným, ani otevřeným, neboť tento graf má všechny čtyři uzly lichého stupně.

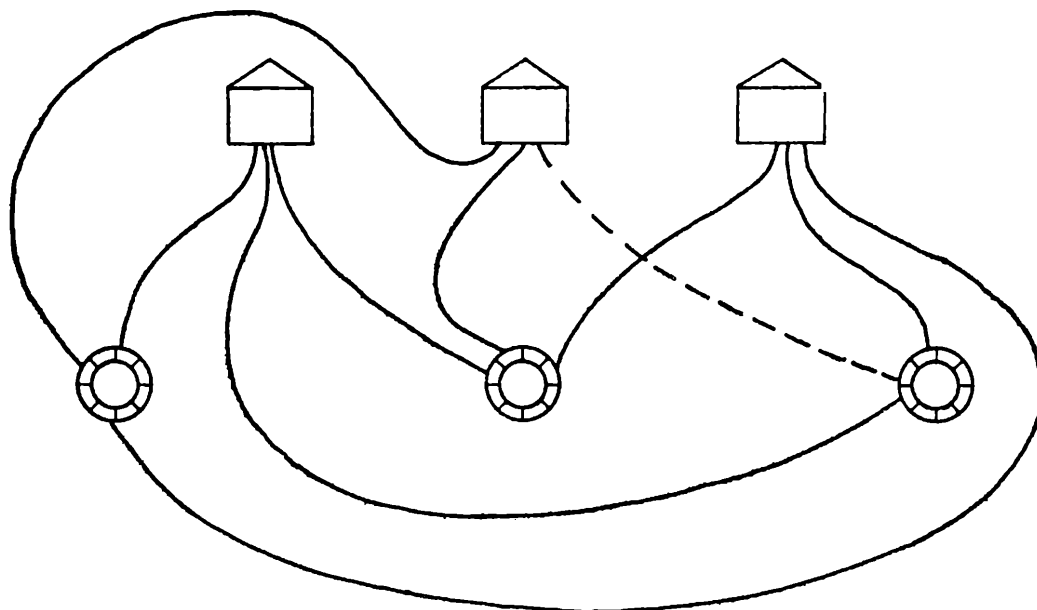


Obr. 9.

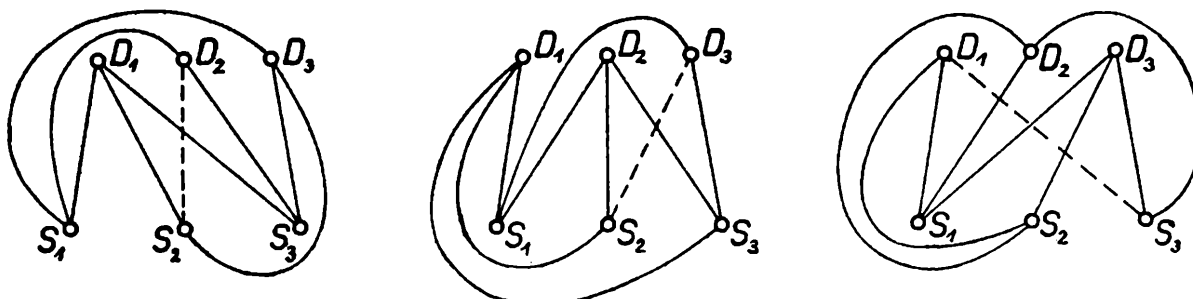
Jinou známou úlohou rekreační matematiky je úloha o třech domcích a třech studnách, vyslovovaná v různých obměnách. Máme tři domky a tři studny; z každého domku máme vést tři různé cestičky ke všem třem studnám ale tak, aby žádné dvě z těchto devíti cestiček se neprotínaly. Na obr. 10 se nám tuto podmínku nepodařilo splnit; cestička vedoucí z druhého domku k třetí studni by už nutně

prořezala alespoň jednu z ostatních cestiček. Zkuste si sami, že i při jinak vedených cestičkách se vám to nepovede. Tři takové neúspěšné pokusy vidíte na obr. 11abc; přitom jsme obrázky nahradili grafy. Sestrojíme totiž graf tak, že domkům odpovídají uzly D_1, D_2, D_3 a studnám uzly S_1, S_2, S_3 ; nyní máme vlastně řešit úlohu: Spojit hranami každý z uzlů

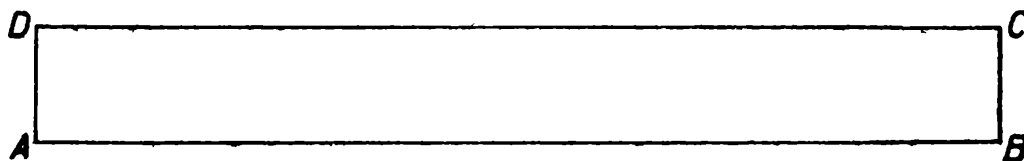
D_1, D_2, D_3 s každým z uzlů S_1, S_2, S_3 tak, aby žádné dvě hrany se neprotýaly; uzly ovšem za průsečíky nepovažujeme. Dá se dokázat, že v rovině je tato úloha neřešitelná; je však zajímavé, že kdyby graf na obr. 11 nemusel být rovinný, snadno bychom řešení našli.



Obr. 10.



Obr. 11.



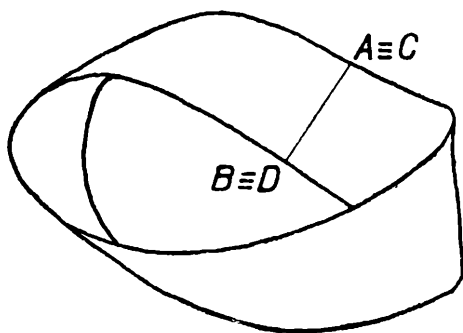
Obr. 12a.

Ukažme to např. užitím Möbiova listu; víte, jak jej vytvoříme? Obdélníkový proužek papíru, jehož rohy označíme A, B, C, D slepíme tak, aby bylo $A \equiv C, B \equiv D$ (obr. 12ab). Jestliže budeme úlohu o třech domcích a třech studnách řešit na Möbiově listě, podaří se nám vždy sestavit všech devět hran příslušného grafu tak, aby se žádné dvě neprotýaly. Jedno z možných řešení je na obr. 13, přičemž je pro lepší názornost Möbiův list opět rozstřižen a rozložen do roviny.

Také různé hry lze řešit užitím grafů; pokuste se o to např. v P r o b l é-

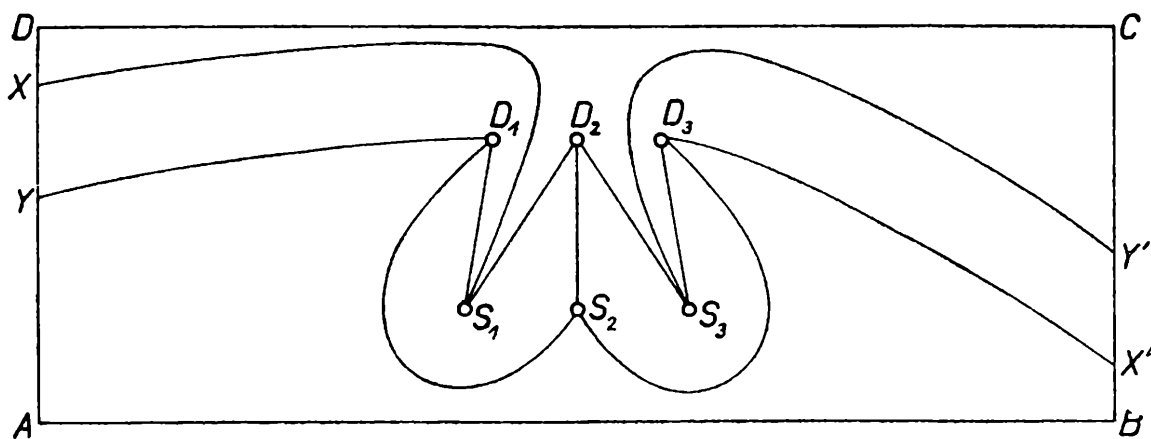
mu města Kocourkova, který vám předložil M. Koman v 1. čísle letošního ročníku Rozhledů.

Jak jsme již řekli ze začátku, hromadily se problémy, které je možno zařadit do teorie grafů, již od 18. století; ovšem systematického zpracování se dočkaly až v třicátých letech našeho století, kdy vznikají rozsáhlejší práce o grafech. Jedním ze zakladatelů teorie grafů jako samostatného vědního oboru je maďarský matematik D. König (1883 až



Obr. 12b.

1944), jehož kniha *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (vyšla r. 1936) se stala klasickou učebnicí této disciplíny. Stojí také za zmínku, že i u nás máme řadu matematiků, kteří se zabývají a zabývali teorií grafů; připomeňme tu jen významné práce O. Borůvky, V. Jarníka a M. Kösslera, které byly publi-



Obr. 13.

kovány již v letech 1926—1934, tedy vlastně v době vzniku teorie grafů. O tom, že práce československých matematiků v této disciplíně není nevýznamná, svědčí např. také ta okolnost, že v r. 1963 se ve Smolenicích na Slovensku konala mezinárodní konference o teorii grafů.

Mohli bychom říci, že je mezi našimi matematiky poměrně značné procento těch, kteří se zabývají teorií grafů. Bylo by však užitečné, aby se okruh zájemců rozšiřoval stále více. Uvážíme-li třeba pouze to, jak významně lze použít teorie grafů v ekonomii nebo ve fyzikálních aplikacích, je zřejmé, že teorie grafů je moderní matematická disciplína - disciplína budoucnosti. A proto chceme vzbudit o ni zájem i u vás; snad se to tímto článkem aspoň částečně podařilo.¹⁾

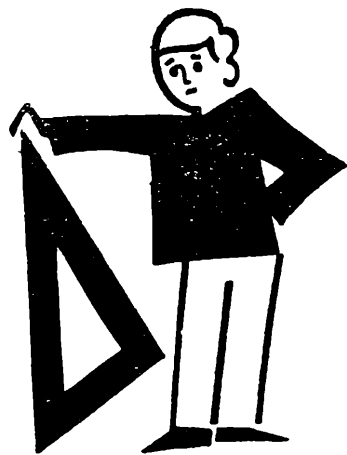
¹⁾ Náš článek byl pouze informativní; chcete-li se seznámit s teorií grafů důkladněji, najdete její základy přístupně zpracované v knížce J. Sedláčka: *Kombinatorika v teorii a praxi*, která vyšla v r. 1964 v knižnici *Cesta k vědění*.

Deskriptivní geometrie

Doc. Bořivoj Kepr, ČVUT, Praha:

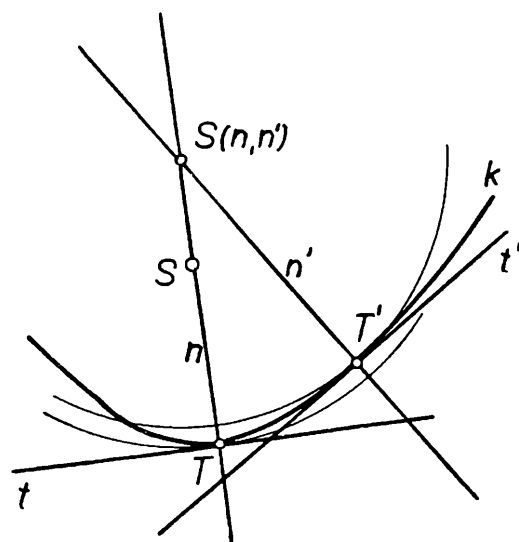
O některých křivkách

(Pokračování)



Vraťme se ještě k vlastnostem oskulační kružnice. Na obr. 4 je dána křivka k a v jejích dvou různých bodech T a T' jsou vyznačeny tečny t a t' a příslušné normály n a n' . Tyto normály se na obr. 4 protínají v bodě $S(n, n')$. Kružnice o středu $S(n, n')$ procházející bodem T , má v tomto bodě s křivkou k společnou tečnu t , tudíž styk alespoň dvoubodový. Tato kružnice se te-

dy křivky k v bodě T dotýká; na obr. 4 je vyznačen jenom oblouk této kružnice v okolí bodu T . Totéž lze říci i o soustředné kružnici, procházející však bodem T' , nahradíme-li bod T a tečnu t v předchozí úvaze bodem T' a tečnou t' . Na obr. 4 je opět vyznačen jen oblouk této kružnice v okolí bodu T' . Představme si nyní pevný bod T na křivce k a bod T' pohyblivý v tom smyslu, že se bez omezení bude po křivce k blížit k bodu T . Stejnému pohybu podrobme i tečnu t' a normálu n' v T' , a to tak,



Obr. 4.

že t' a n' bude stále tečnou a normálou v pohybujícím se bodě T' ke křivce k . Je zřejmé, že při tomto procesu se bude pohybovat i bod $S(n, n')$ po pevné normále n . Nechť si čtenář laskavě uvědomí, že se nacházíme v situaci velmi podobné té, kterou znázorňoval obr. 2 a kterou popisoval k němu příslušný text. Pokud bude $T \neq T'$, bude i $n \neq n'$ a průsečík $S(n, n')$ bude zcela určitý.⁷⁾ V okamžiku, kdy bod T „začne splývat“ s bodem T' , přestává být průsečík „splývajících“

⁷⁾ Vylučme při tom komplikující případ, ve kterém by se stalo v některém okamžiku popsaného pohybu, že by bylo $n \parallel n'$. Tj. vylučme skutečnost náhlé rovnoběžnosti normál n a n' , protože jak se dá ukázat na výsledek, ke kterému chceme dospět, nemá tato vylučovaná výjimka podstatný vliv, pouze komplikuje, zejména u začátečníka, názornost představy celého děje.

normál³⁾ n a n' určitý. Metodami *diferenciální geometrie*⁸⁾ se však dá při tomto limitním procesu zcela přesně stanovit průsečík S splývajících normál, za mlčky činěného předpokladu, že taková limita vskutku existuje. Lze pak ukázat, že

průsečík S splývajících normál ve dvou soumezných³⁾ bodech křivky je středem osculační kružnice křivky v tomto jejím bodě T .

Tím jsme dospěli k osculační kružnici dvěma různými způsoby.

Na závěr k projednávání osculační kružnice učiníme ještě tyto poznámky: Každá kružnice, jak známo, je určena svými třemi body, které neleží v téže přímce. Jsou-li tyto tři body, body nějaké křivky a splynou-li dříve popsaným způsobem v jediný bod T křivky k , pak je takovými „třemi splývajícími body křivky“³⁾ určena uvedeným limitním postupem rovněž j e d i n á kružnice, a to kružnice osculační (křivosti). To platí za předpokladu, že daná křivka k má v bodě T tu vlastnost, že připouští existenci takové limity. Veškeré křivky, vznikající pohybem bodu, tj. zejména veškeré křivky tzv. technické praxe, mají tu vlastnost, že buď všechny jejich body vůbec, nebo až na některé výjimečné, vyskytující se na těchto křivkách pouze „izolovaně“,

³⁾ Určité geometrické pojmy jako „splývající“, „soumezný“, „sousední“ apod., jak si čtenář jistě všiml, jsou zde uvedeny v uvozovkách. Tím chci upozornit, že tyto pojmy jsou vždy uváděny při týchž příležitostech, i v seriózních pojednáních, jako pojmy vystihující a popisující *názorně* ve smyslu lidské představivosti popisovaný abstraktní děj. Nelze však těchto pojmů používat jak říkáme beztrestně, při zcela přesných vyšetřováních zejména ještě neznámých vztahů jak v matematice, tak v geometrii. V dalším textu z důvodu zjednodušené nebudeme uvozovek užívat. Dalo by se ukázat, že použitím vlastně pouze přibližných pojmů „soumezný“ atd. při vlastním dokazování matematických a geometrických pravd by se mohlo dojít k zcela falešným závěrům. Těchto pojmů lze velmi výhodně používat při výkladech věcí již známých, dokázaných již před tím ovšem bez nich zcela přesně, zejména v pojednáních pouze informativních s rysem popularnosti, kde nelze „vyrukovat“ s exaktním způsobem odvození, který by byl třeba čtenářům, jimž je článek určen zcela nepřístupný. Tím by se celá publikace k všeobecné škodě minula účinkem. Pro účely laického, nebo skoro laického výkladu, jsou však uvedené pojmy svým výstižným obsahem velmi užitečné. Čtenář, který snad jednou bude studovat matematiku nebo geometrii, jak říkáme „z profese“, pochopí velmi brzy obsah této poznámky. Jenom pro ilustraci uvádím, že na přímce nebo na křivce vlastně *n e e x i s t u j í* např. dva „sousední“ body. Mezi dvěma body na přímce nebo na křivce, ať jsou jakkoliv blízko u sebe, existuje ještě stále nekonečně mnoho bodů přímky nebo křivky. Slova uvedená v uvozovkách mají pouze pro usnadnění představivosti, která je pro každé bádání nesmírně užitečná, vystihnout způsob okamžitého přecházení jednoho útvaru v druhý, např. bodu v bod, přímky v jinou přímku apod. čili tzv. *limitní proces*.

⁸⁾ Diferenciální geometrie, která jistě patří k nejkrásnějším disciplínám matematiky a geometrie, je ta oblast matematiky, ve které vyšetřujeme vlastnosti křivek a ploch metodami matematické analýsy, tj. pomocí počtu diferenciálního, to hlavně, integrálního počtu a pomocí metod řešení tzv. diferenciálních rovnic.

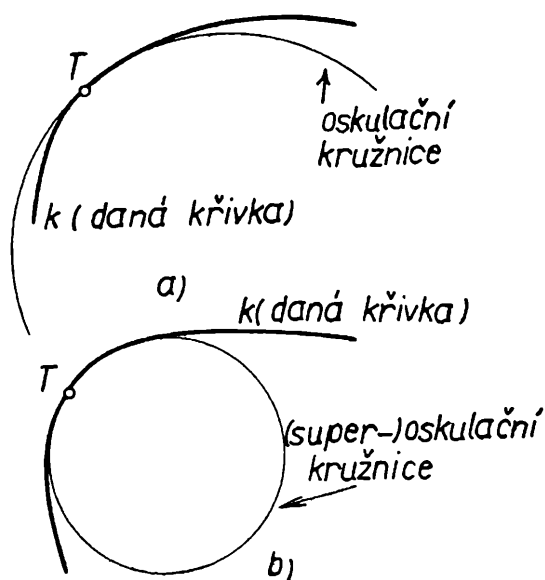
připouštějí existenci příslušné oskulační kružnice; je to analogie k existenci tečny křivky. Oskulační kružnice má v takovém obecném bodě křivky styk s touto křivkou obecně nejvýše možný, tj. tříbodový. Oskulační kružnice se v bodě křivky k této křivce přimyká tedy mnohem úžeji než příslušná tečna v tomto bodě. Z praktického hlediska (tj. zejména při rýsování a konstrukci nějaké křivky) lze v okolí daného bodu křivky imitovat, čili nahradit tuto křivku mnohem lépe (tj. ve větším okolí takového bodu) příslušným obloukem oskulační kružnice, než-li příslušným úsekem tečny. Metodami diferenciální geometrie můžeme v každém obecném bodě dané křivky stanovit zcela přesně příslušnou oskulační kružnici, tj. stanovit její střed, a tím i její poloměr. Vylučujeme ovšem ty výjimečné body, kde oskulační kružnice neexistuje. Existují však na křivce takové body, kde příslušná oskulační kružnice má se zkoumanou křivkou na základě vlastnosti této křivky v tomto bodě, styk vícebodový než právě trojbodový, tedy např. čtyřbodový. V takovém zvláštním bodě křivky se příslušná oskulační kružnice této křivce přimyká ještě úžeji. Z toho důvodu bylo předtím u oskulační kružnice hovořeno z opatrnosti o styku n e j m é n ě trojbodovém, aby se nevylučovala eventuální možnost existence styku vícebodového. V tak říkajíc obyčejném bodě křivky, který není singulární, má příslušná oskulační kružnice styk s touto křivkou právě trojbodový. Kružnici, která má v nějakém zvláštním bodě křivky s touto křivkou styk čtyřbodový, nebo dokonce styk vícebodový, nazýváme kružnicí *hyperoskulační* nebo *superoskulační*. Čtenář R o z h l e d ů jistě zná příklady takových bodů u kuželoseček. Ve *vrcholech* elipsy, paraboly nebo hyperboly a právě jenom v těchto bodech u právě jmenovaných křivek, má příslušná oskulační kružnice (kružnice křivosti) s touto křivkou styk p r á v ě č t y ř b o d o v ý a je tedy vlastně kružnicí *hyperoskulační* nebo *superoskulační*. Ve všech jiných bodech každé ze jmenovaných křivek má příslušná oskulační kružnice s touto křivkou styk právě nejvýše možný, a to právě trojbodový.

Vedení touto analogií, nazýváme pak každý bod jakékoliv j i n ě křivky než právě kuželosečky, v němž má příslušná kružnice křivosti s touto křivkou styk alespoň čtyřbodový (nebo vícebodový v s u d ě m počtu bodů, a je tedy vlastně kružnicí hyper, nebo superoskulační), *vrcholem křivky*. Vlastní zavedení vrcholu křivky je sice více než analogií ke kuželosečkám, ale zase není možno v rámci R o z h l e d ů se o tom podrobněji rozhovořit.⁹⁾

Pouze metodami diferenciální geometrie se dá solidně prokázat tato skutečnost: Má-li kružnice křivosti v bodě T křivky k s touto křivkou

⁹⁾ Jen tak pro oddychový čas poskytnutý čtenáři: slovo o s k u l a č n í je převedeno, jako mnoho jiných slov odborné literatury, snad všech druhů, z latiny. Latinské o s c u l u m znamená p o l i b e k. Předpona s u p e r (opět z latiny) nebo předpona h y p e r (tentokrát z řečtiny) znamená něco n a v í c, n a d t o. Příslušný komentář se přenechává laskavému čtenáři.

styk právě trojbodový (nebo z hlediska praxe vskutku ve výjimečných případech styk vícebodový, ale tentokrát v lichém počtu bodů), pak tato kružnice přechází v uvažovaném bodě křivky z jedné „strany“³⁾ křivky na druhou. Ve zkoumaném bodě se ovšem křivky dotýká, jak ukazuje názorný obr. 5a. Je-li náhodou styk takové oskulační kružnice v lichém počtu bodů vyšší než právě trojbodový (tj. třeba pětibodový atd. vyšší), přimyká se taková kružnice

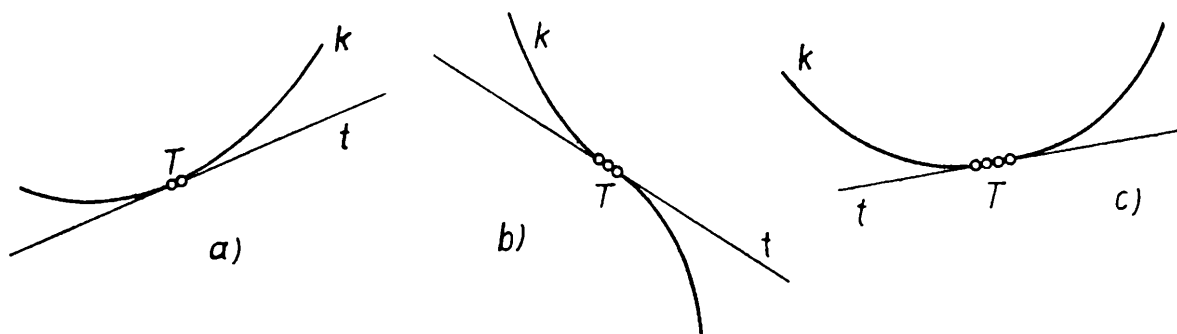


Obr. 5a, b.

v uvažovaném bodě T zkoumané křivky k k této křivce jistě újeji než ta oskulační kružnice, která by měla v tomto bodě styk právě trojbodový. Tuto skutečnost (teoreticky jistě namístě) můžeme však v našem případě projednávání zcela úplně pominout. Má-li kružnice křivosti v bodě T křivky k s touto křivkou výjimečně styk právě čtyřbodový (nebo z hlediska praxe, jen ve výjimečných případech styk vícebodový, ale jinak v sudém počtu bodů), pak tato kružnice *super-oskulační*, nebo *hyperoskulační*,¹⁰⁾ nachází se v okolí uvažo-

vaného bodu křivky pouze na jedné straně této křivky, jak ukazuje názorný obr. 5b.

Již dříve bylo řečeno, že křivka k může mít s příslušnou tečnou t v takových svých výjimečných bodech styk vícebodový než právě dvou-

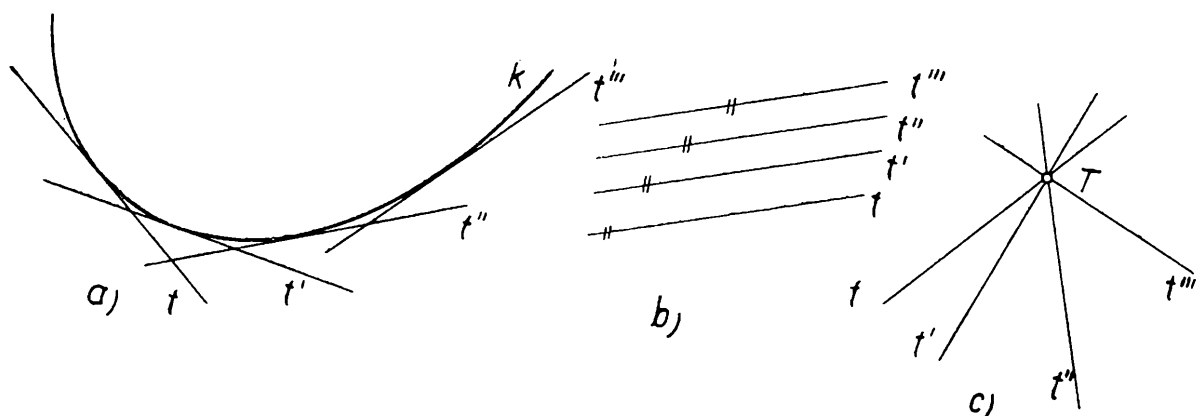


Obr. 6.

bodový, jak přísluší každé privilegované přímce, nazývané tečnou křivky k v jejím bodě T . To bylo již dříve uvedeno. Zcela přesně lze pouze metodami diferenciální geometrie dospět k těmto konstruktivním závěrům: Tzv. „obyčejná“ tečna, tj. tečna, která má ve zkoumaném bodě T s danou křivkou k styk obecně nejvýše možný, tj. právě dvoubodový, má tu

¹⁰⁾ Která nahrazuje v okolí daného bodu T křivky k tuto křivku co možná nejlépe.

vlastnost, že křivka k se v okolí zkoumaného bodu T nalézá pouze na jedné straně této tečny t (schematický obr. 6a). V těch bodech křivky zvaných *inflexních*, má tečna t s křivkou k v bodě T styk nejméně trojbodový (schematický obr. 6b). V takovém bodě T se křivka k inflexní tečny t dotýká a přechází z jedné strany této tečny na její druhou stranu. Je-li výjimečně takový styk *vyššího řádu*, tj. vícebodový (v l i c h é m počtu bodů), hovoříme o *inflexi vyššího řádu* v takovém bodě. Příslušná tečna se ovšem v takovém bodě přimyká k dané křivce ještě více. Jak si mohl čtenář již všimnout, znamená každý vícebodový styk jak tečny, tak oskulační kružnice příslušnou „větší přimykavost“³⁾ takové tečny, nebo takové oskulační kružnice k dané křivce k v jejím bodě T . Je tedy např. možno z praktického hlediska inflexní tečnu t v bodě T křivky k s dotykem právě trojbodovým považovat za oskulační kružnici s právě stejným dotykem v tomto bodě T s uvažovanou křivkou k , ovšem s „poloměrem“ „nekonečně velikým“. Stejná analogie by platila pro ty body křivky, v nichž existuje inflexe vyššího řádu.

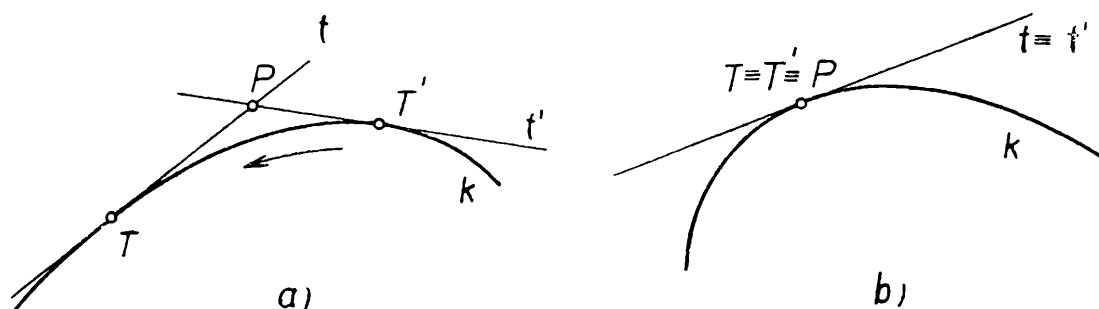


Obr. 7.

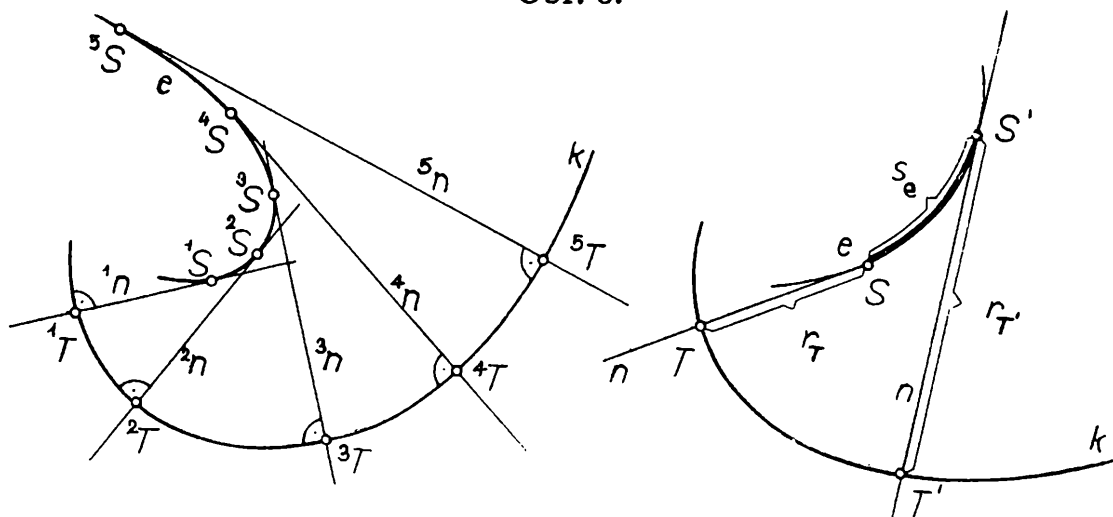
V takových výjimečných bodech T křivky k , tzv. *plošných bodech*, v nichž má tečna t s křivkou k styk nejméně čtyřbodový (nebo tedy vícebodový v s u d é m počtu bodů), nalézá se vždy křivka k v okolí zkoumaného bodu T opět na téže straně příslušné tečny t , jak ukazuje schematický obr. 6c. Čtenář tedy pochopí, proč se v případě tečny hovořilo zpočátku z opatrnosti o styku n e j m é n ě dvoubodovém. Důvod byl prostě ten, aby se nevylučovala eventuální možnost existence styku vícebodového. Jak se říká, obyčejně má tečna t v bodě T křivky s touto křivkou styk právě dvojbodový.

Jako poslední pojem pro naše potřeby v této úvodní části uvedeme pojem křivky jako *obálky* přímek. Hned zpočátku jsme si zavedli rovinou křivku jakožto dráhu bodu, podrobeného pohybu v rovině. V kinematické geometrii, která se zabývá teorií křivek, je mnohdy užitečné dívat se na křivku tak, že je vytvořena svými tečnami. Ukážeme si hned, co máme na mysli. Uvažujme v rovině přímku t (obr. 7a), která je v této rovině podrobena pohybu, tj. uvažujme její jednotlivé polohy t, t', t''

kterých při tomto pohybu spojitě nabývá. V mnoha případech se přímka t pohybuje spojitě tak, že její uvedené jednotlivé polohy, jichž nabývá při tomto pohybu, jsou tečnami $t, t', t'', \dots$ nějaké křivky k , jak ukazuje např. obr. 7a. Pak říkáme, že křivka k je *obalovou křivkou*, krátce *obálkou* všech svých tečen, tj. všech poloh pohybující se přímky. V mnoha případech se ovšem přímka může spojitě pohybovat a přitom neobalí žádnou křivku. Pohybujeme-li např. přímku v rovině tak, že jí rovnoběžně posouváme (obr. 7b), tehdy vskutku nelze hovořit o nějaké obálce. Takové případy však vyloučíme, protože nevedou k žádnému praktickému užitku. Přímka t se však může např. pohybovat v rovině také tak, že se otáčí kolem pevného bodu T (obr. 7c). Takto se pohybující přímka



Obr. 8.



Obr. 9.

jistě neobaluje rovněž žádnou křivku v pravém slova smyslu. Pro potřeby kinematické geometrie je však v tomto naposled uvedeném příkladu výhodné, považovat bod T , okolo něhož se přímka otáčí a spojitě při tom nabývá postupně všech svých poloh, za „kružnici o nulovém poloměru“, jíž přímka při takovém pohybu „obaluje“.

Uvažujme na křivce k (obr. 8a) dvě její různé tečny t a t' s body dotyku T a T' . Obě tečny nechť se protínají v bodě $P \equiv (t, t')$. Pohybujme nyní např. tečnou t' po křivce k tak, aby její dotykový bod T' se po k neomezeně blížil k bodu T , který považujeme i s příslušnou tečnou t jako pevný na k . Čím blíže na k bude bod T' k bodu T , tím méně se budou lišit obě příslušné tečny t a t' při situaci, jak ji znázorňuje obr. 8a. Budou-li body T a T' při

tomto pohybu po k od sebe již jakkoliv málo vzdálené (měřeno po k), pokud bude $T \neq T'$, bude rovněž $t \neq t'$, byť se tyto tečny od sebe lišily třeba již jen nepatrně a průsečík $P \equiv (t, t')$ bude stále určitý. Jak názor ukazuje, bude průsečík při tom stále „mezi“ body T a T' . Na základě popsání děje, znázorněného obr. 8a, přijme čtenář jako samozřejmost fakt, znázorněný na dalším obr. 8b. Tam je zachycen okamžik, kdy tečna t' právě splynula s tečnou t , tj. kdy $t \equiv t'$. Pro tento okamžik je pak rovněž $T \equiv T' \equiv P$. Můžeme tedy považovat, a v geometrii se tak často děje, *dotykový bod T tečny t s křivkou k za průsečík P dvou právě splývajících (soumezných) tečen.*

Nechť je dána rovinná křivka k a nechť její normály obalují křivku. Na obr. 9 vyznačené normály byly opatřeny indexy 1, 2, ...). Obálce e normál dané křivky k říkáme *evoluta* této křivky.¹¹⁾ Označme dotykový bod normály ${}^i n$ v bodě ${}^i T$ dané křivky k s příslušnou evolutou e znakem ${}^i S$, kde $i = 1, 2, 3, \dots$. Na základě textu k obr. 4 a 8b) získáváme ihned tento výsledek: Bod ${}^i S \in {}^i n$ je středem kružnice křivosti křivky k v jejím bodě ${}^i T$ ($i = 1, 2, \dots$), tj. jinými slovy, *geometrickým místem středů křivosti ${}^i S$ dané křivky k je evoluta e této křivky.*

Metodami diferenciální geometrie se dá odvodit tato zajímavá skutečnost (obr. 10): Je-li $r_{T'}$ poloměr křivosti křivky k v jejím bodě T' a r_T poloměr křivosti této křivky v jejím bodě T , pak

$$|r_{T'} - r_T| = s_e,$$

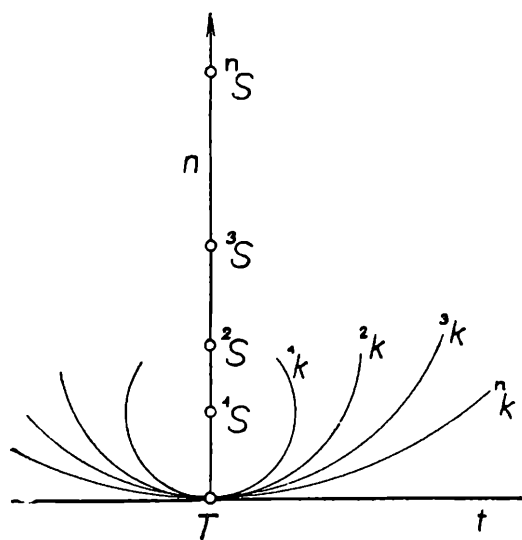
kde $s_e = \widehat{SS'}$ je délkou oblouku příslušné evoluty mezi příslušnými středy křivosti S a S' .

Poloměr r křivosti je v různých bodech dané rovinné křivky k obecně různý, a tedy je také obecně *různá* křivost $\frac{1}{r}$ takové křivky v jejích různých bodech.¹²⁾ Výjimku mezi všemi rovinnými křivkami v tomto smyslu tvoří právě kružnice, která má ve všech svých bodech křivost konstantní, rovnou převrácené hodnotě délky jejího poloměru. Z toho důvodu se bere převrácená hodnota poloměru oskulační kružnice v tom kterém bodě dané křivky za *míru křivosti* křivky v tomto bodě. Na obr. 11 je sestrojena řada kružnic ${}^1 k, {}^2 k, {}^3 k, \dots$ o středech ${}^1 S, {}^2 S, {}^3 S, \dots$ na přímce $n \perp t$. Všechny tyto kružnice procházejí bodem T a dotýkají se v něm přímky t . Z obrázku je názorně vidět skutečnost, že když se střed

¹¹⁾ Jsou křivky, jejichž normály nemají obálku. Např. normály přímky neobalují nic. Normály kružnice procházejí, jak je známo, všechny jedním bodem, středem kružnice, takže neobalují žádnou křivku v pravém slova smyslu.

¹²⁾ U křivek v pravém slova smyslu, tj. zejména u křivek technicky použitelných, se mění poloměr křivosti, a tudíž také křivost spojitě podle toho, jak příslušný bod takovou křivku spojitě probíhá až eventuálně na výjimku některých zvláštních, izolovaných bodů dané křivky.

nS kružnice nk bude po přímce n od bodu T vzdalovat nade všechny meze, tj. když úsečka nST , znamenající poloměr této kružnice se bude zvětšovat nad jakoukoliv velikost, bude se příslušná kružnice nk , procházející stále bodem $T \in t$ „narovnávat“ a takto se stále více blížit k přímce t .



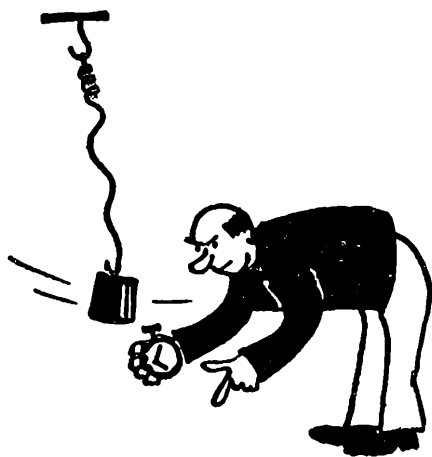
Obr. 11.

Na základě tohoto procesu lze považovat, jak bylo již dříve řečeno, přímku „za kružnici o nekonečně velkém poloměru“.3) Z toho plyne, že přímka je taková křivka, která má ve všech svých bodech nulovou křivost, což odpovídá zcela názoru v tom smyslu, že přímka je prostě „rovná“, a tudíž její křivost nulová. Na obr. 6b je znázorněna křivka k , která má ve svém bodě T inflexní bod, tj. takový bod, ve kterém má příslušná tečna (tj. přímka) s křivkou k styk nejméně trojbodový. Vzhledem k tomu, co bylo již dříve řečeno o sty-

ku křivky v jejím bodě s oskulační kružnicí a podle textu k obr. 11, plyne:

Křivka k má ve svých inflexních bodech nulovou křivost, tj. řečeno populárně, křivka k má v inflexních bodech oskulační kružnici o nekonečně velkém poloměru.

(Pokračování)



Fyzika

Prof. Dr. Jozef Skotnický,
Košice:

Význam Carnotovho cyklu pre termodynamiku

Úvod

Roku 1824 publikoval francúzsky inžinier Sadi Carnot svoj spis *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres a développer cette puissance*, ktorý býva označovaný za prvý termodynamický spis vôbec. Autor sa v ňom zaoberal pracovnou schopnosťou tepla keď toto spontánne prechádza z vyššej teploty na nižšiu. Pripodobňoval tento dej

spádu vody z vyššej hladiny na nižšiu a správne usudzoval že teplo sa bude po pracovnej stránke chovať rovnako ako voda, že teda bude pri tomto prechode môcť konať prácu, ak sa tento prechod tepla z vyššej teploty na nižšiu uskutoční vo vhodnom stroji. Carnot teoreticky udal schema takéhoto stroja ale nesprávne sa domnieval že v stroji všetko teplo, ktoré opustí vyššiu teplotu, prejde na teplotu nižšiu. Tento jeho názor vyplýval z prílišnej analogizácie tepla s vodou vyplývajúcej z predstavy tepla ako fluida, a najmä ovšem zo skutočnosti, že vtedy ešte nebol známy pojem energie.

Jeho úvahy doplnil r. 1850 nemecký fyzik R. C l a u s i u s a správne udal pracovnú schopnosť tepla v tvare infinitesimálnom $dA = QdT/T$ aj konečnom

$$A = Q_1 (T_1 - T_2)/T_1 = Q_2 (T_1 - T_2)/T_2 = Q_1 - Q_2 .$$

Z týchto rovníc rezultuje tiež rovnosť kvocientov $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$, ktoré Clausius nazval e n t r o p i o u. Tak bol vytvorením pojmu entropie ako novej vlastnosti látok (vedľa energie) položený základ termodynamiky fyzikálnej i chemickej.

Carnotov cyklus

Carnotov cyklus, ako názor hovorí, pozostáva z kruhového pracovného deja, ktorý môžeme prevádzať s akoukoľvek látkou a to tak, že sa nakoniec vrátíme do pôvodného stavu. K vôli zjednodušeniu úvah volíme za túto látku jeden kilomol dokonalého plynu, ktorého stavová rovnica je

$$p V = R T$$

a cyklus složíme zo dvoch izotermických a dvoch adiabatických dejov, ako ukazuje diagram $p - V$ na obr. 1. Pri adiabetickej expanzii, kedy plyn mení svoj stav z hodnôt (p_1, V_1, T_1) na stav (p_2, V_2, T_2) , môže plyn maximálne vykonať prácu

$$A = C_v (T_1 - T_2) , \tag{1}$$

kde C_v značí tzv. m o l o v é t e p l o za stáleho objemu (jednotkou je kcal na kilomol a stupeň). Pri adiabatickom deji je totiž plyn tepelne izolovaný od okolia a celú prácu koná len na úkor svojho vlastného tepla (čiže vnútornej energie U), čím sa ochladzuje. Pri izotermickom deji plyn koná prácu tiež na úkor vlastného tepla, ale pretože si toto teplo ihneď a plynule dopĺňa z okolia (tepelnej lázne), neochladzuje sa a konanie práce spočíva v tom, že celé teplo Q resorbované z okolia plyn mení v užitočnú prácu danú vzťahom

$$A = Q = R T \ln \frac{V_2}{V_1} . \tag{2}$$

Pro izotermický dej platí r o v n i c a B o y l e - M a r i o t t e o v a
 $p V = \text{konst}$

a pre adiabatický rovnica Poissonova

$$p V^{\kappa} = \text{konst},$$

kde $\kappa = c_p/c_v = C_p/C_v$ je Poissonova konstanta udávajúca pomer špecifických tepiel plynu pri konstantnom tlaku a objeme. Keď Poissonovu rovnicu píšeme vo forme

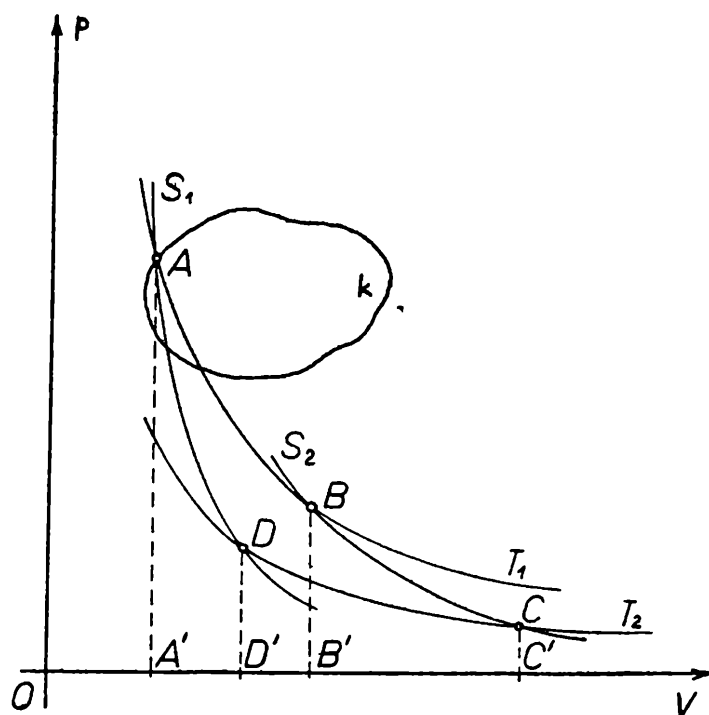
$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$$

a vylúčime tlak p_1 resp. p_2 pomocou stavovej rovnice

$$p_1 V_1 = R T_1, \quad p_2 V_2 = R T_2,$$

dostaneme adiabatický vzťah medzi objemom a teplotou

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{1-\kappa}}.$$



Obr. 1.

Tento vzťah znamená, že tomu istému pomeru teplôt $\frac{T_1}{T_2}$ zodpovedá vždy ten istý pomer objemov pozdĺž každej adiabaty, teda podľa obr. 1 je

$$\frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B},$$

z čoho ďalej tiež plynie

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}. \quad (3)$$

Po tomto objasnení pristúpme teraz k vlastnému pracovnému hodnoteniu Carnotovho cyklu. Nech sa kilomol plynu teploty T_1 a objemu V_1 (grafický znázornený bodom A na obr. 1) rozpína jednak po izoterme T_1

(od bodu A do B), čím sa jeho objem zväčší na V_2 (ale teplota ostane nezmenená T_1); získaná práca bude podľa (2)

$$A'_{AB} = R T_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \quad (4a)$$

Ďalšou - tentoraz adiabatickou expanziou (z bodu B do C) sa objem plynu zväčší z hodnoty V_B na hodnotu V_C a teplota klesne na T_2 ; získaná práca je podľa (1) daná vzťahom

$$A'_{BC} = C_v (T_1 - T_2). \quad (4b)$$

Preto pri úhrnnej expanzii po dráhe ABC získame prácu

$$A' = A'_{AB} + A'_{BC} = R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + C_v (T_1 - T_2). \quad (4)$$

Podobne pri stlačovaní (kompresii) plynu po dráhe CDA spotrebujeme prácu

$$A'' = A''_{CD} + A''_{DA} = R T_2 \ln \frac{V_C}{V_D} + C_v (T_1 - T_2). \quad (5)$$

Rozdiel výrazov (4) a (5) s použitím rovnosti (3) určuje pracovný zisk

$$A_w = A' - A'' = R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (6)$$

pri Carnotovom kruhovom cykle, ktorý je udaný plochou vnútri uzavretej dráhy $ABCD A = ABCC'A'A - ABCC'A'A$.

Podľa vzťahu (2) je teplo Q_1 , ktoré plyn nabral pri izotermickej expanzii (z A do B) dané vzťahom $Q_1 = R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$; z neho vyplýva že

$$\frac{Q_1}{T_1} = R \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (6a)$$

a obdobne pre teplo, ktoré plyn pri izotermickej kompresii (z C do D) odovzdá platí

$$\frac{Q_2}{T_2} = R \ln \frac{V_C}{V_D} = R \ln \frac{V_B}{V_A}, \quad (6b)$$

kde sme opäť užili (3). Možno teda vzťah (6) prepísať do tvarov

$$A_w = Q_1 - Q_2 = Q_1 (T_1 - T_2)/T_1 = Q_2 (T_1 - T_2)/T_2. \quad (7)$$

Vo vzťahu (7) zostávajú len veličiny nezávislé na druhu látky, s ktorou sa kruhový dej prevádza tj. teploty T_1 a T_2 a teploty Q_1 a Q_2 , ktoré látka pri týchto teplotách z okolia resorbuje (Q_1) resp. do okolia odovzdáva (Q_2). Tento výsledok neprekvapuje, pretože látka, ktorá prevádza kruhový cyklus a vracia sa teda do pôvodného stavu, nemôže byť vlastnou pracovnou látkou, ale len látkou ktorá prácu sprostredkuje, čiže súčasťou stroja, v tomto prípade stroja tepelného. Vlastnú prácu koná teda nie

cirkulujúca látka, ale teplo Q , ktoré z vyššej teploty T_1 klesá čiastočne v hodnote Q_2 na nižšiu teplotu T_2 a čiastočne sa mení v užitečnú prácu $A_w = Q_1 - Q_2$.

Preto tiež práca získateľná pri Carnotovom cykle vyplýva z využitia pracovnej schopnosti A_w tepla. Termodynamický termín „pracovná schopnosť tepla“, v ďalšom hojne užívaný, tvorí ovšem len výhodnú a názornú skratku presnejšieho názvu „pracovná schopnosť systému skladajúceho sa z teplejšej a studenšej lázne (látky, réservoiru)“. Pri bežnom prechode tepla z teplejšej lázne do studenšej, napr. pri obyčajnom kontakte oboch, sa ovšem žiadna práca nezíska. Aby sme pracovnú schopnosť tepla využili, musíme teplo k práci donútiť tak, že ho necháme prechádzať z vyššej teploty na nižšiu vo vhodnom zariadení - stroji, ktorý nazývame strojom tepelným a ktorého podstatnú časť tvorí látka prichádzajúca do tepelného kontaktu s oboma láznami a medzi nimi cirkulujúca za konania vonkajšej práce.

Pri opačnom priebehu Carnotovho cyklu, teda podľa obr. 1 v smere $ADCBA$ možno zase pomocou pomerne malej práce A_w do stroja vložennej premiestniť značné množstvo tepla Q_2 z teploty nižšej T_2 na vyššiu T_1 tak že na tejto sa vybaví nie len teplo Q_2 ale aj práca A_w premenená na teplo, teda $Q_1 = Q_2 + A_w$. Takýto stroj možno vhodne nazvať chladiacim a možno ho výhodne užiť k temperovaniu obytných miestností: v zime je studená lázeň vonku a teplá vnútri miestností - v lete naopak, takže miestnosti sa v zime vykurejú a v lete chladia.

Vykurovacia resp. chladiacia účinnosť je značná, lebo obnáša podľa rovnice (1)

$$\frac{Q_1}{A_w} = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)} \text{ resp. } \frac{Q_2}{A_w} = \frac{T_2}{(T_1 - T_2)}$$

čo za prírodných podmienok obnáša okružle $\frac{300}{30} = 10$, tj. premiestňuje sa 10krát väčšie teplo než obnáša práca do chladiaceho stroja vkladaná. Keď uvážime, že pri kúrení elektrickým prúdom vybavené Jouleovo teplo sa rovná práci tohoto prúdu, názorne vynikajú výhody kúrenia alebo chladenia takýmto chladiacim strojom založeným na Carnotovom cykle s opačným smerom priebehu.

Uvedené úvahy o Carnotovom cykle sa ovšem vzťahujú nie len na schematizovaný cyklus $ABCD A$ ale aj na pracovný cyklus po ľubovoľnej obecnej krivke k s podmienkou, že táto je uzavretá: získaná práca je daná plochou vnútri tejto uzavretej krivky. Práca táto je vykonaná teplom, ktoré pozdĺž krivky k klesá z vyšších teplôt na nižšie.

Základné poslanie Carnotovho cyklu nutno vidieť v tom, že určuje pracovnú schopnosť tepla A_w podľa rovnice (7) ako to vyjadril aj Carnot v nadpise svojho diela, kde hovorí o „puissance motrice du feu“. Význam cyklu sa však nevzťahuje len na tepelné stroje, ale je univerzálny, lebo

jeho všeobecná aplikácia v termodynamike vedie k ďalším dôležitým výsledkom.

Entropický význam Carnotovho cyklu

Pri izotermickej expanzii môže ideálny plyn alebo rozpustená látka resorbovať maximálne teplo $Q = kT \ln \frac{c_1}{c_2}$ a premeniť ho v užitočnú prácu. Teplo toto je úmerné absolutnej teplote a závislé samozrejme aj na množstve (konštata k má pre n kilomolov látky hodnotu nR , kde $R \doteq 2 \text{ kcal kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, aj na druhu absorbujúcej látky, presnejšie povedané, na určitej jej stavovej vlastnosti, ktorá v prípade ideálnych plynov a roztokov je daná ich koncentráciou $c = \frac{1}{V}$. Schopnosť resorbovať teplo z okolia majú však nie len ideálne plyny a roztoky pri expanzii ale obečne všetky látky; stretávame sa s ňou napr. pri premene skupenstiev, pri ionizácii atomov alebo disociácii molekúl a všeobecne pri chemických premenách látok. Aj tu môžeme predpokladať, že resorbovateľné teplo bude závislé na nejakej funkcii teploty a na nejakej špeciálnej vlastnosti látok, ktorá má práve vystihovať túto resorpčnú schopnosť látok pre teplo a ktorú nazývame entropiou S , takže môžeme obečne písať $Q = f(T) \cdot (S_2 - S_1)$. Keď s takouto obečnou látkou prevedieme Carnotov cyklus medzi teplotami T_1 a T_2 a adiabatami S_1 a S_2 , nemôže byť pracovný efekt tohto cyklu závislý na druhu použitej látky, lebo táto je len súčasťou tepelného stroja a vlastnú prácu koná teplo, takže pracovný efekt musí byť vždy ten istý a daný rovnicou (7); teda aj pre obečnú látku musí platiť

$$\frac{A_w}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{f(T_1) - f(T_2)}{f(T_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (8)$$

Predposledný aj posledný člen tejto rovnice sa skladá z dvoch zlomkov, z ktorých prvé majú rovnakú jednotkovú hodnotu a preto sa rušia. Druhé dva zlomky môžeme písať vo forme $f(T_2) : f(T_1) = T_2 : T_1$ z ktorej vidno, že hľadaná funkcia teploty musí byť priamo úmerná absolutnej teplote a že teda látky obečne môžu resorbovať teplo len podľa rovnice

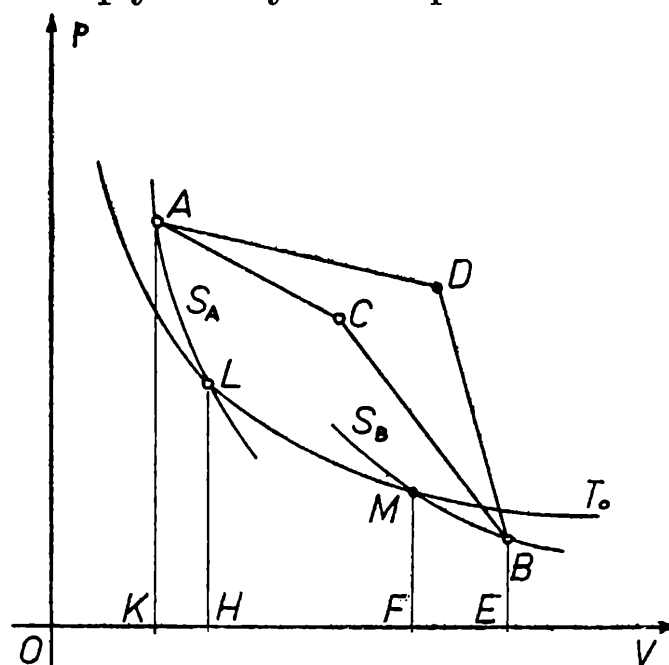
$$Q = T (S_2 - S_1) = -T (S_1 - S_2) = -T \Delta S. \quad (9)$$

Entropiu môžeme tedy definovať ako tú vlastnosť látok, ktorá s absolutnou teplotou spoluurčuje ich schopnosť resorbovať teplo a pomocou tohoto tepla sa aj meria, teda $S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}$, resp. $dS = \frac{dQ}{T}$, nakoľko pri anizotermických dejoch môžeme uvažovať len nepatrné zmeny stavu látok a tým aj ich entropie, pri ktorých môžeme považovať teplotu za konstantnú. Je evidentné, že u dokonalých plynov a roztokov zmena entropie je pri izotermických zmenách daná vzťahom $\Delta S = -k \ln c$,

pričom v prípade molárnej entropie vzťahujúcej sa na jeden kilomol látky, konstanta k má hodnotu $R = 2 \text{ kcal kmol}^{-1} \text{ deg}^{-1}$. Pri definícii entropie musíme hovoriť o resorpčnej *schopnosti* látok pre teplo, lebo táto sa môže ale aj nemusí uplatniť. Tak napr. plyn, ktorý sa rozpína do vakua, žiadne teplo neresorbuje ani žiadnu prácu nekoná, ale pri tom jeho entropia vzrastie tak ako by bol resorboval maximálne teplo a vykonal maximálnu prácu vo vhodnom stroji, nakoľko entropia je stavovou vlastnosťou látok; ale schopnosť resorbovať teplo sa uplatňuje len pri konaní práce vo vhodných strojoch.

Carnotov cyklus a pracovná schopnosť látok

Na obr. 2 je v diagrame pV znázornená obecná neizotermická expanzia plynu zo stavu A do stavu B raz cez stav C , po druhé cez stav D a obom expanziám príslušné plynom vykonané práce $ACBEKA$ a $ABDEKA$.



Obr. 2.

Právom sa môžeme pýtať, ako je možné, že plyn expandujúci sa medzi tými istými dvoma stavmi A a B , koná rôznu prácu, závislú na ceste po ktorej expanzia nastáva - čo mu pomáha, že na ceste ADB koná prácu väčšiu než na ceste ACB ? - Keď prihliadneme k predošlým kapitolám, ľahko najdeme odpoveď: pomáha mu teplo, lebo pri ceste ADB resorbuje plyn teplo pri vyšších teplotách než pri ceste ACB , a veď teplo na vyššej teplote má väčšiu pracovnú schopnosť než na teplote nižšej.

Aby bolo možné obe tieto práce, teda prácu plynu aj tepla navzájom rozlíšiť a kvantitatívne presne stanoviť, je nutné konvenčne zvoliť konštantnú teplotu T_0 , pri ktorej resorpciu alebo uvoľnenie tepla každou látkou budeme považovať za pracovne indiferentné, napr. 18 alebo 25 °C, nakoľko tieto teploty sú tiež bežne užívané v termochemických tabuľkách. Nie je totiž pracovne nezávažné či systémy resorbujú alebo uvoľ-

ňujú teplo pri teplotách vyšších alebo nižších. Všeobecné uplatnenie Carnotovho princípu si takúto standardizáciu „pracovne indiferentnej“ teploty priamo vynucuje.

Cestu plynu ACB možno potom rozložiť na $ACBMLA + ALMB = ACB$. Práca po prvej kruhovej ceste $ACBMLA$ daná plochou vnútri tejto uzavrenej kruhovej cesty, aj keď je konaná plynom, nejde na úkor pracovnej schopnosti tohoto plynu, ale tepla ktorému plyn umožňuje prechod z vyšších teplôt na nižšie. Prácu po druhej ceste $ALMB$ koná už ovšem plyn sám na úkor svojej vlastnej pracovnej schopnosti a táto je teda daná plochou $ALMBEKA$. Je zjavné že zmena cesty plynu z ACB na ADB mení len prácu tepelnú, ale na prácu a pracovnú schopnosť plynu samého nemá žiadneho vlivu.

Pracovná schopnosť ΔA_S ideálneho plynu medzi stavmi A a B , teda $A_A - A_B = \Delta A_S$ sa teda skladá

1. z úsekov $ALHKA + MBEFM$ ktoré spolu predstavujú úbytok vnútornej energie plynu $\Delta U = U_A - U_B$ medzi stavmi A a B , nakoľko pozdĺž adiabat S_A a S_B plyn od vonkajšieho prostredia tepelne izolovaný koná prácu len na úkor svojej vlastnej vnútornej energie a

2. z úseku $LMFHL$ predstavujúceho teplo Q_o plynom resorbované pri izotermickom prechode zo stavu L do stavu M , ktoré sa rôznia úbytkom entropie $\Delta S = S_A - S_B$, teda

$$Q_o = T_o (S_B - S_A) = -T_o \Delta S$$

Celkom dostávame teda vzťah

$$\Delta A_S = \Delta U + Q_o = \Delta U - T_o \Delta S, \quad (10)$$

z ktorého vidno že pracovná schopnosť ideálneho plynu musí byť jeho stavovou vlastnosťou, nakoľko je additívnou funkciou vnútornej energie U i entropie S , ktoré sú jeho stavovými vlastnosťami, a standardná teplota T_o je konstantou.

Vzťah (10) možno ovšem generalizovať na všetky látky, nakoľko vnútorná energia U i entropia S sú termodynamické veličiny charakterizujúce stav každej látky a nie len ideálneho plynu. Túto generalizáciu možno rozšíriť aj ďalej pre celé sústavy látok - chemické systémy, nakoľko U i S sú extenzívne vlastnosti látok a ich hodnoty pre sústavy látok sa získavajú aditívne pomocou značky sumačnej Σ alebo diferenčnej Δ , tak ako sa s týmito značkami bežne stretáme v rovniciach chemickej termodynamiky, kde $\Delta = \Sigma_{\text{endo}} - \Sigma_{\text{exo}}$, tj. diferenčná značka Δ znamená rozdiel termodynamických veličín látok po oboch stranách chemickej reakcie. Pri tom veličiny na endotermickej strane reakcie sa počítajú kladne a na exotermickej záporne, aby vybavené reakčné teplo malo kladnú hodnotu.

Keď chceme určiť maximálnu prácu systému ΔA pri teplote nie T_o ale teplote vyššej T , potom ovšem musíme vziať v úvahu aj pracovnú schopnosť tepla A_w podľa rovnice (7), lebo potom systém bude resorbovať teplo nie pri standardnej teplote T_o ale pri vyššej teplote T . Nakoľko

pracovná schopnosť tepla potom bude podľa rovníc (1) a (9)

$$A_w = Q - Q_o = -T\Delta S + T_o\Delta S = (T_o - T)\Delta S,$$

dostaneme pre maximálnu prácu výraz

$$\Delta A = \Delta A_s + A_w = \Delta U - T_o\Delta S + (T_o - T)\Delta S = \Delta U - T\Delta S = \Delta U + Q \quad (10a)$$

v zhode so známou skutočnosťou, že maximálna práca je dána úbytkom vnútornej energie systému a teplom ním resorbovaným z okolia.

Keď neporovnávame navzájom niekoľko izotermických dejov ale uvažujeme iba jediný takýto dej, môžeme ovšem konvenčnú teplotu T_o ad hoc stotožniť s danou teplotou T a tým zrušiť rozdiel medzi maximálnou prácou ΔA a pracovnou schopnosťou systému ΔA_s , nakoľko potom $A_w = 0$; pracovnú schopnosť tepla môžeme teda zanedbať, lebo resorpcia tepla prebieha pri indiferentnej teplote $T_o = T$.

Keď systém o objeme V sa nachádza pod konstantným tlakom p vonkajšieho prostredia, je za predpokladu $T = T_o$ maximálna práca ΔG väčšia než pracovná schopnosť systému ΔA a to o pracovnú schopnosť prostredia $p\Delta V$, kde ΔV znamená úbytok objemu systému $\Delta V = V_A - V_B$ pri zmene počiatočného stavu A systému na konečný stav B , takže pre celkovú pracovnú schopnosť systému aj prostredia dostaneme

$$\Delta G = \Delta A + p\Delta V = \Delta U - T\Delta S + p\Delta V = \Delta H - T\Delta S, \quad (11)$$

kde značí: A = pracovná schopnosť systému (čiže „volná energia“), H = entalpia; G = celková pracovná schopnosť systému aj prostredia (= Gibbsův termodynamický potenciál, alebo volná entalpia).

Z rovnice (11) vysvitajú aj definície uvedených nových veličín: $\Delta G = \Delta A + p\Delta V$ značí: volná entalpia G je určená súčtom volnej energie (A) a súčinu tlaku s objemom; $\Delta A = \Delta U - T\Delta S$ značí: volná energia (A) je určená rozdielom vnútornej energie (U) a súčinu abs. teploty s entropiou; $\Delta H = \Delta U + p\Delta V$ znamená: entalpia H je určená súčtom vnútornej energie a súčinu abs. teploty s entropiou.

Uvedenú rovnicu (11) možno zobecniť pre všetky prírodné systémy, ak do symbolu U zahrnieme energiu nie len vnútornú, ale aj všetky druhy energie vonkajšej, ako potenciálnu, kinetickú, elektrostatickú, elektromagnetickú a ďalšie.

Druhý hlavný zákon termodynamiky

V predošlej kapitole bolo pomocou všeobecnej aplikácie Carnotovho cyklu a z nej vyplývajúceho zavedenia standardnej teploty ukázané, že pracovná schopnosť látok je ich stavovou vlastnosťou práve tak ako energia a entropia, nakoľko je aditívnou funkciou týchto vlastností. Zákon zachovania energie hovorí, že energia sa v látkach zachováva za každých okolností, teda v kludových aj v pohybových podmienkach.

Za kludných podmienok sa zachováva v látkach aj pracovná schopnosť, ale za podmienok pohybových len pri tzv. reverzibilných (vratných) dejoch, ktoré však možno vymýšľať len teoreticky. V skutočnosti existujú v prírode len deje irreverzibilné (nevratné), pri ktorých sa aspoň časť pracovnej schopnosti stráca. Druhý hlavný zákon termodynamiky možno teda formulovať ako zákon o neustálom poklese pracovnej schopnosti látok v priebehu prírodného dejstva a pomocou neho možno rozlíšiť stavy pohybové od kludových.

Ďalšie podrobnosti o tejto tematike nájdú záujemci v článkoch:

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik vom Standpunkt der klassischen Physik a Die Unifikation von Gesetzen der chemischen Thermodynamik und der energetische Mechanismus chemischer Reaktionen. Prof. Dr. W. Beier: Physikalische Grundlagen der Medizin, Abhandlungen aus der Biophysik, sešit 4/5, 1964, str. 259—275 a sešit 2, 1962, str. 89—111.

A l o i s S k y v a, PU, Olomouc:

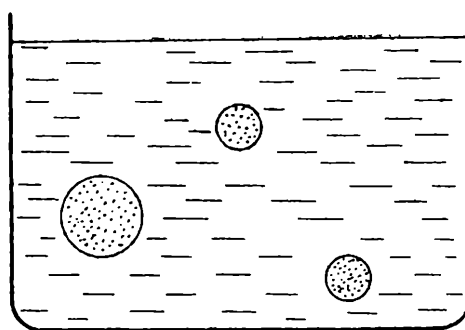
Pokusy k představě povrchového napětí kapalin

Pozorujeme-li hladinu klidnější vody, jejíž břehy jsou obrostlé rákosím a jiným vodním rostlinstvem, můžeme brzy vidět vodoměrku. Běhá po hladině stejně hbitě jako pavouk po pavučině. Při pohledu zblízka vidíme, že vodní pavouk není do vody ponořen, ale že vodní hladina se pod jeho nožkami vždy jen mírně prohne. Tento jev i jevy jiné vysvětlujeme na základě existence povrchového napětí kapalin.

1. Definice pojmu

Dejme olivový olej do takové směsi vody a lihu, že její hustota je rovna hustotě oleje. Síla tíže působící na olej je v rovnováze se vztlakem. Zjistíme, že vznášející se kapky oleje mají kulový tvar (obr. 1).

Jak známo, má koule při daném objemu nejmenší povrch. Je-li to možné, každé těleso přechází do stálého rovnovážného stavu, jemuž odpovídá minimální potenciální energie. Takovým stálým rovnovážným stavem pro vznášející se kapičku oleje je její kulový tvar, neboť narušíme-li jej, opět do něho přejde po vymizení narušující síly. Odpovídá tedy kulovému tvaru kapičky nejmenší potenciální energie. Současně však odpovídá kulovému tvaru kapičky, jak už jsme výše uvedli, nejmenší



Obr. 1. Vznášející se kapky olivového oleje ve směsi vody a lihu.

povrch při daném objemu. Zvětšíme-li nějakým způsobem povrch olejové kapičky narušením jejího kulového tvaru, zvětší se současně potenciální energie kapičky. Poněvadž pro molekuly, které zůstaly uvnitř kapičky, se nic nezměnilo, je vidět, že přírůstek energie připadá na molekuly, které přešly z vnitřku na povrch kapičky a vytvořily zvětšený povrch.

Zvětší-li se povrch kapičky o ΔS , zvětší se současně energie tohoto povrchu o ΔW . Energie potřebná k vytvoření jednotkového povrchu je pak $\frac{\Delta W}{\Delta S}$. Tato energie se opět uvolní, když se povrch o jednotku zmenší.

Přechází-li kapička do tvaru koule, chová se vlastně tak, jako by na jejím povrchu byla pružná blána. Přimyslíme-li si v povrchu pružné blány jakoukoliv čáru, může se blána roztrhnout podél této čáry, tj. v jejím povrchu působí jisté napětí. Poněvadž podíl $\frac{\Delta W}{\Delta S}$ určuje velikost energie, která se uvolní, zmenší-li se povrch kapičky o jednotku, určuje tento podíl velikost tendence blány roztrhnout se podél uvažované čáry. Nazýváme proto tento podíl *povrchové napětí*. Značíme je σ .
Rovnice

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} \quad (1)$$

nám říká, že *povrchové napětí je číselně rovno podílu změny volné energie povrchové blány ke změně její plochy*. Volnou energií povrchové blány při tom rozumíme tu část vnitřní energie blány, která může být přeměněna v práci.

Změna volné energie povrchové blány je rovna práci A , která se konala při změně jejího povrchu. Tuto práci můžeme vyjádřit jako součin jisté síly F a dráhy Δy . Platí tedy

$$\Delta W = A = F \cdot \Delta y. \quad (2)$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme

$$\sigma = \frac{F \cdot \Delta y}{\Delta S}.$$

Poněvadž změnu plochy ΔS můžeme vyjádřit jako součin dráhy Δy síly F a k ní kolmé jisté délky l , je

$$\sigma = \frac{F \cdot \Delta y}{\Delta S} = \frac{F \cdot \Delta y}{l \cdot \Delta y} = \frac{F}{l}.$$

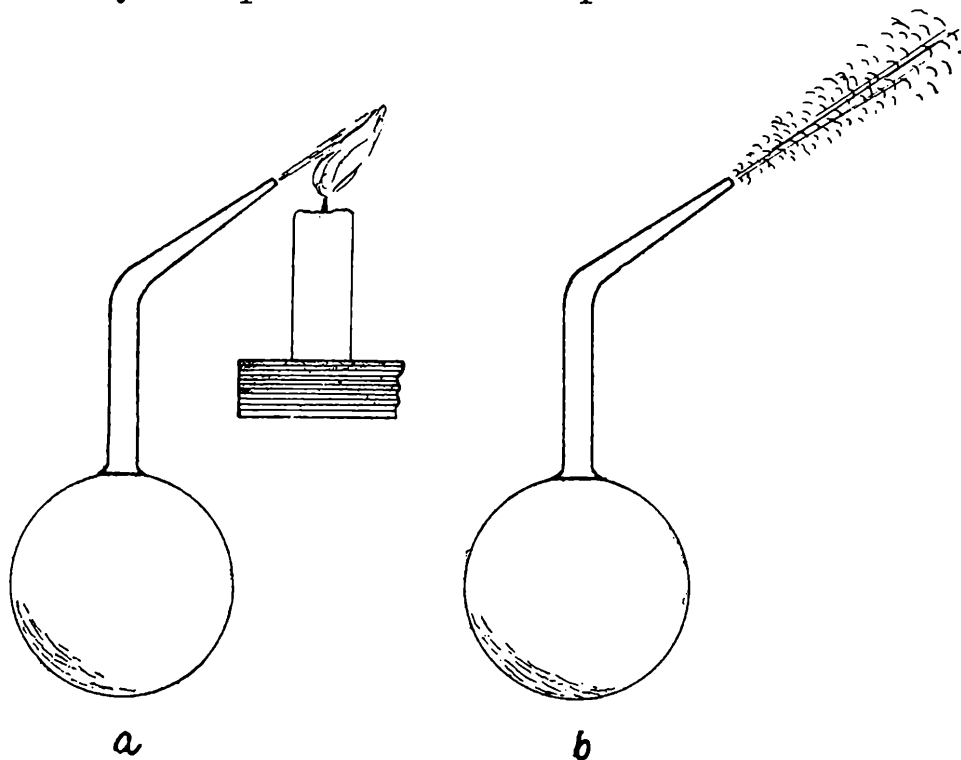
Hodnota $\frac{F}{l}$ je síla v povrchu kapaliny, působící na jednotku délky kolmou k síle F . Tato jednotka délky je částí nějaké myšlené čáry v povrchu kapaliny, podél níž se může povrchová vrstva kapaliny „roztrhnout“. Odtud plyne jiná definice povrchového napětí:

Povrchové napětí je rovno síle, působící kolmo na jednotku délky povrchové blány v jejím povrchu.

V soustavě SI se měří v $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Malé kapičky rtuti na podložce budou mít rovněž kulový tvar, což vysvětlujeme existencí povrchového napětí. V případě větších kapek způsobuje zemská tíže jejich znatelnou deformaci, neboť síla tíže převažuje nad silou povrchového napětí.

Tyto úvahy platí i pro pevné látky. Tendence po dosažení uspořádaného krystalického stavu je však u pevných látek tak silná, že daleko slabší tendence o nejmenší povrch se nemůže uplatnit.



Obr. 2. Stahování blány mydlinové bubliny: a) vytlačovaný vzduch vychyluje plamen svíčky; b) viditelný proud tabákového kouře při vyfouknutí bubliny tabákovým kouřem.

Stahování povrchové blány kapaliny můžeme demonstrovat následujícím pokusem (obr. 2). Vhodně tvarovanou skleněnou trubičku ponoříme rozšířeným koncem (vnitřní $\varnothing$ 4 mm) do mydlinové vody a vyfoukneme na jejím konci mydlinovou bublinu. Potom druhý zúžený konec trubičky (vnitřní $\varnothing$ 1 mm) přiblížíme k plameni svíčky na vzdálenost 5 až 10 mm. Povrchové napětí způsobuje zmenšování bubliny. Vzduch obsažený v bublině je vytlačován zúženým koncem trubičky ven a vychyluje plamen svíčky (obr. 2a). Jestliže bublinu vyfoukneme tabákovým kouřem, nemusíme ani používat svíčky. Ze zúženého konce trubičky vidíme vycházet zřetelný proud tabákového kouře (obr. 2b).

2. Měření povrchového napětí

Jeden ze způsobů měření povrchového napětí je znázorněn na obr. 3. Dmýháním vzduchu ve směru šipky vytvoříme přetlakem vzduchovou

bublinu na konci kapiláry. Síla povrchového napětí má tendenci bublinu stáhnout, zmenšit. Tato síla bude zřejmě v rovnováze se silou, která je dána přetlakem Δp zmenšeným o protitlak, způsobený tím, že konec kapiláry je ponořen v hloubce h . Přetlak Δp čteme na manometrické trubici. Skutečný přetlak uvnitř bubliny je tedy

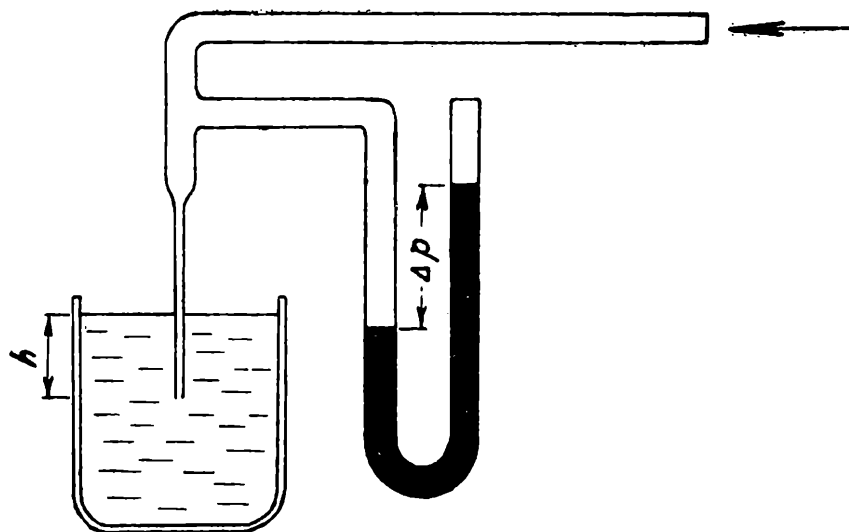
$$\Delta p - h \rho g ,$$

kde ρ je hustota kapaliny a g tíhové zrychlení. Je-li bublina velmi malá, můžeme předpokládat, že její styková plocha s kapalinou bude πr^2 ; r je poloměr kapiláry. Pro celkovou sílu, působící na ústí kapiláry při vytvoření bubliny, máme pak

$$\pi r^2 (\Delta p - h \rho g)$$

Obvod kapiláry tvoří čáru ohraničující blánu bubliny. Délka této čáry je $2\pi r$ a na jednotku její délky působí síla

$$\frac{\pi r^2 (\Delta p - h \rho g)}{2\pi r} ;$$



Obr. 3. Schéma aparatury pro měření povrchového napětí.

to je však zřejmě hledaný výraz pro povrchové napětí σ . Po zkrácení je

$$\frac{r (\Delta p - h \rho g)}{2}$$

Povrchové napětí vypočteme tedy při našem pokusu ze vzorce

$$\sigma = \frac{r (\Delta p - h \rho g)}{2} ,$$

kde r je poloměr kapiláry, Δp přetlak čtený na manometrické trubici, h hloubka ponoření kapiláry, ρ hustota kapaliny a g tíhové zrychlení.

V tabulce 1 jsou uvedeny hodnoty povrchového napětí pro různé kapaliny na hranici se vzduchem v soustavě SI.

T a b u l k a 1. Povrchové napětí kapalin σ na hranici se vzduchem při 18 °C

Kapalina	Destilovaná voda	Olivový olej	Methyl-alkohol (dřevný líh)	Kyselina octová	Rtuť
σ v N.m ⁻¹ při 18 °C	0,072 97	0,033	0,0227	0,0280	0,491

S rostoucí teplotou povrchové napětí dané kapaliny klesá. Je to zcela v souladu s tím, že v kritickém bodě mizí rozdíl mezi skupenstvím kapalným a plynným. Pro vodu je závislost povrchového napětí na teplotě uvedena v tabulce 2.

T a b u l k a 2. Povrchové napětí destilované vody σ na hranici se vzduchem při různých teplotách

Teplota °C	0	10	15	20	25	30	40	50
σ v N.m ⁻¹	0,0757	0,0742	0,0735	0,07275	0,0720	0,0712	0,0696	0,0679

Z tabulky 1 je vidět, že voda má vzhledem k jiným kapalinám značné povrchové napětí. Toto poměrně vysoké povrchové napětí může být však snadno ovlivněno třeba jen nepatrnou koncentrací jiné kapaliny v destilované vodě.

Provedl jsem měření povrchového napětí destilované vody v závislosti na koncentraci saponu („Sapon“ je universální čisticí a mycí prostředek). Užil jsem k tomu kapkové metody. Kapková metoda je založena na tom, že povrchové napětí brání plynulému vytékání kapaliny ze svislé kapiláry. Kapalina vytéká po kapkách. Odtrhnutí kapky nastává vždy v okamžiku, kdy se váha kapky rovná síle povrchového napětí. Necháme-li z téže kapiláry dole rovně zabroušené odkapat n kapek kapaliny, jejíž povrchové napětí σ_2 známe a stejný počet kapek kapaliny o neznámém povrchovém napětí σ_1 , pak zřejmě bude

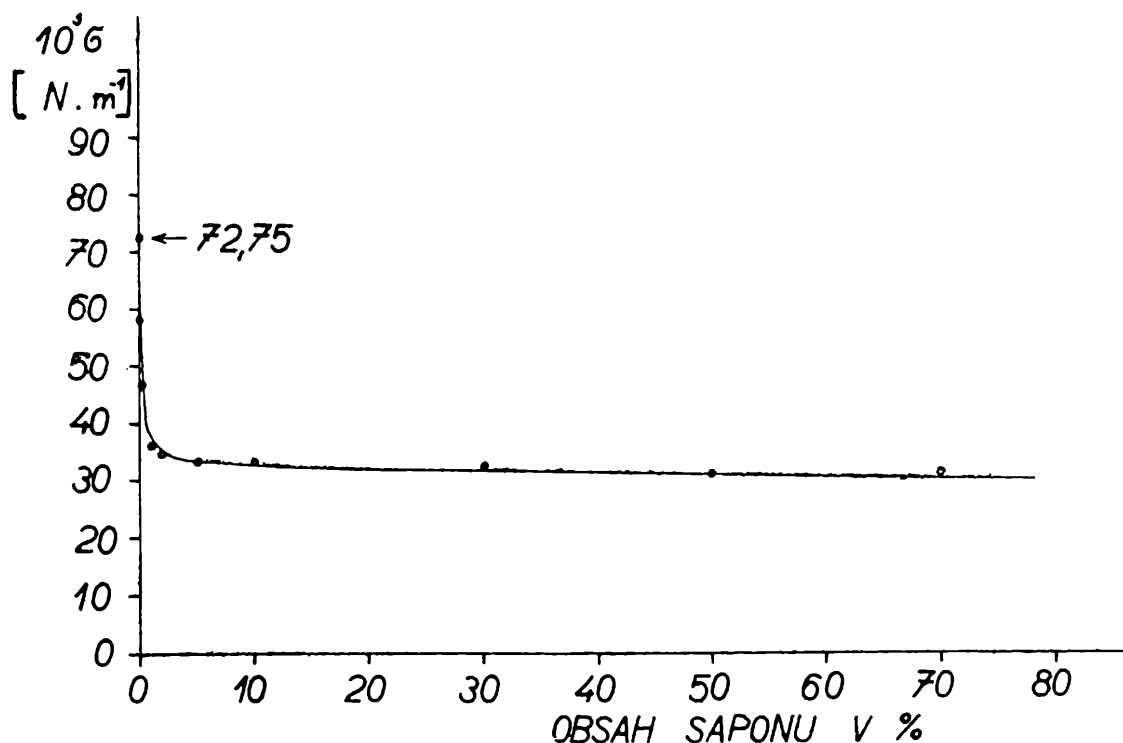
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n m_1}{n m_2},$$

kde m_1 je hmota kapky kapaliny o neznámém povrchovém napětí σ_1 a m_2 hmota kapky kapaliny o povrchovém napětí σ_2 . Hledané povrchové napětí určíme tedy ze vztahu

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{n m_1}{n m_2}.$$

Hmoty stejného počtu kapek obou kapalin stanovíme zvážení na analytických vahách. Při odtrhnutí kapky zůstává sice část její hmoty na trubici, ukazuje se však, že pro většinu kapalin zůstává též poměrná část kapky na trubici. Proto nemusíme tento jev uvažovat pro konečnou správnost výsledku.

V obr. 4 je graficky znázorněna naměřená závislost. Vidíme, že nepatrný obsah saponu silně snižuje hodnotu povrchového napětí destilované vody. Při malých koncentracích změna koncentrace silně ovlivňuje povrchové napětí, při větších koncentracích změna koncentrace přestává povrchové napětí tak prudce ovlivňovat.



Obr. 4. Povrchové napětí destilované vody σ na hranici se vzduchem v závislosti na koncentraci saponu při teplotě 20 °C.

3. Doplnující pokusy

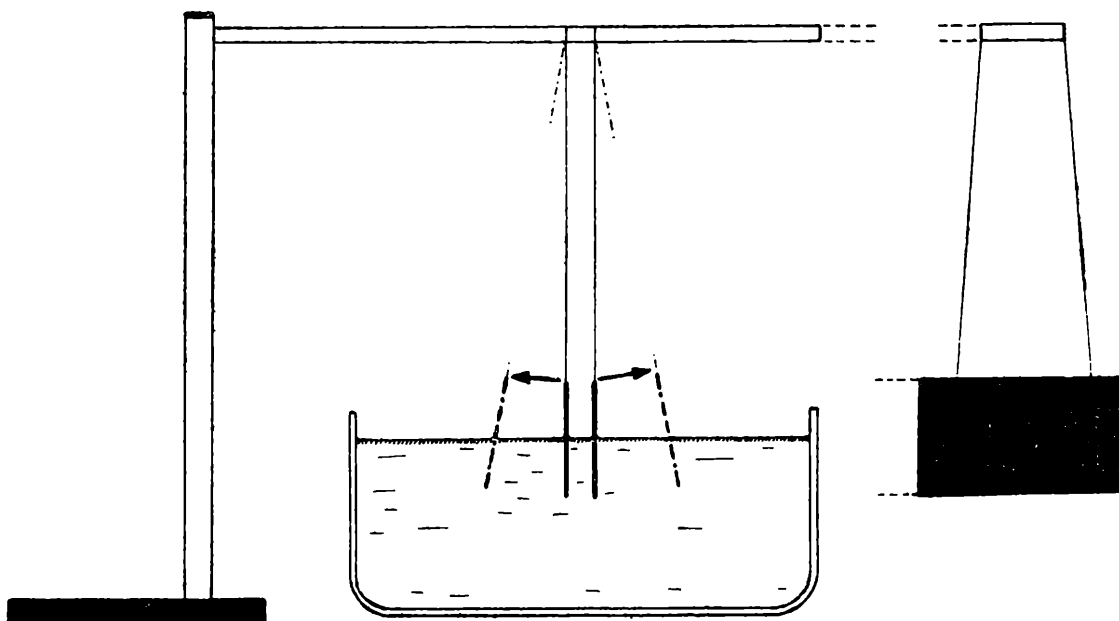
Vliv příměsí na povrchové napětí vody můžeme názorně ukázat pokusem (obr. 5), při němž mezi dva lehké plíšky ponořené částečně ve vodě a zavěšené paralelně vedle sebe ve vzdálenosti asi 1 cm, vpravíme kapku lihu nebo éteru. Místo plíšků lze použít žiletek. Kapka lihu nebo éteru na hladině vody mezi plíšky způsobí pokles povrchového napětí. Následkem toho se plíšky rozestoupí. Každý plíšek musíme zavěsit na dvě niti, aby při rozestoupení nedošlo k jejich stočení.

Mezi pokusy ukazující, že povrch kapaliny se chová jako pružná blána, patří položení žiletky, jehly nebo hliníkového kolečka na hladinu vody, aniž se tyto potopí.

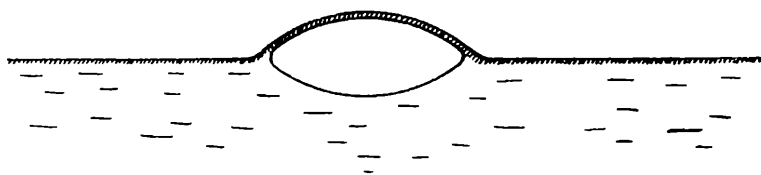
Pomocí povrchového napětí můžeme vysvětlit tvoření pěny. Když dosáhne stoupající vzduchová bublinka povrchu kapaliny, zvedne nad

sebou tenkou vrstvou kapaliny, povrchovou blánu (obr. 6). Je-li bublinka malá, neprotrhne povrchovou blánu a zůstane pod povrchem kapaliny. Velké množství bublinek pak vytváří pěnu.

Působení sil povrchového napětí můžeme též ukázat na mydlinové bláně v drátěném kroužku, přes který je volně uvázána nit. Po vytvoření blány nit v ní leží nenapnutá a rozděluje ji na dvě části (obr. 7a). Pro-
pícháme-li pomocí nahřátého drátu jednu část blány, bude působit na



Obr. 5. Rozestoupení plíšků ponořených částečně ve vodě snížením povrchového napětí vody mezi nimi éterem nebo lihem.



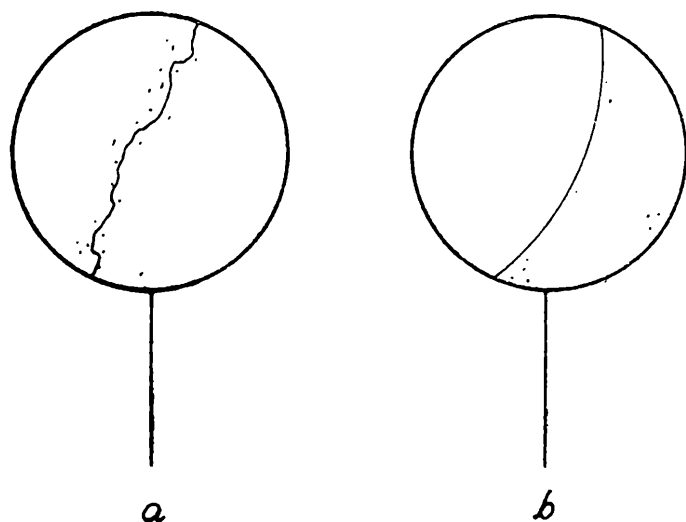
Obr. 6. Vzduchová bublinka zvedající povrchovou blánu kapaliny.

niť povrchové napětí jen z jedné strany a niť se napne (obr. 7b). Mydlinová voda má menší povrchové napětí než čistá voda. Povrchové napětí mydlinové vody bývá kolem $0,045 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Její způsobilost vytvářet snadno tenké blány se vysvětluje tím, že má velkou viskozitu. Stéká tak vlivem tíže pomaleji než čistá voda a udrží se snáze mezi oběma povrchovými vrstvami blány.

Že voda neproteče jemnou sítí, kterou představuje např. deštník nebo stanové plátno, to je rovněž způsobeno povrchovým napětím.

4. Závěr

Povrchové napětí se teoreticky vysvětluje existencí molekulárního tlaku. Na molekuly v povrchové vrstvě kapaliny působí totiž síla, směřující dovnitř kapaliny. Neplatí pro ně, že výslednice sil působících na molekulu v kapalině od ostatních molekul je v průměru rovna nule. Následkem toho působí povrchová vrstva kapaliny na veškerou kapalinu tlakem, který nazýváme molekulární tlak.



Obr. 7. Působení sil povrchového napětí mydlinové blány na niť v drátěném kroužku: a) před propíchnutím mydlinové blány; b) po propíchnutí jedné části mydlinové blány.

Na závěr upozorňuji, že koncem listopadu roku 1963 vydalo sovětské nakladatelství zahraniční literatury v Moskvě v překladu z angličtiny knížku dvojice autorů Ono S., Kondo S., *Molekuljarnaja teorija poverchnostnogo natjaženija v židkostjach* (Molekulární teorie povrchového napětí v kapalinách).

Miroslav Filip, Univerzita Komenského, Bratislava:

Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky

(Pokračování)

Dalším krokem v našem pomyslném budování tónové soustavy bude tedy „oprava“ pythagorejských tercií, jejich uvedení do souladu s přírodní zákonitostí; zmíněné tóny, v našem příkladu A, E, H, nebudeme tedy odvozovat kvintovou posloupností od základu C, ale přímo kroky velké tercie 5 : 4 od jejich základních tónů F, C, G

stupeň:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
tón:	C	D	E	F	G	A	H	C
poměrný kmitočet:	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

$\swarrow \quad \searrow$ $\swarrow \quad \searrow$ $\times$ $\swarrow \quad \searrow$
 $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{5}{4}$

Dostaneme tzv. *didymické*, nebo *přirozené* (též *čisté*) ladění. Nyní jsou tzv. hlavní trojzvuky, nositelé harmonických funkcí: tónické (c-e-g), subdominantní (f-a-c) a dominantní (g-h-d), čisté (soulasí s poměry alikvotních tónů), protože jejich velké tercie jsou dány poměrem $5 : 4$ a jejich kvinty poměrem $3 : 2$, jak se můžeme snadno přesvědčit (tón D je už třeba vzít z následující vyšší oktávy, tedy s poměrným kmitočtem $2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$).

V okruhu jedné tóniny se ovšem nepoužívá pouze hlavních trojzvuků, ale i tzv. vedlejších, které mohou být harmonickými zástupci hlavních, na základě vztahu tzv. *parallel*. Tak paralelou tóniky c-e-g je a-c-e, paralelou dominanty g-h-d je e-g-h a posléze paralelou subdominanty f-a-c je d-f-a. Kontrolujeme-li teď čistotu vedlejších trojzvuků, ukáže se, že první dva vyhovují: jejich kvinty jsou dány poměrem $3 : 2$ a jejich spodní tercie, tentokrát malé, (protože jsou to molové kvintakordy) jsou dány poměrem $6 : 5$, jak to vyplývá z našeho dřívějšího odvození ($\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$). Třetí z nich, subdominantní zástupce d-f-a má však falešnou kvintu d-a: $\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27}$, která je menší než přirozená kvinta: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{40}{27}} = \frac{81}{80}$, jak vidět, právě o známé syntónické koma. Podobně jeho malá tercie d-f: $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{32}{27}$ je menší než přirozená malá tercie: $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{32}{27}} = \frac{81}{80}$ opět o syntónické koma.

Náprava je zřejmá: musíme druhý stupeň durové tóniny, v našem případě D, snížit o syntónické koma, aby se celý trojzvuk d-f-a „vyčistil“: $\frac{\frac{9}{8}}{\frac{81}{80}} = \frac{10}{9}$. Tím proti první variantě přirozeného ladění

C	D	E	F
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$

dostáváme druhou

C	D	E	F
1	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Interval daný poměrem kmitočtů $\frac{9}{8}$ nazýváme *velký celý tón* a $\frac{10}{9}$ *malý celý tón*. Jak vidět, vyměnily si tyto dva intervaly navzájem svá místa, ostatní zůstávají nezměněny. Při kontrole hlavních trojzvuků nás ovšem čeká nemilé překvapení. Dominantní trojzvuk zní falešně. Jeho kvinta g-d je menší než přirozená: $\frac{2 \cdot \frac{10}{9}}{\frac{3}{2}} = \frac{40}{27}$ a vrchní

tercie h-d rovněž: $\frac{2 \cdot \frac{10}{9}}{\frac{15}{8}} = \frac{32}{27}$. Obě chyby mají velikost syntónického komatu, což je samozřejmé, protože právě o tolik jsme snížili druhý stupeň D, který je kvintou dominanty.

Závěrem lze tedy o přirozeném ladění (durové tóniny) říci, že první z obou uvedených variant má z harmonického hlediska nevyhovující paralelu subdominanty a druhá má zase nevyhovující dominantu. Je-li druhý stupeň přítomen v konkrétní harmonické situaci jako součást dominantního trojzvuku, je namístě první varianta, je-li ovšem součástí subdominantního zástupce, musíme použít druhé varianty. V přirozeném ladění tedy z původní řady kvint

F C G D A E H

zůstávají první tři členy kvintově laděné, poslední tři terciově a střední je variabilní, p o h y b l i v ý podle harmonických vztahů, přičemž jeho dvě polohy jsou vzdáleny navzájem o syntónické koma. Není tedy správné za přirozené ladění považovat pouze první z obou variant, i když je do jisté míry nadřaděna druhé. V minulosti se totiž (v důsledku opomenutí vedlejších trojzvuků) jako přirozené ladění uváděla pouze první varianta a tento názor se potom přenášel z jedné práce do druhé. To by však platilo pouze při v ý l u č n é m používání hlavních trojzvuků, což ovšem nebylo splněno v žádném období dějin hudby. Toto nedopatření se vyskytuje ve všech pracích z oboru hudební vědy i fyziky, autorovi tohoto článku známých kromě jediné výjimky (z domácí literatury), Ú v o d u d o a k u s t i k y p r o h u d e b n í k y o d A. Š p e l d y, SNKLHU Praha 1958, který v této věci upozorňuje na názory J. R e d f i e l d a a A. T. J o n e s e.

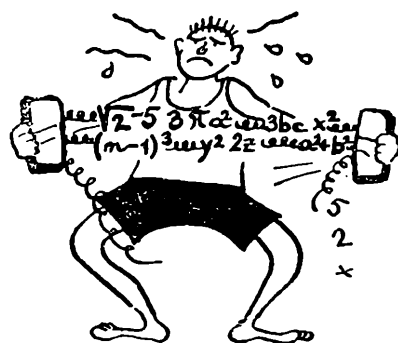
V další části článku se budeme zabývat řešením rozporů, které se objevily v přirozeném ladění.

Pokračování

Matematické zábavy

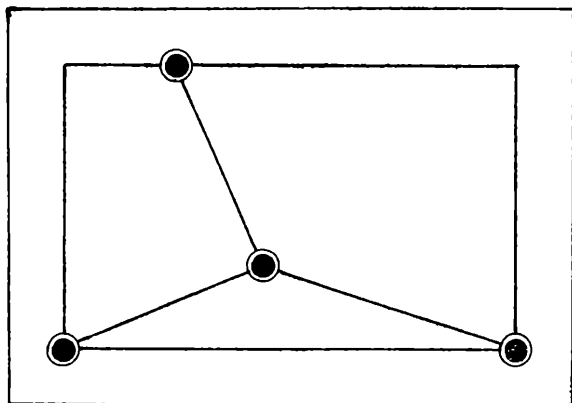
Helena Hofmanová, Praha:

Řešení úlohy „Problém města Kocourkova“

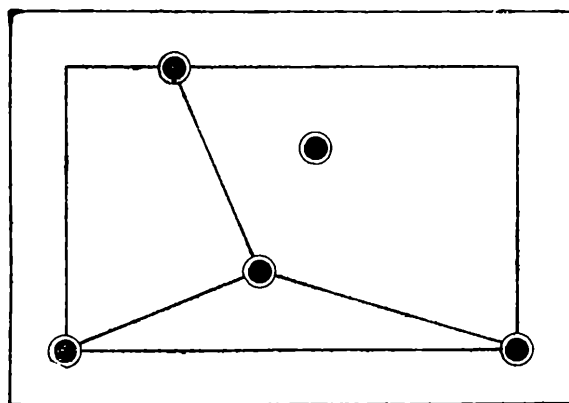


Ú l o h a : Městská rada v Kocourkově se rozhodla, že na paměť pěti nejzasloužilejších starostů města postaví v nově budovaném parku každému z nich pomník. Když byly sochy rozmístěny, byl městskému zahradníkovi uložena úkol upravit v parku cesty tak, aby každé dvě sochy spojovala jediná cesta, která by nevedla kolem žádné jiné sochy. Přitom bylo požadováno, aby se cesty pokud možno nekřížily. (Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1964—65, č. 1.)

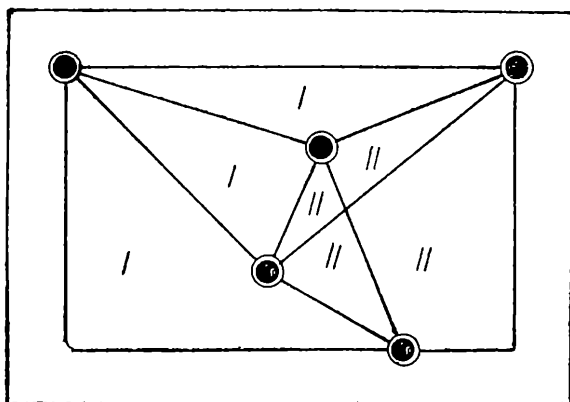
Řešení: Zahradník města Kocourkova by měl nejsnazší úpravu cest v případě, kdyby byli nejvýše 4 slavní starostové. Cesty spojující jednotlivé pomníky by se pak vůbec nemusely protínat, jak ukazuje obr. 1. Je-li pátý pomník umístěn kdekoli mimo cesty spojující první čtyři, je možno jej vždy spojit cestami bez křižovatek se třemi pomníky, avšak spojnice se čtvrtým pomníkem má vždy alespoň jednu křižovatku, protože čtvrtý leží vně „trojúhelníka“, uvnitř kterého jsme zvolili polohu páté sochy. Jak ukazuje obr. 3, je možno se úkolu zhostit tak, aby byla jediná.



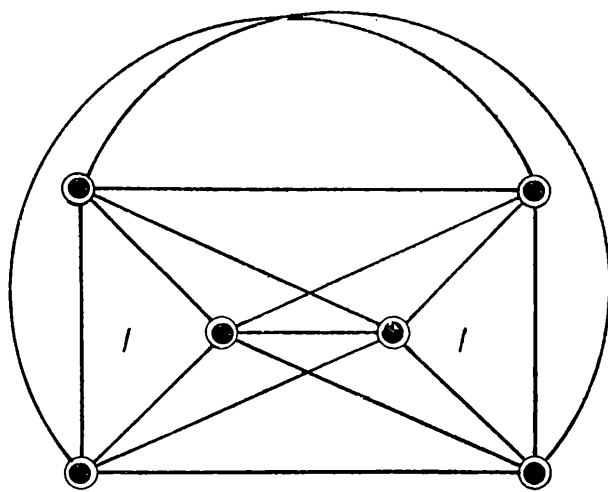
Obr. 1



Obr. 2



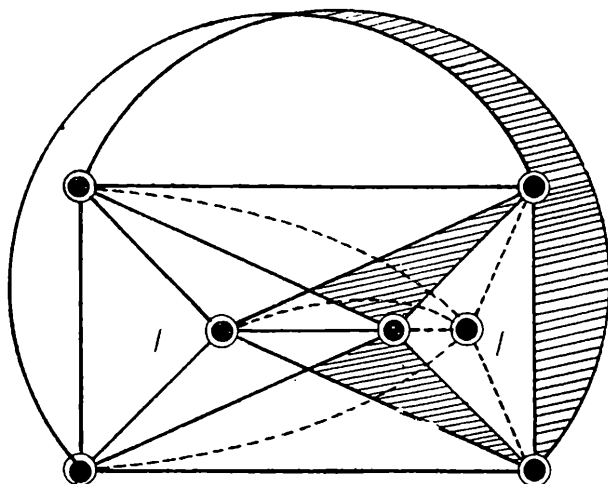
Obr. 3



Obr. 4

Cesty na obr. 3 rozdělí rovinu do oblastí dvojího druhu. Oblasti prvního druhu (označené I) jsou ohraničené třemi celými cestami spojujícími tři pomníky, kdežto oblasti druhého druhu (označené II) mají za hranice jednu celou cestu a dvě části cest až ke křižovatce. Bude jistě výhodnější umístit každou další sochu do jedné z oblastí prvního druhu, protože potom 3 z cest, kterými bude spojena s ostatními sochami, budou bez křižovatek, kdežto v oblastech druhého druhu by takové cesty byly jenom dvě. Další dvě cesty lze vést tak, že protínají vždy jedinou z dříve sestrojených (obr. 4).

Na obr. 4 a 5 už jsou pomníky umístěny tak, aby byl obrázek přehledný a není přihlíženo k parkové úpravě. Je možno se totiž přesvědčit, že počet oblastí prvního a druhého druhu a jejich vzájemná poloha se nezmění, přemístíme-li pomníky nebo je budeme spojovat jinými cestami. Minimální počet křižovatek se také nezmění. Na obrázku s pěti pomníky byly 4 oblasti prvního druhu, na obrázku s šesti pomníky už jsou jen 2 oblasti prvního druhu. Zvolíme-li sedmý pomník v jedné z nich, budou



Obr. 5

ze šesti cest, kterými jej spojujeme se šesti danými pomníky tři bez křižovatek. Jde o to, aby na třech zbývajících cestách bylo křižovatek co nejméně. Můžete si všimnout, že v sousedních (šrafovaných) oblastech neleží žádný z tří pomníků, s kterými musíme sedmý ještě spojit, to znamená, že na každé z dalších cest leží alespoň 2 křižovatky. Jak ukazuje obrázek 5, je možno se úkolu zhostit tak, aby byly právě dvě. Celkový počet křižovatek je tedy $3 + 2 \cdot 3 = 9$ pro situaci se sedmi pomníky.

Vidíte, že při zvětšování počtu pomníků se úloha komplikuje tak, že by Kocourkovští měli vyznamenávat pomníky jen opravdu velmi zasloužilé starosty.

Nepřátel se nebojte, na množství nehleďte!

Matematika a fyzika mají mnoho nepřátel, to sami víte. Nic nepomáhá, že technický pokrok je s nimi nerozlučně spojen. Neinformovanost, duševní lenost, špatný výklad učitele, nevhodná učebnice a i jiné okolnosti „vyrábějí“ tyto protivníky přímo na běžícím pásu.

Nikoliv přátelský vztah se pak někdy přenáší i na časopisy, které mají zmíněné vědy propagovat. Proto redaktori Rozhledů matematicko-fyzikálních i členové redakční rady udatně bojují a někdy vyhrávají, jindy prohrávají.

Tentokrát jsme však vlastně na lopatkách, přesněji řečeno vůbec již nejsme. Dále to máte ostatně úředně potvrzeno černé na bílém. Tedy čtětež!

POŠTOVNÍ NOVINOVÝ ÚŘAD BRNO
PNS Ústřední expedice tisku Brno
tř. Obránců míru č. 2 Brno

Z. Edvard

M i k u l o v n a M o r.

obj. 14. 1.

ÚA-B.

21. 1. 1965

Vážený soudruhu,

objednal jste si M a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í r o z -
h l e d y, které však již nevycházejí.

Místo toho nabízíme zájemcům Matematicko-fyzikální časopis,
který vychází 4 × ročně za roční předplatné Kčs 30,—.

Máte-li zájem o tuto publikaci, objednejte ji u nás, protože jsme
pověřeni distribucí tohoto časopisu.

S pozdravem

Světu mír!

L. S. PNS Ústřední expedice tisku
administrace odborného tisku

B r n o

(dva nečitelné podpisy)

Vyřizuje: Hlavičková 39308

Potud tedy dopis Ústřední expedice poštovní novinové služby našemu čtenáři.

Ježto svrchu citované a námi propagované vědy jsou naukami exaktními, jsme nuceni přistoupit k důkazu naší jsoucnosti. Pak-li toto, vážený čtenáři, čtete, pak z toho plyne, že Rozhledy v březnu vyšly a že tedy dále vycházejí. „Cogito ergo sum“, čili česky „myslím, proto jsem“, řekl před více než 300 lety René Descartes. Z toho však naopak pro laiky plyne (bohužel), že mnoho žijících lidí vlastně ve skutečnosti není. Matematici jsou podobného osudu ušetřeni, neboť René tam nevložil rčení „tehdy a jen tehdy“. To je ovšem poznámka, která vzbudí-li u čtenáře dojem, že se nějak dotýká našeho případu, pak je to dotyk čistě náhodný (též pomyslný či imaginární).

Redakce závěrem přehlušujíc legendárně řehtajícího Šimlíka, bujaře provolává s Galileo Galileiem

a přece vychážíme!

Tento příspěvek „Poštovní novinové služby, administrace odborného tisku(!) v Brně“ považujeme za nejlepší článek letos uveřejněný v kapitole „Zábavy“ a jen litujeme, že jsme nemohli zaslat autorům příslušný honorář, ježto jejich podpisy byly nečitelné.

Redakce



I V. B. Lidskij

Úlohy z elementární matematiky

Kniha V. B. Lidského *Zadání po elementární matematice*, kterou přeložil kolektiv pracovníků Matematického ústavu ČSAV pod vedením prof. Rudolfa Zelinky, přináší vhodný výběr úloh z elementární matematiky a nástin jejich řešení. K řešení úloh, uvedených v této knize, postačí znalosti středoškolské matematiky. Pokud někde vybočuje řešení z rámce středoškolského učiva, je v úvodu k příslušné kapitole uveden stručný výklad těžších pojmů a obrátů. Větší část knihy zabírají obtížnější úlohy, vhodné pro přípravu ke zkouškám na vysokou školu, pro zájmové kroužky, nebo

pro třídy matematicko-fyzikální větve SVVŠ. Je však pamatováno i na úlohy typické a zásadní, které mají snazší charakter. Kniha je rozdělena na část algebraickou, planimetrickou, stereometrickou a trigonometrickou. Obsahuje na 600 úloh, seřazených v jednotlivých tématech podle obtížnosti a ilustrovaných názornými obrázky. Tematika úloh je zajímavá a různorodá. Přitom jsou stejnou měrou zastoupeny úlohy početní, důkazové, i konstruktivní. Kniha je vhodnou matematickou literaturou pro žáky.

Cena váz. výt. Kčs 19,50.

Redakce



Různé

Poznámka k jedné úloze MO

Redakce *Rozhledů* dostala dopis od s. *Zdeňka Kyncla*, učitele SVVŠ, Praha 6, Na dlouhém lánu. Pisatel upozornil na nedopatření v cyklostylovaném autorském řešení úlohy č. 3, MO, kategorie A.

V úloze se mělo určit číslo p tak, aby funkce $y = x^2 - 4|x - 1| - p$

nabývala hodnoty jedna právě pro tři různé hodnoty x . Nedopatření spočívalo v tom, že z diskuse vypadl jeden případ, a to $p = 0$.

Na SVVŠ, Praha — Na dlouhém lánu se zmíněnou úlohou úspěšně zabývali žáci *J. Cířka, J. Hlaváček, J. Pernica, J. Rohn, J. Tomášek* a *K. Višňák*. Podobné upozornění zaslal i s. *Jindřich Vocelka* z SVVŠ, Praha 3, Sladkovského.

J. S.

Jan Horský, UJEP, Brno:

Albert Einstein

Před deseti lety v noci ze 17. na 18. dubna 1955 běžel život svou cestou dál. V tuto dobu však ubíhaly poslední minuty života jednoho z největších vědců na světě a přitom i člověka v nejhlubším slova smyslu — *Alberta Einsteina*.

A. Einstein se narodil 14. března 1879 v bavorském městečku Ulmu, do školy však začal chodit v Mnichově, kam se jeho rodina přestěhovala v r. 1880. V Mnichově též pokračoval ve svých studiích, gymnasium však nedokončil. Ne snad že byl špatným studentem, nýbrž proto, že mu byl odchod „doporučen“ vedením školy. Pro pány profesory byl totiž absolutně nesnesitelný kritický postoj Einsteina k celému tehdejšímu systému výuky na gymnasiu. Tím prý Albert snižuje u studentů vážnost a úctu ke škole a právě to bylo neodpuštělné.

Zájem o matematiku jej přivedl k tomu, že v r. 1895 začal studovat pedagogickou fakultu techniky v Curychu. Je velmi zajímavé, že ačkoliv zde působili vynikající učitelé matematiky (např. H. Minkowski), Einsteina jejich před-

nášky nijak nepřitahovaly. Když později Einstein vytvořil speciální teorii relativity, H. Minkowski prohlásil, že něco takového od svého studenta nikdy nečekal. Píšeme o této skutečnosti proto, že velmi podstatně charakterizuje základní rys Einsteinovy osobnosti — nechť přijímat nebo přejímat jakýkoliv názor, myšlenku nebo teorii jiných bez vlastního hlubokého uvážení a porozumění.

Po ukončení techniky zůstal Einstein bez místa a teprve s pomocí svého přítele Marcela Grossmanna nastoupil v r. 1902 místo technického experta patentního úřadu v Bernu.

Roku 1909 se Einstein stává mimořádným profesorem na universitě v Curychu a r. 1911 je jmenován řádným profesorem německé university v Praze. Zde pracoval v budově dnešní přírodovědecké fakulty. Z Prahy se Einstein vrací na krátkou dobu zpět do Curychu a roku 1913 na žádost M. Plancka a W. Nernsta přechází do Berlína. O rok později se stává ředitelem fyzikálního ústavu císaře Viléma, profesorem

berlínské university a členem pruské akademie věd. V Berlíně Einstein pracuje až do nástupu fašismu, roku 1933 trvale opouští Evropu a odjíždí do USA, kde pracuje až do své smrti na známé universitě v Princetonu.

A. Einstein byl velký vědec i velký člověk. Jeho vědecké dílo je obsaženo ve více než třech stech původních vědeckých pojednání. V širokých kruzích je obvykle Einstein znám jako tvůrce speciální i obecné teorie relativity a mnohem méně jako jeden ze zakladatelů současné kvantové teorie. A přece to byly právě slavné práce týkající se Brownova pohybu, fotonů a statistiky částic se spinem nula (statistika Bose-Einsteinova), za něž v r. 1921 obdržel Nobelovu cenu.

Na konci devatenáctého století se fyzikové prakticky bez výjimky domnívali, že fyzika jako taková je v podstatě již hotová věda. Zdálo se, že je jasná i struktura světa, svět se tehdy jevil složen ze dvou forem hmoty — atomů a z hypotetické substance, vyplňující celý vesmír — éteru. Éter se však nepodařilo experimentálně prokázat, ukázaly se nevysvětlitelné odchylky v chování elektronů při velkých rychlostech, empiricky se prokázala platnost zákona stálé rychlosti světla. Tato fakta, která si podle klasické fyziky odporovala, bylo možné objasnit úspěšně pouze tehdy, jestliže se oprostíme od starých a zakořeněných názorů na absolutní prostor a čas. Einstein vycházejí z platnosti principu relativity a principu konstantní

rychlosti světla dokázal, že prostorové a časové intervaly jsou relativní a že tedy i mnoho jiných fyzikálních veličin, jež se dříve považovaly za absolutní (tj. nezávislé na volbě souřadné soustavy) jsou veličinami relativními.

Ještě před ukončením druhé světové války se význam speciální teorie relativity spatřoval většinou pouze v její myšlenkové a logické kráse a vnitřní uzavřenosti. Dnes se již speciální teorie relativity stala naprosto nepostradatelnou pro moderní teorii elementárních částic i pro současnou techniku, jež vytváří nejen obrovské urychlovače, ale i zařízení, uvolňující obrovské množství jaderné energie. Existence jaderné energie byla přitom Einsteinem předpověděna již v r. 1905. Roku 1945, kdy v Hirošimě přišlo o život na 200 000 lidí, byla poprvé celému světu demonstrována její mohutnost. Speciální teorie relativity však, podle slov A. Einsteina, přerostla sebe samu:

...cožpak musí být nezávislost fyzikálních zákonů na pohybovém stavu souřadného systému omezena na vzájemně rovnoměrné translační pohyby souřadných systémů? Co je přírodě do souřadných systémů, které jsme zavedli my, a do jejich pohybových stavů?...

Tyto otázky nedoprávaly Einsteinovi klidu. Cesta k jejich zodpovědění však byla těžká a značně složitá, řešení se ukázalo možným pouze v případě, že se vzdáme euklidovské geometrie. Mnoho fyziků, i těch nejslavnějších, navíc nechápalo, oč se vlastně Einstein

ještě snaží, a tak až r. 1917 je Einsteinem dána definitivní odpověď — vzniká o b e c n á t e o r i e r e l a t i v i t y.

Základní rovnice obecné teorie relativity, tzv. r o v n i c e E i n s t e i n o v y, jsou značně komplikovaný systém nelineárních partiálních diferenciálních rovnic a jejich řešení je známo poměrně v málo případech. Protože obecná teorie relativity je ve svém racionálním jádře teorií gravitace, je zřejmé, že Einsteinovy rovnice musí v nejhrubším přiblížení poskytovat známý Newtonův gravitační zákon. Toto tvrzení lze skutečně prokázat, z Einsteinových rovnic však plynou i další důsledky, jež jsou v plném souladu se skutečností. Jde především o pohyb perihelia planet, ohyb světla v gravitačním poli a rudý posun spektrálních čar.

Vzhledem k velmi malým efektům, jež plynou z obecné teorie relativity, je zřejmé, že tato teorie je stále ještě jasnou doménou teoretických fyziků. Lze bez nadsázky říci, že studium gravitačního pole, zvláště pak studium gravitačních vln přinese v budoucnu zajímavé a závažné důsledky. Rovněž k dalšímu rozvoji kosmologie bude i nadále třeba obecné teorie relativity, zdá se dokonce, že ani v teorii elementárních částic se bez pomoci obecné teorie relativity v budoucnu neobejdeme.

Práce A. Einsteina bezpochyby přerostla rámec fyziky. Vždyť samotná teorie relativity má již obrovský filosofický i společenský dosah, neboť vedla mj. k objevu prakticky nevyčerpatelného zdroje

jaderné energie. Abychom plně pochopili A. Einsteina jako filosofa a člověka, bylo by nezbytně třeba podrobně studovat jeho životopisy, jeho překrásnou autobiografii i vzpomínky současníků. Chceme-li poznat jaký neobyčejný člověk před deseti lety zemřel, nutně si musíme přečíst následující podstatnou část známého Einsteinova článku *J a k s e d í v á m n a s v ě t*:

...mé ideály, které vždy přede mnou zářily a znovu a znovu mě naplňovaly radostnou životní odvahou, byly dobro, krása a pravda. Kdybych necítil, že se shodují se stejně smýšlejícími, kdybych se nezabýval objektivním, na poli umění a vědeckého bádání věčně nedostižným, jevil by se mi život prázdným. Všední cíle lidského snažení: majetek, zevní úspěch a přepych se mně od mých mladých let zdály hodny opovržení.

Můj vášnivý smysl pro sociální spravedlnost a pro sociální povinnost býval vždy ve zvláštním rozporu s tím, že mi vysloveně chyběla touha družít se s lidmi a s lidským kolektivem. Jsem správný „tahoun“, který nepatřil nikdy celým srdcem státu, vlasti, družině přátel, ba ani užší rodině, ale choval ke všem těmto svazkům pocit nikdy neutuchající cizoty i potřeby býti sám, pocit, který se s věkem ještě stupňuje. Člověk vnímá ostře, ale bez lítosti, kde jsou hranice porozumění a souzvuku s jinými lidmi. Takový člověk je zranitelnější a ne tak bezstarostný, ale zato je značně nezávislý na názorech, zvycích a soudech svých bližních a neupadá do poku-

šení stavět svou rovnováhu na těchto tak nespolehlivých základech.

Můj politický ideál je demokracie. Každý ať je respektován jako osobnost a nikdo ať není zbožněn. Ironií osudu právě mně věnovali druzí lidé mnoho, příliš mnoho obdivu a poct, bez mé viny a bez mé zásluhy. Vyplývá to asi z přání, pro mnohé nespelnitelného, porozumět těm několika myšlenkám, které jsem našel svými slabými silami a v neustálém zápolení. Vím velmi dobře, že je nutno, aby jeden člověk myslil a měl mimořádnou odpovědnost, má-li se dospět k jakémukoliv organisátorskému cíli. Ale ať ti, kteří jsou vedeni, nejsou nuceni, ale mají možnost si takového vůdce volit. Autokratický donucovací systém se podle mého mínění zvrhne velice brzy. Neboť násilí vždy přitahuje lidi mravně méněcenné a podle mého přesvědčení platí zákon, že po geniálních tyranech nastupují padouši.

Když jsme u této věci, promluvíme o nejhorším výplodu státního bytí: o vojáctví, které nenávidím! Jestliže někdo může s potěšením pochodovat při muzice v řadě a v šiku, už jím opovrhují, ten dostal svůj velký mozek jen omylem, protože by mu dokonale stačila jen mícha. Tuto skvrnu civilizace bychom měli co nejdříve odstranit. Hrdinství na rozkaz, nesmyslný čin a trapné vlastenčení — jak vášnivě je nenávidím, jak sprostou a zavrženíhodnou se mi jeví válka, raději bych se

dal na kusy rozsekat, než bych se podílel na takovém bídáctví. Smýšlím o lidstvu přece jen dobře a věřím tedy, že tato příšera by už dávno zmizela, kdyby zdravý smysl národů nebyl soustavně otravován ve škole a v tisku lidmi, zabývajícími se obchodem a politikou.

Nejkrásnější, co můžeme prožívat, je tajemno. To je základní pocit, který stojí u kolébky pravého umění a vědy. Komu to není známo, kdo se už neumí divit, neumí žasnout, ten je takřikajíc mrtev a jeho oko vyhaslé. Zázitek tajemna, třeba i smíšený se strachem, zplodil také náboženství. Vědomí, že existuje něco pro nás neproniknutelného — projevy nejhlubšího rozumu a nejzářivější krásy, které jsou našemu rozumu dostupny jen ve svých nejjednodušších formách — toto vědomí a cítění vytváří opravdovou zbožnost: v tomto a jedině v tomto smyslu patřím k hluboce náboženským lidem. Nedovedu si představit boha, který odměňuje a trestá předměty svého stvoření, který dokonce má vůli podobnou naší vlastní. Také si nemohu a nedovedu představit jedince, který přetrvá svou tělesnou smrt, takové myšlenky ať v sobě živí ze strachu nebo směšného egoismu slabé duše. Mně stačí mysterium, že život je věčný, i vědomí a tušení zázračné stavby jsoucna, jakož i oddaná snaha pochopit aspoň nepatrný díl rozumu, který se projevuje v přírodě...

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

dráha
druh
důkaz
důsledek, v důsledku
důsledně
dvacetistěn
dvakrát
dvanáctistěn
dvojčlen
dvojice bodů
dvojková soustava
dvojmoc
dvojný, dvojitý

траектория
вид
доказательство
следствие, вследствие
последовательно
двадцатигранник
дважды, два раза, вдвое
додекаэдр, двенадцатигранник
бином, двучлен
пара точек
двоичная система
квадрат
двойной

E ⚡

ekvivalentní
elementární
eliminovat
elipsa
elipsoid
eliptický
Euklid, Euklidova věta
excentricita
existence, existování
existovat
exponent
extrém

эквивалентный
элементарный
исключить, элиминировать
эллипс
эллипсоид
эллиптический
Евклид (Эвклид), теорема Евклида
эксцентриситет
существование, наличие
существовать
показатель степени
элстремум

F

faktor
formulace úlohy

множитель, фактор
формуляция проблемы

funkce elementární, exponenciální, goniometrická, kvadratická, line- ární, mocninná, nespojitá, spojitá	функция элементарная, показательная, гонометрическая, квадратичная, линейная, степенная, разрывная, не- прерывная
---	--

G

geodézie	геодезия
geometrické místo bodů	геометрическое место точек
geometrické znázornění, interpretace	геометрическая интерпретация
geometrie analytická, deskriptivní, euklidovská	геометрия аналитическая, начерта- тельная, Евклида
goniometrie	гонометрия
graf	график
grafické znázornění	графическое изображение

H

házet hrací kostkou	бросать игральную кость
hlavní kružnice	большая окружность на шару
hledaný	искомый
hledat	искать
hodnota	значение
hodnota zaokrouhlená nahoru, dolů	приближенное значение с избытком, с недостатком
homogenní	однородный
horizont, horizontální	горизонт, горизонтальный
horní	верхний
hrana	ребро, кант
hranice	граница, предел
hranol	призма
hvězdíčka	звездочка
hyperbola	гипербола

(Pokračování)

(Продолжение)

Starší ročníky Rozhledů

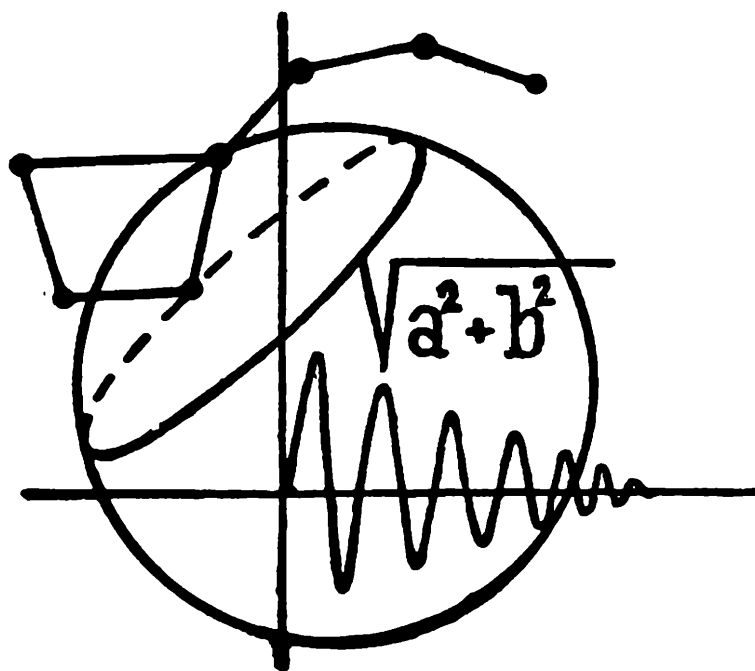
Žák P. Fořt z Drmoulu nám píše: ...jsem odběratelem časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Pokládám jej za nejlepší časopis pro studující. Začal jsem jej však odbírat teprve na počátku minulého školního roku. Rád bych koupil získal i předešlé ročníky, neboť mne zajímají hlavně příklady...

Žádáme tedy naše čtenáře, zda by některý z nich byl ochoten prodat nebo věnovat předešlé ročníky *Rozhledů*. V prvním případě nechť nám laskavě učiní písemnou nabídku, v druhém případě může starší čísla přímo zaslat redakci, která další zařídí. Podobných žádostí máme více. Děkuje.

Redakce

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



9

ROČ. 43
1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Květen 1965

Číslo 9

Vedoucí redaktor doc. Dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

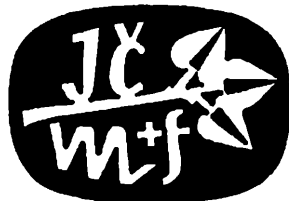
Výkonný redaktor doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

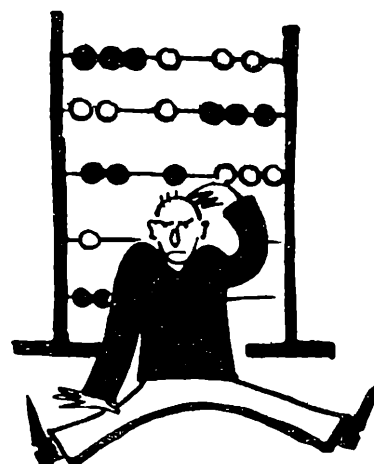
F. Kuřina: Kruhová inverse	385
M. Hejný: Steinerov střed v trojúhelníku	394
S. Horák: Sestrojení přímky z daných odchylek	390
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování)	395
Z. Maršák, I. Kraus: Krystalická stavba pevných látek	404
Inž. dr. V. Šindelář: Styk dvou těles	407
J. Dlouhá: Supratekutost a supravodivost	409
P. Andrlé: O jednom „rozdílu“ mezi fyzikou a astronomií	420
M. Filip: Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky (Dokončení)	415
S. Trávníček: Čekání při místní dopravě	422
Inž. M. Špačková: Řešení úlohy o záhadném průměru	426
H. Hofmannová: Počítala na prstech	428
Prof. dr. E. Kašpar: Spotřebuje se elektrický proud v elektrickém spotřebiči?	428
M. Zelenka: Česko-ruský slovník	3. a 4. str. obálky.



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořář, studující FS.

A-04*51217

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.



František Kuřina, PI, Hradec Králové:

Kruhová inverze

1. V druhém čísle 41. ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních* byl uveřejněn článek Rudolfa Cihláře, *Kružnice devíti bodů v trojúhelníku*. V tomto článku je uveden analytický způsob důkazu *Feuerbachovy věty*

Kružnice devíti bodů v trojúhelníku se dotýká kružnice trojúhelníku vepsané a všech tří kružnic trojúhelníku vepsaných vně.

Pro ulehčení a zjednodušení provádí se důkaz jen pro pravoúhlý trojúhelník. Z důkazu této věty pro libovolný trojúhelník se v matematické literatuře vyskytuje jeden, který vyniká jednoduchostí. Je založen na tzv. *kruhové inverzi*. Protože kruhová inverze je velmi zajímavé geometrické zobrazení a má četné aplikace, zejména konstruktivní, všimneme si některých jejích vlastností. V závěru potom dokážeme citovanou větu pro libovolný trojúhelník.

Ze školy jsou známy různé druhy geometrických zobrazení. Na ZDŠ se studují shodnosti v rovině, např. osová souměrnost, otočení, posunutí; všichni znáte stejnolehlost a někteří z deskriptivní geometrie znáte afinitu. Ve všech uvedených zobrazeních je obrazem přímky přímka. Říkáme proto, že to jsou *zobrazení lineární*. Geometrie však studuje i zobrazení, která nemají tuto vlastnost. Cílem první části článku je odvodit několik vlastností jednoho nelineárního zobrazení, kruhové inverze.

V rovině je dána kružnice $i \equiv (S; r)$. Libovolnému bodu roviny $X \neq S$ přiřadíme bod X' tak, aby ležel na polopřímce SX a pro velikost úseček aby platilo

$$SX \cdot SX' = r^2. \quad (1)$$

Každému bodu $X \neq S$ roviny je přiřazen jediný bod X' . Popsané geometrické zobrazení se nazývá *kruhová inverze*. Bod S se nazývá *střed inverze*, kružnice i je *řídící kružnice inverze*.

Kruhová inverze byla zavedena do geometrie roku 1843 matematikem *Stubbsem*.

Konstrukce obrazu X' bodu X v inverzi dané řídicí kružnicí $i \equiv (S; r)$ je zřejmá podle obr. 1 z Euklidovy věty o odvěsň.

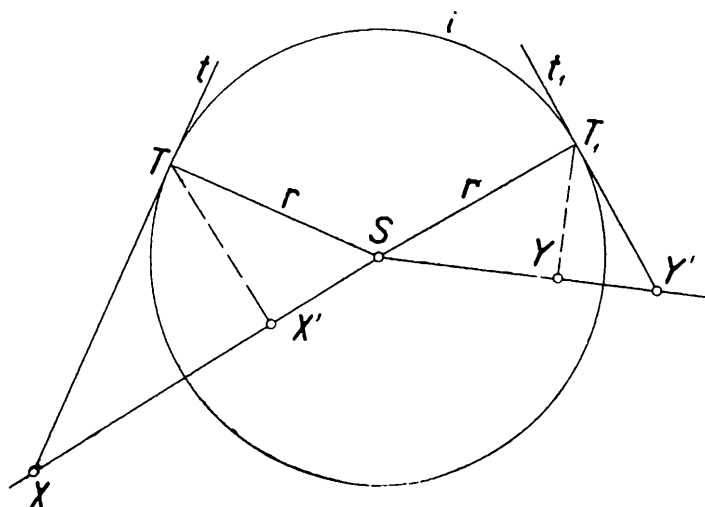
Z definice inverze snadno plynou tyto důsledky:

a) Každý bod řídicí kružnice je samodružný.

b) Je-li v dané inverzi X' obrazem bodu X , potom je v této inverzi X obrazem bodu X' . Body X, X' se nazývají inverzně sdružené body.

2. Hledejme obraz přímky p v inverzi o řídicí kružnici $i \equiv (S; r)$.

Nechť přímka p prochází středem S inverze. Vnitřek každé z opačných polopřímek přímky p s počátkem S zobrazí inverze na vnitřek téže polopřímky. S výjimkou bodu S , který nemá obraz definován, je přímka p jako celek samodružná.



Obr. 1

Nechť přímka p neprochází středem S inverze. Sestrojíme patu P kolmice vedené středem S k přímce p (obr. 2a, b, c) a označme P' obraz bodu P v uvažované inverzi. Obraz libovolného bodu X přímky p různého od bodu P označme X' . Podle definice inverze platí

$$SP' \cdot SP = SX' \cdot SX = r^2, \text{ tedy } \frac{SP'}{SX'} = \frac{SX}{SP};$$

$$\sphericalangle PSX = \sphericalangle P'SX'$$

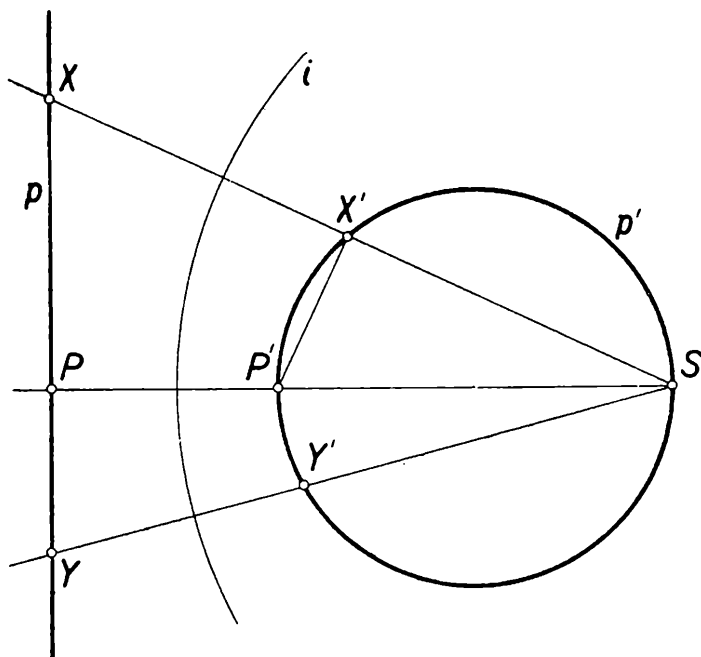
Proto je $\triangle SP'X' \sim \triangle SXP$ a $\sphericalangle XPS = \sphericalangle P'X'S = R$. Bod X' je vrcholem pravého úhlu, jehož ramena procházejí body P', S ; leží tedy na kružnici nad průměrem $P'S$. Je-li Y' libovolný bod této kružnice různý od bodu S , existuje zřejmě jediný průsečík $Y \equiv XY' \cdot p$. Lehce lze ověřit, že Y' je obrazem bodu Y v uvažované inverzi.

Platí tedy věta 1:

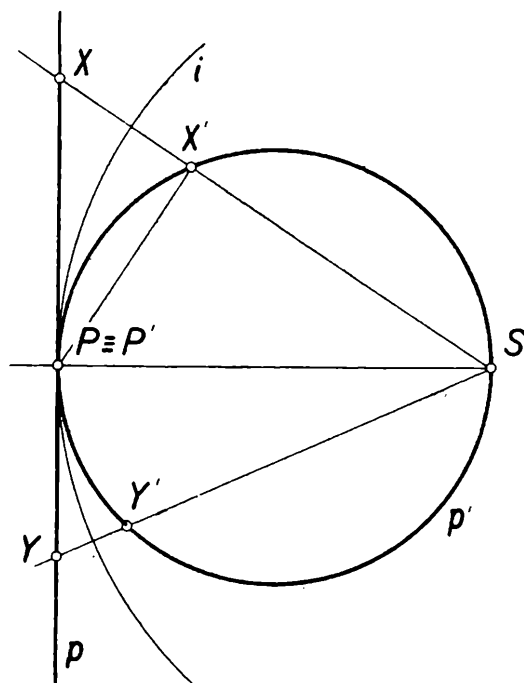
Je dána kruhová inverze o řídicí kružnici $i \equiv (S; r)$. Obrazem libovolné přímky, která prochází bodem S je s výjimkou bodu S táž přímka. Obrazem libovolné přímky p , která neprochází středem S inverze je - s výjimkou bodu S - kružnice procházející bodem S .

Z důsledku b) definice inverze vyplývá:

Je-li p' kružnice, která prochází bodem S , je jejím obrazem až na bod S přímka neprocházející bodem S .



Obr. 2a



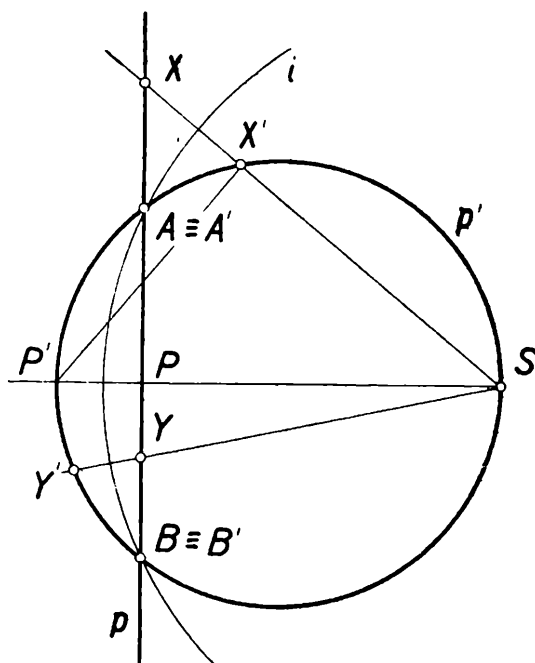
Obr. 2b

3. Máme-li plně odpovědět na otázku, co je obrazem kružnice v inverzi, musíme v dalším hledat obraz kružnice, která neprochází středem inverze.

Inverze je dána řídicí kružnicí $i \equiv (S; r)$, kružnice $k \equiv (O; \rho)$ neprochází bodem S . Bodu X kružnice k je přiřazen bod X' polopřímky SX tak, že platí $SX \cdot SX' = r^2$.

Druhý z průsečíků přímky SX s kružnicí k označme $\bar{X}$ (je-li SX tečnou kružnice k , označme $\bar{X}$ bod X). Přiřazení $X \rightarrow X'$ si můžeme představit takto: Bodu X přiřadíme bod $\bar{X}$, bodu $\bar{X}$ bod X' . Podle známých vlastností mocnosti bodu ke kružnici (viz např. J. Šedivý, Mocnost bodu ke kružnici, Rozhledy roč. 41, str. 207), je

$$SX \cdot S\bar{X} = |M|, \text{ kde } M = SO^2 - \rho^2.$$



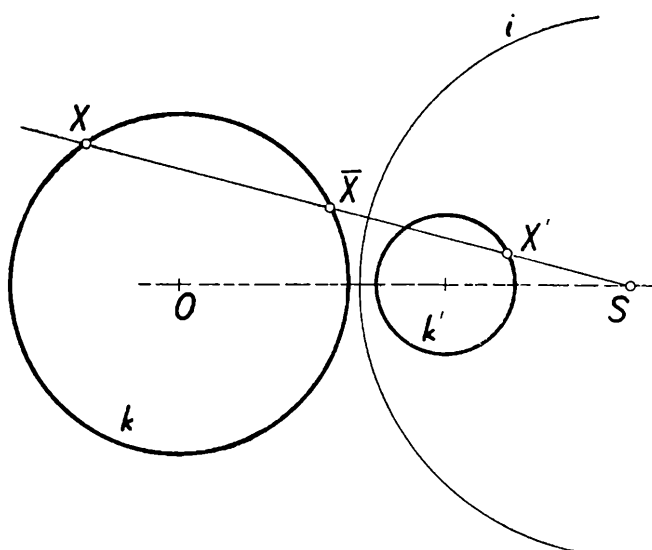
Obr. 2c

Odtud vypočítáme

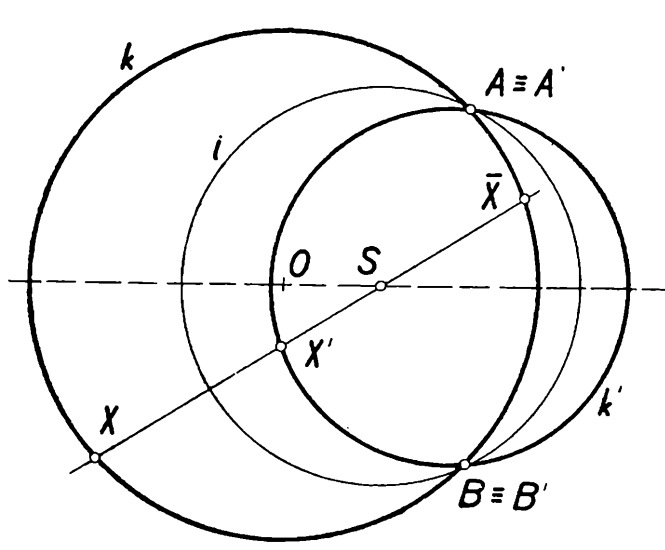
$$SX = \frac{|M|}{S \bar{X}}$$

a po dosazení do (1) máme

$$SX' = \frac{r^2}{|M|} \cdot S\bar{X}. \quad (2)$$



Obr. 3a



Obr. 3b

Je-li bod S vně kružnice k (obr. 3a) je bod $\bar{X}$ bodem polopřímky SX (což je též polopřímka jako SX') a obraz X' bodu X v inverzi lze vzhledem k (2) chápat jako obraz bodu $\bar{X}$ ve stejnolehlosti o středu S a koeficientu $\frac{r^2}{M}$. Probíhá-li bod X kružnicí k , probíhá jí i bod $\bar{X}$ a body X' ,

jako obrazy bodů $\bar{X}$ ve stejnolehlosti leží na jisté kružnici k' . Vzhledem k tomu, že každý bod kružnice k' lze tímto způsobem získat, je obrazem kružnice k v inverzi kružnice k' . V důsledku vlastnosti b) definice inverze a věty 1 nemůže kružnice k' procházet bodem S .

Je-li bod S vnitřním bodem kružnice k (obr. 3b), je $\bar{X}$ bodem polopřímky opačné k SX , mocnost M je záporná a podle definice stejnolehlosti se záporným koeficientem je bod X' polopřímky SX , pro který platí (2) obrazem bodu $\bar{X}$ ve stejnolehlosti o středu S a koeficientu $\frac{r^2}{M}$.

Další závěry platí stejně jako v první části.

Tím je dokázána věta 2.

Obrazem kružnice, která neprochází středem inverze je kružnice, která rovněž středem inverze neprochází.

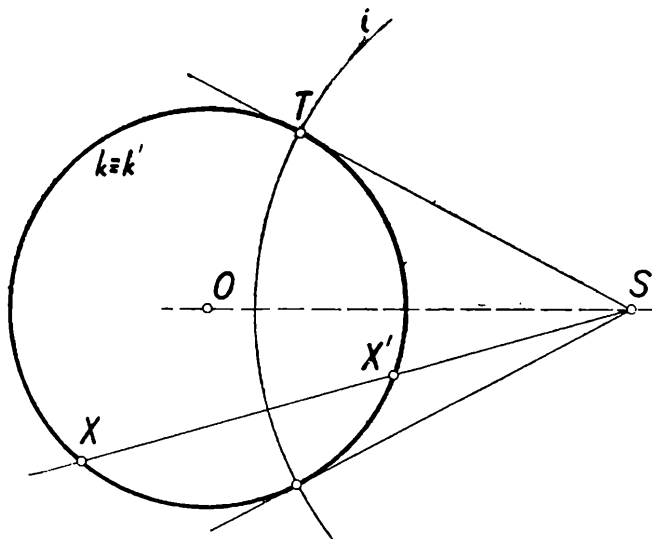
P o z n á m k a. Obrazem středu kružnice není v inverzi střed kružnice.

Lehký důkaz ponechávám čtenáři jako cvičení. Máme-li sestavit obraz kružnice $k \equiv (O; \rho)$ v kruhové inverzi o řídicí kružnici $i \equiv (S; r)$, musíme sestavit buď obrazy tří jejích různých bodů, nebo, vzhledem k souměrnosti konstrukce podle přímky SO , obrazy koncových bodů A, B průměru kružnice k , který je incidentní s přímkou SO . Obrazem průměru AB bude průměr $A'B'$ kružnice k' .

Příklad. Je dána kružnice $k \equiv (O; \rho)$ a bod S vně této kružnice. Určete takovou inverzi o středem S , aby kružnice k přešla touto inverzí sama v sebe.

Má-li být k samodružná, musí obrazem bodu X být bod $X' \equiv SX \cdot k$. Označíme-li r poloměr kružnice inverze, musí podle (1) platit $SX \cdot SX' = r^2$. Podle známé vlastnosti mocnosti bodu S ke kružnici k je $SX \cdot SX' = ST^2$, kde T je bod dotyku tečny kružnice k vedené bodem S (obr. 4). Inverze o řídicí kružnici $i \equiv (S; ST)$ má tedy požadovanou vlastnost.

Je dána kružnice k , která neprochází středem S řídicí kružnice inverze a tečna t kružnice k s bodem dotyku T . Hledejme obrazy tečny t a kružnice k v inverzi o řídicí kružnici $i \equiv (S; r)$.



Obr. 4

Bod T přejde do bodu T' (obr. 5), který musí ležet na obrazech t' a k' . Obrazem kružnice k je podle věty 2 kružnice k' , která neprochází bodem S . Obrazem přímky t je buď táž přímka (mimo bod S), nebo kružnice incidentní s bodem S , mimo bod S . Kdyby t' a k' měly další společný bod $N' \neq T'$, musel by jeho obraz v uvažované inverzi být společným bodem t a k , tj. musel by splynout s bodem T . Dva různé body však nemohou mít totožné obrazy. Kružnice k' se tedy dotýká obrazu t' v bodě T' .

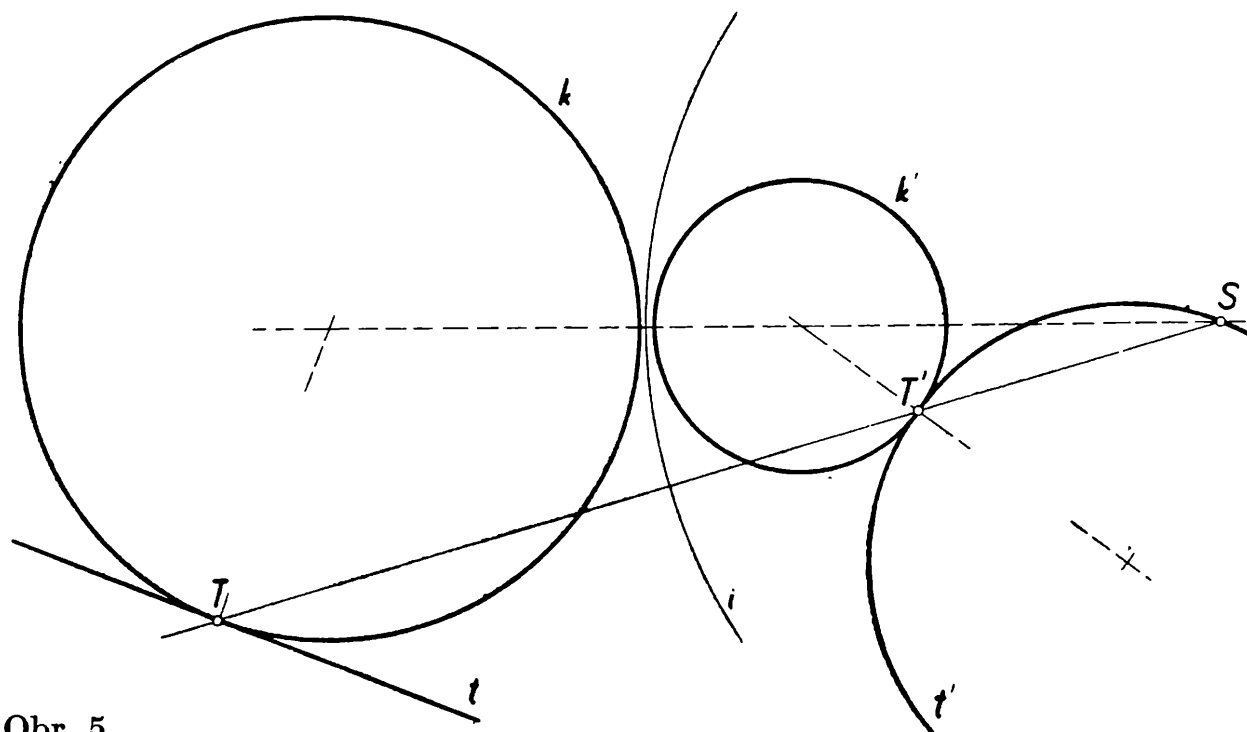
Tím jsme dokázali v ě t u 3:

Kruhová inverze o řídicí kružnici $i \equiv (S; r)$ převádí kružnici k , která neprochází středem S inverze a její tečnu t buď v dotýkající se kružnice nebo v kružnici a její tečnu.

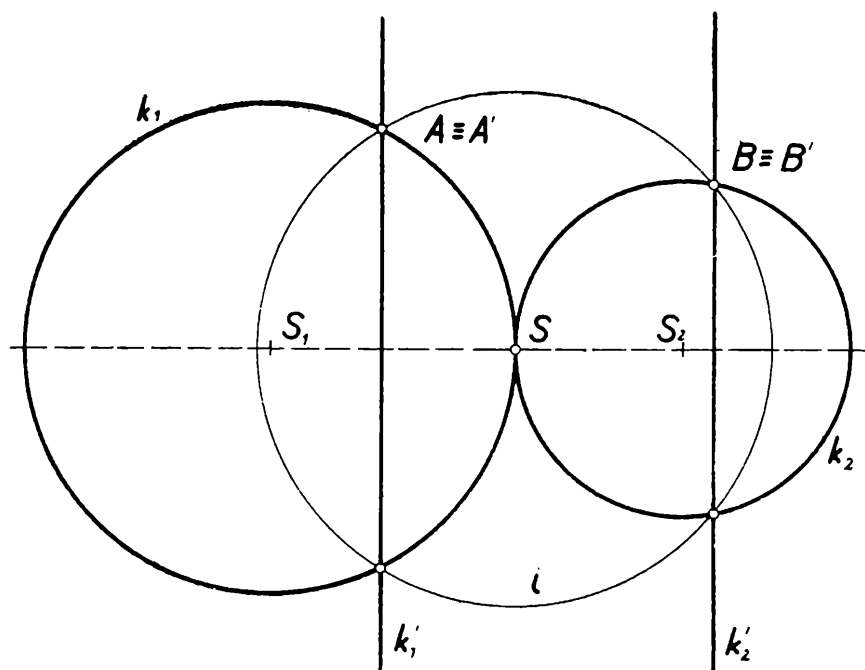
Závěrem první části článku vyřešíme dva příklady.

Jsou dány dvě dotýkající se kružnice k_1, k_2 . Určete jejich obrazy v kruhové inverzi.

Podle vět 1, 2 bude obrazem každé z kružnic k_1, k_2 kružnice nebo přímka, podle toho, zda střed inverze je nebo není s příslušnou kružnicí



Obr. 5



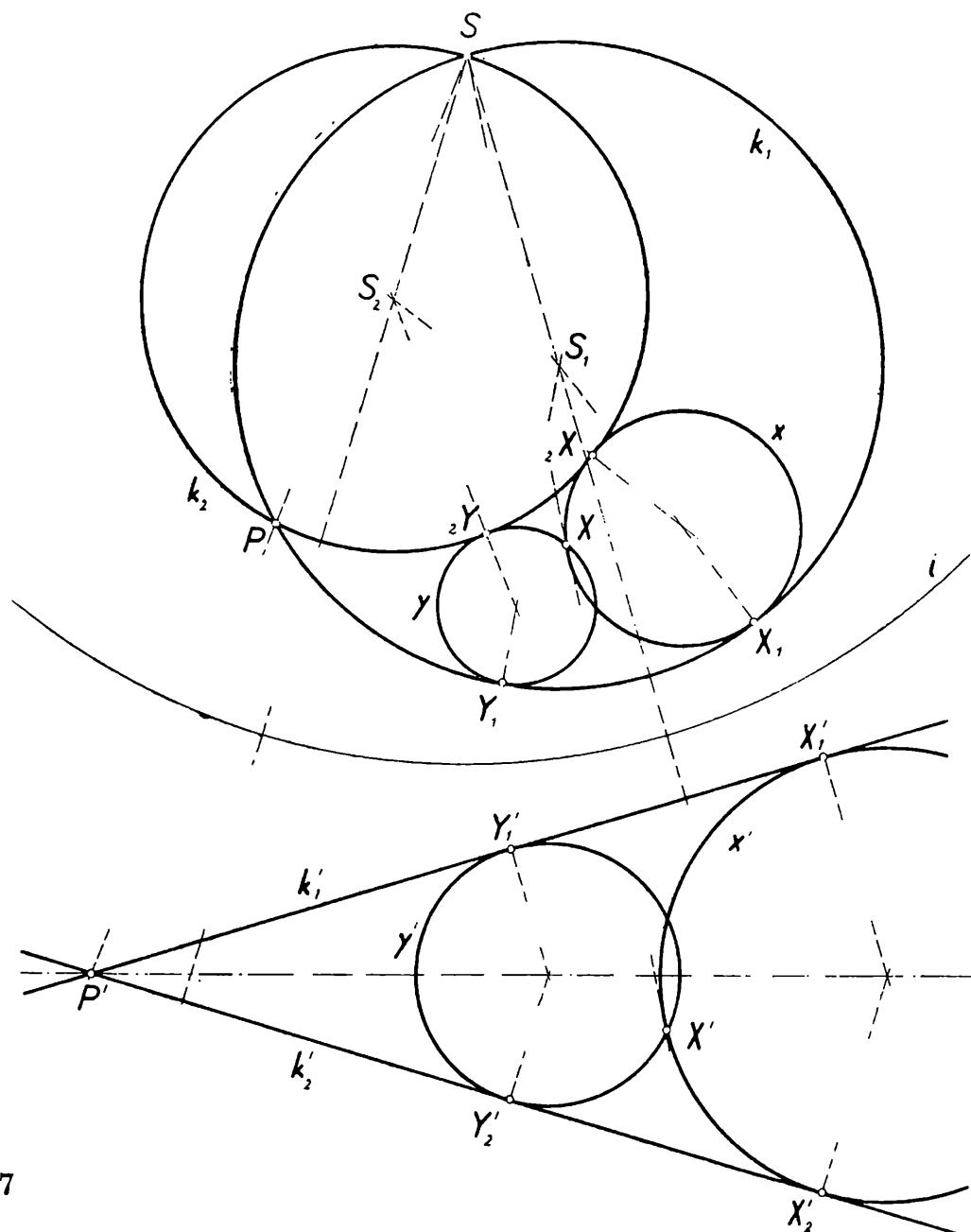
Obr. 6

incidentní. Pro střed S inverze jsou celkem čtyři možnosti, a to a) $S \in k_1$, $S \notin k_2$; b) $S \notin k_1$, $S \in k_2$; c) $S \notin k_1$, $S \notin k_2$; d) $S \in k_1$, $S \in k_2$.

V prvních třech případech převádí inverze kružnice k_1, k_2 buď v dotýkající se kružnici a přímku, nebo v dotýkající se kružnice. Zdůvodnění je analogické důkazu věty 3 a nebudeme ho provádět. Všimněme si případu

d). Střed S inverze splývá s bodem dotyku kružnic k_1, k_2 (obr. 6). Obrazem kružnic k_1, k_2 budou přímky kolmé na spojnici středů $SS_1 \equiv SS_2$, tedy rovnoběžné přímky $k'_1 \parallel k'_2$. Protíná-li řídicí kružnice i kružnice k_1, k_2 , můžeme obrazy k'_1, k'_2 sestavit jako kolmice k S_1S samodružnými průsečíky $A \equiv i \cdot k_1, B \equiv i \cdot k_2$.

Věty 1, 2, 3 ukazují možnost využití kruhové inverze k řešení konstruktivních úloh o dotyku kružnic.

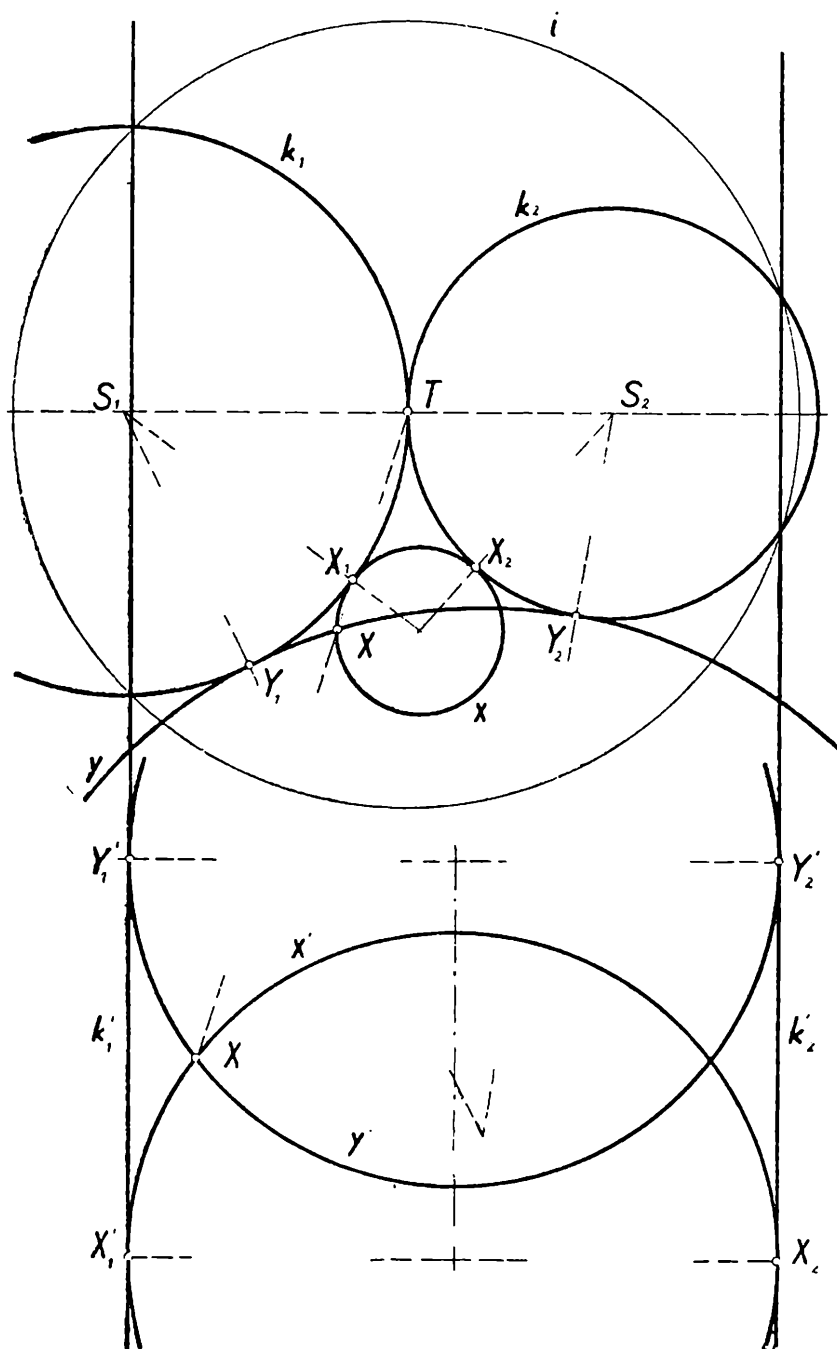


Obr. 7

Příklad. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a bod X , který neleží na žádné z nich. Sestrojte kružnici, která prochází bodem X a dotýká se k_1 i k_2 .

Předpokládejme, že existuje kružnice x , která splňuje požadavky úlohy. Libovolná kruhová inverze převádí kružnice k_1, k_2, x v k'_1, k'_2, x'

tak, že k'_1 i k'_2 se dotýkají x' . Přitom podle polohy středu S inverze mohou být některé z útvarů k'_1 , k'_2 , x' přímkou. Kruhá inverze tedy umožňuje převést úlohu o dotyku kružnic na jednodušší úlohu o dotyku přímek a kružnic. Podle důsledku b) definice inverze nejen přejde každé



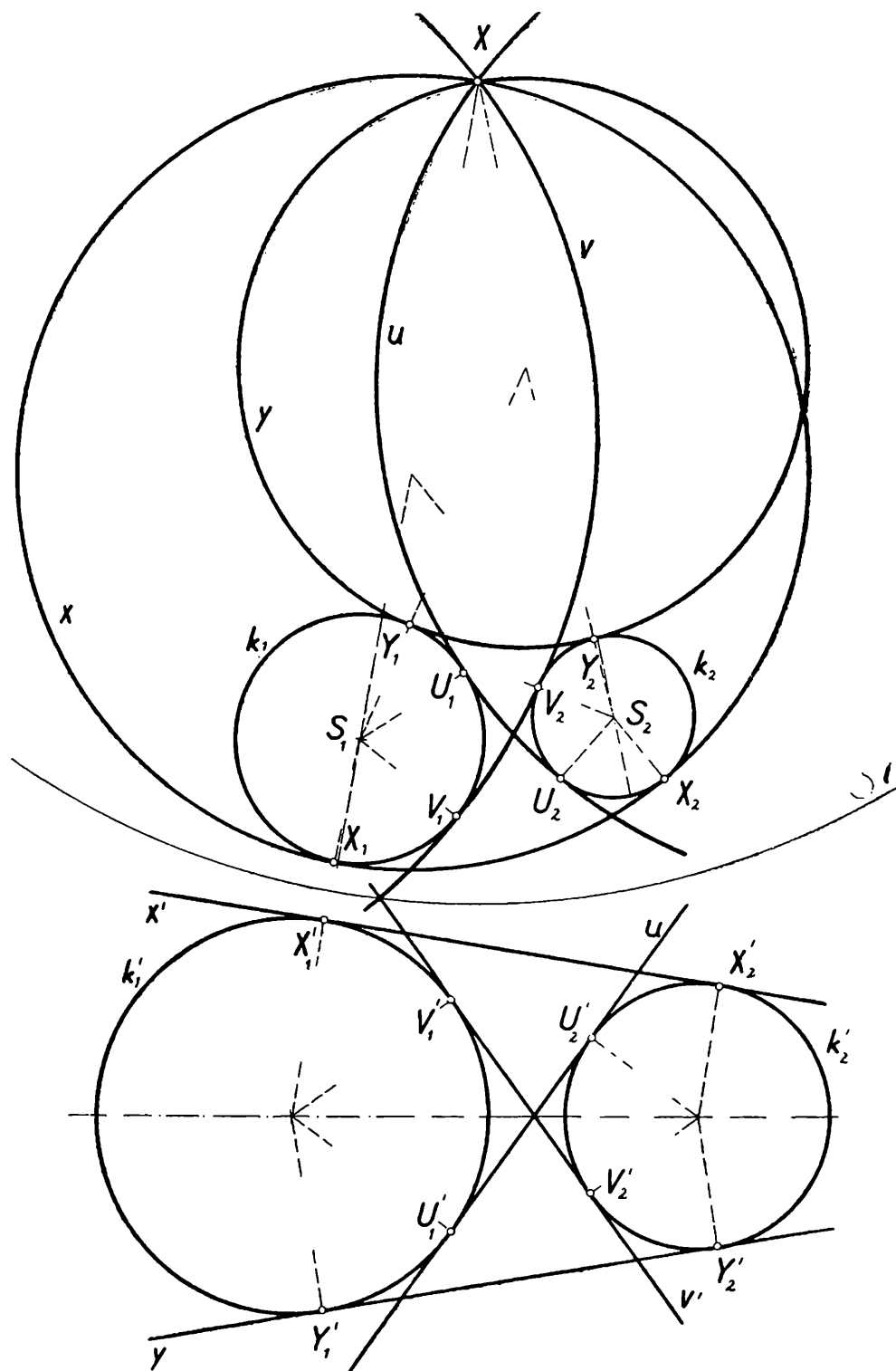
Obr. 8

řešení úlohy o dotyku kružnic k_1 , k_2 v řešení úlohy o dotyku k'_1 , k'_2 , ale i každé řešení úlohy o dotyku k'_1 , k'_2 přejde inverzí v řešení úlohy o dotyku kružnic k_1 , k_2 .

Řešme nyní úlohu ve třech podstatně různých případech vzájemné polohy kružnic k_1 , k_2 .

a) Kružnice k_1 , k_2 se protínají v bodech P , S . Kruhá inverze o řídicí kružnici $i \equiv (S; r)$ převádí kružnice k_1 , k_2 pořadě v různoběžné přímky

k'_1, k'_2 (obr. 7) a bod X v bod X' . Úloha je tak převedena na úlohu: sestrojiti kružnici, která se dotýká různoběžných přímek a prochází daným bodem. Její řešení pomocí stejnolehlosti je známé. Řešením jsou dvě kružnice x', y' , jejichž obrazy v uvažované inverzi jsou řešením naší



Obr. 9

úlohy. Body dotyku přejdou ovšem v body dotyku a umožňují snadnou konstrukci středů hledaných kružnic x, y podle obr. 7.

b) Kružnice k_1, k_2 se dotýkají v bodě T . Kruhová inverze o řídicí kružnici $i \equiv (T; r)$ převádí kružnice k_1, k_2 v rovnoběžné různé přímky k'_1, k'_2 ,

bod X do bodu X' (obr. 8). Úlohu: sestrojiti kružnici, která se dotýká daných rovnoběžek přímek a prochází daným bodem, umíme řešit. Její řešení, kružnice x' , y' , převedeme kruhovou inverzí do řešení x , y původní úlohy (obr. 8).

c) Kružnice k_1 , k_2 nemají žádný bod společný. V tomto případě neexistuje inverze, která by převáděla obě dané kružnice v přímky. Volíme-li však střed řídící kružnice v daném bodě X , bude obrazem hledané kružnice přímka, která se dotýká obrazů k'_1 , k'_2 . Inverze o řídící kružnici $i \equiv (X; r)$ převede tedy naši úlohu na úlohu: sestrojiti společné tečny dvou různých kružnic k'_1 , k'_2 . Známe její řešení, např. užitím stejnolehlosti. Obrazy čtyř společných tečen x' , y' , u' , v' kružnic k'_1 , k'_2 jsou řešení úlohy (obr. 9).

V druhé části článku se budeme zabývat důkazem Feuerbachovy věty citované v úvodu.

Pokračování

M i l a n H e j n ý, VŠD, Žilina:

Steinerov stred v trojuholníku

(Rešenie úloh)

Řešení úloh z článku otištěného v č. 8 Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Ú l o h a 1. Dôkaz je bezprostredným dôsledkom Taletovej vety.

Ú l o h a 2. Bod L , ktorý leží na priamke AB , náleží ku obom kružniciam k_A a k_B . Obe uvedené kružnice teda na seba napojujú v bode. Rovnako k_B a k_C na seba napojujú v bode M a konečne k_C a k_A v bode N . Krivka je uzavretá.

Ú l o h a 3. Všetky tri kružnice majú rovnaké polomery.

Ú l o h a 4. Je $2HQ = AQ$ a trojuholníky QLH a QLA majú spoločnú výšku príslušnú ku vrcholu L . Je preto plocha trojuholníka QLH rovná polovici plochy trojuholníka QLA . Uhol QLA je pravý; plocha trojuholníka QLA je rovná polovici výrazu $AL \cdot LQ$. Plocha trojuholníka QLH je rovná $\frac{1}{4} AL \cdot LQ$. Rovnako ukážeme, že plocha trojuholníka QNH je rovná $\frac{1}{4} AN \cdot NQ$. Plocha štvoruholníka $LQNH$ je rovná súčtu posledných dvoch trojuholníkov, t. j. druhej časti výrazu (1). Ukážeme, že prvý sčítanec výrazu (1) je plocha kruhovej výseče ktorá ostáva, keď od vyšetrovaného útvaru odoberieme štvoruholník $LQNH$. Plocha tejto výseče je, ako vieme, rovná výrazu $\frac{\omega}{2} \overline{AH}^2$.

Je však $\sphericalangle NHL = 2\alpha$, teda $\frac{\omega}{2} = \pi - \alpha$; $AH = \frac{AQ}{2}$. Plocha výseče je teda $\frac{1}{4} \overline{AQ}^2 (\pi - \alpha)$.

Ú l o h a 5. Plochu útvaru počítanú v predošlej úlohe označme P_A . Podobne označme obdobné plochy príslušné vrcholom B , C po rade P_B , P_C . Vyjadrieme P_B i P_C podobne ako je P_A vyjadrené v (2) a všetky tri výrazy spočítajme. Súčet $P(Q) = P_A + P_B + P_C$ je potom rovný výrazu, ktorý po ľahkej úprave dá pravú stranu rovnice (2).

Ú l o h a 6. Pretože $AO = BO = CO = r$ je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC , je podľa (2) okamžite

$$P(Q) = \frac{1}{4} r^2 [(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)] + \frac{1}{2} P_{\Delta} = \\ = \frac{1}{2} P_o + \frac{1}{2} P_{\Delta},$$

lebo je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Ú l o h a 7. Podľa (2) je

$$4P(Q) = (q - a)(\bar{q} - \bar{a})(\pi - \alpha) + (q - b)(\bar{q} - \bar{b})(\pi - \beta) + \\ + (q - c)(\bar{q} - \bar{c})(\pi - \gamma) + 2P_{\Delta}$$

čo po roznásobení, úprave a použití druhej z rovníc (3) dá

$$4P(Q) = q\bar{q}[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)] - q\bar{z} - \bar{q}z + \\ + a\bar{a}(\pi - \alpha) + b\bar{b}(\pi - \beta) + c\bar{c}(\pi - \gamma) + 2P_{\Delta}$$

Ďalej je

$$4P(S) = a\bar{a}(\pi - \alpha) + b\bar{b}(\pi - \beta) + c\bar{c}(\pi - \gamma) + 2P_{\Delta}$$

odkiaľ, použitím vzťahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ obdržíme

$$W = 4P(Q) - 4P(S) = 2\pi q\bar{q} - (q\bar{z} + \bar{q}z)$$

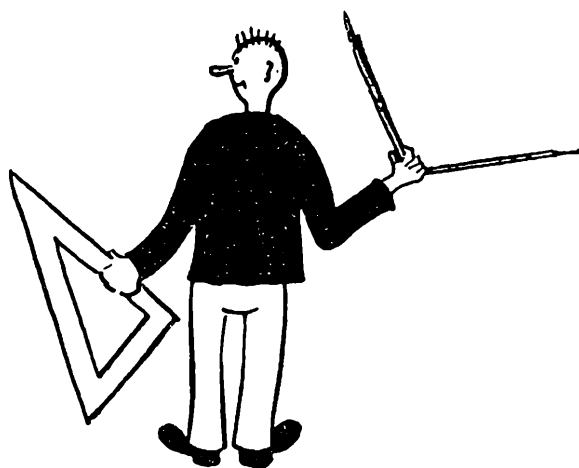
Ú l o h a 8. Ťažisko hmotných bodov A , B , ktoré sú zaťažené hmotami $\pi - \alpha$ a $\pi - \beta$ je - ako vieme z mechaniky - istý bod Y , ktorý je obrazom komplexného čísla

$$y = a \frac{\pi - \alpha}{2\pi - \alpha - \beta} + b \frac{\pi - \beta}{2\pi - \alpha - \beta}.$$

Ťažisko hmotných bodov A , B a C , zaťažených hmotami $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ a $\pi - \gamma$ je totožné s ťažiskom dvojice bodov Y , C zaťažených hmotami $2\pi - \alpha - \beta$, $\pi - \gamma$. Je to bod T , ktorý je obrazom komplexného čísla

$$t = y \frac{2\pi - \alpha - \beta}{2\pi} + c \frac{\pi - \gamma}{2\pi} = a \frac{\pi - \alpha}{2\pi} + b \frac{\pi - \beta}{2\pi} + c \frac{\pi - \gamma}{2\pi}$$

Nakoniec poznamenajme, že bod Y leží vnútri úsečky AB , bod T vnútri úsečky CY , teda i vnútri trojuholníka ABC .



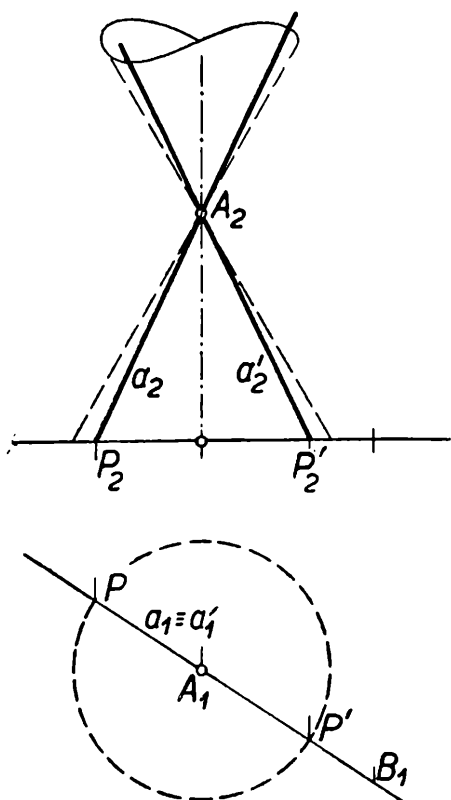
Deskriptivní geometrie

Stanislav Horák, ČVUT, Praha:

Sestrojení přímky z daných odchylek

Začneme jednoduchou úlohou.

1. Sestrojte druhý průmět přímky $a \equiv [A(0; 4; 4), B(3; 6; ?)]$, která má první odchylku (tj. odchylku od půdorysny) $\alpha = 60^\circ$.



Obr. 1

Řešení (obr. 1). Na přímce a známe bod A . Všechny přímky, které procházejí bodem A a mají přitom první odchylku rovnou 60° , vyplňují rotační kuželovou plochu o vrcholu v bodě A a o ose kolmé k první průmětně. Hledaná přímka, pokud ovšem existuje, musí podle toho být površkou této kuželové plochy.

V obr. 1 je uvažovaná kuželová plocha vyznačena čárkovaně. Řídicí kružnice plochy protne přímku a_1 v bodech P_1, P'_1 , a to jsou první stopníky hledaných přímek. Úloha má (tak jak je dána) dvě různá řešení, a_2, a'_2 (v obr. 1 budiž P_1, P'_1).

Kdyby $\alpha = 0^\circ$, přímka a by byla rovnoběžná s první průmětnou a úloha by měla jediné řešení. Kdyby $\alpha = 90^\circ$, úloha by neměla žádné řešení.

1a. Sestrojte první průmět přímky $p \equiv [K(-5; ?; 2), L(0; 5; 5)]$, jejíž druhá odchylka (tj. od nárysny) je 54° .

1b. Sestrojte první průmět přímky $q \equiv [C(1; 5; 6), P(2; ?; 0)]$, jejíž první odchylka je 60° .

Přistupme k další úloze.

2. V rovině $\rho(-6; 4; 5)$ daným bodem $M(3; 2; ?)$ proložte přímkou, jejíž první odchylka je $\alpha = 52^\circ 30'$.

Řešení (obr. 2). Množina všech přímek procházejících bodem M a majících první odchylku α , je rotační kuželová plocha s vrcholem v bodě M a s osou kolmou k první průmětně. Existuje-li tedy přímka žádané vlastnosti, musí to být přímka uvažované kuželové plochy. Rovina ρ je vzhledem k této ploše vrcholová a tu víme, že s ní má společné nejvýše dvě různé přímky a ty jsou řešeny v naší úloze.

Kuželová plocha je v obr. 2 vyznačena opět čárkovaně. Její řídicí kružnice protíná první stopu roviny ve dvou různých bodech, a to jsou první stopníky hledaných přímek.

První odchylku roviny ρ označme ω . Jestliže $\omega > \alpha$, existují dvě různá řešení (naš případ); jestliže $\omega = \alpha$, existuje jediné řešení a jestliže $\omega < \alpha$, neexistuje žádné řešení.

2a. Je dána rovina $\rho(5; 4; 5)$ a v ní bod $M(-3; 3; ?)$. Najděte ty přímky roviny ρ , které procházejí bodem M a mají přitom druhou odchylku $\beta = 45^\circ$.

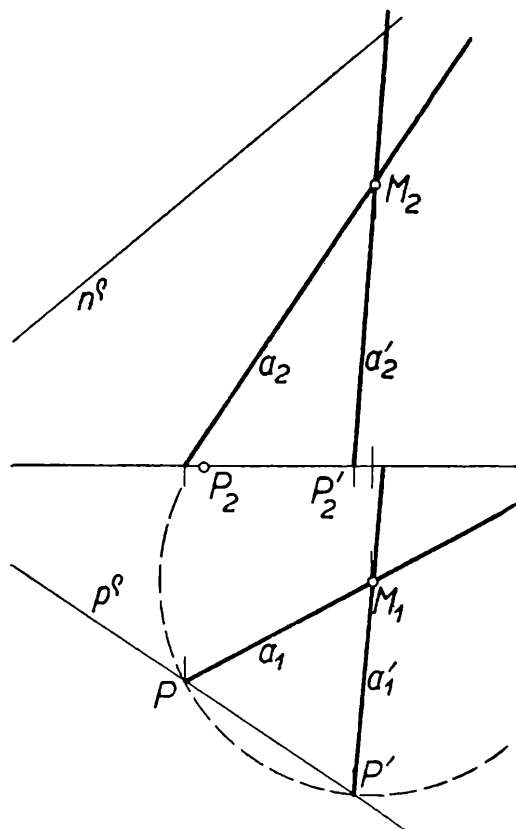
2b. Daným bodem $P(0; 4; 5)$ vedte přímku, která protíná základnici a) má první odchylku $\alpha = 45^\circ$, b) má druhou odchylku $\beta = 30^\circ$.

A nyní rozřešíme úlohu obtížnější.

3. Daným bodem $A(0; 6; 4)$ proložte přímkou, která má první odchylku $\alpha = 30^\circ$ a druhou odchylku $\beta = 45^\circ$.

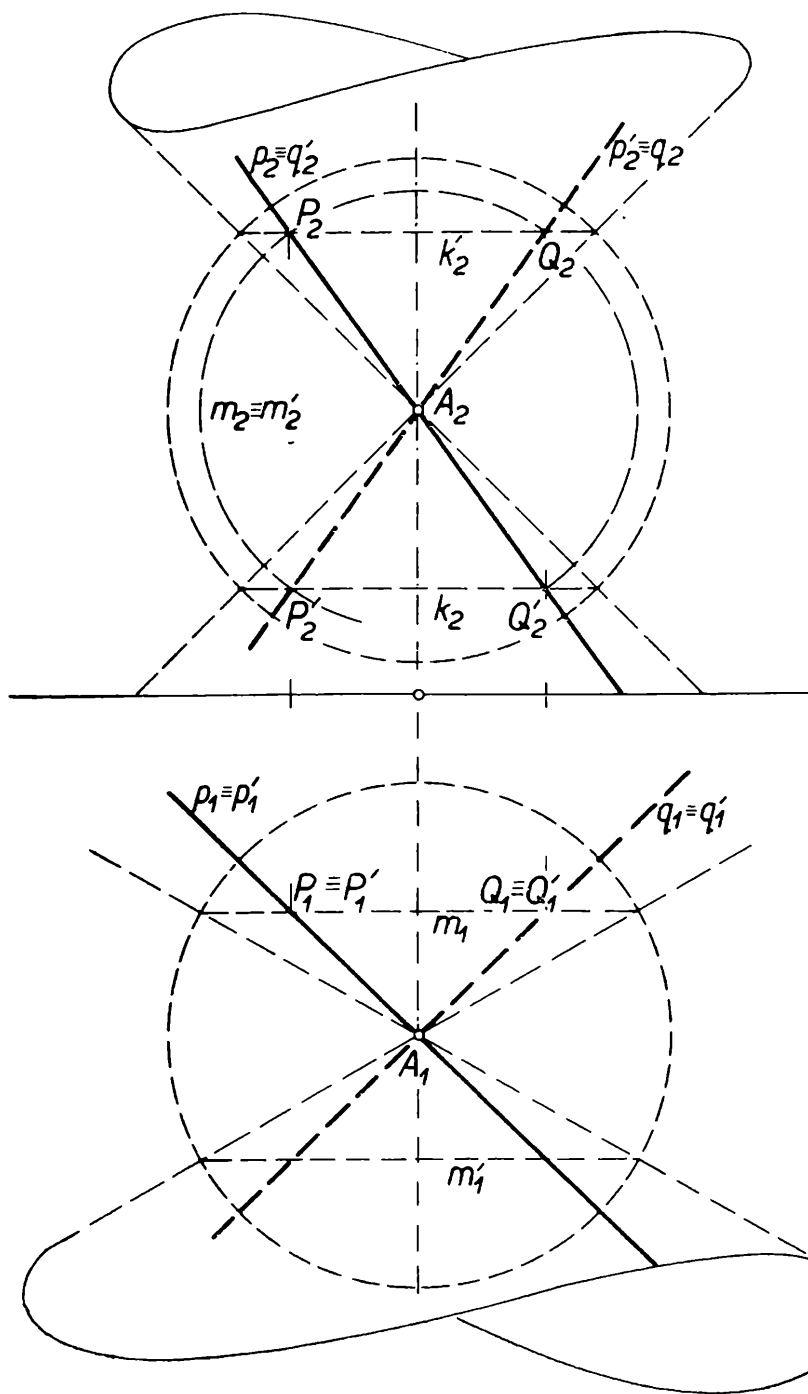
Prostorové řešení je jednoduché. Množina všech přímek, které procházejí bodem A a mají první odchylku α , je rotační kuželová plocha s vrcholem v bodě A a s osou kolmou k první průmětně. Množina všech přímek jdoucích bodem A a majících druhou odchylku rovnou β , je opět rotační kuželová plocha s vrcholem v A a s osou kolmou k druhé průmětně. Obě uvažované kuželové plochy mají společný vrchol, a proto mají (pokud existují, tj. za jistých podmínek) i společné přímky a ty jsou řešeny v naší úloze.

Jak vidět, je prostorové řešení jednoduché. Horší to je s grafickým provedením. Je totiž obtížné sestavit společné přímky obou kuželových ploch, neboť jejich řídicí kružnice leží v různých rovinách. Uvedeme si však vtipné řešení a přitom velmi jednoduché. Kolem bodu A opišme kulovou plochu libovolného poloměru (v obr. 3 jsou obě kuželové plochy

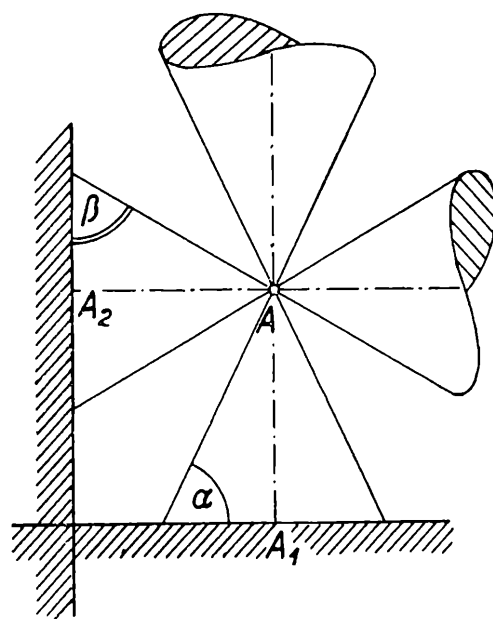


Obr. 2

i kulová plocha vyznačeny čárkovaně). Tato kulová plocha protne první kuželovou plochu v kružnicích k, k' a druhou kuželovou plochu v kružnicích m, m' . Společnými body kružnic k, m procházejí pak hledané přímky. Předložená úloha má čtyři různá řešení p, p', q, q'



Obr. 3



Obr. 4

V diskuzi budeme předpokládat, že úhly α, β jsou ostré a všimněme si obr. 4, v němž jsou znázorněny jednak průmětny π, ν (jako přímky) a jednak obě kuželové plochy. Aby existovalo řešení naší úlohy, tj. aby obě kuželové plochy měly společnou aspoň jednu přímku, musí platit

$$R - \alpha + R - \beta \geq R,$$

z čehož

$$\alpha + \beta \leq R.$$

V případě, že platí nerovnost, existují čtyři různé přímky vyhovující předložené úloze; v případě rovnosti jsou dvě různá řešení (obě kuželové plochy se navzájem dotýkají podél dvou površek). Jinak neexistuje žádné řešení.

Doc. Bořivoj Kepr, ČVUT, Praha:

O některých křivkách

(Pokračování)

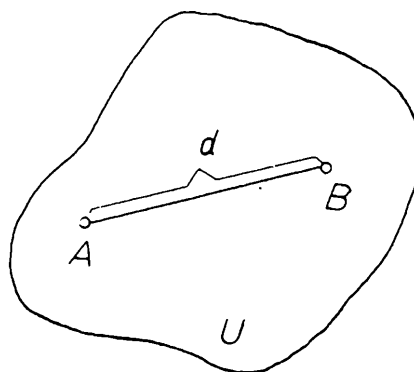
3. Základy rovinné kinematické geometrie

Již dříve byl alespoň trochu a příležitostně osvětlen význam této geometrie, jako metody zkoumání velikého množství křivek, zejména s možností technického využití. Kinematická geometrie je disciplínou značně obsáhlou. Pomocí ní se dají solidně vyšetřovat křivky v nedozírném rozsahu, a to jak rovinné, tak prostorové. Jak bylo již dříve řečeno, omezíme se tu pouze na některé příklady křivek rovinných, a proto se zaměříme pouze na názorné vytyčení úkolů a posláních rovinné kinematické geometrie. Vzhledem k tomu je nutno alespoň názorně osvětlit pojem *neproměnného rovinného útvaru*.

Uvažujeme v dané rovině její libovolnou část U (obr. 12).

Tuto část roviny nazveme *neproměnným rovinným útvarem* tehdy, když při jakémkoliv jejím pohybu v téže rovině zůstane *nezměněna* vzdálenost d jakýchkoliv dvou bodů A, B ($A \neq B$, $d = AB$)

patřících do U ($A \in U$, $B \in U$). Pohybu roviny, nebo jakékoliv její části, v téže rovině říkáme *pohyb komplanární*. Přemístíme-li tedy neproměnný rovinný útvar U z jeho počáteční polohy libovolným komplanárním pohybem do jakékoliv jiné polohy, různé od polohy počáteční, zůstává stále shodným, neboť vzájemné vzdálenosti jeho bodů se při tom nemění. Na základě toho můžeme nyní zcela populárně vylíčit úkol rovinné kinematické geometrie takto:



Obr. 12

Rovinná kinematická geometrie studuje vlastnosti rovinných křivek, které vznikly při komplanárním pohybu neproměnného rovinného útvaru jako dráhy čili trajektorie bodů, nebo jako obálky přímek¹⁴).

Z toho však okamžitě vyplývá užitečnost kinematické geometrie, jako teoretické disciplíny nezbytně potřebné ke studiu funkcí jakýchkoliv technických mechanismů, s kterými se v běžném životě setkáváme na každém kroku¹⁵).

Uvedme nyní jen ve velmi stručných a neúplných nástiněch některé základní věty, na nichž kromě jiného je vybudována stavba rovinné kinematické geometrie.

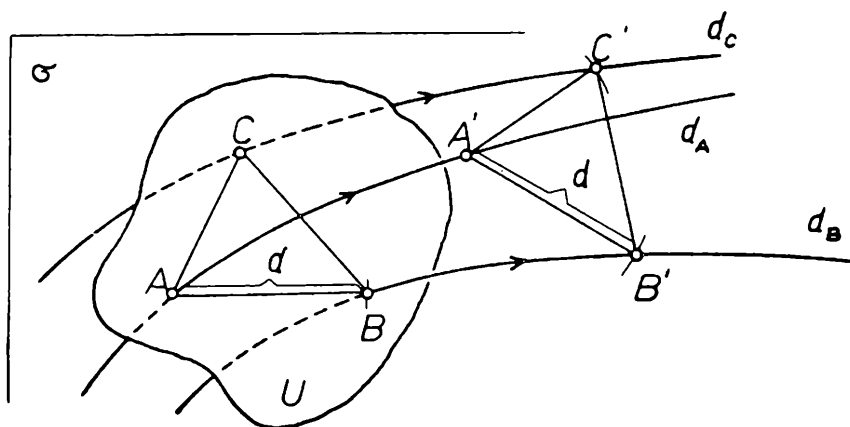
Každá taková věta v jakékoliv vědní disciplíně vyžaduje zcela přesné zdůvodnění čili d ů k a z. Není-li někde možno provést naprosto přesvědčující důkaz, opřený zcela nekompromisně o zákony logiky, třeba v důsledku našich, zatím nedostačujících znalostí věci, nemusí potom pochopitelně taková věta platit, byť se nám napoprvé zdál třeba jakkoliv samozřejmá. Případně nemusí platit pouze z části a může se pak stát, že i celá teorie vybudovaná na platnosti takových vět je falešná, nebo z části falešná. Takových případů v dějinách lidského zkoumání je celá řada. Někdy se na takové omyly přišlo brzy, někdy se však tápalo a hledalo celá historicky dlouhá údobí, a to podle povahy zkoumané záležitosti. Teprve při studiu historie se dozvídáme, že ten nebo onen pracovník, jehož jméno na poli jeho činnosti vstoupilo třeba i do dějin, měl nebo neměl ve svých vývodech pravdu. Z hlediska osobního pro takového pracovníka je pak jistě životní tragikou, že se zdaleka nedožil mnohem pozdějšího všeobecného uznání (a zemřel třeba pro něho osobně v nespravedlivém pocitu neporozumění, dokonce i v posměchu), nebo životním „štěstím“, umíral-li uznáván okolím ve svých teoriích, které se až mnohem později ukázaly jako obecně chybné.

Autor si tu tak trochu zafilosofoval u příležitosti uvedení některých fundamentálních vět rovinné kinematické geometrie, a to pak i trochu z toho důvodu, že vzhledem k poslání článku a vzhledem k předpokládané vyspělosti většiny čtenářů nebude si moci dovolit zcela přesné formulování těchto vět, o jejich úplném a přesném důkazu ani nemluvě. Postavíme se v tomto smyslu na stanovisko populárně názorné. První taková věta říká:

¹⁴) V geometrii se obvykle nepřihlíží k rychlosti pohybu a k silám, které takový pohyb přivodily. Tím se zabývá teoretická část fyziky, nazvaná *kinematika*.

¹⁵) Při této příležitosti upozorňuji na hezkou knížku D v o ř á k - Š v e c, T e c h n i c k é k ř i v k y, která vyšla roku 1962 ve Státním nakladatelství technické literatury v Praze v edici Polytechnické knihovny. V poslední době našla kinematická geometrie velké uplatnění i v lékařství, zejména v oboru zkoumání nejúčelnějšího uplatnění konstrukce protéz, aby tak v souhlasu s komplikovanou funkcí lidského organismu mohla být co možná nejlépe nahrazena amputovaná část lidského těla. Pojednává o tom populárně např. knížka K a d e ř á v e k - H a v l í č e k, T e c h n i c k á g e o m e t r i e v l é k a ř s t v í a s t r o j n í p r o t h e t i c e, Praha 1952. V době zcela poslední nachází kinematická geometrie uplatnění i v lékařském zkoumání špičkových výkonů ve sportu, např. v krasobruslení, vodáckých sportech a v umělecké gymnastice (v baletu).

1. *Pohyb [komplanární] neproměnného rovinného útvaru je zcela určen, známe-li dráhy [trajektorie] dvou jeho bodů, nebo známe-li dráhu jednoho jeho bodu a obálku jedné jeho přímky, nebo známe-li obálku dvou jeho přímek.*



Obr. 13

Názorný obr. 13 ukazuje pouze případ znalosti dvou drah (trajektorií) d_A , d_B dvou daných bodů A , B neproměnného rovinného útvaru U . Kdybychom si v mysli představili daný útvar U jako příslušný kus tuhého papíru, body A a B jako malé otvory v tomto kusu papíru a dráhy d_A , d_B jakožto křivky zmodelované třeba z tuhého ocelového drátu, který je prostrčen jak otvorem A , tak otvorem B , přičemž oba dráty by ležely v rovině modelu U , pak si platnost první části uvedené věty můžeme ozřejmit jednoduchým názorem¹⁶⁾ takto: Kdyby vedl drát d_A pouze otvorem A útvaru U , mohli bychom sice útvarem U pohybovat tak, aby byl veden svým bodem A po drátu d_A , ale kromě toho bychom v každé poloze A na d_A mohli útvarem U navíc libovolně bodem A otáčet.

¹⁶⁾ Nyní však pozor! Možnosti takových názorů plynoucích ze skutečně zdravé lidské představivosti skrývají bohužel jedno z největších nebezpečí uklouznutí směrem k naprosto chybným závěrům. Představivost člověka, tak jako jeho smysly, které ho seznamují s okolním světem, mají, jako všechno v přírodě, ohraničenou možnost správného použití. Zdá se někdy, že věc podle tzv. zdravého názoru je zcela zřejmá a že je tedy naprosto zřejmý i závěr z toho plynoucí. Podle omezených možností rozsahu správné působnosti zdravého názoru můžeme činit pravdivé závěry pouze pomocí takového názoru jen v těch většinou jednoduchých případech, kdy jejich problematika spadá do okruhu ještě správného chápání. Proto docházelo a dochází mnohdy k omylům, které často zabrzdlily pravdivý vývoj vědy na dlouhou dobu. V našem případě je věc „natolik jednoduchá“, že si ji můžeme napřed ujasnit názorem. Lze však říci zcela obecně, že v každém bádání lze úspěšně postupovat jen na základě hluboké znalosti věci, na základě správných soudů podepřených naprosto nesmlouvavými zákony logiky. Názor mnohdy svádí a není možno se opírat pouze o něj. Jenom stručné příklady. Nelze si představit třeba milióntinu vteřiny, s níž se pracuje zcela vážně a běžně ve fyzice, není možné představit si „velikost“ atomového jádra, vymyká se naší představivosti třeba ohromnost biliónu atd.

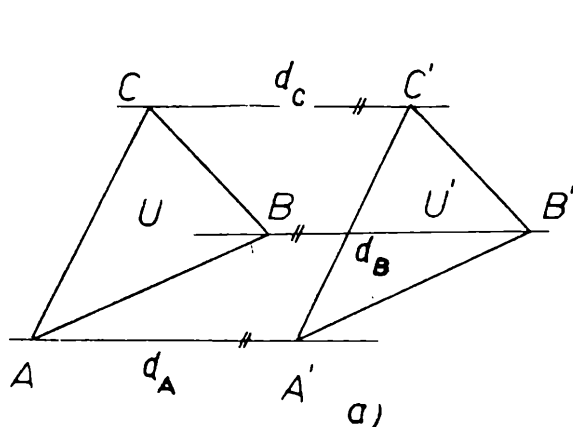
Taková „přílišná“ pohybová možnost není však pohybem v pravém slova smyslu, tj. pohybem, jak ho od narození chápeme v názoru podle předmětů, které se pohybují kolem nás. Vedeme-li však drátěnou trajektorii kromě otvoru A ještě i otvorem B útvaru U , pak je z názoru ihned patrné, že pohyb útvaru U , vznikající tak, že jeho bod A vedeme po dráze d_A a jeho bod B po dráze d_B , je oním pohybem v pravém slova smyslu, pohybem tělesa v přírodě, pohybem, jaký jsme od narození zvyklí chápat. Z tohoto názoru je také vidět, že pohyb útvaru U v tomto případě je možno uskutečňovat jen tehdy, pokud vzdálenosti obou uvedených drah d_A , d_B nepřekročí vzdálenost $d = AB$ obou bodů A , B útvaru U . Geometricky odůvodníme prvou část uvedeně věty takto: Zvolme na dráze (křivce) d_A a bodu $A \in U$ libovolnou jeho další polohu A' při pohybu A po d_A . Ke každé takové poloze lze na dané dráze (křivce) d_B sestrojit příslušnou polohu B' bodu $B \in U$, pohybujícího se po d_B , a to tak, že sestrojíme $B' \in U$, aby $AB = A'B' = d$. Tedy pomocí kružítka: Z bodu A' přetneme křivku d_B obloukem o poloměru d , čímž na d_B obdržíme bod B' . Tuto konstrukci můžeme opakovat libovolně mnohokrát, pokud kruhový oblouk o středu A' a poloměru d protne křivku d_B , nebo se alespoň dotkne této křivky¹⁴⁾. V tom případě, kdy by nebylo možno sestrojit bod $B' \in d_B$ popsanou konstrukcí (oblouk o středu A' a o poloměru d by neměl společný bod s křivkou d_B), neměl by pohyb útvaru U reálný význam. Prakticky řečeno, by se pohyb při takovéto volbě drah d_A a d_B v určité (takto příslušné) jejich části neuskutečnil.

Předpokládejme tedy, že uvažujeme tu část drah d_A a d_B , kde ke každé poloze A' pohybujícího se bodu A po d_A můžeme podle předcházející konstrukce sestrojit příslušnou polohu B' bodu B , pohybujícího se po d_B . Zvolme nyní libovolný bod C , patřící neproměnnému rovinnému útvaru U v jeho výchozí poloze při uvažovaném pohybu, charakterizovaném danými polohami jeho bodů A a B . Podle definice mají úsečky AC a BC při uvažovaném pohybu stálou, neměnicí se délku. Můžeme tedy k trojúhelníku ABC sestrojit známým způsobem trojúhelník s ním shodný $A'B'C'$ ($AC = A'C'$; $BC = B'C'$), tj. k libovolně zvolenému bodu $C \in U$ ve výchozí (počáteční) poloze útvaru U můžeme ke každé další poloze A' , B' bodů A , B při jejich pohybu po d_A a d_B sestrojit vždy příslušnou polohu C' bodu C . Spojíme-li všechny takto sestrojené polohy C' bodu C při uvedeném pohybu křivkou, získáme dráhu (trajektorii) d_C bodu $C \in U$ při daném pohybu. Bod C byl libovolně zvoleným bodem útvaru U . To znamená, že stejnou úvahu bychom mohli provést pro všechny body útvaru U . Tj. na základě znalosti dvou drah d_A a d_B

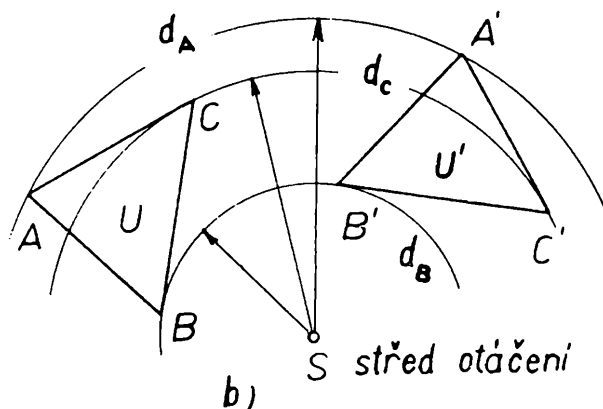
¹⁴⁾ V tomto případě např. právě dotykovém hovoříme o tzv. m r t v é m b o d u příslušného pohybu. Přesný a zcela názorný výklad tohoto pojmu, ve strojní praxi velmi důležitého, získá čtenář až při solidním studiu strojních mechanismů.

dvou bodů A a B útvaru U při daném pohybu můžeme sestavit dráhu d_C kteréhokoliv jiného bodu tohoto útvaru při tomto pohybu. Tím je vlastně prokázána platnost první části první fundamentální věty rovinné kinematické geometrie.

Bylo již řečeno při definici neproměnného rovinného útvaru U , že délky jeho úseček se při pohybu nemění. Každý čipernější čtenář přijde brzy na to, že v tomto požadavku na pohybující se neproměnný rovinný útvar je zahrnut i požadavek neproměnnosti úhlů libovolných dvou přímek takového útvaru při jeho pohybu. Pozor však! T o t o t v r z e n í n e l z e o b r á t i t. Na základě neproměnnosti úhlů při pohybu útvaru U by se dokázala zbývající část uvedené věty, což si v našem případě již odpustíme.



Obr. 14a



Obr. 14b

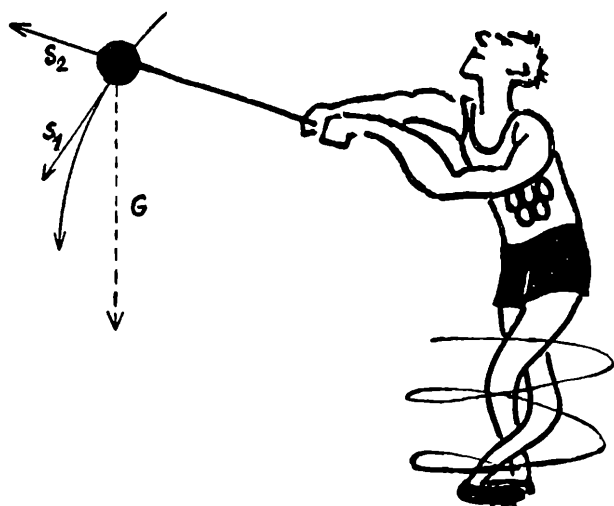
Mezi nejzákladnější pohyby patří *posunutí* (translace) a *otočení* (rotace). Předpokládáme, že čtenář již ví ze školy, co oba uvedené pojmy znamenají. Oba tyto pohyby jsou pro ujasnění znázorněny na obr. 14, kde příslušný útvar U podrobený takovému pohybu je charakterizován trojúhelníkem, a to v obr. 14a při posunutí a v obr. 14b při otočení. Útvar U je tu znázorněn jednak ve výchozí poloze, jednak v jedné další poloze (označené čárkou) při příslušném pohybu.

(Pokračování)

Redakce
přeje
našim
čtenářům



úspěch
při
maturitní
zkoušce.



Zlatěk Maršák, Ivo Kraus,
ČVUT, Praha:

Krystalická stavba pevných látek

Zatímco u plynů existuje nestabilní časově proměnné uspořádní atomů, u kapalin vzhledem k menší rychlosti¹⁾ pohybu atomů či iontů, je již patrna snaha o vytváření pravidelně se opakujících shluků atomů. Ale ani u kapalin nejsou tyto shluky trvale stabilní. Jsou narušovány jinými volně se pohybujícími atomy a tepelným pohybem okolních atomů.

Látky pevné mají pevnou vazbu sousedních atomů nebo jejich shluků, která se pravidelně opakuje na větší či menší vzdálenost. Látky, u nichž vzájemné spojení shluků atomů či iontů tvoří pravidelné řetězce jen na malou vzdálenost, jsou látky amorfní (sklo, opál, saze). Amorfismus látek může být toho druhu, že opakovaná vazba atomů se v krystalu vyskytuje i vícekrát, ale tyto krátké řetězce jsou prostorově různě orientovány. Jiný případ vazby shluků tvořících pravidelné řetězce na malou vzdálenost, který je nutno také zahrnout do amorfismu, je ten, kdy pravidelné opakování základního motivu je narušeno velmi malým rozměrem částic (krystalků).

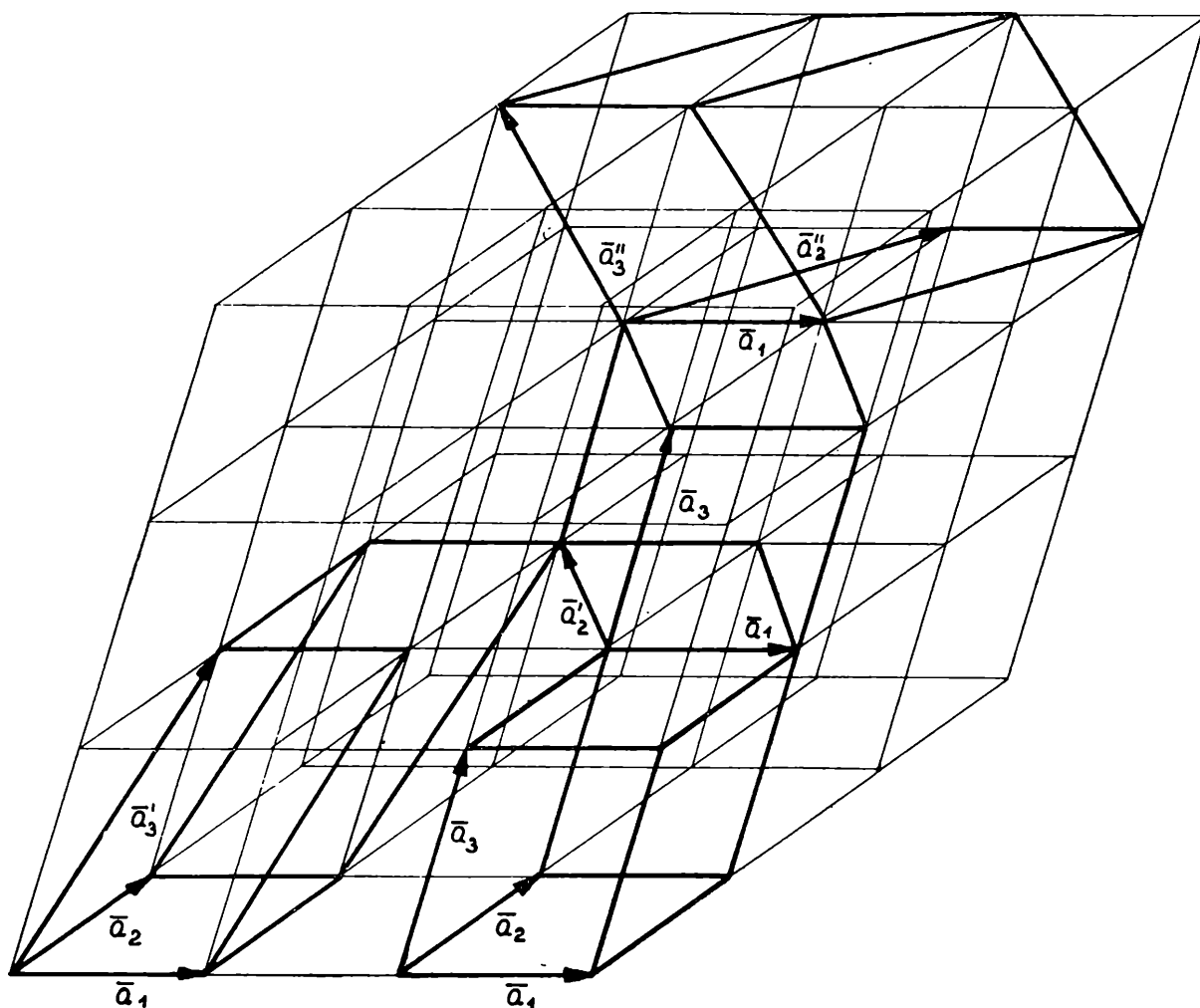
Většina látek pevných má však atomy či ionty uspořádány periodickým způsobem v dlouhých řetězcích. Jsou to látky *k r y s t a l i c k é*, jako např. sůl kamenná, křišťál, železo a další. Jedinému krystalu říkáme *m o n o k r y s t a l*. Jestliže se látka skládá z velkého množství monokrystalů, pak ji nazýváme látkou *p o l y k r y s t a l i c k o u*. Příkladem polykrystalické látky jsou kovy.

Nyní zavedeme pojem *p r o s t o r o v é m ř í ž k y*. Představme si tři osnovy rovnoběžných ekvidistantních (stejně od sebe vzdálených) přímek. Každá osnova je určena směrem, přesněji řečeno jednotkovým vektorem. Nechť tyto tři jednotkové vektory neleží v rovině ale tvoří hrany trojhranu. Potom takováto soustava přímek těchto osnov vytvoří hrany vzájemně shodných rovnoběžnostěnů — prostorovou mřížku (obr. 1). Každý z rovnoběžnostěnů je elementární buňkou dané prostorové

¹⁾ Atomy žádné látky nejsou v klidu, ale konají jakýsi kmitavý pohyb. Čím větší je teplota látky, tím mají atomy větší amplitudu kmitů.

mříže. Vrcholy těchto rovnoběžnostěnů, v nichž se protínají přímky náležející různému osnově, jsou **u z l o v é b o d y**.

Přímkám spojujícím uzlové body říkáme **u z l o v é p ř í m k y**. Dále můžeme zavést pojem **u z l o v ý c h** nebo též **m ř í ž k o v ý c h r o v i n**, tj. rovin určených dvěma vzájemně rovnoběžnými uzlovými přímkami. Dvě rovnoběžné mřížkové roviny jsou naprosto identické. Jejich vzdálenost je vzájemná vzdálenost mřížkových rovin. Je zřejmé, že v dané množině uzlových bodů můžeme nekonečně mnoha způsoby sestrojit



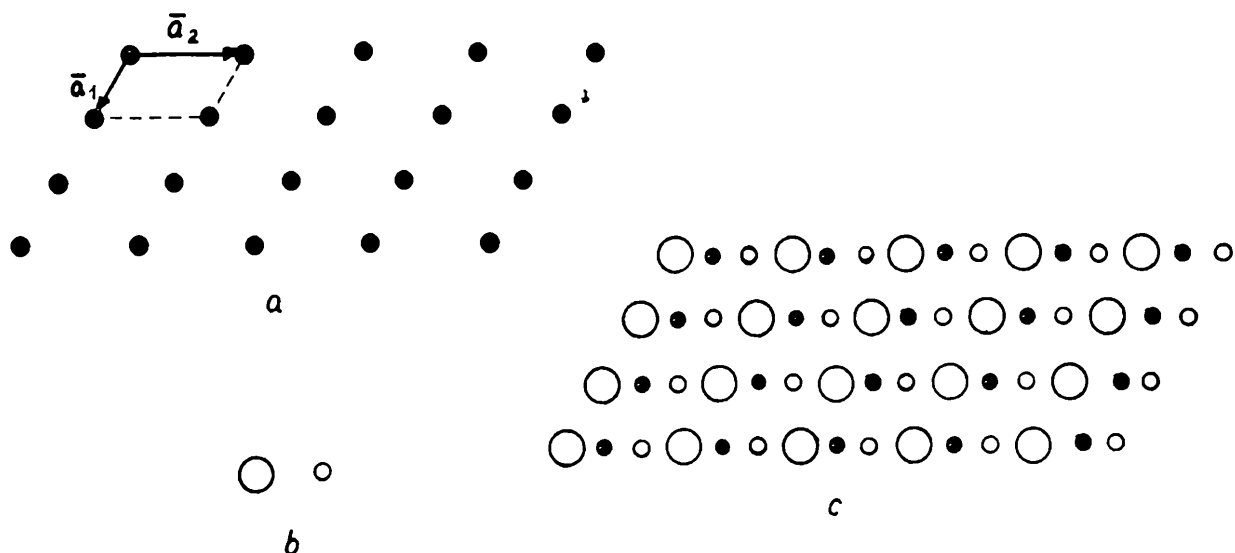
Obr. 1. Čtyři možné případy vybudování jednoduchých prostorových mřížek v téže množině uzlových bodů; $|\bar{a}_1|$ jsou zvolené jednotkové vektory.

různé soustavy rovnoběžnostěnů. Záleží jen na volbě tří jednotkových vektorů. Ta však není zcela libovolná. Vektory musí vycházet z jednoho bodu, spojovat tři různé uzlové body a tato čtveřice bodů nesmí ležet v téže rovině. Takovouto konstrukcí musíme být schopni vyčerpát všechny uzlové body mřížky, aniž by se přitom vzniklé elementární buňky protínaly. Z obr. 1, na němž jsou naznačeny čtyři různé případy volby jednotkových vektorů, je patrné, že všechny elementární buňky téže prostorové mříže mají stejný objem.

Jednotkové vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ (velikost vektoru $|\bar{a}_i|$ ($i = 1, 2, 3$) je rovna vzdálenosti dvou sousedních uzlových bodů v daném směru a není tedy obecně stejná pro všechny tři vektory) nám dovolují vyjádřit polohu libovolného uzlového bodu. Počátek souřadnicového systému můžeme volit v libovolném uzlovém bodě. Osy souřadnicového systému položíme do vektorů $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, tak, aby tvořily pravotočivý systém. Pak souřadnice všech uzlových bodů, ležících např. na ose určené vektorem $\bar{a}_1$, jsou dány výrazem $u \cdot \bar{a}_1$, kde u je libovolné celé číslo. Není to nic jiného, než vyjádření translace (posunutí) libovolného uzlového bodu vzhledem k počátku. Obdobně to také platí pro body na osách $\bar{a}_2$ a $\bar{a}_3$. Obecně tedy můžeme vyjádřit libovolný uzlový bod translací, kterou dostaneme složením jednoduchých translací podle jednotlivých souřadnicových os:

$$u\bar{a}_1 + v\bar{a}_2 + w\bar{a}_3,$$

kde u, v, w jsou libovolná celá čísla. Proto se prostorové mřížce říká také někdy *t r a n s l a č n í m ř í ž k a*. Elementární buňku dostáváme pro případ $u = v = w = 1$.



Obr. 2. a) Mřížková rovina. Vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ určují elementární buňku (v tomto případě jde o rovinnou mřížku).
b) Báze, skládající se ze dvou různých atomů.
c) Krystalická struktura, která je tvořena spojením každého uzlového bodu mřížky s bází.

Umístíme tuto prostorovou mřížku do pravidelně se opakující soustavy atomů a za jednotkové vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ volme vektory určující periodicitu určitého motivu soustavy atomů ve třech různých směrech neležících v téže rovině. Uzlové body mohou, ale nemusí, splynout s některými z atomů soustavy. Zpravidla se však uzlový bod umístí do nějakého atomu a pak i všechny ostatní uzlové body prostorové mřížky jsou obsazeny atomy či ionty. Každému uzlovému bodu mřížky odpovídá přesně totéž rozložení okolních uzlových bodů a tudíž i určité rozložení atomů. Stejná množina atomů příslušející ke každému uzlovému bodu je b a z e k r y s-

talické struktury. Nutné rozlišení pojmů mřížka (množina uzlových bodů) a krystalická struktura (vztah mezi atomy) je patrné z obr. 2.

(Pokračování)

Inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha:

Styk dvou těles

Všimněme si jedné skutečnosti, která není v učebnicích mechaniky náležitě rozvedena. Je to přímý styk dvou těles (obecněji styk nějakých dvou hmotných útvarů), resp. způsob, jak k tomu styku dojde.

Stykem (bezprostředním) rozumíme takové prostorové uspořádání dvou těles, při kterém alespoň jeden bod z jednoho tělesa je soumístný s jedním bodem druhého tělesa. Je-li tato geometrická soumístnost u jediného bodu, jde o *styk bodový*, je-li více soumístných bodů, jde o *styk vícebodový*. Tento druhý případ můžeme dále rozdělit na vícebodový styk v nějakém počtu osamocených bodů, na *styk čárový* (nebo jeho zvláštní případ *styk přímkový*) a na *styk plošný* (nebo jeho zvláštní případ *styk rovinný*). U nespojitých čar nebo ploch došli bychom ještě k dalším dílčím případům.

Aby se dvě tělesa dostala do vzájemného přímého styku, je nutné, aby se k sobě přiblížila nějakou nenulovou rychlostí. V dalším zatím uvažujeme, že obě tělesa jsou volná, dokonale pružná a že při jejich jakémkoliv vzájemném styku nedochází k tření.

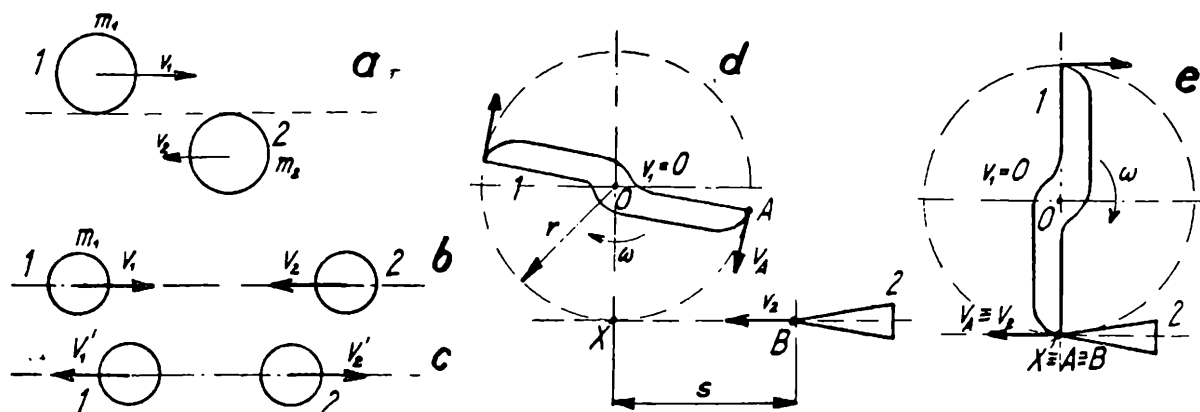
Podle kinematických vlastností obou těles před jejich vzájemným setkáním můžeme rozeznat tři zásadní případy přímého styku těchto dvou těles:

a) *Styk potkávací*, který nastává mezi tělesy, jež se při svých pohybech těsně míjejí. Tímto stykem není pohyb těles nijak ovlivněn. Příkladem potkávacího styku může být případ dvou koulí, pohybujících se přímočaře po rovnoběžných paprscích s kolmou vzdáleností rovnou součtu poloměrů obou koulí (obr. 1a).

b) *Styk nárazový* (styk rázem), který nastává mezi tělesy, jejichž dráhy se izochronně protínají, nebo u nichž prostory opisované tělesy při jejich pohybech se izochronně pronikají¹⁾. Na počátku nárazového styku je relativní rychlost obou těles nenulová, v průběhu rázu mění se nejprve jejich kinetická energie (buď zčásti, nebo zcela) v energii potenciální, v dalším průběhu dochází k ději opačnému (potenciální energie se opět mění v energii kinetickou) a po jeho skončení se tělesa od sebe znovu oddělí (skončí jejich nárazový styk).

¹⁾ Viz též pojednání V y š e t ř e n í r e á l n o s t i s r á ž k y d v o u k u l o v ý c h t ě l e s p o h y b u j í c í c h s e r o v n o m ě r n ě p ř í m o č a ř e, Rozhledy mat. - fyz., roč. 39, 1960/61, č. 1, str. 23—25.

Při nárazovém styku se obě tělesa vzájemně ovlivňují ve svých pohybech, obecně dochází k jejich energetickým změnám. Vyšetřujeme-li *ideální středový ráz*²⁾ (nárazový styk) v souřadnicové soustavě, spojené se společným středem hmotnosti (těžištěm) obou těles, pak shledáme, že si tělesa při rázu vzájemně žádnou energii nesdělila, což je snad na první pohled poněkud překvapující. Blíže se s tímto samozřejmým jevem seznámíme v některém z dalších článků. Poněkud jiný případ nastane ovšem při excentrickém rázu. Kdyby šlo o přímý středový ráz dvou dokonale nep pružných těles, zůstala by obě tělesa po dokončení rázu v *trvalém dotyku*.



1a) *Potkávací styk* dvou koulí 1 a 2. (bc) *přímý dokonale pružný středový nárazový styk* dvou koulí 1 a 2, (b) *pohybový stav před rázem*, (c) *po rázu*, (de) *klidný styk* dvou těles 1 a 2 [(d) *pohybový stav před stykem*, (e) *v okamžiku relativně klidného styku*].

c) *Styk klidný* (bezrázový), který nastává za určitých podmínek mezi dvěma tělesy tak, že v počátečním okamžiku styku mají stykové body u obou těles stejné rychlosti co do velikosti i směru. Na počátku klidného styku je tedy relativní rychlost sobě příslušejících stykových bodů nulová (v tom je zásadní rozdíl od styku nárazového), během styku tedy k žádnému ději podobnému rázu nedochází. Klidný styk je možný jen tehdy, je-li alespoň jedno z obou těles rotační a je-li styk obou těles vzhledem k volným rotačním osám excentrický. Klidný styk je reálný také mezi tekutinami a pevnými tělesy vhodných tvarů apod.

Trvání klidného styku závisí na geometrických a kinematických vlastnostech mechanického systému, který obě tělesa tvoří; nemusí být však vždy vázán na krátký časový interval, jako je tomu zpravidla u případu druhého. Pokud jde o vzájemné energetické ovlivňování jednoho tělesa druhým, během jejich vzájemného klidného styku, mohou nastat zásadně dva případy, a to i tehdy, vyšetřujeme-li stykový děj v soustavě společného středu hmotnosti (těžiště obou těles). Buď si tělesa během klidného styku žádnou energii nesdílejí, nebo d o c h á z í k e s d í l e-

²⁾ Viz též O r á z u t ě l e s, Rozhledy mat. • fyz. roč. 35, 1957, č. 6, str. 255–260.

ní makromechanické energie mezi tělesy. Protože tento poslední případ je neobyčejně zajímavý a důležitý, věnuji mu později samostatné pojednání. Takový děj můžeme nazvat *relativně klidným, bezrázovým působením* dvou těles na sebe.

Jeden příklad klidného styku je schematicky zakreslen v obr. 1d. Jde o styk dvou těles, z nichž jedno 1 je rotační, druhé 2 se před stykem pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v_2 . Volná rotační osa tělesa 1 je v relativním klidu, rovnoměrná rotace se děje úhlovou rychlostí ω . V naznačeném případě dojde ke klidnému styku v bodě $X (\equiv A \equiv B)$ tehdy (obr. 1d), když v libovolném čase je vzdálenost $s = XB$ rovna délce kruhového oblouku $s_0 = \widehat{XA}$.

Ve zvoleném případě jde o okamžitý klidný styk, který se uskuteční při průchodu bodu A na rotačním tělese pevným bodem X . V následujícím okamžiku se opět tělesa od sebe oddělí. V tomto případě si tělesa vzájemně žádnou energii nesdílejí. *Déletrvající klidný styk* a jeho překvapivé důsledky si probereme příště.

Okamžitý klidný styk se snad trochu podobá délkou svého trvání jednobodovému potkávacímu styku (délka trvání se bez omezení blíží nule), zásadní rozdíl mezi oběma případy je ovšem v tom, že u potkávacího styku jsou vektory rychlostí obou těles rovnoběžné se stykovou rovinou, jež je společnou tečnou rovinou obou těles ve společném bodě styku, kdežto u klidného styku (bezrázového) svírají vektory rychlostí stykových bodů se stykovou rovinou obecně nenulové úhly (obě rychlosti mohou být např. stejnosměrné a kolmé na stykovou rovinu, jak je tomu v obr. 1e).

Poznámka. Všechny uvedené případy se rozuměly u mechanických volných systémů, izolovaných proti vnějšku. Je samozřejmé, že klidný styk nebo i trvalý dotyk dvou těles může být realizován také zásahem z vnějšku (můžeme např. položit jedno těleso na druhé, aniž by tělesa přitom na sebe narazila, apod.).

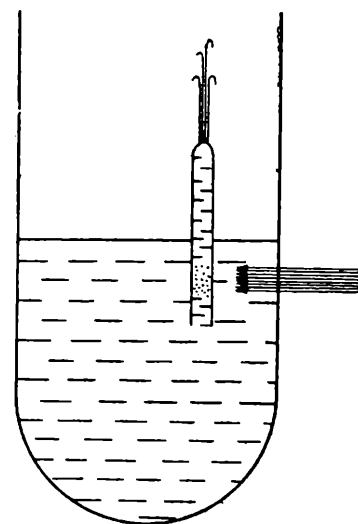
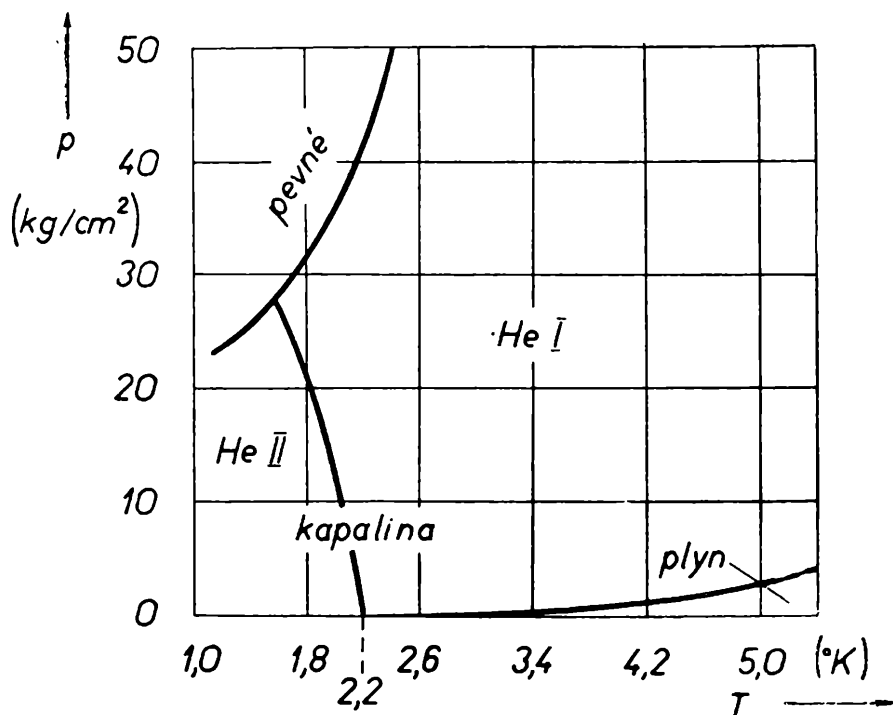
J a r m i l a D l o u h á, KU, Praha:

Supratekutost a supravodivost

V článku o nízkých teplotách (viz č. 6 našeho časopisu) jsme se zmínili o tom, že nejzajímavějšími jevy, které byly při nízkých teplotách sledovány, jsou supratekutost a supravodivost. Nejdříve obrátíme pozornost k prvému z nich. *Supratekutost* byla pozorována jen u jediné kapaliny, a to u helia.

I. Helium

Helium je velmi zajímavý prvek. Ačkoli má velmi nízké atomové číslo (rovné 2), bylo objeveno teprve roku 1868 ve slunečním spektru, pořízeném při úplném zatmění Slunce. Do té doby totiž byly spektrální čáry příslušející heliu považovány za čáry vodíkové nebo sodíkové. Na Zemi bylo helium objeveno ještě později, a to až v roce 1895 při zkoumání argonu. Od té doby se datují snahy vědců separovat tento poměrně vzácný prvek, získat ho větší množství a konečně - zkapalnit ho. Malé množství helia se vyskytuje v naší atmosféře; větší množství ho obsahují zemní plyny. Helium odolávalo pokusům o zkapalnění vynikajících vědců. Teprve v roce 1908 se podařilo zkapalnění helia K a m e r l i n g h - O n n e s o v i při teplotě 4,2 °K. Odčerpáváním par nad kapalným heliem snížil týž fyzik teplotu až na 1 °K ve snaze získat též helium v pevném skupenství; to se mu však již nepodařilo.



Obr. 1. Fázový diagram helia (p - tlak, T - teplota). Obr. 2. Fontánový jev. (Na obr. 1 budiž kp/cm^2).

Atmosférické helium je směsí dvou izotopů: ${}^4_2\text{He}$ a ${}^3_2\text{He}$. Jeden atom ${}^3_2\text{He}$ připadá na milión atomů ${}^4_2\text{He}$. Oba izotopy se dají zkapalnit až při nízkých teplotách (${}^4_2\text{He}$ při teplotě 4,2 °K a ${}^3_2\text{He}$ při teplotě 3,2 °K), ale každá ze získaných kapalin má poněkud jiné vlastnosti. Supratekutost byla pozorována jen u izotopu ${}^4_2\text{He}$, a proto si ho povšimneme blíže. Při teplotě nižší než 4,2 °K je ${}^4_2\text{He}$ bezbarvá kapalina o nepatrném povrchovém napětí a malé hustotě, která se velmi rychle vypařuje. Za normálního tlaku je to kapalina nezamrzající, neboť pevné helium lze získat z kapalného při dostupných teplotách (asi 0,001 °K) jen při tlacích vyšších než 25 $\text{kp}\cdot\text{cm}^{-2}$. Z plynného helia lze sice získat pevné

helium i při vyšších teplotách, ale podstatně vyšších tlacích; např. při teplotě $50\text{ }^{\circ}\text{K}$ je třeba tlaku více než 7000 kp.cm^{-2} . Na rozdíl od jiných kapalin může se helium vyskytovat ve dvou modifikacích, tzv. *helium I* (při relativně vyšších teplotách) a tzv. *helium II* (při teplotách relativně nižších). V diagramu, kde na osu x nanášíme teplotu T a na osu y tlak p , vypadají rozhraní mezi jednotlivými fázemi helia tak, jak je to znázorněno na obr. 1. Rozhraní mezi heliem I a heliem II se nazývá λ -linií. Přechod kapalného helia z jedné modifikace do druhé je provázen prudkou změnou jeho specifického tepla, vazkosti a jiných veličin, ale neexistuje při něm latentní teplo, jako je tomu např. při změnách skupenství.

II. Supratekutost

Zatímco helium I je normální kapalina s obdobnými vlastnostmi jako všechny ostatní kapaliny, má helium II zvláštní vlastnosti. Z nich nejvýznamnější objevil roku 1938 akademik K a p i c a. Blízko absolutní nuly má helium II neměřitelně malou vazkost, takže velmi tenkými kapilárami a mezerami protéká téměř bez tření. Přitom rychlost proudění je prakticky nepřímo úměrná šířce kapiláry nebo mezery. Tento jev dostal název *supratekutost*.

S ní souvisí ještě celá řada dalších zvláštních jevů v heliu. Je to např. skutečnost, že v heliu II nenaměříme teplotní rozdíly, i když bude helium na některém místě zahříváno. Tento jev se přitom nedá vysvětlit nekonečnou tepelnou vodivostí helia, neboť přímé měření skutečné tepelné vodivosti ukazuje, že je velmi malá. Anomálně rychlé předávání tepla v heliu II se vysvětluje vznikem zvláštních tepelných toků, které nesouvisejí s pohybem kapaliny jako celku.

Dále vykazuje helium II tzv. *t e r m o m e c h a n i c k ý j e v* (často nazývaný jevem fontánovým), který je znázorněn na obr. 2. Tento efekt spočívá v tom, že teplotní rozdíl v látce ponořené do helia vyvolá podél úzké trubičky vyvolá přídatný rozdíl tlaku na koncích této trubičky. Je-li tedy do nádoby s kapalným heliem ponořena kapilára, která má v dolním konci „zátku“ z drobného písku, pak po osvětlení této části kapiláry se od písku ohřívá i obsažené v ní helium a kromě hydrostatického tlaku vznikne v něm i tlak hydrotermický, který způsobí, že z kapiláry začne stříkat fontána do výše 20 až 30 cm.

Další zajímavý pokus s heliem II je vidět na obr. 3. Do zkumavky bylo nabráno helium II, zkumavka vytažena z heliové lázně a ponechána nějaký čas nad hladinou této lázně. Po určité chvíli byla zkumavka prázdná. Kdybychom mohli sledovat celý postup jejího vyprazdňování, viděli bychom, že helium pokryje nejprve zkumavku tenkou vrstvou (tzv. filmem) a po této vrstvě pak pomalu vytéká ven.

Všimněme si ještě výsledků dalších pokusů, v nichž hraje roli heliový film.

1. Helium II potahuje všechny pevné povrchy nad hladinou lázně (pokud ovšem je jejich teplota dostatečně nízká, aby na nich mohlo existovat helium II). V důsledku toho se všechny nádoby částečně ponořené do kapalného helia, pokud mají stejnou teplotu, naplní heliem do téže výše jako je hladina lázně.

2. Pohyb filmu probíhá prakticky bez tření, takže rychlost tohoto pohybu nezávisí na délce překonávané dráhy.

3. Heliový film teče ve směru rostoucí teploty (takže v nádobě o vyšší teplotě je hladina helia výše než v nádobě o teplotě nižší).

4. Film vede teplo jen nepatrně.

5. Při teplotě přechodu helia II na helium I je rychlost pohybu filmu nulová a s klesající teplotou helia II roste až do určité mezní hodnoty.

6. Tloušťka filmu je asi $3 \cdot 10^{-5}$ mm, což odpovídá vrstvě asi sta atomů.

Vysvětlení uvedených jevů se provádí pomocí makroskopické teorie tak, že si představujeme, že helium II se skládá ze dvou kapalin, které se mohou pohybovat nezávisle jedna na druhé. Jedna z nich je supratekutá, nevede teplo a teče ve směru rostoucí teploty, kdežto druhá je normální kapalina, která vede veškeré teplo obsažené v heliu II a teče ve směru klesající teploty. Označíme-li hustotu supratekuté složky helia ρ_S a hustotu normální složky ρ_N , bude celková hustota helia II $\rho = \rho_S + \rho_N$. Poměr obou hustot závisí na teplotě. Při teplotě přechodu helia I na helium II je $\frac{\rho_S}{\rho_N} = 0$, kdežto při absolutní nule roste

$\frac{\rho_S}{\rho_N}$ nade všechny meze. Do úzkých trubic se podle této teorie dostává převážně jen supratekutá složka helia II a složka normální se tam dostává tím hůře, čím užší jsou tyto trubice. Proto je v úzkých kapilárách rychlost proudění helia mnohem větší než v kapilárách širších.

Kromě zmíněných vlastností byl v heliu II pozorován ještě další zajímavý jev, a to šíření téměř nezanikajících tepelných vln. Tento efekt byl po prvé sledován v roce 1946 P e š k o v e m a dostal název d r u h ý z v u k.

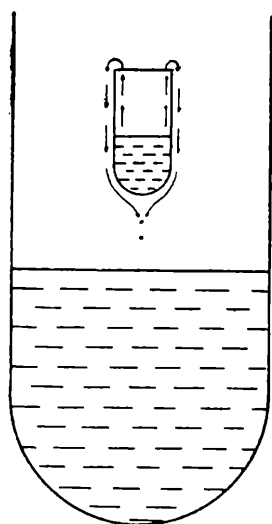
Mikroskopická teorie supratekutosti byla vypracována v roce 1947 sovětským fyzikem L a n d a u e m. Tato teorie je založena na předpokladu, že v heliu II existují tepelná kvanta, která v každém okamžiku „zachvacují“ určitou část helia II. Dodáním energie dostává se tato část kapaliny do tepelného pohybu, a tím vzniká normální složka helia II s nenulovou vazkostí. Naproti tomu ta část helia II, která není „zachvácená“ tepelnými kvanty, má vazkost nulovou. Počet tepelných kvant závisí silně na teplotě. Při teplotě absolutní nuly tato kvanta

neexistují, kdežto při teplotě přechodu helia I na helium II je jich již takové množství, že stačí „zachvátit“ veškeré helium II.

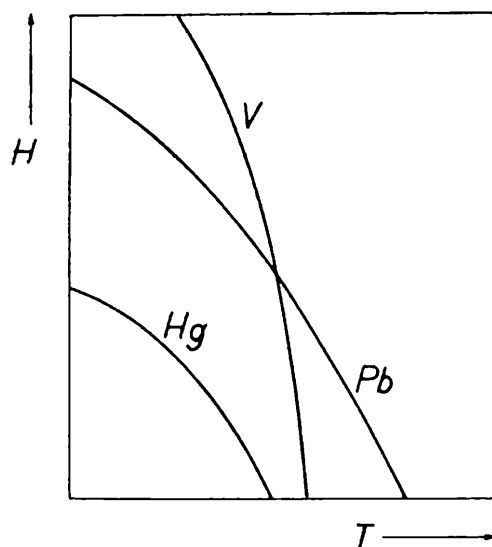
III. Supravodivost

Snad vůbec nejzajímavějším jevem, s nímž se setkáváme při nízkých teplotách, je *supravodivost*, jíž věnujeme zbývající část tohoto článku. Mezi supravodivostí a supratekutostí existuje hluboká fyzikální analogie, kterou můžeme zhruba charakterizovat tak, že supravodivost je supratekutost elektronů v kovu.

Jedním z prvních měření, která prováděl *Kamerlingh-Onnes* po úspěšném zkapalnění helia, bylo měření odporu při dosažených nízkých teplotách. Při tom zjistil, že při určité teplotě klesá odpor rtuti při změně teploty o $0,01^\circ\text{K}$ na neměřitelně malou hodnotu. Později byl týž jev zjištěn i u olova a cínu. Dostal název *supravodivost* a teplota, při níž dochází k uvedené prudké změně vodivosti *kritická teplota*.



Obr. 3. Vytékání heliového filmu ze zkumavky nad heliovou lázní.



Obr. 4. Prahové křivky několika supravodičů (H intenzita magnetického pole, T - teplota).

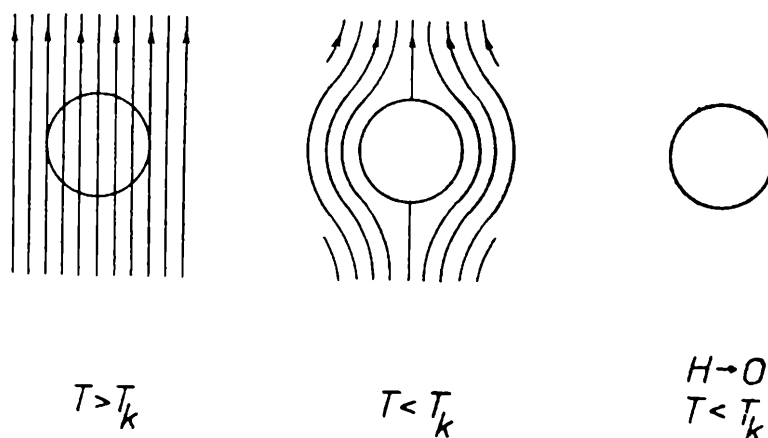
Aby mohl být odpor supravodičů stanoven přesněji, neboť obvyklé metody měření odporu jsou k jeho určení málo citlivé, použil *Kamerlingh-Onnes* prstencovitého vodiče ze supravodivého materiálu (olova), pomocí magnetu v něm indukoval silný elektrický proud a z jeho úbytku usuzoval na odpor. Podobný pokus opakoval v roce 1954 *Collins*. V supravodivém prstenci tek l proud několika set ampérů přes dva roky, aniž by byl zjištěn měřitelný pokles jeho intenzity. Je tedy vidět, že při teplotách nižších než je teplota kritická, je odpor supravodiče neměřitelně malý, kdežto při teplotách i jen nepatrně převyšujících kritickou teplotu, má odpor vodiče hodnotu zřetelně nenulovou (asi 10^{-1} až 10^{-3} hodnoty odporu při pokojových teplotách).

Od té doby byl měřen při nízkých teplotách odpor mnoha prvků, sloučenin a slitin. Supravodivost byla dosud zjištěna u 21 prvků, u celé řady slitin a sloučenin. Kritické teploty se pohybují v rozmezí od 0 °K do 23 °K. Příklad některých supravodivých prvků a jejich kritických teplot T_K uvádí následující tabulka.

Tab. 1. Supravodivé prvky a jejich kritické teploty T_K .

Prvek	Nb	Pb	Ta	Hg	Sn	In	Tl	Ti	Al	Zn	Cd
$T_K(^{\circ}\text{K})$	9,22	7,26	4,38	4,12	3,69	3,37	2,38	1,81	1,14	0,79	0,54

Je však celá řada kovů, které nejsou supravodivé ani při teplotě 0,05 °K. Je zajímavé, že kovy, které jsou při pokojových teplotách poměrně špatnými vodiči, jako je Nb, Pb, Ta aj., stávají se supravodivými při poměrně vysokých teplotách (nad 4 °K), kdežto u kovů, které jsou známy jako dobré vodiče Cu, Ag a Au nebyla supravodivost dosud zjištěna.



Obr. 5. Chování supravodiče v magnetickém poli a za jeho nepřítomnosti.

Ze slitin a sloučenin objevuje se supravodivost nejen u takových látek, u nichž je aspoň jedna složka supravodivá, nýbrž i u některých látek bez jakékoli příměsi supravodiče. Zatímco z prvků byla supravodivost zjištěna jen u prvků kovových, jsou supravodivé i mnohé sulfidy, karbidy apod., které sice vykazují částečně kovový charakter, ale jejichž odpor při vyšších teplotách se silně liší od odporu kovů. Z těchto sloučenin jsou nejdůležitější sloučeniny niobu, které mají nejvyšší zatím známé kritické teploty (až 23 °K), a tím umožňují práci se supravodiči i bez použití kapalného helia.

Brzy po objevení supravodivosti zjistil Kamerlingh-Onnes, že v silnějších magnetických polích nebo při větších elektrických proudech protékajících vzorkem supravodivost mizí a ve vodiči se opět objevuje

odpor. K tomuto přechodu dochází skokem, jakmile při určité teplotě (nižší než je teplota kritická) dosáhne intenzita H magnetického pole určité hodnoty. Minimální intenzita pole, při níž dochází při dané teplotě k rozrušení supravodivosti, se nazývá *p r a h o v á i n t e n z i t a m a g n e t i c k é h o p o l e*. S klesající teplotou látky jsou k rozrušení supravodivosti nutná silnější pole; teplotní závislost prahové intenzity se nazývá *p r a h o v o u k ř í v k o u*. Jak vidíme na obr. 4, je to přibližně parabola. U některých látek, např. u Pb, Hg a Sn stačí k rozrušení supravodivosti pole o intenzitě 10 až 100 Oe¹⁾, u jiných - např. u Nb a Ta jsou nutná pole intenzity 1000 až 2500 Oe.

Podobně může dojít k rozrušení supravodivosti při teplotě nižší než je teplota kritická, prochází-li supravodičem elektrický proud.

Velké překvapení vnesla do představ o supravodičích měření *M e i s s n e r o v a* a *O c h s e n f e l d o v a*, která ukázala, že těleso ze supravodivého materiálu se chová ve vnějším magnetickém poli o intenzitě menší než prahová intenzita jako dokonale diamagnetické těleso s permeabilitou $\mu = 0$ (obr. 5). Charakterizuje tedy supravodič nejen jeho nulový odpor, ale i nulová hodnota magnetické indukce uvnitř něho.

Vysvětlení supravodivosti je problém velmi složitý, který odolával náporu fyziků téměř půl století. Supravodivost byla objasněna teprve v roce 1957 akademikem *B o g o l j u b o v e m*. Jeho teorie je však velmi obtížná k pochopení, a proto se jí zde nebudeme zabývat.

(Pokračování)

M i r o s l a v F i l i p, UK, Bratislava:

Ladění a tónová soustava z hlediska hudební akustiky

(Dokončení)

Zjistili jsme, že přirozené ladění není definitivním vyřešením těžkostí, které se vyskytly v kvintovém ladění v podobě nevyhovujících terciálních intervalů. Už uvnitř jediné durové tóniny je potřebný jeden tón ve dvojí výškové podobě, například v C dur je to vyšší a nižší D, lišící se o syntonické koma. Další těžkosti vyvstanou, uvědomíme-li si, že jednou ze základních podmínek hudby již po mnoho století je požadavek pře-

¹⁾ Uvedená jednotka oersted (Oe) patří do staré absolutní elektromagnetické soustavy CGS. Jednotka intenzity magnetického pole v soustavě SI je ampér na metr ($A \cdot m^{-1}$). Pro uvedenou starší jednotku platí převod

$$1 \text{ Oe} = \frac{10^3}{4\pi} A \cdot m^{-1}$$

Poznámka red.

chodů z jedné tóniny do druhé a v každé nové tónině je potřebný nejen variabilní druhý stupeň, ale i změna některého tónu kvintově laděného na nový tón terciově laděný nebo naopak. Tento vzrůst počtu potřebných tónů při dodržení úplné čistoty intervalů nemá meze, vede k nekonečné posloupnosti. Kdybychom například pokračovali v naší kvintové posloupnosti dále od tónu H k Fis, Cis, Gis, atd., nebo na druhou stranu od F k Hes, Es, As, atd., nemůžeme v žádném případě dosáhnout uzavření této řady v kruh, tj. dosáhnout tónu vzdáleného celistvým počtem oktáv od výchozího tónu po libovolném konečném počtu kroků.

Toto tvrzení si můžeme ověřit tímto způsobem: Zvolme b vzestupných kvintových kroků od libovolného základního tónu a předpokládejme, že se takto získaný tón ztotožní s tónem odvozeným pomocí a oktávových kroků od téhož základního tónu

$$\left(\frac{3}{2}\right)^b = 2^a \quad (3)$$

Logaritmováním a úpravou (3) obdržíme

$$\frac{a}{b} = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}. \quad (4)$$

Výraz na pravé straně je iracionální číslo, to znamená, že nemůže být zapsán jako podíl dvou celých čísel. Zvolíme-li tedy celistvý počet b kvintových kroků, nemůže být počet oktávových kroků a celým číslem a naopak. Čtenář sám může zcela analogicky zjistit, že ani posloupností složenou z c terciových kroků nelze dojít k tónu, který by byl od téhož základního tónu vzdálen o libovolný celistvý počet oktávových kroků. Výsledek je poněkud zarážející: nemůže existovat ladění, v němž by byly kromě oktáv ještě úplně čisté buď kvinty nebo tercie, tím méně oboje.

Nemůže tedy existovat žádné úplně čisté (přirozené) ladění.

Jak jsme viděli v první části tohoto článku, ani v jediné tónině se nevystačí se statickým laděním, druhý stupeň musel být variabilní podle toho, byl-li uplatněn v akordu dominantní nebo subdominantní funkce. Zbývá nám k tomu dodat, že v hudbě se nutně vyskytují i souzvuky slučující v sobě dominantní a subdominantní funkci.

Patnácté a šestnácté století ovšem s námahou muselo hledat cestu živelně. Představme si takovéto řešení. V řadě kvint

$$\leftarrow C \quad G \quad D \quad A \quad E \rightarrow$$

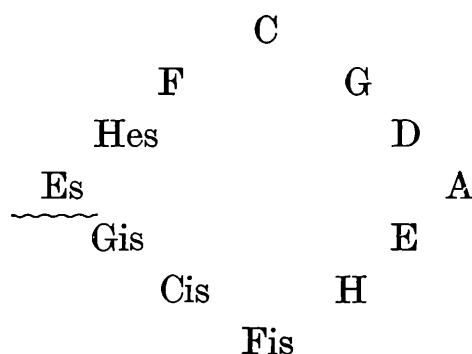
naladíme nejdříve interval C—E čistě, tj. na poměr kmitočtů 5 : 1. Potom ladíme kvinty C—G, G—D, D—A, A—E „o něco“ menší než čistě tak, aby byly navzájem stejné. To je (pouze poněkud zjednodušený a upravený) dobový recept na celou skupinu příbuzných ladění, jež shrneme pod název *středotónové ladění*. Tímto způsobem jako tercii C—E lze vyrovnat i následující tercii E—Gis a postupovat analogicky dále. Zdánlivě je rozpor vyřešen: tercie jsou přirozené a kvinty jsou

rozladěny tak málo, že se do „dá vydržet“. Interval takovéto kvinty je zřejmě dán poměrem $\sqrt[4]{5} - 1$, předpokládáme-li, že se nám opravdu podařilo naladit kvinty stejné. Téměř nerozeznatelný rozdíl proti přirozené kvintě je dán poměrem

$$\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{5}} \doteq 1,0031 ,$$

což je právě čtvrtina syntonického komatu, protože na jeho vyrovnaní se podílely všechny čtyři kvinty stejnou měrou.

Nesmíme ovšem čekat, že dalším pokračováním v tomto slibném postupu se nám podaří kruh uzavřít. Začneme-li třeba u Es, končí jedenáct kvint u Gis:



Dvanáctý interval Gis—Es je zřejmě rozdílem mezi těmito jedenácti kvintami a sedmi oktávami

$$\frac{2^7}{5^{\frac{11}{4}}} \doteq 1,531 > \frac{3}{2}$$

a je, bohužel, o víc než třetinu půltónu větší, než přirozená čistá kvinta. Není divu, že naši předchůdci takto falešnou „kvintu“ nazývali *q u i n t e d e l o u p v l č í k v i n t o u*.

Není zajisté těžko navrhnout, aby se od Gis pokračovalo dále osvědčeným způsobem, a to vyrovnat interval Gis—His už známým zmenšením čtyř kvint Gis—Dis, Dis—Ais, Ais—Eis, Eis—His. Potom poměrný kmitočet tohoto His proti původnímu C je $5^3 = 125$, což nelze vyjádřit jako mocninu 2 s celočíselným exponentem. Nejbližším číslem je $2^7 = 128$ a poměr těchto dvou hodnot $\frac{128}{125} \doteq 1,024$ udává míru neuzavřenosti systému. Je to téměř čtvrttón. Skutečně se vyskytly nástroje, na nichž byla třeba klávesa Es i klávesa Dis (mezi D a E), nebo se u varhan vyměňovaly píšťaly Cis, Gis za Des, As apod. Nemusíme ani pokračovat dál, aby bylo jasné, že tímto způsobem lze sice posunout „vlčí“ kvintu tak, aby se v dané tónině nevyskytla, ale můžeme ji pouze honit kolem dokola v neuzavřeném kvintovém „kruhu“, bez naděje na její úplné odstranění. Stejně je jasné, že přidávání tónů může neomezeně pokračovat na obě strany (na stranu křížků i bé) a že tedy náprava nedostatků kvintového a přirozeného ladění byla pouze částečná, pro jednu, nebo malý okruh

pevně daných tónin. Opravdu, renesanční a raně baroková hudba se pohybuje ve velmi omezeném tonálním okruhu.

Postupně praxe docházela k poznání, že si od přírody nelze vynutit „absolutně čisté“ ladění, a že za uzavření systému, nutné z důvodů tóninových přechodů, jak jsme o nich mluvili výše a naprosto nepostradatelné pro nástroje s pevnou výškou tónu (klavír, varhany apod.), je třeba platit ústupkem z požadavku naprosté čistoty intervalů.

Řečeno matematicky: protože neexistuje celočíselné řešení a , b , c vztahu

$$a \log 2 = b \log \frac{3}{2} = c \log \frac{5}{4},$$

musíme se spokojit aspoň takovým řešením, ve kterém se a , b , c dostatečně blíží celým číslům. Nejmenší čísla, která z hudebního hlediska mohou tomuto požadavku vyhovět, jsou $a = 7$, $b = 12$, $c = 21$.

Kdybychom vzali dvanáct kroků o velikosti přesně čisté kvinty, lišil by se výsledek od sedmi oktáv o malý interval

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = 1,0136,$$

tzv. pythagorejské koma. O tento interval se tedy minou oba konce uzavírající se řady úplně čistých kvint místo aby se spojily. Po dlouhém úmorném hledání našla konečně hudba východisko. Tak jako středo-tónové ladění dokázalo vyřešit rozpor tercií a kvint vzdáním se úplné čistoty kvint a rozdělením syntonického komatu mezi čtyři kvinty rovným dílem, tak se musel vyřešit i rozpor mezi kvintami a oktávami vzdáním se úplné čistoty všech intervalů, (kromě oktáv, samozřejmě) a rozdělením pythagorejského komatu opět rovným dílem mezi všech dvanáct kvint. Každá kvinta řady například

C G D A E H Fis Cis Gis Dis Ais Eis His

se tudíž zmenší o jednu dvanáctinu komatu, čímž se His ztotožní s C, kruh se uzavře a oktáva se dělí na dvanáct stejných půltónů. Dostáváme (*stejnoměrně*) *temperové ladění*, jehož půltón je dán poměrným kmitočtem

$$\sqrt[12]{2} = 1,05946,$$

protože je dvanáctinou oktávy.

Teprve temperované ladění posloužilo hudební vědě jako vhodná základna i pro srovnávací měření intervalů. Z podnětu A. J. Ellis e byla pro tento účel zavedena jednotka *cent*, definovaná jako setina temperovaného půltónu. To znamená, že oktáva má 1200 centů a jednomu centu odpovídá poměrný kmitočet $\sqrt[1200]{2}$. Má-li tedy vztah (1) udávat³⁾ velikost intervalu v centech, bude mít konstanta k hodnotu (pro dekadické logaritmy)

³⁾ Viz první část článku.

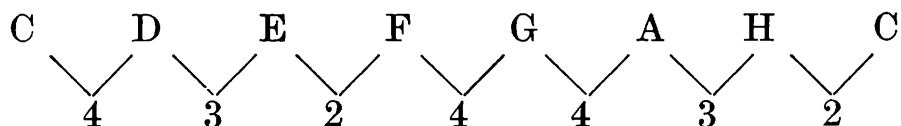
$$k = \frac{x}{\log \frac{\nu_1}{\nu_2}} = \frac{1200}{\log 2} \doteq 3986$$

Vypočteme-li pomocí tohoto vztahu velikost přirozené čisté kvinty v centech, obdržíme hodnotu 702 C. Temperovaná kvinta má 700 C (sedm půltónů), je tedy o 2 centy menší. Rozlišovací schopnost lidského sluchu pro výšky je při nepříliš hlubokých tónech asi 5 až 7 centů, je tedy chyba temperované kvinty pod prahem rozlišení a sluch tento rozdíl nezaznamená, pokud ovšem nepoužijeme na jeho zjištění r á z ů.

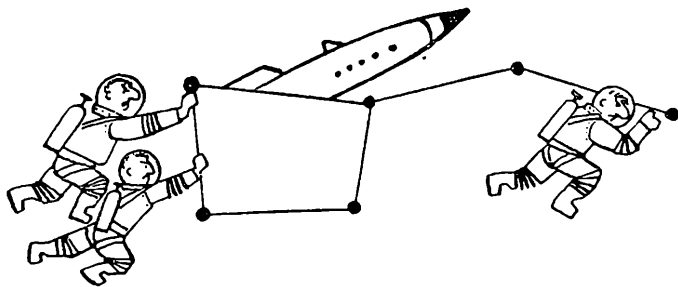
Hůře doplatily na temperování tercie. Přirozená velká tercie, jak se můžeme snadno přesvědčit, má 386 C, temperovaná 400 C, je tedy temperovaná o 14 centů větší. To je už rozdíl sluchem postižitelný. Protože temperovaná kvinta je o 2 centy menší než by měla být a velká tercie o 14 centů větší, je temperovaná malá tercie dokonce o 16 centů menší než přirozená. Z hlediska kvint je 12stupňové temperované ladění vynikající; první lepší (ale jen o půl centu) by bylo až 29stupňové (tj. oktáva rozdělena na 29 stejných intervalů) a první zřetelně lepší by bylo 41-stupňové ladění. Chyby tercií jsou největší vadou našeho ladění. Přesto však, uvážíme-li, že nástroje s pevnou výškou tónu musely být ovladatelné lidskými prsty a nemohly tedy libovolně zvětšovat počet tónových hodnot v oktávě, bylo nejvhodnějším a v daných podmínkách jediným možným řešením, neměl-li se ochromit a vůbec znemožnit vývoj hudebního umění přibližně od poloviny našeho tisíciletí. Bez temperovaného ladění by nebyla myslitelná naprostá většina té hudby, kterou slyšíme na koncertech, v opeře, v rozhlase. Dá se říci, že temperované ladění bylo jedním z nejpozoruhodnějších kompromisů mezi uměním a přírodou.

* * *

A nakonec jednu otázku k přemýšlení. Staroindická *h e p t a t o n i k a s v a r a g r a m a* (analogická naší durové stupnici) je vlastně sedmitónovým výběrem z 22-stupňového stejnoměrně temperovaného ladění s intervaly o tomto počtu jednotek, tj. dvaadvacetin oktávy



Proč asi Indové zvolili právě 22 a ne nějaký jiný blízký počet stupňů?



P a v e l A n d r l e, Astr. ústav ČSAV:

O jednom „rozdílu“ mezi fyzikou a astronomií

Ve všech učebnicích fyziky se píše, že při šikmém vrhu v gravitačním poli Země se vržený předmět pohybuje p o p a r a b o l e.

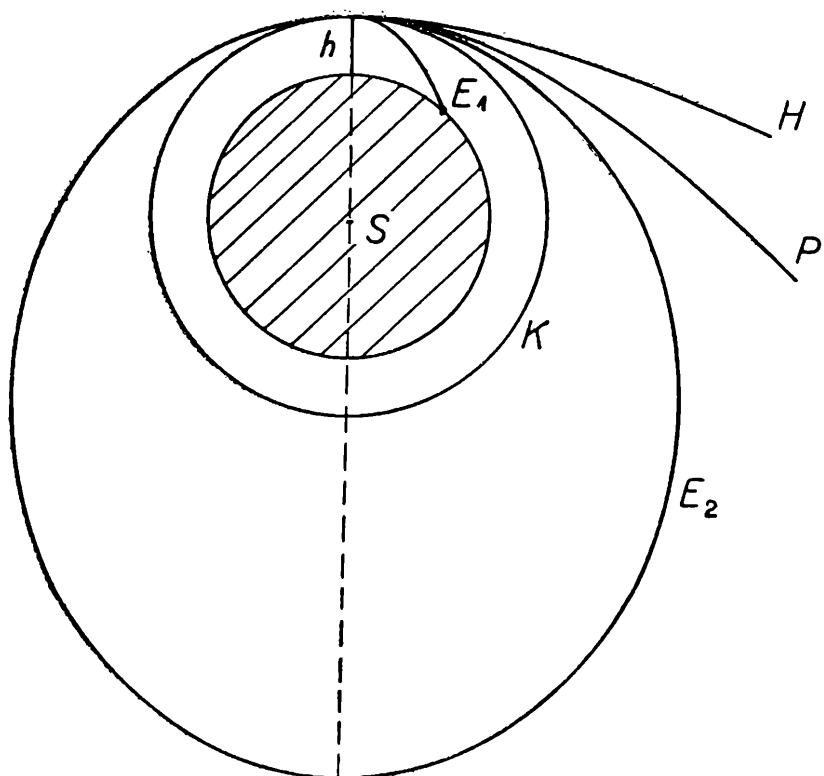
Stejně tak je ve všech učebnicích astronomie nakreslen obr. 1, z něhož je vidět, že tvar dráhy tělesa vrženého v gravitačním poli Země závisí na rychlosti. Pro malé rychlosti se předmět pohybuje po *eliptické dráze* E_1 , která má střed Země ve vzdálenějším ohnisku. Když rychlost dosáhne *prvé kosmické rychlosti*, začne obíhat kolem Země po *kruhové dráze* K . Při vyšších rychlostech je dráha *elipsa* E_2 se středem Země v bližším ohnisku. Když rychlost dosáhne *druhé kosmické rychlosti*, unikne předmět po *parabolické dráze* P a při ještě vyšších rychlostech se pohybuje po *hyperbole* H .

Srovnáme-li první dva odstavce, zjistíme rozdíl mezi fyzikou a astronomií. V podrobnějších učebnicích bývá uvedeno, že tento rozdíl je způsoben tím, že *ve fyzice předpokládáme tížnice Země navzájem rovnoběžné, zatímco ve skutečnosti směřují do středu Země*, což se předpokládá v astronomii. V tomto článku si uvedenou skutečnost matematicky rozebereme. Poněvadž obecná teorie je značně složitá, budeme pro jednoduchost předpokládat:

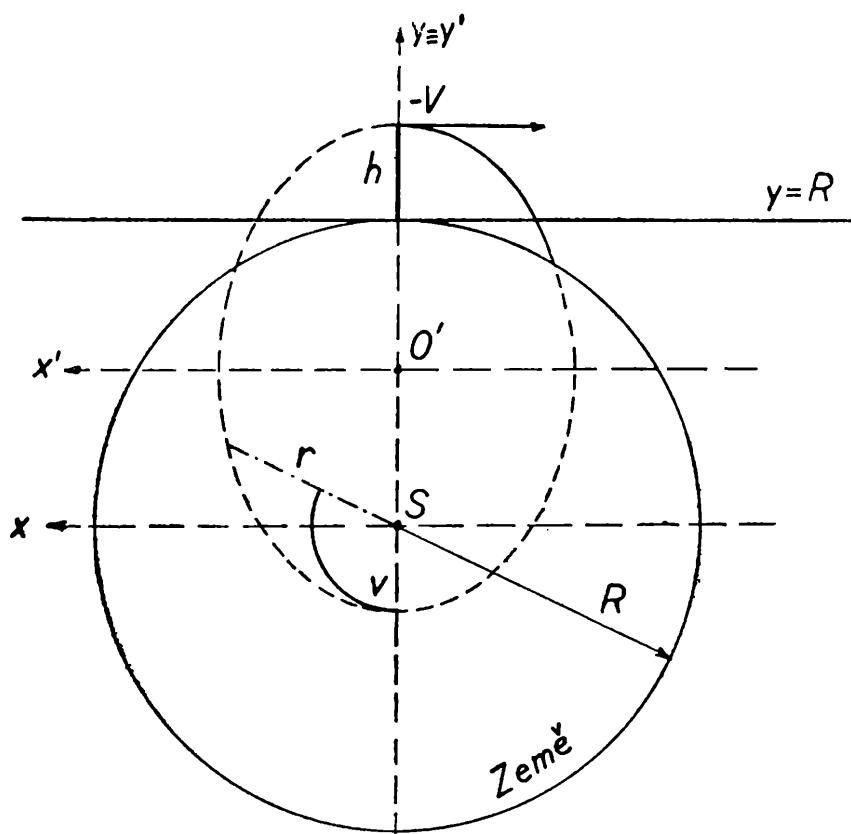
- a) Země je přesně kulová. Odpor ovzduší neexistuje.
- b) Budeme uvažovat vodorovný vrh, pro nějž je také nakreslen obr. 1; šikmý vrh je v podstatě stejný, pouze je třeba rozkládat rychlost.
- c) Těleso jednotkové hmoty vrháme z věže, jejíž výška je malá ve srovnání s poloměrem Země.
- d) Rychlost je mnohem menší než první kosmická rychlost (8 km/s).
- e) Povrch Země nahradíme tečnou rovinou; závěrem uvidíme, že i tento předpoklad je plně oprávněn.

Začneme s vyšetřováním parabolické („fyzikální“) dráhy při vodorovném vrhu. Podle obr. 2 si zvolíme kartézskou soustavu souřadnic (soustava, jaké užíváme např. v deskř. geometrii) se svislou osou y a vodorovnou osou x . Počátek je ve středu Země. Vzhledem k předpokladu e) můžeme psát závislost souřadnic x a y na čase ve tvaru

$$x = V t \quad y = h + R - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1)$$



Obr. 1. Závislost tvaru dráhy na rychlosti.



Obr. 2. Eliptická dráha při šikmém vrhu. Různé vztažné soustavy.

kde $\bar{V}$ je počáteční rychlost, h výška věže, R poloměr Země, g_0 gravitační zrychlení Země (na povrchu), t čas.

Vyloučíme-li čas z rovnic (1), dostaneme

$$y = h + R - \frac{1}{2} \cdot \frac{g_0}{\bar{V}^2} x^2 \quad (2)$$

Z geometrie víme, že (2) je rovnice paraboly.

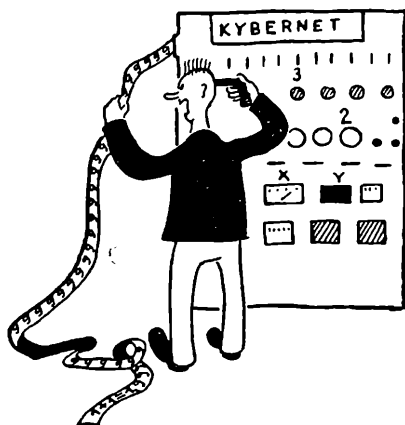
Povrch Země ($y = R$) protne parabola (2) v bodě o souřadnicích

$$\left[-\bar{V} \sqrt{\frac{2h}{g_0}}; R \right].$$

To znamená, že délka vrhu při parabolické dráze je rovna

$$d_{\text{par}} = \bar{V} \sqrt{\frac{2h}{g_0}}. \quad (3)$$

(Pokračování)



Matematické zábavy

Stanislav Trávníček, Olomouc:

Čekání při místní dopravě

Jistě mnozí z vás jezdí tramvajemi, autobusy nebo trolejbusy, tedy různými prostředky místní dopravy (dále pro stručnost píšeme jen PMD). Ti, kdož používají linek, kde jezdí PMD dosti často, zpravidla neznají jízdní řád, a ani se o něj nezajímají (nebývá ani vyvěšován), přičemž ponechávají náhodě, zda přijdou přesně nebo chvíli počkají. Někdo má štěstí, že přijde na zastávku těsně před odjezdem, jiný přiběhne pozdě - právě, když vůz odjíždí. Musí pak čekat až do příjezdu dalšího dopravního prostředku. Většina přijde někdy mezi odjezdy a čeká, dokud PMD nepřijede. Je zřejmé, že náhodný cestující čeká někdy delší a někdy kratší dobu. Jeho čekání závisí na tom, kdy přijde na zastávku, a jak často jezdí PMD. Ježto ve městech, kde jezdí PMD v dosti krátkých intervalech, je v tomto smyslu většina cestujících náhodných, povězme si o jejich čekání něco více.

Důležitou úlohu tu má tzv. *teoretická průměrná doba t_p čekání náhodného cestujícího*, k jejímuž výpočtu postačuje, jak uvidíme, jízdní řád. O jejím významu ještě pojednáme, ale pro větší srozumitelnost a názornost si ukažme nejprve postup při jejím výpočtu.

Příklad 1. Vypočtete t_p , jestliže PMD jezdí pravidelně každých 10 minut.

Řešení. Počítejme pro jednoduchost čas jen na celé minuty. Uvažujme nyní takto. Jestliže náhodný cestující přijde na zastávku, mohou nastat tyto případy

čeká 1 min, přijde-li 9 min po odjezdu,

čeká 2 min, přijde-li 8 min po odjezdu,

atd.,

čeká 9 min, přijde-li 1 min po odjezdu.

Přijde-li přesně, mohou nastat dva matematicky rovnocenné případy: Buď vůz stihne a čeká pak 0 min, nebo nestihne a čeká 10 min. Čekání cestujícího, který přijde přesně při odjezdu PMD, nelze tedy započítat ani jako 0 min, ani jako 10 min, ale vezmeme aritmetický průměr, tj. 5 min. Průměrná doba čekání náhodného cestujícího je nyní aritmetický průměr všech deseti uvedených možností, tedy

$$t_p = \frac{1}{10} (1 + 2 + \dots + 8 + 9 + 5) = \frac{1}{10} 50 = 5.$$

Průměrná doba čekání je tedy 5 minut.

V předchozím příkladě nám vyšlo $t_p = 5 = \frac{1}{2} 10$. Ukážeme si, že to není náhoda, že totiž platí obecně: *jezdí-li PMD pravidelně každých t_0 minut, je $t_p = \frac{1}{2} t_0$.*

Tento vzorec zde odvodíme za předpokladu, že t_0 je celé číslo, který však není nutný. Provedeme úvahu z 1. příkladu ještě jednou. Náhodný cestující

čeká 1 min, přijde-li $t_0 - 1$ min po odjezdu PMD,

čeká 2 min, přijde-li $t_0 - 2$ min po odjezdu PMD,

atd.,

čeká $t_0 - 2$ min, přijde-li 2 min po odjezdu PMD,

čeká $t_0 - 1$ min, přijde-li 1 min po odjezdu PMD.

Přesný příchod započteme opět aritmetickým průměrem možných čekání 0 min a t_0 min, tj. $\frac{1}{2} t_0$. Průměrnou dobu t_p čekání náhodného cestujícího vypočteme nyní jako aritmetický průměr všech t_0 možností, tedy

$$t_p = \frac{1}{t_0} [1 + 2 + \dots + (t_0 - 2) + (t_0 - 1) + \frac{1}{2} t_0]$$

Ti z vás, kteří už znají aritmetické posloupnosti vědí, že

$$1 + 2 + \dots + (t_0 - 2) + (t_0 - 1) = \frac{1}{2} t_0 (t_0 - 1),$$

takže výraz v hranaté závorce je roven $\frac{1}{2} t_0$, odkud $t_p = \frac{1}{2} t_0$.

Podívejme se nyní na případ, že vozy jezdí nepravidelně. Nechť např. ve zkoumaném časovém intervalu T jezdí PMD střídavě každých t_1 a t_2 minut, a to tak, jak je znázorněno na časové ose na obr. 1. Postup výpočtu t_p si opět nejprve ukažme na příkladě.

Příklad 2. Vypočtete t_p , jestliže PMD jezdí střídavě každých $t_1 = 15$ a $t_2 = 5$ minut.

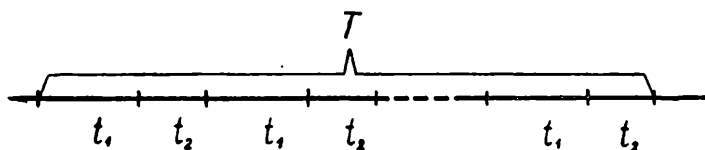
Ř e š e n í. Uvažujeme podobně jako v 1. příkladě, ale musíme nyní sledovat celou dobu $t = t_1 + t_2 = 20$ min. Jistě vám už bude zřejmý význam těchto čísel

$$t_p = \frac{1}{20} (1 + 2 + \dots + 13 + 14 + \frac{1}{2} 15 + 1 + 2 + 3 + 4 + \frac{1}{2} 5) = \\ = \frac{1}{20} (\frac{1}{2} 225 + \frac{1}{2} 25) = 6,25 ,$$

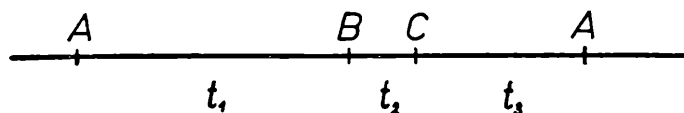
tedy $t_p = 6$ min 15 s.

Z tohoto příkladu vyplývá obecný vzorec pro výpočet t_p (odvozený opět za předpokladu, že t_1, t_2 jsou celá čísla)

$$t_p = \frac{1}{2} \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 + t_2} .$$



Obr. 1



Obr. 2

Poznamenejme, že i ve 2. příkladě lze tvrdit, že PMD jezdí průměrně každých 10 minut, přesto je však průměrná doba čekání větší než v 1. příkladě při rovnoměrné dopravě. Tento výsledek opět platí obecně.

Jestliže $t_1 \neq t_2$, dostáváme t_p podle předchozího vzorce. Kdyby vozy jezdily průměrně stejně často, ale pravidelně, dostáváme pro časové intervaly t_0 vztah $t_0 = \frac{1}{2} (t_1 + t_2)$, a tedy průměrnou dobu čekání $t_{po} = \frac{1}{4} (t_1 + t_2)$.

Dokážeme, že $t_p > t_{po}$; v důkazu se vyskytuje zajímavý a v matematice často používaný obrat.

Vyjdeme ze zřejmé nerovnosti $(t_1 - t_2)^2 > 0$ (pro $t_1 \neq t_2$), z níž postupně plyne

$$t_1^2 + t_2^2 > 2 t_1 t_2 , 2 t_1^2 + 2 t_2^2 > t_1^2 + 2 t_1 t_2 + t_2^2 .$$

Po úpravě pravé strany a po dělení obou stran nerovnosti výrazem $4 (t_1 + t_2)$ máme

$$\frac{1}{2} \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 + t_2} > \frac{1}{4} (t_1 + t_2) ,$$

a to je výsledek.

Vidíme, že je pro cestující nejvýhodnější, když PMD jezdí pravidelně. Ukazatelem výhodnosti místní dopravy tak nemůže být průměrný časový interval mezi dvěma odjezdy PMD, ale je to průměrná doba čekání náhodného cestujícího. Na doklad si ještě představme, že vždy

po jedné hodině jede 6 PMD najednou. Jezdí tedy průměrně každých 10 minut, ale $t_p = 30$ min.

A už jen jako žert je možno si představit, že o půlnoci jede najednou 144 PMD a pak až do další půlnoci nic¹⁾. Vychází opět, že „průměrně“ každých 10 minut jede PMD a přitom $t_p = 12$ hodin.

Vzorec pro výpočet t_p v případě nerovnoměrné dopravy lze zobecnit na případ, že intervaly mezi odjezdy jednotlivých PMD jsou postupně $t_1, t_2, \dots, t_n$. Platí

$$t_p = \frac{1}{2} \frac{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}.$$

Ukažme si nyní, jak si můžete podle tohoto vzorce vypočítat, kolik času strávíte denně čekáním na PMD.

Příklad 3. Předpokládejme, že k cíli naší cesty lze použít tři PMD (tj. např. tramvají tří různých čísel, které však jedou jistý úsek po stejné trati), označme je A, B, C . Nechť každý z nich jede pravidelně každých 15 minut, a to tak, že B jede 8 minut po A , C jede 2 minuty po B , A pak 5 minut po C (viz časovou osu na obr. 2). Vypočteme t_p .

Řešení. Je zde $t_1 = 8, t_2 = 2, t_3 = 5$, tedy

$$t_p = \frac{1}{2} \frac{8^2 + 2^2 + 5^2}{8 + 2 + 5} = 3,1.$$

Průměrná doba čekání je tedy 3 min 6 s.

Je zřejmé, že se při organizaci místní dopravy musí vycházet z toho, aby celkový čas, který cestující stráví čekáním, byl co nejmenší. Vypočteme jej velmi jednoduše. Je-li např. $t_p = 5$ minut a nastupuje 12 cestujících, je jejich úhrnná ztráta času asi 1 hodina (a to dovedeme říci, i když nevíme, kdo z nich kdy přišel na zastávku). To znamená, že v době, kdy je velký zájem o použití místní dopravy (např. ráno), je třeba t_p zmenšovat, v době menšího zájmu (např. v noci) lze t_p zvětšovat. Celý den se tak rozpadá na několik časových úseků, z nichž v každém je vcelku rovnoměrný zájem o použití místní dopravy. Zjistili jsme, že je pro cestující nejvýhodnější, když v každém tomto časovém úseku jezdí PMD pravidelně. Nelze ovšem t_p libovolně zmenšovat, neboť je třeba, aby byla v souladu ekonomická hlediska jak cestujících, tak i dopravních podniků. V období, kdy je malý zájem o dopravu, je časový interval mezi jednotlivými PMD velký, tedy i t_p je velká. Je proto účelné vyvážovat jízdní řády na tyto části dne (viz např. noční jízdní řády), kdy jsou ovšem sledována i jiná hlediska (přípoj k vlakům apod.).

Úloha. Přemýšlejte, jak by se vypočetla t_p , jestliže po téže trati jezdí dva různé PMD, každý pravidelně, ale v jiném časovém intervalu, např. jeden s intervaly 6 minut, druhý s intervaly 8 minut.

¹⁾ Co je v Olomouci žertem, v Praze se asi co nejdříve stane skutečností. Red.

Řešení úlohy o záhadném průměru

Ve čtvrtém čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních byla dána tato úloha:

Nastala doba zkoušek na vysokých školách. Znalosti studentů jsou hodnoceny známkami 1 - výborná, 2 - velmi dobrá, 3 - dobrá. Jeden zkoušející při pondělním zkoušení zjistil, že vyzkoušel 25 posluchačů a že průměrná známka je 2,2. V úterý vyzkoušel opět 25 studentů a když počítal průměr a zjistil jeho hodnotu 2,2, podivil se tím spíše, že počet výborných, velmi dobrých a dobrých nesouhlasil s pondělním počtem. Když se toto opakovalo i při zkoušení středečním a čtvrtečním, kdy vyzkoušel vždy po pětadvaceti posluchačích a vždy byl denní průměr 2,2, ale počet jednotek, dvojek a trojek vždy různý, sedl, vzal tužku a začal počítat.

Zkuste i vy zjistit, kolikrát se tento případ mohl ještě opakovat. A pro zajímavost — kolik bylo za celou tu dobu výborných, velmi dobrých, a dobrých a jaká byla celková průměrná známka?

Označme x počet jednotek, y počet dvojek, z počet trojek. Potom platí dvě rovnice (řešení Milady Dvořákové, Brandýs n. Labem)

$$x + y + z = 25 \quad (1)$$

$$\frac{x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 3}{25} = 2,2 \text{ (pro aritmetický průměr) .} \quad (2)$$

Po úpravě dostáváme soustavu neurčitých rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ x + 2y + 3z &= 55 . \end{aligned}$$

Vyloučením neznámé x dostaneme neurčitou rovnici

$$\begin{aligned} y + 2z &= 30 , \\ \text{čili} \quad y &= 30 - 2z \end{aligned}$$

Protože je $y \geq 0$, je i $30 - 2z \geq 0$ a tedy $z \leq 15$. Současně však musí být splněna podmínka $y + z \leq 25$, vyplývající z první rovnice $x = 25 - (y + z)$, neboť $x \geq 0$.

Ze vztahů

$$\begin{aligned} y + z &\leq 25 \\ y &= 30 - 2z \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} 30 - 2z + z &\leq 25 \\ 30 - z &\leq 25 \\ 5 &\leq z \\ z &\geq 5 . \end{aligned}$$

Pro z platí proto nerovnost $5 \leq z \leq 15$.

Pro počet trojek máme hodnoty:

$$z = 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5.$$

Případ, kdy denní průměr při 25 posluchačích je 2,2 se může opakovat celkem 11krát.

Počet dvojek y a počet jednotek x vypočteme ze vztahů

$$\begin{aligned} y &= 30 - 2z \\ x &= 25 - (y + z) \end{aligned}$$

Hodnoty x, y, z uspořádejme do tabulky:

Hodnoty x, y, z uspořádejme do tabulky:

Počet výborných	x	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
velmi dobrých	y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
dobrých	z	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5

Za celou dobu bylo výborných

$$s_x = \frac{0 + 10}{2} \cdot 11 = 55,$$

velmi dobrých

$$s_y = \frac{0 + 20}{2} \cdot 11 = 110,$$

dobrých

$$s_z = \frac{5 + 15}{2} \cdot 11 = 110$$

Počet posluchačů vyzkoušených za 11 dní je $25 \cdot 11 = 275$.

Celková průměrná známka je $\frac{1 \cdot 55 + 2 \cdot 110 + 3 \cdot 110}{25 \cdot 11} = \frac{605}{275} = 2,2$

Celková průměrná známka musí být opět 2,2.

Řešení poslalo 28 čtenářů; 21 správných, z toho 7 dívek:

V. Bartoš, Bystřice; T. Duby, Bratislava; M. Dvořáková, Brandýs n. Labem; J. Gotthard, Karl. Vary; B. Hukelová, Teplice; J. Charvát, Kopřivnice; J. Choutková, Teplice; Vl. Kaleta, Český Těšín; Zd. Matoušek, Brno; P. Mederly, Prievidza; L. Minaříková, Teplice; J. Petráčková, Teplice; P. Polcar, Velké Meziříčí; Zd. Půlpán, Chrudim; J. Růčka, Bratislava; M. Samková, Blovice; S. Sedláčková, Teplice; Zd. Slanina, Brno; R. Straka, Krnov; E. Števonka, Dolný Kubín; Fr. Žalda, Praha.

Inž. M. Š.

Počítala na prstech . . .

Přinášíme vám úlohu, která pochází od M. G a r d n e r a:

Na Nový rok se jeden matematik se zájmem díval, jak si jeho malá dcerka počítá na prstech levé ruky. Ukázala na palec 1, ukazovák 2, až došla k malíčku 5; pak pokračovala opačným směrem prsteníček 6, prostředník 7, ukazovák 8, palec 9, a potom zase opačným směrem pokračovala v počítání. Když dopočítala do dvaceti a ukazovala přitom na prsteník, ptal se jí otec: „Co to děláš?“

Děvčátko se zlobilo: „Teď jsi mě přerušil a já nevím, kde jsem přestala. Chci totiž vědět, na který prst padne 1965“. Po krátkém zamyšlení otec řekl: „Skončíš na.....“.

Když se děvčátko dopočítalo, zjistilo, že měl otec pravdu a rozhodlo se věnovat dvojnásobnou píli domácímu cvičení z aritmetiky. Jak mohl otec předpovídat, na kterém prstu čítání skončí, a který prst to byl?

H. Hofmannová



Fyzikální zábavy

Prof. dr. E m i l K a š p a r, KU, Praha:

Spotřebuje se elektrický proud v elektrickém spotřebiči?

Kdysi jsem byl přítomen zkoušce z fyziky, při níž dostal žák za úkol vysvětlit složení žárovky a její funkci. Žák ukázal na patici žárovky s poznámkou: „Tudy vchází proud do žárovky a rozsvítí vlákno.“ Na otázku zkoušejícího, kudy proud ze žárovky vychází, odpověděl s údivem: „Proud přece ze žárovky nevychází.“ „A co se s ním děje?“ „Proud se přece v žárovce spotřebuje na tepelnou a světelnou energii.“

Na tento výjev, ostatně s obměnou nikterak při zkouškách ojedinělý, jsem si vzpomněl později při jiné příležitosti. V hodině teorie kursu pro řidiče motorových vozidel, při níž se vykládá podstata různých zařízení motorového vozidla, otázala se jedna z účastnic kursu instruktora: „Jak to, že ze spotřebiče vychází stejně veliký proud, jaký tam vchází? Přece se ve spotřebiči musí strávit.“ Instruktor (který byl ve velmi těžké situaci, protože úroveň fyzikálního vzdělání některých

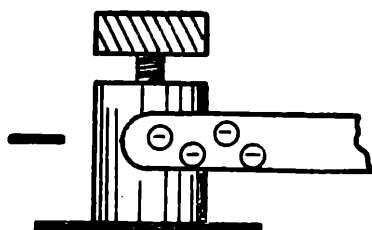
účastníků kursu byla velmi nízká) odpověděl takto: „Představte si, že do továrny vejde ráno v 8 hodin 450 dělníků. Nebylo by vám divné, kdyby jich ve 4 hodiny odpoledne odtamtud vyšlo, např. o 250 méně, a to právě o tolik, kolik se jich v továrně strávilo tím, že tam vykonali nějakou práci? A podobně je to s elektrony: vcházejí do spotřebiče, vykonají tam práci, přitom odevzdají svou energii, a opět všechny vycházejí ze spotřebiče ven.“

Nepamatuji se, nakolik byla tazatelka s odpovědí spokojena, a zda po tomto vysvětlení rozuměla konání práce elektrickým proudem ve spotřebiči lépe než předtím. Jisté však je, že se nejasnost o tom, co se děje v elektrickém spotřebiči, objevuje velmi často. Proto stojí za trochu úvahy paradoxon, že *proud v elektrickém spotřebiči se nespotřebuje*, ačkoliv se *spotřeba* elektrických žárovek, chladniček, elektromotorů v nejrůznějších zařízeních skutečně měří (a platí). Je však nutno předeslat, že odpověď instruktora, kterou jsme v doslovném znění uvedli, není po fyzikální stránce zcela uspokojivá. Není vhodné přirovnávat elektrony, které „pracují“ ve spotřebiči k dělníkům, pracujícím v závodě. V dalším uvedeme vhodnější přirovnání v jiném ději, který lépe odpovídá ději, který nazýváme **k o n á n í p r á c e e l e k t r i c k ý m p r o u d e m**.

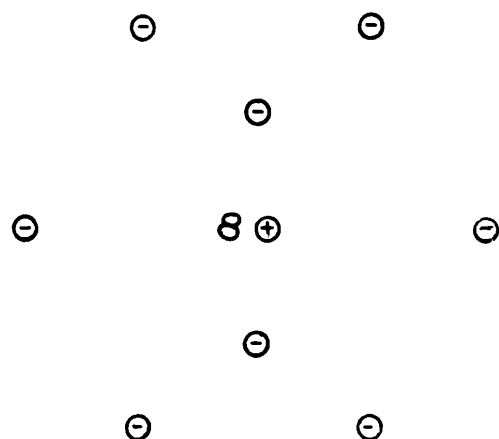
Nejprve však musíme rozptýlit některé zakořeněné představy. Tak např. je rozšířena nesprávná představa, že elektrony vytékají z pólů elektrického zdroje, třeba z baterie olovených akumulátorů, nebo ze svorek dynama, nebo jiného generátoru, pak že se pohybují závratnou rychlostí drátem ke spotřebičům. S tím souvisí také nesprávná představa, že elektrony mají při výtoku z pólu zdroje velikou pohybovou energii, kterou po vstupu do spotřebiče odevzdávají, asi tak jako vítr pohání větrné kolo a částice vzduchu přitom kolu odevzdávají svou pohybovou energii, která se pak v generátoru větrné elektrárny mění na elektrickou energii. K představě o závratně veliké rychlosti elektronů v drátě vede skutečnost, že se např. žárovka ve velké vzdálenosti rozsvítí okamžitě, jakmile k jejím přívodům připojíme zdroj, třeba byly přívody sta a tisíce kilometrů dlouhé. Je známo, že tato rychlost, kterou se elektrický proud šíří v kovech, je přibližně stejně veliká jako rychlost světla, tj. 300 000 km/s. S touto zkušeností je ve zdánlivém rozporu jiná skutečnost, že se elektrony pohybují při protékání kovovým drátem zcela nepatrnou rychlostí, řádově asi 0,5 mm/s. Je to tak malá rychlost, že by po zapojení proudu - kdyby šlo o stejnosměrný proud - dospěly k žárovce, která by byla jen 10 km daleko, teprve za více než 225 dnů! (Obr. 1.)

Abychom si všechny tyto zdánlivé nesrovnalosti objasnili, musíme si nejprve vysvětlit, co se to při zapojení zdroje do obvodu vlastně onou závratnou rychlostí 300 000 km/s drátem šíří, a pak, co je fyzikální podstatou konání práce elektrickým proudem.

Výklad si zjednodušíme především tím, že se omezíme na kovový drát. V kovu je totiž vedení proudu zprostředkováno jen elektrony, a nikoliv též jinými nositeli elektrických nábojů (na rozdíl, např. od vedení elektrolytickými roztoky). Vyjdeme z elementární představy, podle níž je elektrický proud v kovovém vodiči uspořádaným pohybem elektronů. Víme, že každý atom prvku se skládá z jádra kladně elektrického a z určitého počtu elektronů, které jsou poutány na tzv. elektronový obal. V atomu, který je v normálním stavu (není ionizován), je počet elementárních kladných nábojů na jádře stejný jako počet elektronů. Účinky těchto opačných nábojů se ruší, takže se atom navenek jeví neelektricky (obr. 2). V kovech se však některé z elektronů oddělí od atomu a jsou pak volně pohyblivé ve hmotě kovu. Tyto elektrony se nazývají volné a jsou nositeli elektrického proudu, tj. dají se do uspořádaného pohybu, když ve vodiči vznikne elektrické pole. Volné elektrony se pohybují chaoticky ve vodiči, v němž není elektrické pole.



Obr. 1. Záporný pól generátoru v elektrárně není zdrojem elektronů, které konají práci ve spotřebiči. U střídavého proudu, jímž třeba poháníme náš vysavač, elektrony neopustí malý prostor, v němž jsou před zapojením proudu.



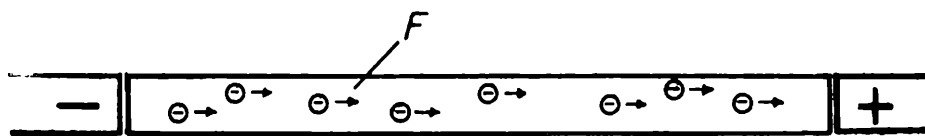
Obr. 2. Atom, který je v normálním stavu, má stejný počet kladných elementárních nábojů na jádře a záporných elektronů v obalu. (Schéma stavby atomu uhlíku.)

Připojíme-li ke svorkám elektrického zdroje drát, vznikne na jeho koncích potenciálový rozdíl, který je roven napětí zdroje. V drátě vznikne elektrické pole, potenciál klesá směrem od kladného k zápornému pólu. A právě toto *elektrické pole se po zapojení zdroje šíří ve vedení rychlostí světla*. Má-li drát všude stejný průřez a je-li všude ze stejného kovu, vznikne v něm po celé délce homogenní elektrické pole, a to, jak jsme právě poznali, takřka okamžitě. Z toho plyne, že se volné elektrony začnou pohybovat po celé délce drátu současně. Uspořádaný pohyb elektronů, který nazýváme elektrickým proudem, vznikne tak v celém vedení prakticky současně. Tak jsme dostali odpověď na naši 1. otázku, co se po zapojení zdroje šíří ve vedení rychlostí světla.

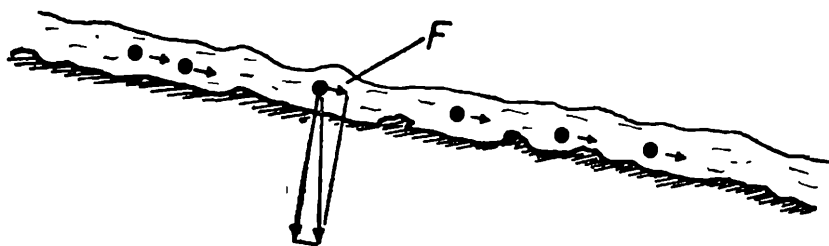
Kdybychom dokázali měřit rychlost každého elektronu v každém

okamžiku, zjistili bychom, že elektrické pole uvádí elektron do zrychleného pohybu po dráze, kterou nazýváme *volná dráha elektronu*. Děje se tak po dobu, než elektron narazí ve stavbě kovu na nějakou překážku, např. na atom mřížky. Při tomto nárazu se elektron zpomalí, svou pohybovou energii z velké části odevzdá iontům, z nichž je kov drátu složen. Atomy se tak uvádějí do chaotického kmitavého pohybu. Je to tepelný pohyb, projevující se zvýšením teploty kovu (Joulovo teplo). Poněkud složitějším způsobem se získává pohybová energie elektronů v elektrických motorech.

Když elektron odevzdá pohybovou energii atomům kovu, jeho rychlost klesne a děj se opakuje. Novou pohybovou energii na volné dráze získá opět při pohybu v elektrickém poli, tuto energii opět odevzdá při nové srážce atd. Tak zůstává průměrná rychlost uspořádaného pohybu elektronů přibližně stálá (a malá). Důležité však je, že každý volný elektron získává v proudovodiči pohybovou energii působením elektrického pole v místě, v němž právě je. Podobně je tomu v řečišti, kde částice vody získává pohybovou energii v poli zemské přitažlivosti po celé délce toku, a nikoliv jen v místě, kde potok, řeka nebo přítok pramení. Energie pohybu, kterou vodní částice získá při proudění nakloněným řečištěm, se vlivem překážek pohybu (např. kamenitým dnem, vnitřním třením apod.) stále mění na jiné energie, převážně na tepelnou a rychlost vodního proudu zůstává přibližně stálá. Tak jsme ve vodním toku získali vhodnější přirovnání k ději v elektrickém spotřebiči, např. tepelném (obr. 3a, b).



Obr. 3a. Na elektrony působí elektrické pole silou F v celém vedení.



Obr. 3b. Podobně na částice proudící vody působí po celé délce svahu pohybová složka F jejich váhy, která má směr spádu nakloněné roviny.

V předešlém odstavci jsme si vlastně zodpověděli druhou otázku. Nyní je jasné, proč se elektrický proud nemůže ve spotřebiči spotřebovat. Považujeme-li elektrický proud za uspořádaný pohyb elektronů, nemá vůbec smysl mluvit o spotřebování elektrického proudu, protože jde o *d ě j*. Mohlo by nanejvýš jít o spotřebovávání elektrických

nábojů, v našem případě elektronů. Ale elektrony se nemohou spotřebovat, neboť jsou to částice hmoty, která je podle zákona zachování hmoty nezničitelná. Elektrony také nevycházejí ze spotřebiče s menší rychlostí, než s jakou do něho vstupují. Tu část energie, kterou ve spotřebiči odevzdávají, získávají v prostoru spotřebiče, vlastně ve vedení (v drátech) spotřebiče. Způsob, jakým elektrony ve vedení spotřebiče získávají pohybovou energii, je různý u různých spotřebičů, a to podle fyzikální podstaty spotřebiče. U tepelných těles je to děj, o kterém jsme již mluvili, totiž pohyb elektronů v elektrickém silovém poli. Elektrická síla pole koná tak práci, která se projeví v pohybové energii elektronu. V elektrických motorech jsou elektrony ve vinutí rotoru také uváděny do pohybu silovým působením elektrického pole ve vinutí, ale elektrická energie se mění na mechanickou prostřednictvím vzájemného působení magnetického pole proudu, který je ve vinutí rotoru a magnetického pole statoru.

Ještě zbývá vysvětlit otázku. Jestliže zdroj nedodává energii přímo elektronům, které vytékají z jeho pólů, jak vysvětlíme skutečnost, že je to přece jen zdroj, který koneckonců dodává energii spotřebiči? Jinými slovy, máme vysvětlit, kterým prostředníkem je energie přenášena ze zdroje k elektronům ve spotřebiči. I zde je vysvětlení snadné, jen je třeba opustit navyklou představu, že zdroj elektromotorického napětí končí tam, kde má svorky. Nedílnou součástí zdroje elektrického napětí je jeho elektrické pole. Zdrojem je např. galvanický článek + + elektrické pole jím vyvolané. Málo se myslí např. na to, že mezi póly třeba kapesní suché baterie existuje elektrické pole, které je schopné i v prázdném prostoru vyvolat elektrický proud, jsou-li přítomny volné elektrické částice. V normální atmosféře je tento proud neznamatelný; vzpomeňme však účinku i nízkého napětí na mřížce elektronky. Elektrický výkon pak získáváme spolupůsobením elektrického pole zdroje a elektrického pole elektronů, které jsou v poli. Výkon je měřen součinem

$$P = UI,$$

kde napětí U vlastně udává účinek elektrického pole, a elektrický proud I souvisí s množstvím nábojů (volných elektronů), které se v poli pohybují (I se měří velikostí náboje, který projde průřezem vodiče za 1 s).

* *

*

Vážení čtenáři, chcete-li, aby Vám čísla Rozhledů matematicko-fyzikálních po prázdninách byla doručována pravidelně již od prvního čísla, proveďte si jejich objednávku u svého poštovního úřadu (Poštovní novinové služby) nebo poštovního doručovatele již nyní.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

CH

charakteristika afinity, kolineace, logaritmů	характеристика аффинности, коллинеации, логарифмов
charakteristika podobnosti	коэффициент подобия
chyba	ошибка, погрешность

I

identický	тождественный
identita	тождество
imaginární	мнимый
implikace	импликация
index	значок, показатель, индекс
indukce matematická	математическая индукция
informace	информация, сведение
interpretace	интерпретация
interval	интервал, промежуток
inverze	инверсия
izometrie	изометрическая проекция

J

jak jen	лишь только
jediný	единственный, единый
jednotka míry, délková	единица измерения, линейная
jednoznačně	однозначно
jednoznačný	однозначный
jehlan	пирамида
jmenovatel	знаменатель

K

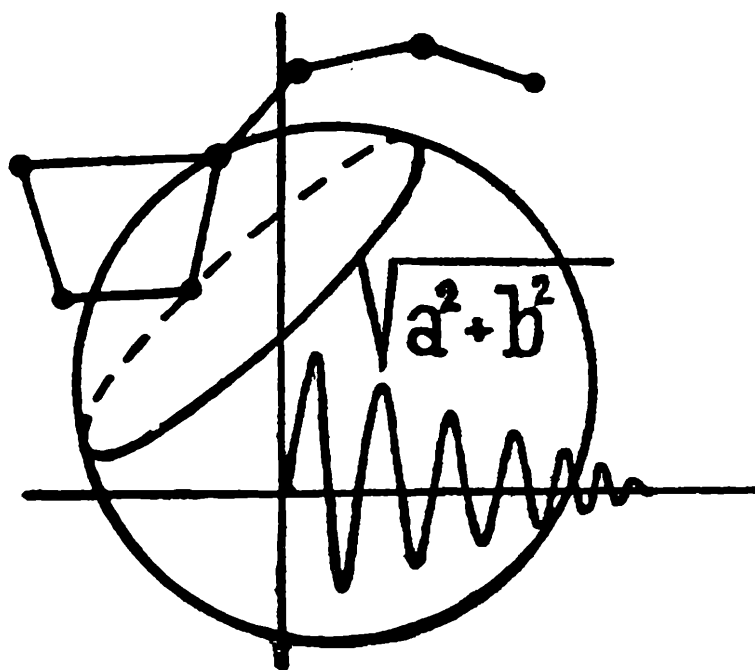
každý	всякий
každý s každým	почленно

kladně, kladný	положительно, положительный
klásti (podmínky)	наложить (условия)
klesající	убывающий
klesat	убывать
klín	двугранный угол
koeficient	коэффициент
kolem	около
kolineace	коллинеация
kolmice spuštěná na stranu	перпендикуляр опущенный на сторону
kolmý	перпендикулярный, нормальный
kombinace	сочетание, комбинация
kombinatorický, kombinatorika	комбинаторный, комбинаторика
komolý (kužel, jehlan)	усеченный (конус, пирамида)
komplexní	комплексный
komplikovat, zkomplikovat	усложнять, усложнить
konec	конец, исход
konečný	конечный
kongruence	сравнение, конгруэнция
konkávní	вогнутый, конкавный
konstanta	постоянная
konstrukce	построение
konvergence	сходимость
konvergovat	сходиться, стремиться
konvexní	выпуклый
kořen (rovnice)	корень
kosekants	косеканс
kosinus	косинус
kosočtverec	ромб
kosodélník	ромбоид
kosoúhlý	косоугольный
kosý úhel	косой угол
kotangens	котангенс
koule	шар
krajní	крайний
krát	раз
krátit	сокращать
kritérium	признак
krok	шаг
kruh	круг
kružítka	циркуль, т.
kružnice hrdlová, opsaná, připsaná, vepsaná	окружность горловая, описанная, вневписанная, вписанная
krychle, krychlový	куб, кубический
křivítka	лекало
křivka	кривая, кривая линия
křivka hrdlová, prostorová, průsečná, rovinná, řídící, tvořící, uzavřená	линия горловая, пространственная, пересечения, плоская, направляющая, образующая, замкнутая
křivost	кривизна
kulatý	круглый
kulová plocha	сфера, шаровая поверхность
kužel	конус
kuželosečka	коническое сечение

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



10

ROČ. 43

1964-65

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 43

Červen 1965

Číslo 10

Vedoucí redaktor doc. Dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PÚ, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

Doc. dr. M. Menšík: Sférická geometrie	433
F. Kuřina: Kruhová inverze (Dokončení)	438
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování)	442
J. Dlouhá: Supratekutost a supravodivost (Dokončení)	447
Z. Maršák, I. Kraus: Krystalická stavba pevných látek (Dokončení)	449
Doc. dr. V. Guth, DrSc.: Uvidíme kosmickou loď?	455
P. Andrlé: O jednom rozdílu mezi fyzikou a astronomií (Dokončení)	465
CSc. E. Říman: Matematický problém	471
J. Šedivý: Je šestka nevyhnutelná?	471
O. S.: Zajímavé číslo	472
J. Šedivý: Průsečík výšek v méně známé roli	472
O. S.: Řešení doplňovačky z č. 3	473
J. Šedivý: Kdo na tom vydělal?	473
J. S.: Řešení úlohy o jednom prvočísle	474
Recenze	476
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	

3. a 4. strana obálky



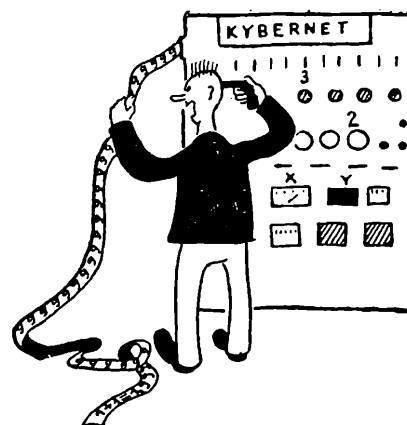
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jinčičská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: M. Kořál, studující FS.

A-04*51270

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.

Matematika

Doc. dr. Miroslav Menšík,
ČVUT, Praha:



Sférická geometrie

Abychom mohli uveřejnit některé články, musíte se seznámit alespoň informativním způsobem se *sférickou trigonometrií*, jinak byste mnoha závislostem neporozuměli. Na škole jste poznali trigonometrii v rovině, ale nepřišli jste do styku s trigonometrií na kouli, která je potřebná v astronomii, geodézii i při řešení různých prostorových úloh.

Za zakladatele sférické trigonometrie je považován největší antický astronom Řek *Hipparchos*, který žil v druhém století před n. l. Její užití se ve středověku rozšířilo mezi asijskými a arabskými hvězdáři. V Evropě prvně řešil sférické trojúhelníky ve svém díle *De triangulis omnimodis, liber quinque* německý matematik *Regiomontanus*, vlastním jménem *Johann Müller* (1436 až 1476). Sférická trigonometrie byla výborným pomocníkem vědců rudolfínské doby. Známý skotský vynálezce logaritmů *John Napier de Merchiston*, zvaný též *Neper* (1550–1617) zavedl účelné, jednoduché pravidlo pro výpočet pravoúhlých sférických trojúhelníků, s nímž se ještě seznámíme.

Z českých tehdejších učenců nejdříve asi užil prakticky sférické trigonometrie přírodovědec, hvězdář a geodet, osobní lékař císaře Rudolfa II. *Tadeáš Hájek z Hájku* (1525–1600). Nynější formu sférické trigonometrie dal slavný švýcarský matematik *Leonhard Euler* (1707–1783). Ještě v dalším století byla tato část geometrie předmětem bádání mnoha učenců.

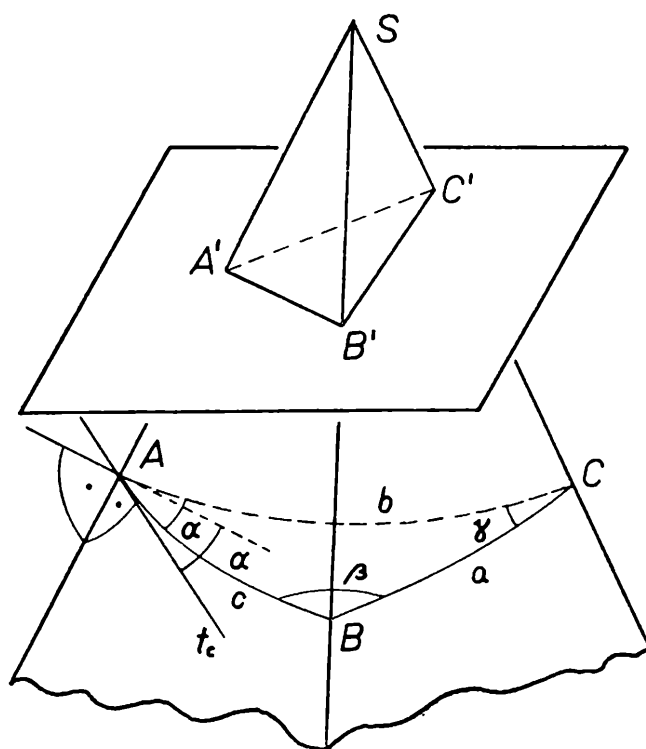
První spis českého autora, týkající se sférické trigonometrie, je patrně dílo vynikajícího matematika-jesuity, působícího dlouho v cizině, *Jakuba Kreza* (1648–1715) *Analysis speciosa Trigonometriae sphaericae, primo mobili, Triangulis rectilineis, progressioni Arithmeticae et Geometricae, allisque problematis applicata*, které bylo vytištěno v Praze r. 1720.

Zájemci najdou důkladnější poučení o dalších problémech sférické trigonometrie, např. o řešení obecných sférických trojúhelníků, v starých učebnicích pro reálky, kdy byla tato část geometrie zařazena do učebních

osnov. Mnohem podrobněji se jí zabývá doc. Jiří Kůst v pěkné knížce *Sférická trigonometrie*. Tato publikace vyšla ve sbírce *Matematická knižnice* v Státním pedagogickém nakladatelství r. 1964, cena 9,50 Kčs. Tam se čtenář seznámí s jejím praktickým užitím na mnoha příkladech s uvedenými výsledky.

Nyní si dokážeme deset základních vzorců pro sférický pravoúhlý trojúhelník.

Vrcholy trojúhelníka A', B', C' spojíme s bodem S - ležícím mimo rovinu $A'B'C'$ (obr. 1). Pak množina bodů polopřímek, vedených bodem S a protínajících body trojúhelníka $A'B'C'$, se nazývá *trojhran*, značme jej $S(A'B'C')$. Bodu S říkáme *vrchol trojhranu*, polopřímek SA', SB', SC' *hrany trojhranu*. Duté úhly¹⁾ $\sphericalangle B'SC' = \alpha$, $\sphericalangle C'SA' = b$, $\sphericalangle A'SB' = c$



Obr. 1

jsou *stěny trojhranu* a jejich velikosti nazýváme *stranami trojhranu*. Řez roviny kolmé k hraně trojhranu s jeho stěnami (např. k SA') je *úhel trojhranu* (v tomto případě s vrcholem A a rameny t_b, t_c). Označme jej α ; podobně vzniknou úhly trojhranu β a γ .

Opišme kolem vrcholu trojhranu S jako středu plochu kulovou, pak její průnik s trojhranem je *sférický trojúhelník ABC*. Průsečíky A, B, C hran trojhranu s plochou kulovou jsou *vrcholy sférického trojúhelníka*. Kruhovým obloukům $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$, $c = \widehat{AB}$ hlavních kružnic,²⁾ v nichž stěny trojhranu protínají plochu kulovou, říkáme *strany sférického trojúhelníka*. Obvykle

je však udáváme ve stupních, tj. rozumíme tím velikost příslušného středového úhlu u vrcholu S . Sestrojíme ve vrcholu A tečny t_b, t_c ke kruhovým stranám AC a AB sférického trojúhelníku. Protože tyto tečny jsou kolmé k hraně AS ($t_b \perp AS, t_c \perp AS$), svírají úhel $t_b t_c = \alpha$ rovný příslušnému úhlu stěn trojhranu u hrany AS . Podobně je tomu s úhly β a γ u vrcholů B a C . Pravíme, že *sférický trojúhelník má tři úhly α, β, γ* .

¹⁾ Dutý úhel např. o ramenech SA', SB' je tvořen všemi body roviny $SA'B'$, které leží zároveň v polorovině $SA'B'$ (s hraniční přímkou SA') i v $SB'A'$ (s hraniční přímkou SB').

²⁾ Hlavní kružnice plochy kulové má střed ve středu plochy a poloměr rovný jejímu poloměru.

V dalším se budeme zabývat pouze sférickými trojúhelníky, jejichž strany i úhly jsou menší než 180° .

Z vlastností trojhranu $S(ABC)$ příslušného k sférickému trojúhelníku ABC lze dokázat, že:

1. Součet dvou stran sférického trojúhelníka je větší než strana třetí,

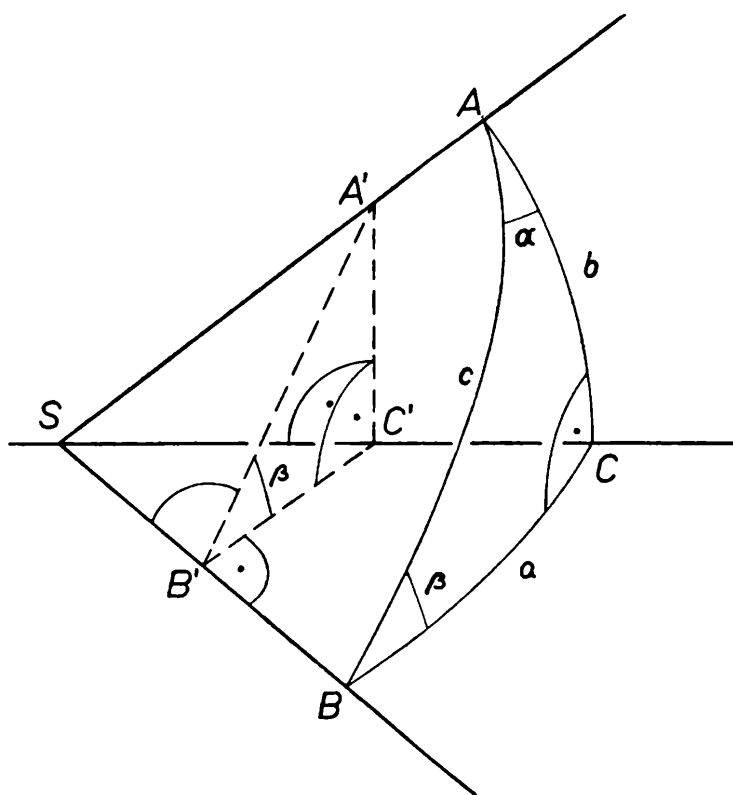
$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

2. Součet stran sférického trojúhelníka je menší než 360° ,

$$a + b + c < 360^\circ$$

3. Součet úhlů sférického trojúhelníka je větší než 180° a menší než 540° ,

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ.$$



Obr. 2

Z poslední věty pozorujeme, že každý sférický trojúhelník má součet úhlů větší než trojúhelník rovinný; tento *nadbytek sférického trojúhelníka* označujeme ε od slova *exces*, je tedy

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

Sférický trojúhelník může mít i dva nebo tři pravé úhly. Má-li jeden pravý úhel, říkáme mu - podobně jako u trojúhelníka v rovině - *sférický trojúhelník pravoúhlý*. Zabývejme se dále pouze pravoúhlým sférickým trojúhelníkem ABC ($\gamma = 90^\circ$), jemuž odpovídá pravoúhlý trojhran $S(ABC)$ (obr. 2).

Zvolme na jeho hraně SB bod B' a jím vedme rovinu kolmou k této hraně. Ta protne hranu SA v bodě A' a hranu SC v C' , přičemž je

$$A'B' \perp SB, B'C' \perp SB, A'C' \perp SC, A'C' \perp B'C'$$

Je tedy z pravoúhlých trojúhelníků $A'B'S$, $A'C'S$, $C'B'S$

$$SB' = SA' \cdot \cos c,$$

$$SC' = SA' \cdot \cos b,$$

nebo

$$SB' = SC' \cdot \cos a = SA' \cdot \cos b \cdot \cos a$$

$$SA' \cdot \cos c = SA' \cdot \cos a \cdot \cos b,$$

odtud

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b, \quad (1)$$

což je vztah mezi stranami sférického trojúhelníka.

Dále vyjádříme závislost odvěsny sférického trojúhelníka, protilehlého úhlu a přepony. Podle obr. 2 je

$$A'C' = SA' \cdot \sin b$$

a též

$$A'C' = SA' \cdot \sin c \cdot \sin \beta,$$

odtud

$$SA' \cdot \sin b = SA' \cdot \sin c \cdot \sin \beta$$

a konečně

$$\sin b = \sin c \cdot \sin \beta, \quad (2)$$

nebo podobně

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha.$$

Vztahy, jimiž jsou vázány odvěsna, k ní přilehlý úhel a přepona, odvodíme takto (obr. 2):

$$B'C' = SB' \cdot \operatorname{tg} a,$$

a také

$$B'C' = A'B' \cdot \cos \beta, \quad A'B' = SB' \cdot \operatorname{tg} c,$$

tedy

$$SB' \cdot \operatorname{tg} a = SB' \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta,$$

čili

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta \quad (3)$$

a podobně

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha.$$

Vypočteme odvěsnu z protilehlého úhlu a druhé odvěsny pravoúhlého sférického trojúhelníka opět podle obr. 2:

$$A'C' = SC' \cdot \operatorname{tg} b$$

a též

$$A'C' = B'C' \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

protože

$$B'C' = SC' \cdot \sin a,$$

je

$$A'C' = SC' \cdot \sin a \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

čili

$$SC' \operatorname{tg} b = SC' \cdot \sin a \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

tedy

$$\operatorname{tg} b = \sin a \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (4)$$

a podobně

$$\operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Dále uvedme závislost odvěsny a obou přilehlých úhlů sférického pravoúhlého trojúhelníka. Z rovnic (1) a (2) plyne

$$\frac{\sin c}{\cos c} = \operatorname{tg} c = \frac{\frac{\sin a}{\sin \alpha}}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos b \cdot \sin \alpha},$$

a to dosazeno do (3) dá

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos b \cdot \sin \alpha} \cos \beta,$$

čili

$$\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha, \quad (5)$$

nebo podobně

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta.$$

Konečně vyjádříme vztah přepou a oběma přilehlými úhly užitím vzorců (1) a (5)

$$\cos c = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

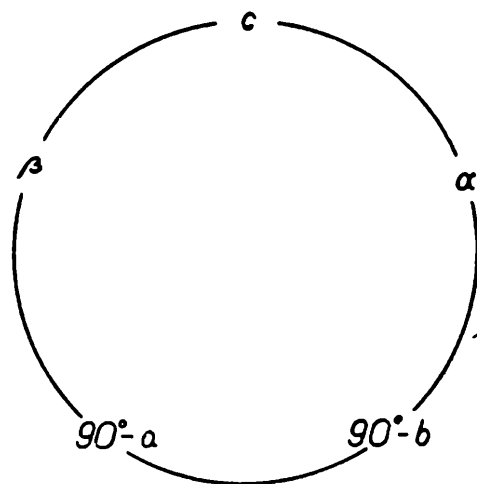
tedy

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \quad (6)$$

Tyto uvedené vzorce pro výpočet stran a úhlů sférického pravoúhlého trojúhelníka nelze si snadno zapamatovat. Proto již před 350 léty objevitel logaritmů J. Neper vymyslel vtipné mechanické pravidlo zvané nyní *Neperovo pravidlo*.

Nakreslíme kruhové schéma (obr. 3), kde a, b, c jsou strany a α a β úhly pravoúhlého sférického trojúhelníka:

Kosinus každé z napsaných veličin se rovná součinu kotangent obou veličin sousedních a též součinu sinů veličin nesousedních.



Obr. 3

Tedy např.:

$$\cos c = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta ,$$

nebo též

$$\cos c = \sin (90^\circ - a) \cdot \sin (90^\circ - b) = \cos a \cdot \cos b .$$

Podobně

$$\cos (90^\circ - a) = \cotg (90^\circ - b) \cdot \cotg \beta ,$$

čili

$$\sin a = \tg b \cdot \cotg \beta ,$$

nebo

$$\tg b = \sin a \cdot \tg \beta .$$

Dále je též

$$\cos (90^\circ - a) = \sin c \cdot \sin \alpha ,$$

čili

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha .$$

Tímto způsobem můžeme napsat všechny odvozené vzorce.

Jsou-li dány dva určovací prvky pravoúhlého sférického trojúhelníka, pak zbývající prvky počítáme číselně běžným způsobem.

František Kuřina, PI, Hradec Králové:

Kruhová inverze (Dokončení)

Nechť ABC je libovolný trojúhelník, který není rovnostranný. Dvě jeho strany označme podle velikosti $BC = a < b = AC$. Trojúhelníku je vepsána kružnice k_1 o středu S_1 a vně vepsaná kružnice k_2 o středu S_2 , která se dotýká strany AB (obr. 10). Přímky AC , BC jsou vnější společné tečny kružnic k_1 , k_2 s body dotyku U , V na k_1 , K , L na k_2 . AB je vnitřní společná tečna kružnic k_1 , k_2 s body dotyku P , Q . Existuje další společná vnitřní tečna t kružnic k_1 , k_2 .

Idea důkazu Feuerbachovy věty je tato:

Sestrojíme inverzi, v níž jsou kružnice k_1 , k_2 samodružné a ukážeme, že obrazem čtvrté společné tečny t kružnic k_1 , k_2 je kružnice devíti bodů, která se tedy musí dotýkat k_1 i k_2 .

Označme $t \cdot BC \equiv E$, $t \cdot AC \equiv D$, $o_1 \equiv S_1 S_2$, $t \cdot o_1 = I$. Ze souměrnosti kružnic k_1 , k_2 podle osy o_1 vyplývají vztahy

$$\begin{aligned} a &= BC = DC , \\ b &= AC = CE , \\ c &= AB = DE , \\ CK &= CL , CU = CV \end{aligned} \tag{3}$$

Z vlastností tečen kružnice dostáváme

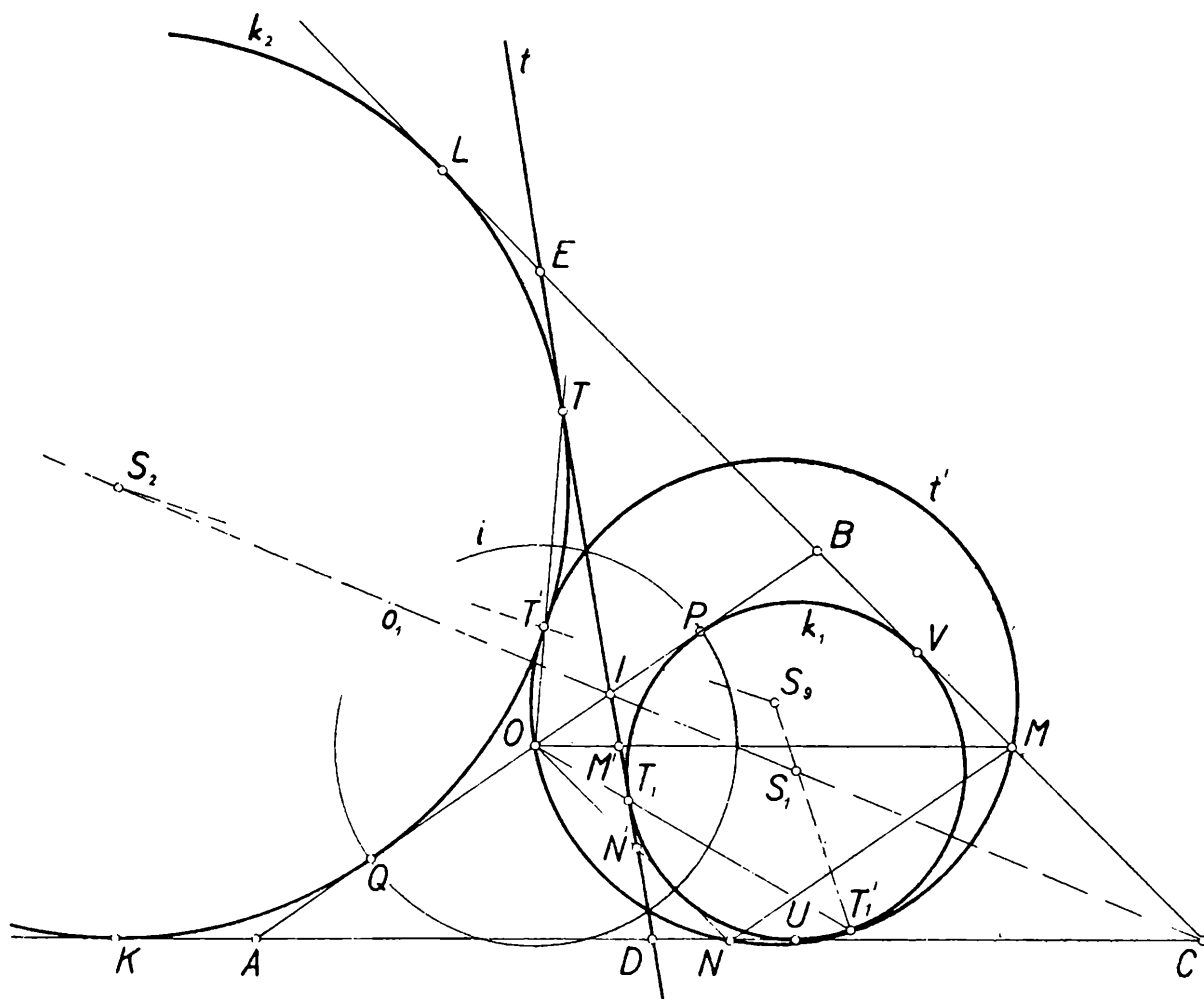
$$AK = AQ , BP = BV \quad BQ = BL . \tag{4}$$

Podle konstrukce je pořadí bodů na vnějších tečnách C, U, A, K a C, V, B, L . Vypočteme velikosti úseček AQ a BP . Zřejmě platí $KA + AC = CB + BL$. Podle (3) a (4) je $AQ + b = a + c - AQ$. Odtud vypočítáme

$$AQ = \frac{a + c - b}{2}$$

Analogicky dostáváme $BC - BV = AC - AU$, $a - PB = b - c + PB$. Odtud

$$PB = \frac{a + c - b}{2}$$



Obr. 10

Protože $BP = AQ$, je střed O úsečky AB i středem úsečky PQ . Přitom

$$OQ = OP = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

Podle výsledku příkladu řešeného výše jsou kružnice k_1, k_2 obě samodružné v kruhové inverzi o řídící kružnici $i = \left(O; \frac{b - a}{2}\right)$

Označme M střed strany BC , N střed strany AC . O vzájemné poloze přímky t a $\triangle MNO$ platí tato pomocná věta:

Přímka t (vnitřní tečna kružnic k_1, k_2 různá od přímky AB) protíná úsečku OM ve vnitřním bodě M' a polopřímku ON ve vnitřním bodě N' .

Je-li $a > \frac{b}{2}$, leží bod N' mezi body O, N . Je-li $a = \frac{b}{2}$, je $N' \equiv N$. Je-li

$a < \frac{b}{2}$, leží bod N mezi body O, N' .

D ů k a z. Průsečíky přímek $t \cdot OM \equiv M', t \cdot ON \equiv N'$ zřejmě existují. Podle známé věty:

Osa úhlu v trojúhelníku dělí protější stranu v poměru stran přilehlých k úsekům (viz např. 3. číslo 41. roč. Rozhledů, str. 105), platí pro

$$\triangle ABC : \frac{b}{a} = \frac{AI}{IB}$$

Protože $a < b$, je $IB < AI$. Střed O úsečky AB leží tedy v polorovině tA , body C, B a střed M úsečky CB leží v polorovině opačné (obr. 10). Přímka t protíná úsečku OM ve vnitřním bodě M'

Bod $D \equiv t \cdot AC$ je obrazem bodu B v souměrnosti podle osy o_1 . Protože bod D nemůže být vzhledem k podmínce $a < b$ vnějším bodem úsečky AC , nemůže N' být bodem polopřímky opačné k polopřímce ON . N' je tedy vnitřním bodem polopřímky ON .

Je-li $a > \frac{b}{2}$, je O vnitřním bodem poloroviny tA a N vnitřním bodem poloroviny opačné (neboť $CD = BC = a > \frac{b}{2} = NC$; obr. 11). Bod $N' \equiv t \cdot ON$ leží tedy mezi bodem O, N .

Je-li $a = \frac{b}{2}$, je $N \equiv D \equiv N'$.

Je-li $a < \frac{b}{2}$, jsou body O, N oba vnitřními body poloroviny tA . Bod N musí ležet mezi body O, N'

Hledejme obraz tečny t v kruhové inverzi o řídící kružnici $i \equiv \left(O; \frac{b-a}{2}\right)$. Podle pomocné věty neprochází tečna t bodem O . V uva-

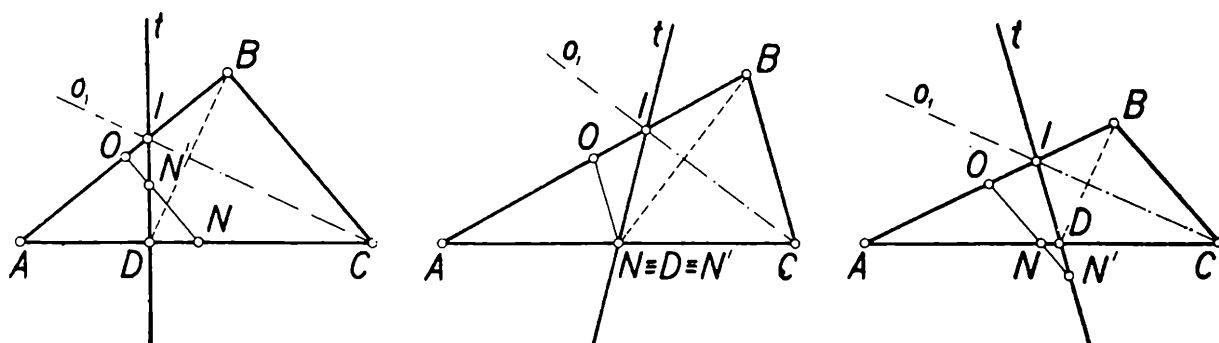
žované inverzi bude obrazem tečny t kružnice t' , která prochází středem O strany AB (viz větu 1). Ukažme, že kružnice t' musí procházet i středy M, N zbývajících stran $\triangle ABC$. Úvahy je nutno dále provádět odděleně

pro každý z případů $a > \frac{b}{2}$, $a = \frac{b}{2}$, $a < \frac{b}{2}$. Provedeme důkaz jen pro prvou nerovnost. Ve zbývajících případech se postupuje analogicky.

Podle konstrukce je $\triangle MM'E \sim \triangle CDE$ (obr. 10). Proto platí

$\frac{MM'}{ME} = \frac{CD}{CE}$. Po dosazení podle (3) máme $\frac{MM'}{b - \frac{a}{2}} = \frac{a}{b}$. Odtud vypo-

čteme $MM' = \frac{a}{b} \left(b - \frac{a}{2} \right)$. Zřejmě je $OM = \frac{b}{2}$. Podle pomocné věty je bod M' mezi body O, M ; platí tedy $OM' + M'M = OM$. Dosadíme-li do této rovnosti vypočtené velikosti úseček MM' a OM , dostaneme po úpravě $OM' = \frac{(b-a)^2}{2b}$. Pro součin $OM \cdot OM'$ pak platí $OM \cdot OM' = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$. To znamená, že M, M' jsou v uvažované inverzi sdružené body.



Obr. 11

Analogicky platí, že $\triangle N'ND \sim \triangle ECD$. Z rovnosti $\frac{NN'}{ND} = \frac{CE}{CD}$ dostaneme po dosazení podle (3) a po úpravě $NN' = \frac{b}{a} \left(a - \frac{b}{2} \right)$; zřejmě $ON = \frac{a}{2}$. Podle pomocné věty je N' mezi body O, N ; platí tedy $ON' + NN' = ON$. Po dosazení vypočtených velikostí úseček NN' a ON dostaneme po úpravě $ON \cdot ON' = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$. Body N, N' jsou tedy rovněž v uvažované inverzi sdružené body.

Obrazem tečny $t \equiv M'N'$ je kružnice, která prochází body O, M, N , tj. kružnice devíti bodů v trojúhelníku. Přímka t se dotýká kružnic k_1, k_2 . Kružnice t' devíti bodů se musí podle věty 3 dotýkat obrazů kružnic k_1, k_2 v uvažované inverzi. Ta však byla konstruována tak, aby kružnice k_1 i k_2 byly samodružné.

Kružnice devíti bodů se tedy dotýká kružnice trojúhelníku vepsané i kružnice trojúhelníku vepsané vně.

Zcela stejná úvaha platí i pro zbývající dvě vně vepsané kružnice.

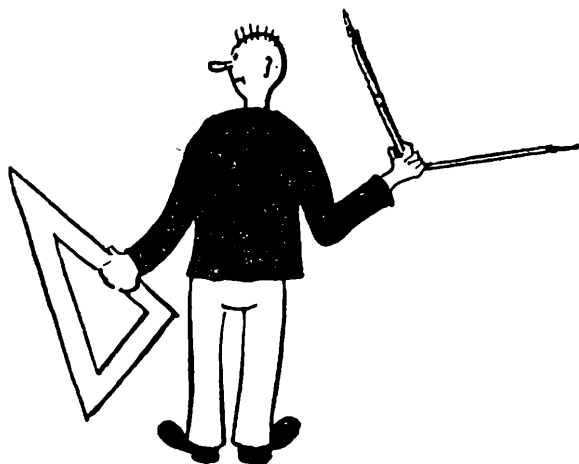
Cvičení.

Ověřte platnost Feuerbachovy věty pro rovnoramenný trojúhelník.

Literatura.

J. Vyšín, *Vybrané statí z elementární geometrie*. Skripta SPN, Praha 1959. (Analytický důkaz Feuerbachovy věty užitím komplexních souřadnic.)

J. Holubář, *O metodách rovinných konstrukcí*. Cesta k vědě 4, JČMF 1949. (Podrobnější zpracování kruhové inverze s ukázkami konstruktivních aplikací.)



Deskriptivní geometrie

Doc. Bořivoj Kepr, ČVUT, Praha:

O některých křivkách

(Pokračování)

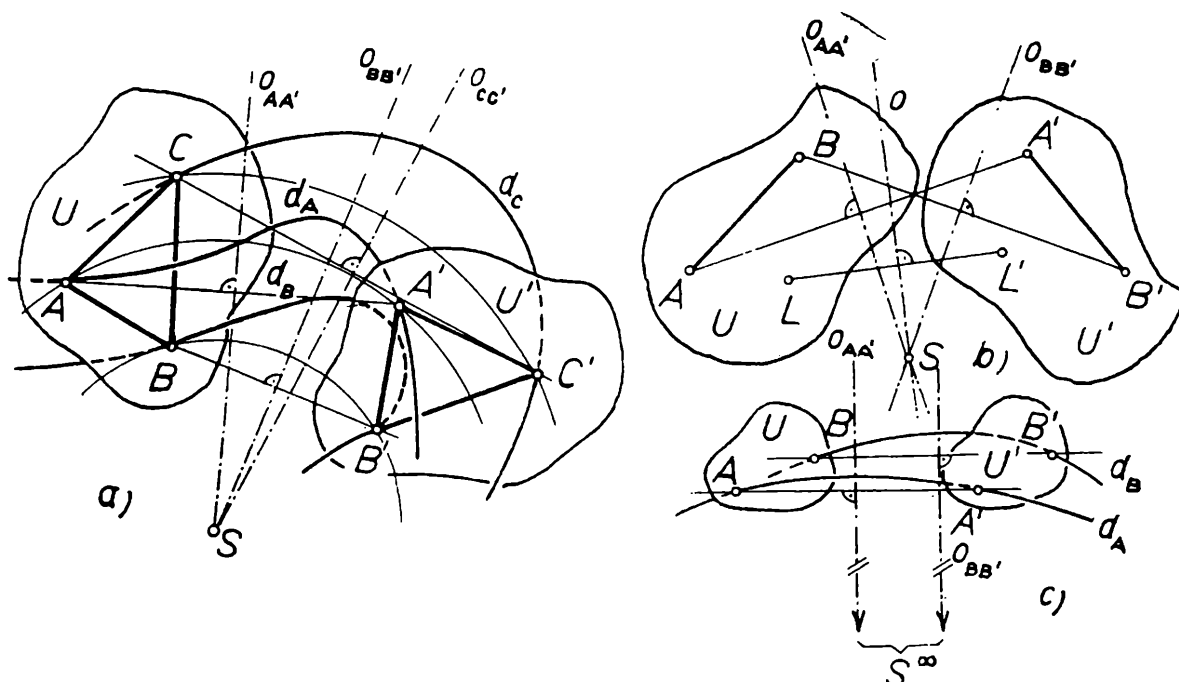
Druhou základní větu (pomocného charakteru) rovinné kinematické geometrie lze formulovat takto:

2. Jsou-li dány dvě různé polohy U a U' neproměnného rovinného útvaru při jeho libovolném komplanárním pohybu, pak vždy existuje rotace (speciálně translace) převádějící U do U' .

Na obr. 15a je neproměnný rovinný útvar charakterizován opět trojúhelníkem, a to jednak ve výchozí poloze ABC pohybu a pak v jedné libovolné poloze A', B', C' v průběhu jeho pohybu. Na obrázku jsou rovněž vyznačeny dráhy d_A , d_B a d_C bodů A , B , C při tomto, jinak zcela libovolném pohybu útvaru U . Předpokládejme, že osy souměrností $o_{AA'}$, $o_{BB'}$ úseček AA' a BB' jsou různoběžné a protínají se v bodě $S \equiv (o_{AA'}, o_{BB'})$. Kružnice, mající střed v S a procházející bodem A , prochází tedy i bodem A' . Podobně kružnice, mající střed v témž bodě S a procházející bodem B , prochází rovněž i bodem B' . Lze tedy danou úsečku AB' útvaru U převést do její polohy $A'B'$ při jakémkoliv komplanárním pohybu pouhým otočením kolem bodu S . Stejnou úvahu bychom mohli provést pro úsečku AC a $A'C'$ a úsečku BC a $B'C'$ (bod C je libovolně zvolený bod útvaru U a bod C' jeho zkonstruovanou příslušnou polohou při daném pohybu určeném danými trajektoriemi d_A a d_B daných bodů A a B). Existuje tedy ještě dvojice takových soustředných kružnic, že jedna z nich prochází body A , A' a druhá body C , C' . Dále pak ještě dvojice soustředných kružnic, z nichž jedna prochází body B , B' a druhá body C , C' . První z těchto dvojic kružnic převádí úsečku AC do úsečky $A'C'$ pouhým otočením a druhá z těchto dvojic kružnic převádí úsečku BC do úsečky $B'C'$

rovněž pouhým otočením. Existují proto celkem tři dvojice, vždy po dvou, soustředných kruhových oblouků, převádějící trojúhelník ABC do jeho polohy $A'B'C'$ (ať tuto polohu nabyl jakýmkoliv komplanárním pohybem) pouhým otočením.

Označme tyto dvojice $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$; $\widehat{AA'}$, $\widehat{CC'}$; $\widehat{BB'}$, $\widehat{CC'}$. Ve všech těchto třech dvojicích vystupuje každý oblouk dvakrát. Z toho okamžitě plyne, že všechny tři navzájem různé kruhové oblouky $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$, $\widehat{CC'}$ mají společný střed v bodě $S \equiv (o_{AA'}, o_{BB'})$, tj. i osa souměrnosti $o_{CC'}$ úsečky CC' prochází tímto bodem S . Bod $C \in U$ byl zvolen k daným bodům A, B zcela libovolně. Z toho plyne, že osa o souměrnosti úsečky, určené jakýmkoliv bodem L útvaru U v jeho výchozí poloze a polohou $L' \in U'$ tohoto bodu v příslušném (čárkovaně označeném)



Obr. 15a, b, c

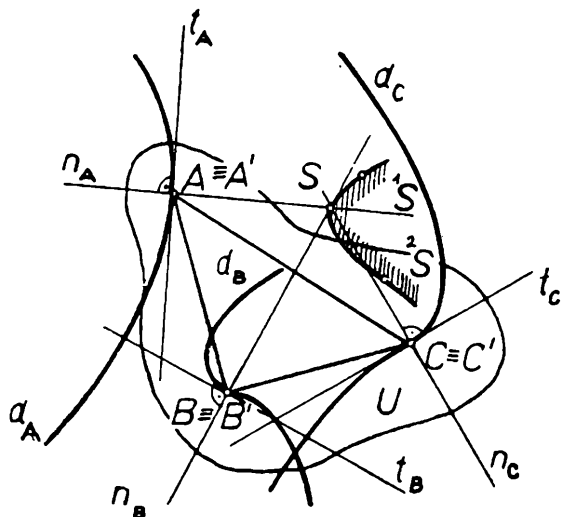
místě U' jakéhokoliv komplanárního pohybu útvaru U , prochází vždy tímž bodem S středem otáčení. Ten byl sestrojen pro otočení dané úsečky AB útvaru U do její polohy $A'B'$ vzniklé libovolným komplanárním pohybem (obr. 15b). Kdyby osy $o_{AA'}$ a $o_{BB'}$ byly speciálně rovnoběžné, a tedy jejich průsečík S_∞ bodem nevlastním, dal by se libovolný útvar U přemístit do polohy U' , vzniklé libovolným komplanárním pohybem útvaru U pouhým rovnoběžným posunutím čili translací (obr. 15c). Tím je celá věta dokázána pro jakýkoliv útvar U , podrobený libovolnému komplanárnímu pohybu.

Třetí základní věta rovinné kinematické geometrie vyplývá z věty právě dokázané. Je znázorněna schematicky na obr. 16 a je pro tuto geometrii fundamentálního významu. Můžeme ji vyslovit takto:

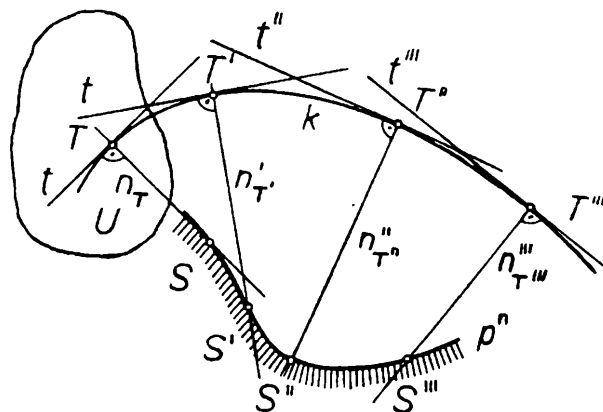
3. Normály drah (trajektorií) všech bodů pohybujícího se neproměnného rovinného útvaru U procházejí v každé jeho poloze $U, {}^1U, {}^2U$

vždy jedním bodem $S, {}^1S, {}^2S$ tzv. okamžitým středem otáčení čili pólem.

Odůvodnění je snadné. V limitě případu znázorněného na obr. 15a, kdy body $A, A'; B, B'; C, C'$; (které na obr. 15a jsou různé) splynou vždy v bod jediný $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C'$, (jak ukazuje obr. 16), přejdou osy souměrnosti $o_{AA'} \perp AA', o_{BB'} \perp BB'$, příslušných tětiv křivek d_A, d_B , v normály $n_A, n_B, n_C, \dots$ těchto drah, neboť secny AA', BB' , přešly v tečny křivek d_A, d_B , v jejich bodech A, B ,



Obr. 16



Obr. 17

V důsledku platnosti této věty a vzhledem k výsledku úvahy k obr. 8a a 8b můžeme vyslovit tuto další základní větu rovinné kinematické geometrie:

4. *Dotykový bod $T, T', \dots$ na tečně $t, t' \dots$ trajektorie k , která vznikla jako obálka přímky t pohybujícího se daného neproměnného rovinného útvaru U při daném komplanárním pohybu, je vždy v patě kolmice $n_T, n_{T'}, \dots$ spuštěné z příslušného okamžitého středu otáčení S, S' , na příslušnou tečnu $t, t', \dots$ trajektorie (obálky) k .*

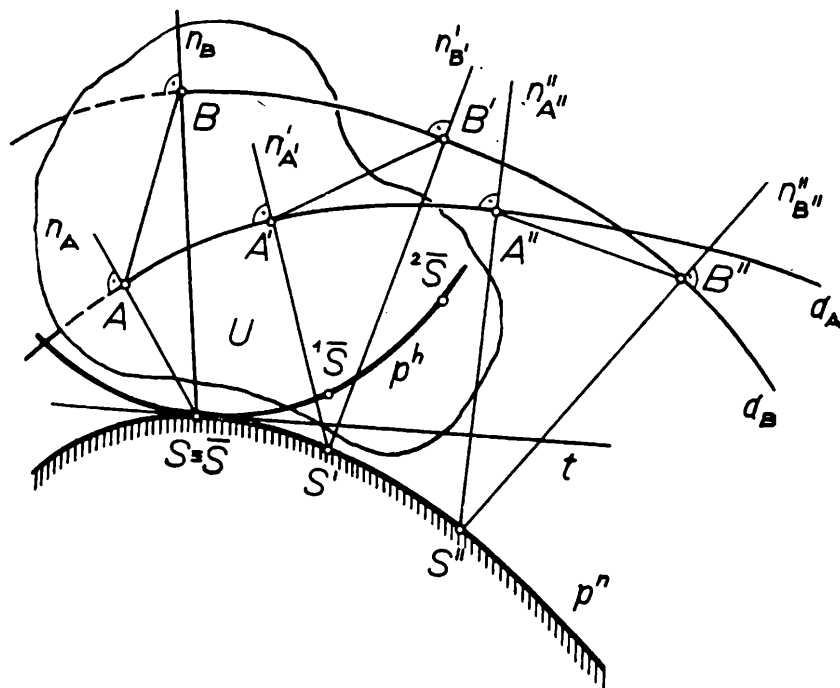
Tato věta je znázorněna na obr. 17. Její odůvodnění získáme z důkazu věty 3 a z výsledku úvahy k problematice znázorněné na obr. 8a a 8b.

Dá se ukázat analyticky (tj. početně), že

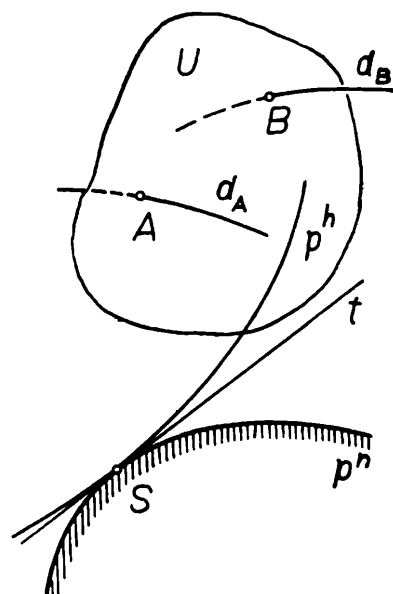
při obecném komplanárním pohybu¹⁵⁾ útvaru U , tj. při pohybu, ve kterém vyloučíme obyčejné otáčení a rovnoběžné posunování, vyplní příslušné okamžité středy otáčení S, S' , křivku p^n , tzv. polhodií nehybnou neboli pevnou.

¹⁵⁾ Máme opět na mysli takový pohyb, který souhlasí s pojmem pohybu v naší názorné představivosti, tj. s praktickým pojmem pohybu v přírodě, tedy i v technice, a tedy i s pojmem pohybu libovolného mechanismu. Vylučujeme tzv. abstraktní pohyby, o jejichž existenci čtenář *Rozhledů* pravděpodobně asi neví. Pro účely článků můžeme proto tuto záležitost zcela pominout.

Tato věta, v pořadí pátá, je další větou rovinné kinematické geometrie základního významu, jak za chvíli poznáme. Polhodie nehybná (tj. geometrické místo pólů - okamžitých středů otáčení) byla již vyznačena na obr. 16 a 17 jako křivka plně vytažená a podtržená šrafováním, abychom tím tak zdůraznili fakt, že je to křivka zůstávající v *klidu* vzhledem ke komplanárnímu pohybu útvaru U .



Obr. 18



Obr. 19

Na závěr odstavce si uvedeme v rámci posláních tohoto článku poslední dvě věty základního charakteru pro vybudování rovinné kinematické geometrie. Nechť je dán pohyb útvaru U volbou drah d_A a d_B dvou jeho bodů A a B . Normály $n_A, n_B, \dots, n'_A, n'_B, \dots$ těchto trajektorií v bodech $A, B, A', B', \dots$ se protínají v bodech $\bar{S} \equiv (n_A, n_B), S' \equiv (n'_A, n'_B)$, okamžitých středech (pólech) otáčení, jež vyplňují křivku p^n polhodie nehybnou (obr. 18). Sestrojme bod $\bar{S}, {}^1\bar{S}, {}^2\bar{S}, \dots$ tak, aby $\bar{S} \equiv S$ a ${}^1\bar{S} \in U, {}^2\bar{S} \in U, \dots$, přičemž $A {}^1\bar{S} = A' S', B {}^1\bar{S} = B' S'; A {}^2\bar{S} = A'' S'', B {}^2\bar{S} = B'' S'',$ což lze uskutečnit rychle pomocí kružítko. Podle toho, jak byly sestrojeny body $\bar{S}, {}^1\bar{S}, {}^2\bar{S}$, pohybujícího se útvaru U , lze usoudit na tu skutečnost, že při daném pohybu útvaru U budou postupně splývat s okamžitými středy otáčení $S', S'',$ Obr. 18 zachycuje ten okamžik v pohybu útvaru U , kdy $S \equiv \bar{S}$. Přejde-li pak bod A po dráze d_A do bodu A' a bod B po dráze d_B do polohy B' , tj. přejde-li útvar U do své polohy U' , splyne bod ${}^1\bar{S} \in U$ s bodem S' , tj. stane se $S' \equiv {}^1\bar{S}' \in U'$ a stejně tak postupně pro polohu U'' atd.

Na základě toho lze vyslovit další důležitou větu základního významu pro rovinnou kinematickou geometrii:

6. Při komplanárním pohybu (který není rovnoběžným posouváním,

nebo obyčejným otáčením) *neproměnného rovinného útvaru U existuje taková křivka $p^h \in U$, jejíž body ${}^1\bar{S}, {}^2\bar{S}$, se při tomto pohybu stávají postupně okamžitými středy otáčení.*

Tuto křivku, patřící útvaru U , nazýváme *polhodií hybnou*. Na obr. 18 je znázorněna jako geometrické místo p^h bodů $\bar{S}, {}^1\bar{S}, {}^2\bar{S}$, Dá se ukázat dále, že platí tyto vlastnosti obou křivek p^n a p^h :

a) *Polhodie pevná (nehybná) a polhodie hybná mají ve svém společném bodě (okamžitém středu otáčení) vždy i společnou tečnu, tj. obě polhodie se vždy v příslušném společném bodě ještě vzájemně dotýkají.*

b) *Příslušné oblouky na obou polhodiích jsou stejně dlouhé, tj. např. $\widehat{SS'} = \widehat{S^1S}, \widehat{S'S''} = \widehat{{}^1S^2S}, \dots$*

Vzhledem k tomu, co bylo právě uvedeno, můžeme vyslovit poslední (pro naše účely) fundamentální větu rovinné kinematické geometrie, tzv. větu *Chaslesovu* (čti *šálovu*):

7. *Každý komplanární pohyb (který není rotací nebo translací) neproměnného rovinného útvaru U lze vždy uskutečnit (valením) určité křivky (polhodie hybné) po jiné křivce (polhodií pevné), která je v rovině v klidu.*

Pohyb útvaru U je pak určen tak, že U je pevně spojen s křivkou p^h , kotálející se (valící se) po pevné křivce p^n (obr. 19). V důsledku toho nazýváme trajektorie, dráhy $d_A, d_B, \dots$ bodů $A, B, \dots$ patřících do U a vznikající při kotálení křivky p^h po křivce p^n , také *kotálnicemi*. Vyměníme-li úlohu obou polhoid, tj. polhodií p^h původně hybnou v rovině upevníme a polhodií p^n původně nehybnou budeme kotálet po polhodií druhé, získáme obecně *jiný* komplanární pohyb, který je však vždy v určitém vztahu k pohybu původnímu. Takové pohyby, které jsou vázány vztahem vzájemné výměny funkce obou polhoid, nazýváme *pohyby vzájemně vratnými*.

V dalším odstavci na některých příkladech křivek si ukážeme konstruktivní použití poznatků z odstavců předcházejících. (Pokračování)

Našim čtenářům, zejména účastníkům Matematických olympiád sdělujeme smutnou zprávu, že dne 19. května zemřel náhle

RUDOLF ZELINKA

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu, vědecký pracovník ČSAV a čestný člen Jednoty čs. matematiků a fyziků,

který celý svůj život věnoval výchově středoškolské mládeže.

Jarmila Dlouhá, KU, Praha:

Supratekutost a supravodivost

(Dokončení)



IV. Aplikace supravodivosti

Neměřitelně malý odpor, který mají supravodiče, poskytuje celou řadu možností uplatnění supravodivosti.

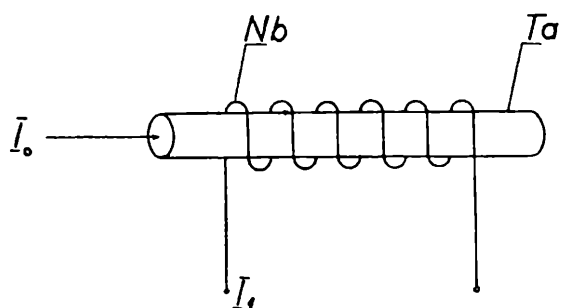
Využitím supravodivosti jsou sestrojovány velmi silné magnety, které mají na rozdíl od dosud užívaných silných magnetů nepatrnou spotřebu energie. Je v nich užito Kamerlingh-Onnesovy myšlenky o dlouho-trvajícím proudu. Výkonné magnety jsou např. zhotovovány ve tvaru prstenců z NbN (jehož kritická teplota je kolem 20 °K) a pracují při teplotě 10 °K.

Supravodivé bolometry (přístroje registrující slabé osvětlení) jsou neobyčejně citlivé - jsou schopny reagovat i na světlo plamene svíčky ve vzdálenosti 10 km. Byly původně sestrojeny k válečným účelům. Zvláště citlivý je pak takový bolometr na infračervené světlo. Jeho výhodou je, že má malou tepelnou kapacitu.

Supravodivé galvanometry měří napětí až 10^{-12} V a jsou velmi pohotové, neboť proti běžně užívaným přístrojům ukazují velmi rychle měřenou hodnotu napětí. Kromě toho nulová magnetická indukce uvnitř supravodiče umožňuje dokonalé odstínění supravodivých galvanometrů od vnějšího magnetického pole (které by tak přesné měření narušovalo) supravodivým krytem. Odstiňování vnějších magnetických polí pomocí supravodičů se s výhodou používá i při jiných měřeních.

Nejčastěji se používá supravodivosti k chlazení v teplotním intervalu od 1 °K do 0,1 °K. Chlazení pomocí supravodičů je založeno na skutečnosti, že přechod supravodiče ze supravodivého do normálního stavu si vyžaduje dodání energie. Prvním krokem chlazení je adiabatická magnetizace (tj. zmagnetování při tepelné izolaci od okolí) supravodiče magnetickým polem takové intenzity, aby došlo k rozrušení supravodivosti. Přitom značně poklesne teplota látky. Druhým krokem pak je izotermní demagnetizace (odmagnetování při konstantní teplotě), pomocí níž se látka dostane znovu do supravodivého stavu a děj se může opakovat až do dosažení žádané teploty.

Dosud nejlepšího technického uplatnění se dostalo supravodivosti v kryotronu, což je jednoduchý přístroj založený na rozrušení supravodivosti magnetickým polem protékajícího proudu. Jeho základní provedení ukazuje obr. 6. Jádrem kryotronu tvoří silnější přímý tantalový drát, kolem něhož je navinuta jedna vrstva izolovaného drátu z niobu. Celý přístroj je ponořen do kapalného helia při normálním tlaku. Volba látek ke konstrukci kryotronu není nahodilá. Oba prvky jsou při teplotě kapalného helia supravodivé a zatím co niob má vysokou kritickou teplotu (přes 8 °K) a je proto při teplotě volně vroucího helia (4,2 °K) ve stabilním supravodivém stavu, má tantal kritickou teplotu 4,4 °K, takže při heliové teplotě stačí slabé magnetické pole k tomu, aby tantalový drát přešel ze supravodivého do normálního stavu. Takové magnetické pole může vytvořit elektrický proud o intenzitě asi 0,3 A v niobovém drátě. Tantalový drát pak tvoří základní obvod kryotronu a niobový drát jeho řídicí obvod.



Obr. 6. Základní provedení kryotronu (I_0 je intenzita proudu v základním obvodu, I_1 - v řídicím).

V základním obvodu se obvykle užívá proudu v rozmezí od 0,5 do 1 A, který je podstatně slabší než proud, jenž by vyvolal zánik supravodivosti v řídicím obvodu; řídicí vinutí je tedy bezodporové, a tím i bezztrátové.

V běžných schématech se zapojují velká množství identických kryotronů tak, že se základní proud jednoho kryotronu stává řídicím proudem druhého kryotronu (obr. 7). Kryotrony pak mohou v řadě zapojení nahradit elektronky (nebo polovodiče), při čemž základní obvod kryotronu je analogií anodového obvodu a řídicí obvod analogií mřížkového obvodu vakuové elektronky. Přitom se užívá různých úprav základního



Obr. 7. Základní prvek kryotronové paměti.

provedení kryotronu, např. základní obvod je společný několika kryotronům aj. Výhodou kryotronů je nezávislost jejich činnosti na směru proudu v základním i řídicím obvodu a malé ztráty. Jouleovo teplo vzniká jen při přechodech základního obvodu ze supravodivého do normálního stavu, kdežto jinak volí proud výhodnější, tj. supravodivou cestu.

Jednoduchý a téměř bezztrátový chod kryotronu je výhodný při použití kryotronu jako aktivního elementu logické paměti počítačích strojů, kde je zapotřebí velkého množství elektronek nebo relé. Proti

oběma obvyklým elementům má kryotron přednost v jednoduchém a téměř bezporuchovém chodu s nepatrnou spotřebou energie, ale má nevýhodu poměrně pomalého chodu.

V Závěr

V současné době se snaží fyzikové na jedné straně o zjištění dalších vlastností, které jsou spojeny se supravodivostí (a proto intenzívně proměřují různé supravodiče), na druhé straně pak o využití supravodičů v praxi, neboť prakticky bezztrátový provoz zařízení se supravodiči je až příliš lákavý. Pro současnou techniku by bylo např. výhodné využít supravodičů k přenosu elektrické energie na velké vzdálenosti, což by mělo ohromný hospodářský význam. Realizaci však brání přílišná nízkost teplot, při nichž dochází k přechodu do supravodivého stavu. Je proto úkolem fyziky nízkých teplot prozkoumat možnosti existence takových látek, které by přecházely do bezodporového stavu při vyšších teplotách (aspoň při teplotách kapalného vzduchu, jež by umožňovaly použití supravodivosti ve větším měřítku). Ideální případ existence supravodiče při pokojové teplotě je zatím nepředstavitelný.

Literatura.

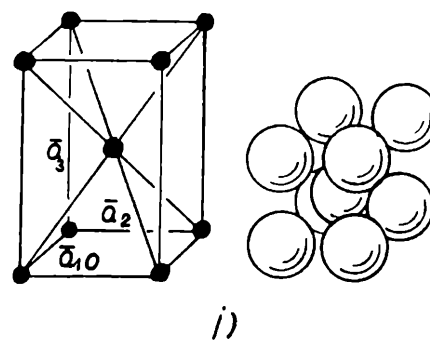
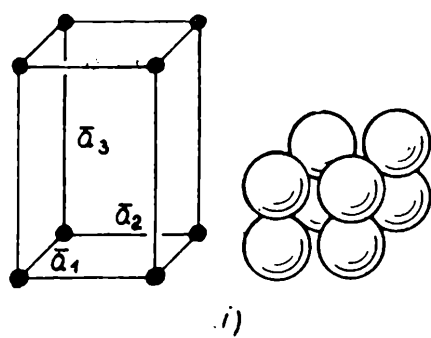
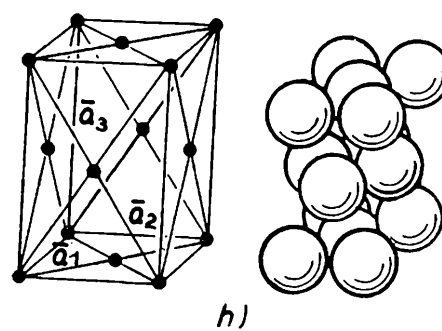
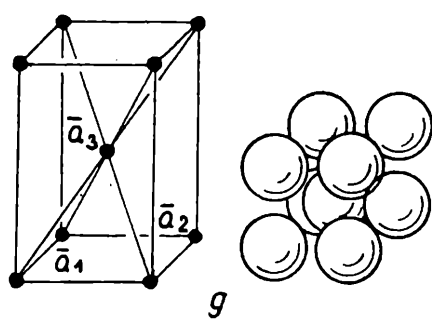
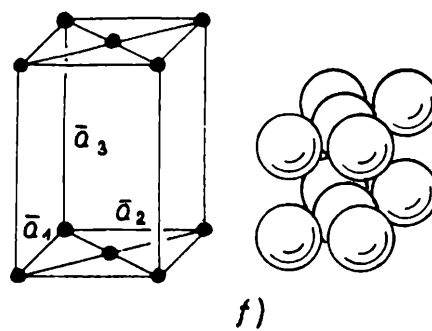
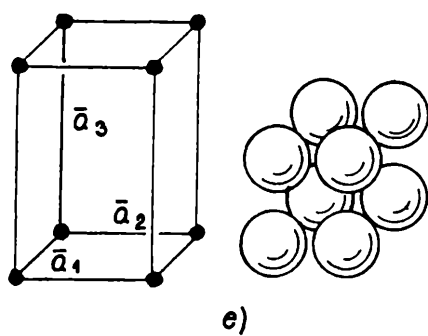
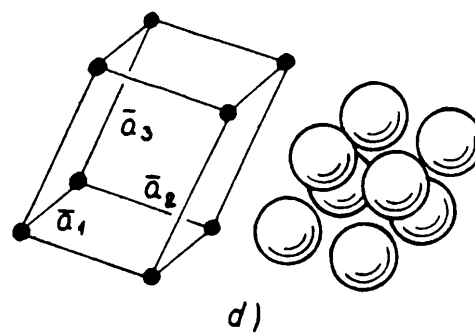
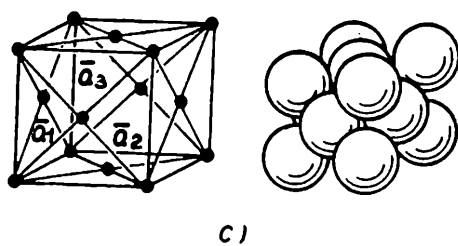
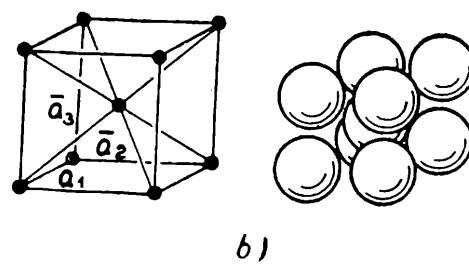
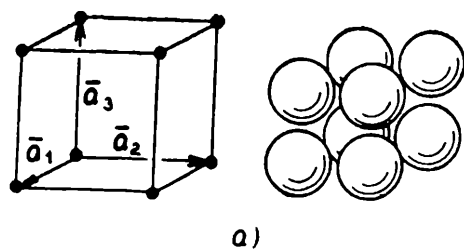
- Fl ü g g e S., *Handbuch der Physik* X I V, resp. X V, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
G o r t e r C. J., *Progress in Low Temperature Physics* 1, resp. 2, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1955, resp. 1957.
E d e r F. X., *Einführung in die Physik der tiefen Temperaturen*, VED, Deutsch. Verl. d. Wiss., Berlin 1955.
S i m o n F. E. et al., *Low Temperature Physics*, Pergamon Press, London 1952.
D l o u h á J., *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, I V (1959), 179.
B u c k D. A., *Proc. I R E* 44 (1956), 482.

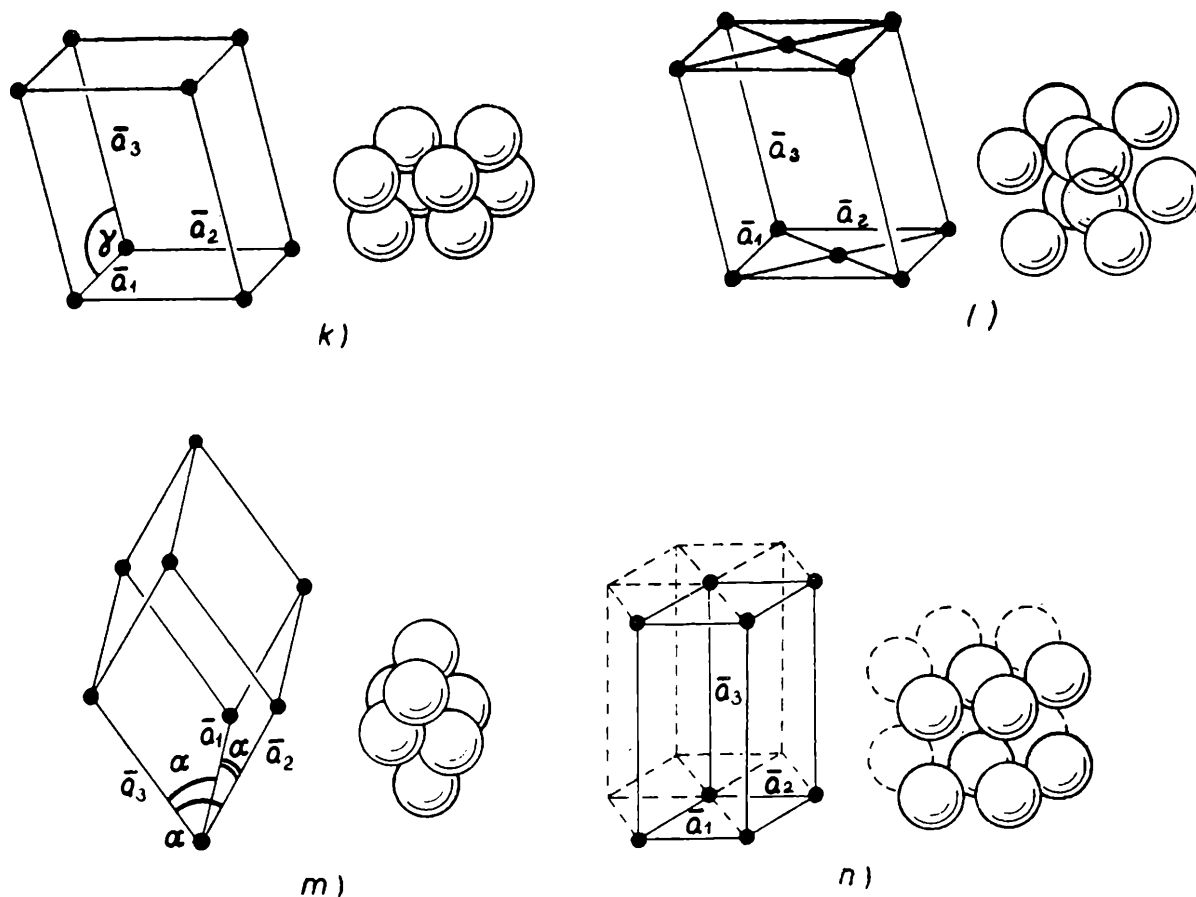
Z l a t ě k M a r š á k, I v o K r a u s, ČVUT, Praha:

Krystalická stavba pevných látek

(Dokončení)

Jak již bylo řečeno, může každý uzlový bod padnout do místa, kde je atom či iont dané látky. Jestliže elementární buňka má atomy či ionty jen ve svých vrcholech — uzlových bodech — pak tuto elementární buňku nazýváme *p r i m i t i v n í* (jednoduchou). Jsou-li atomy umístěny i mimo uzlové body, pak se jedná o *e l e m e n t á r n í* b u ň k u s l o -





Obr. 3. Čtrnáct základních buněk prostorových mřížek uvedených v tab. I.

ž e n o u. Na strukturu vytvořenou složenými buňkami se můžeme také dívat jako na dvě či více shodných elementárních buněk jednoduchých, vzájemně vůči sobě posunutých. Ukazuje se, že všechny možné trojrozměrné prostorové mřížky jdou vybudovat ze čtrnácti prostorových mřížek. Elementární buňky těchto čtrnácti základních prostorových mřížek jsou na obr. 3. Vztah těchto čtrnácti základních prostorových mřížek ke krystalickým soustavám je patrný z tabulky I. Mohlo by se zdát, že těchto čtrnáct prostorových mřížek neobsahuje všechna možná pravidelná uspořádání atomů. Tak např., že zde není uvedena mřížka tetragonální plošně centrovaná. Namalujeme-li si ji, pak však snadno zjistíme, že se tato mříž dá vytvořit z tetragonální prostorově centrované, ovšem s jiným počátkem souřadných os.

Atomy, či ionty v mřížkách, si můžeme představit v prvním přiblížení jako těsně se dotýkající tuhé koule. Hustota mřížky je vyjádřena tzv. k o o r d i n a č n í m č í s l e m. Toto číslo udává počet atomů, které se nacházejí v nejmenší stejné vzdálenosti od daného atomu či iontu. Čím je koordinační číslo vyšší, tím je hustota uspořádání atomů větší. Jak je vidět z obr. 3, je v elementární buňce kubické prostorově centrované nejmenší vzdálenost mezi atomy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, kde a je velikost vektoru

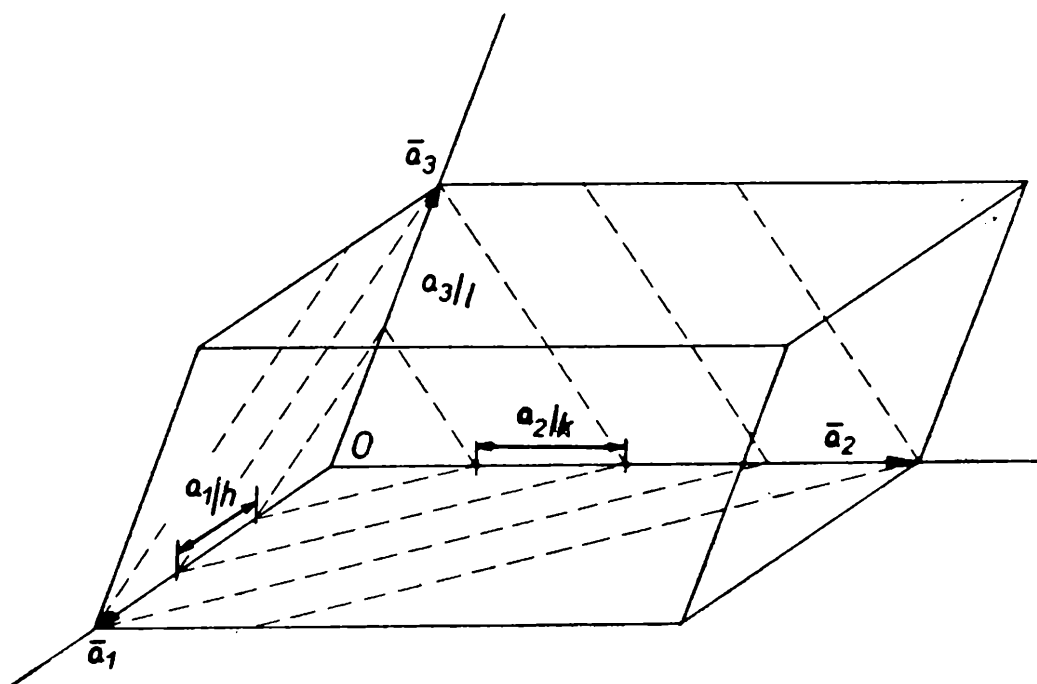
$$|\vec{a}| = |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3|$$

TABULKA I.

Krystalická soustava	Osy a meziosní úhly	Prostorové mřížky	Označ. na obr. 3
Kubická	tři osy navzájem kolmé a všechny stejně dlouhé $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	jednoduchá prostorově centrovaná plošně centrovaná	(a) (b) (c)
Triklinická	tři osy, které nejsou navzájem kolmé a mají různé délky $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	jednoduchá	(d)
Ortorombická (rombická)	tři osy navzájem kolmé a různě dlouhé $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	jednoduchá bazálně centrovaná prostorově centrovaná plošně centrovaná	(e) (f) (g) (h)
Tetragonální	tři osy navzájem kolmé, dvě osy stejně dlouhé $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	jednoduchá prostorově centrovaná	(i) (j)
Monoklinická	tři osy, z nichž jeden pár os nesvírá pravý úhel a všechny mají různé délky $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	jednoduchá bazálně centrovaná ¹⁾	(k) (l)
Romboedrická trigonální	tři osy se stejným vzájemným náklonem, nesvírají pravé úhly a jsou stejně dlouhé $a_1 = a_2 = a_3$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	jednoduchá	(m)
Hexagonální	dvě osy stejně dlouhé a svírající navzájem úhly 120° , třetí osa je k nim kolmá $a_1 = a_2 \neq a_3$ $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	jednoduchá	(n)

¹⁾ Plochu, v jejímž středu je uzlový bod mřížky, můžeme zvolit za plochu základny.

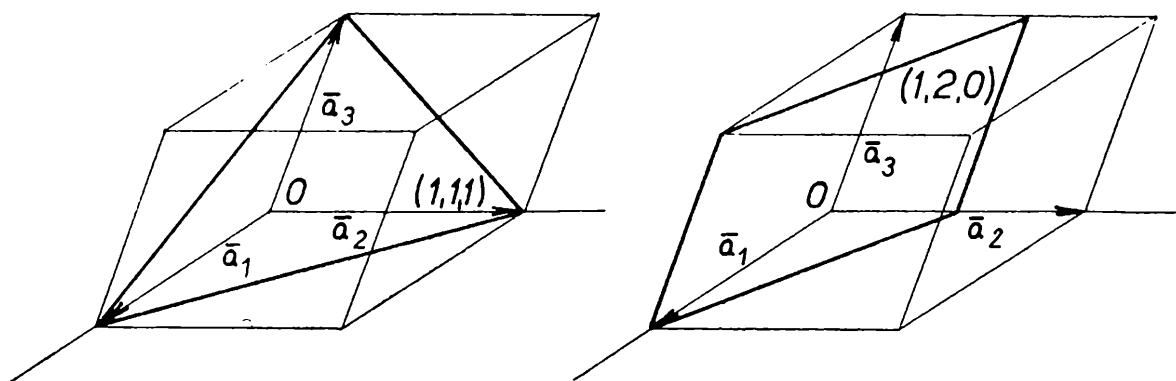
V této vzdálenosti se nalézá od daného atomu osm sousedů; tj. koordinační číslo mřížky, která má elementární buňku kubickou prostorově centrovanou, je 8. Koordináční číslo nám však neříká nic o objemových poměrech v buňce. Přesněji řečeno neříká nám o poměru objemu součtu atomů báze buňky k objemu celé buňky. To nám vyjadřuje koeficient zaplnění. U kubické prostorově centrované mřížky je koeficient zaplnění roven 68 %. U kubické plošné centrované mřížky je koordinační číslo 12 a koeficient zaplnění 74 %. Výpočet těchto hodnot si provede čtenář snadno sám.



Obr. 4. Rovina o Milleroých indexech (h, k, l) .

Mezirovinná vzdálenost mřížkových rovin je pro danou soustavu rovnoběžných rovin konstantní a jelikož jsou každé dvě rovnoběžné roviny identické, je svazek ekvidistantních rovnoběžných rovin plně charakterisován jednou jedinou rovinou. Polohu libovolné roviny je vhodné vyjádřit vzhledem k elementární buňce. Mějme nějaký svazek mřížkových rovin a uvažujme elementární buňku dané prostorové mřížky. Daný svazek rovin musí vyčerpat všechny uzlové body mřížky. Odtud plyne, že právě jedna rovina našeho svazku musí procházet počátkem O elementární buňky (obr. 4). Stejně tak musí i jiná rovina procházet koncovým bodem jednotkového vektoru $\bar{a}_1$. Mezi těmito dvěma rovnoběžnými rovinami může ležet jistý počet rovnoběžných rovin. Tyto roviny nám vytnou na ose $\bar{a}_1$ dejme tomu h stejných úseků. Vzdálenost mezi jednotlivými rovinami svazku je tedy $|\bar{a}_1|/h$. Protože $\bar{a}_1$ je jednotkovým vektorem, je $|\bar{a}_1| = 1$ a vzdálenost mezi jednotlivými rovinami je $\frac{1}{h}$. Právě tak na ose $\bar{a}_2$ vytínají tyto roviny úsek $\frac{1}{k}$ a na ose a_3 úsek

$\frac{1}{l}$, kde čísla h, k, l jsou celá čísla. Čísla h, k, l určují daný svazek mřížkových rovin. Jestliže vezmeme rovinu nejbližší k počátku, která má indexy h, k, l , tj. vytíná na osách $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ úseky $\frac{1}{h}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$ od počátku, pak tato rovina charakterizuje celou množinu ekvidistantních vzájemně rovnoběžných rovin. Číslům h, k, l říkáme *Millerovy indexy* uvažované roviny (resp. svazku rovin), takže mluvíme o rovině (h, k, l) . Postup při konstrukci mřížkové roviny (h, k, l) je: vezmeme elementární buňku krystalu a od jejího počátku nanese na osy $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ po řadě převrácené hodnoty Millerových indexů $\frac{1}{h}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$. Tím dostaneme trojici bodů, které jednoznačně určují rovinu o Millerových indexech (h, k, l) . Ale touto rovinou (h, k, l) je určen celý svazek rovin, které mají stejnou vzdálenost, rovnou vzdálenosti naší roviny (h, k, l) od počátku O . Jde-li o rovinu $(1, 2, 0)$ (obr. 5b), jsou Millerovy indexy $h = 1; k = 2; l = 0$.



Obr. 5. Mřížkové roviny o Millerových indexech a) $(1, 1, 1)$; b) $(1, 2, 0)$.

Svazek těchto rovin vytíná na osách $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ úseky po řadě $\frac{1}{h} = \frac{1}{1}$;

$\frac{1}{k} = \frac{1}{2}; \frac{1}{l} = \frac{1}{0}$. Výraz $\frac{1}{0}$ je definitoricky položen rovný nekonečnu.

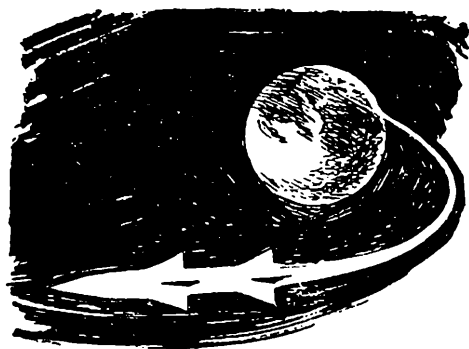
To znamená, že rovina nemá vlastní průsečík s příslušnou osou a je tedy s touto osou rovnoběžná. Na obr. 5a je zakreslena rovina $(1, 1, 1)$.

Vraťme se ještě k obr. 4. Z něho je vidět, že s rostoucím h, k, l se značně zmenšuje vzdálenost mezi rovinami. Tím ovšem klesá hustota uzlových bodů na těchto mřížkových rovinách. Pro krystalografii mají největší důležitost hustě obsazené roviny, a to jsou roviny s malými h, k, l . Podle těchto rovin se děje např. štěpnost krystalů atd.

Vysvětlením obecných pojmů z krystalické stavby pevných látek jsme připraveni k diskusi o otázkách speciálnějších, např. o iontové stavbě kovů apod.

Astronomie

Doc. dr. Vladimír Guth, DrSc.,
člen koresp. ČSAV, Ondřejov:

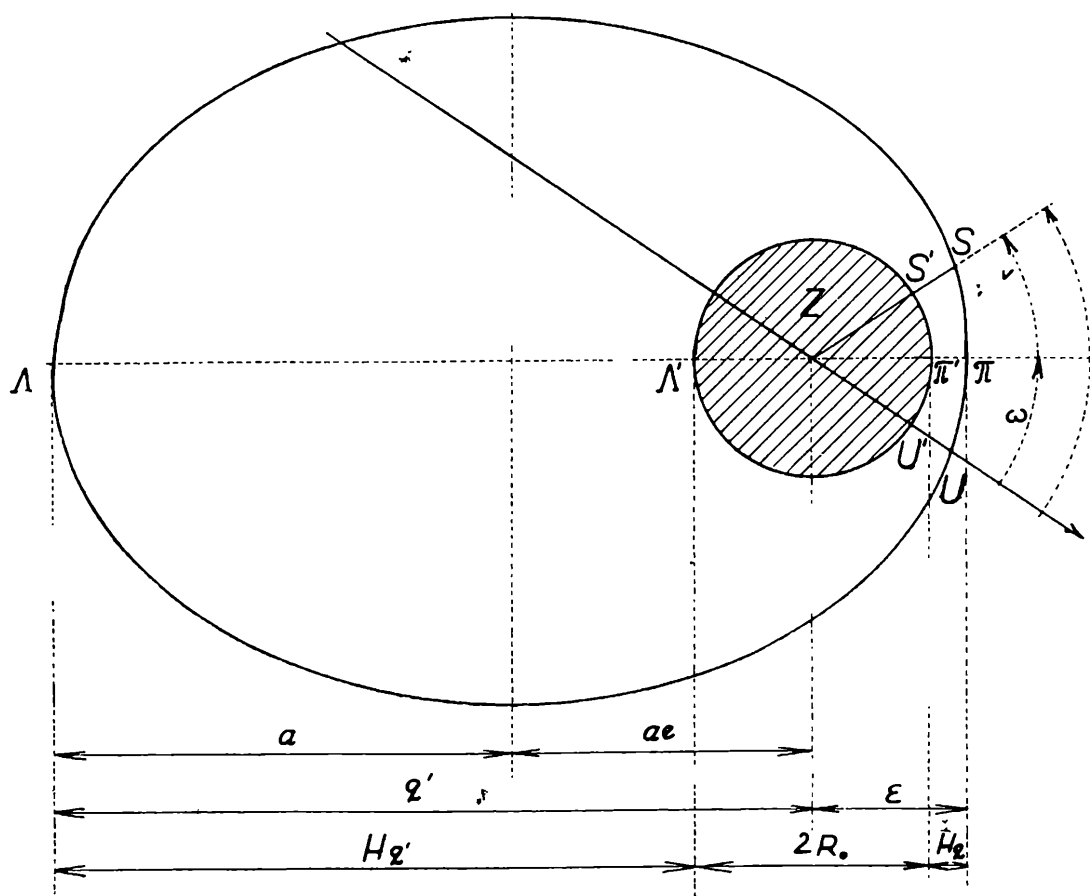


Uvidíme kosmickou loď?

O sovětských úspěších v kosmonautice se zpravidla dovídáme až z rozhlasu, když již akce probíhá. Z těchto prvých zpráv často těžko získáváme představu, zda kosmická loď právě uvedená na dráhu bude u nás viditelná (za večerního nebo ranního soumraku) a kdy bude možné nejlépe odposlouchat i její rádiové signály. Může nás rovněž zajímat, kde pokus (např. opuštění kosmické lodi kosmonautem) právě prováděný probíhá nad naší Zemí. Následující řádky mají usnadnit našim studentům a čtenářům, jak za zjednodušených předpokladů můžeme získat první obraz o právě probíhajícím pokusu, pokud jde o pohyb družice. V našem případě se omezíme na případ sovětských kosmických lodí, obsazených lidskou posádkou, které krouží kolem Země po dráhách téměř kruhových, jako kroužily osvědčené *Vostoky 1 až 6* i nové *Voschody 1 a 2*. Je pravděpodobné, že *Voschody* budou mít své další nástupce ať v letech dlouhodobých, nebo při řešení různých dalších úkolů biologických i technických (např. řešení problému setkání) již v blízké budoucnosti, a tak snad tyto řádky nebudou pro zájemce o kosmonautiku neúčinné. Vlastní metodou můžeme ovšem přizpůsobit i pro jiné družice dosazením příslušných parametrů do našich vzorců.

Předpokládáme, že známe místo, tj. zeměpisné souřadnice kosmodromu, odkud jsou družice vysílány. Pro sovětské kosmické lodě přichází především v úvahu známý kosmodrom *Bojkannur*, jehož poloha byla zveřejněna při projednávání světového rekordu prvního kosmonauta plk. J. Gagarina. Jeho zeměpisná délka je $\lambda = 63^\circ 25' \text{ E. Gr.}$ a zeměpisná šířka $\varphi = +47^\circ 22'$. Je také známo, že nejužívanější (pro kosmické lodě dosud jediný) odpalovací kanál leží v rovině, která svírá s rovníkem úhel 65° . Úhel sklonu této dráhy přináší zpravidla již i první zpráva tiskové kanceláře, vydávaná rozhlasem. Dále bývá oznámen i moskevský čas vypuštění, který po odečtení tří hodin si převedeme na světový čas (greenwichského poledníku), kterého se užívá mezinárodně ve vědě. Zpráva dále obsahuje i další cenné parametry: oběžnou dobu lodi kolem Země (budeme ji značit P), dále nejnižší výšku nad Zemí H_q , tzv. *přízemí* nebo *perigeum* a nejvyšší výšku nad zemí H_q' , tzv. *odzemí* nebo *apogeum* a zmíněný již *sklon dráhy* i .

Z uvedených veličin si snadno nakreslíme dráhu družice. Podle zákonů nebeské mechaniky (prvý z nich odvodil známý německý astronom Jan Kepler v Praze v r. 1609) víme, že i umělé družice se pohybují po kuželosečkách, v jejichž ohnisku je buď Země nebo Slunce, případně v budoucnosti některá z jiných planet. Sovětské *Vostoky* a *Voschody* se pohybují po elipsách málo od kruhů odlišných, v jejichž ohnisku je naše Země. Připojený obrázek nám schematicky znázorňuje dráhovou elipsu. Země o poloměru R je v jednom z ohnisek. Přisluní je v bodě Π a je vzdáleno od zemského povrchu o H_q , a tedy od ohniska o $q = R + H_q$;



Obr. 1

je to tzv. *vzdálenost perigea*. Naopak apogeum je v bodě Λ ve vzdálenosti $H_{q'}$ od zemského povrchu, a tedy od ohniska $q' = R + H_{q'}$. Spojnice přízemí π odzemí Λ , tzv. *přímka apsid*, je hlavní osou naší dráhové elipsy. Rozpůlením její délky získáme střed O ; přetnutím kolmice ve středu vztyčené hlavní poloosou $a = O\Pi = O\Lambda$ získáme vedlejší osu a můžeme celou elipsu narýsovat. Elipsu charakterizuje její výstřednost e daná poměrem vzdálenosti středu elipsy od ohniska k délce hlavní poloosy. Z obrázku snadno odvodíme geometrické vztahy mezi jednotlivými prvky:

$$a = R + (H_q + H_{q'}) : 2 = (q + q') : 2 \quad q = a(l - e) \quad q' = a(l + e),$$

čili:

$$e = (H_{q'} - H_q) : (2R + H_{q'} + H_q) = (H_{q'} - H_q) (q + q')$$

Geometrickou hodnotu velikosti hlavní poloosy a můžeme kontrolovat i dynamicky, neboť víme - opět podle Keplera (tentokrát užijeme tzv. harmonického neboli třetího zákona) - že čtverce dob oběhu jsou úměrné třetím mocninám hlavních poloos, čili vyjádřeno vzorcem:

$$a^3 = k \cdot P^2,$$

tedy

$$a = k' \cdot P^{2/3}$$

Pohyb tělesa po dráhové elipse se děje podle druhého Keplerova zákona, tzv. zákona ploch (plochy opsané průvodiči jsou úměrné příslušným dobám). V našem případě si však dovolíme zjednodušení předpokladem, že loď se pohybuje po kružnici rovnoměrně s průměrnou periodou 90 minut, tj. ve výšce 275 km nad Zemí, z čehož plyne $a = 6\,652,6$ km. Za den urazí dráhu $360^\circ \times 24^h \times 60^m$: periodou (tj. 90 min.) tedy 5760° za den, což značíme n .

Zobrazení dráhy v prostoru

Postavení dráhy družice δ vůči Zemi jednoznačně definuje úhel γ , který svírá rovina δ s rovinou ϱ , tzv. sklon *dráhy* i a poloha průsečnice obou rovin $U'U$, které říkáme *uzlová přímka*; všechny tyto pojmy a názvy přebíráme z astronomie. Polohu uzlové přímky stanovíme buď tím, že pro určitý čas určíme její zeměpisnou délku (vůči greenw. poledníku), nebo ji určíme vůči hvězdám, tj. vůči jarnímu bodu a pak mluvíme o rektascenci uzlu. Prvý případ - a toho budeme užívat - je pro pozemského pozorovatele názornější, má však nevýhodu, že se s časem rychle mění, protože se Země pod dráhou družice otáčí.

Kdyby Země měla přesně kulový tvar, pak by i uzlová přímka stále směřovala v prostoru mezi tytéž hvězdy. Nadbytek hmoty v rovníkovém „opasku“ Země však způsobí, jak teorie ukázala a pozorování plně potvrdila, že uzlová přímka se zvolna stáčí, a to proti zemskému pohybu. Tento úkaz již známe dávno z teorie zatmění Měsíce a Slunce; kdyby nebylo stáčení uzlové přímky měsíční dráhy, nastávala by zatmění vždy přesně každý půlrok. Velikost stáčení závisí na střední vzdálenosti dráhy družice od Země $\bar{a}$, na výstřednosti její dráhy e a na sklonu dráhy i . Teoretikové odvodili tento vzorec:

$$\Delta\Omega/\text{den} = In/\bar{a}^2 \cdot \cos i (1 - e^2)^{-2},$$

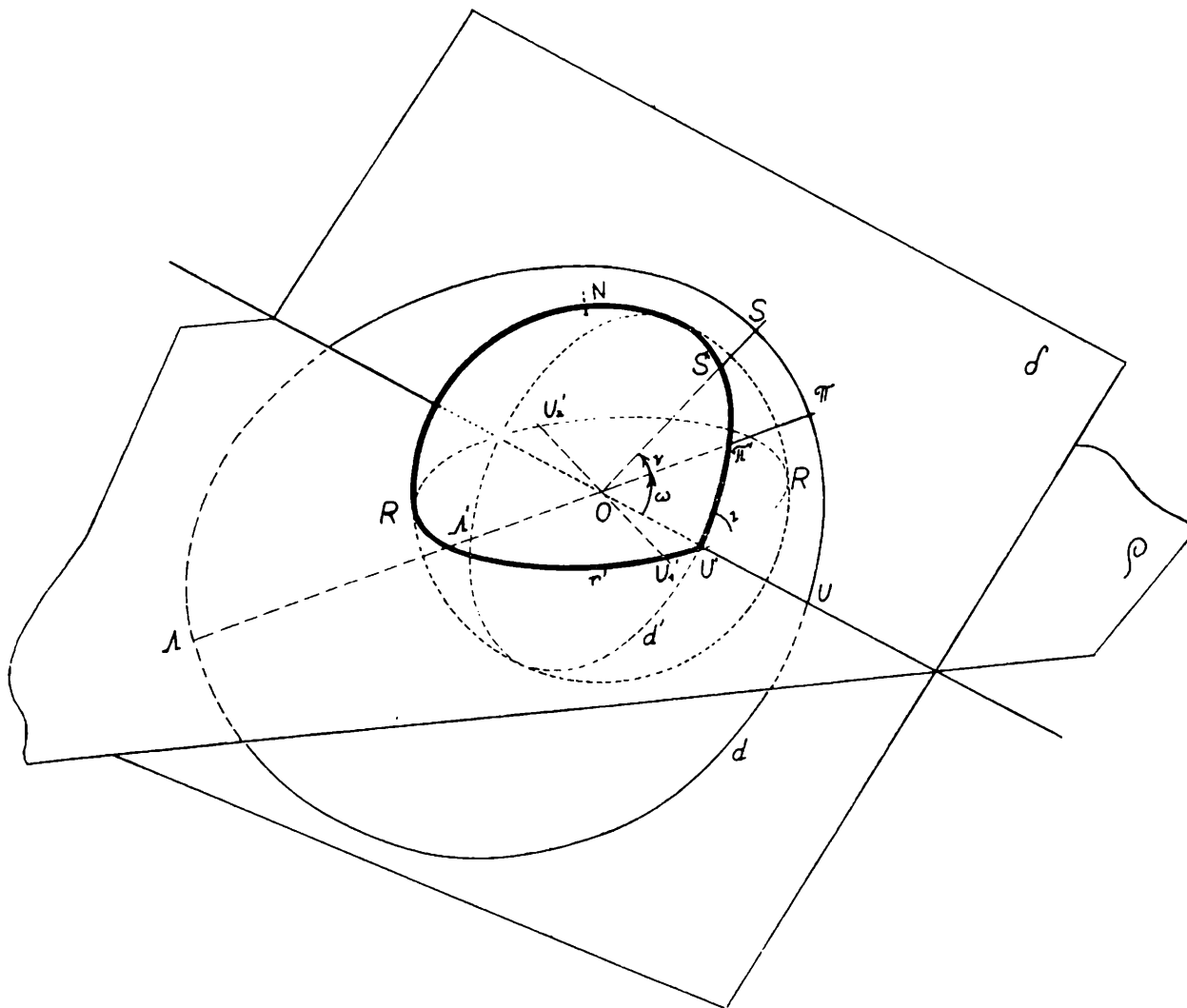
kde I závisí od rozložení hmoty Země. Pro náš zjednodušený případ $n = 5760^\circ$, $e = 0$, $\bar{a} = 1,043\,022$ (vyjádřeno v jednotkách zemského poloměru) $In/\bar{a}^2 = 8,683^\circ$, pak ústup uzlu za den činí $3,675^\circ$ a za 1 otáčku $-0,23^\circ$. Otáček družice kolem Země je právě $24 \times 60 : 90 = 16$.

Dále musíme orientovat polohu dráhy elipsy vůči uzlové přímce. Určuje ji úhel ω , tzv. *argument perigea*, úhel mezi přímkou apsid a uzlo-

vou přímkou. Ze definující směr volíme směr k perigeu. Také tento úhel se mění vlivem zploštění naší Země a podle teorie je dán vzorcem:

$$\Delta\omega^\circ/\text{den} = In/\bar{a}^2 \cdot (\frac{5}{2} \cos^2 i - \frac{1}{2}) (1 - e^2)^{-2}$$

Dosazením našich hodnot vychází $-0,46^\circ$ za den, tedy hodnota prakticky zanedbatelná, nehledě na to, že při kruhové dráze význam peri-gea a apogea nemá význam. Sovětští zpravodajové tento úhel neudávají; podle zahraničních zpráv byl u Vostoků kolem 100° . Jak později ukážeme, u posledního Voschodu byl patrně kolem 160° . Zatím jej však nebereme v úvahu.



Obr. 2

Stopa dráhy na Zemi

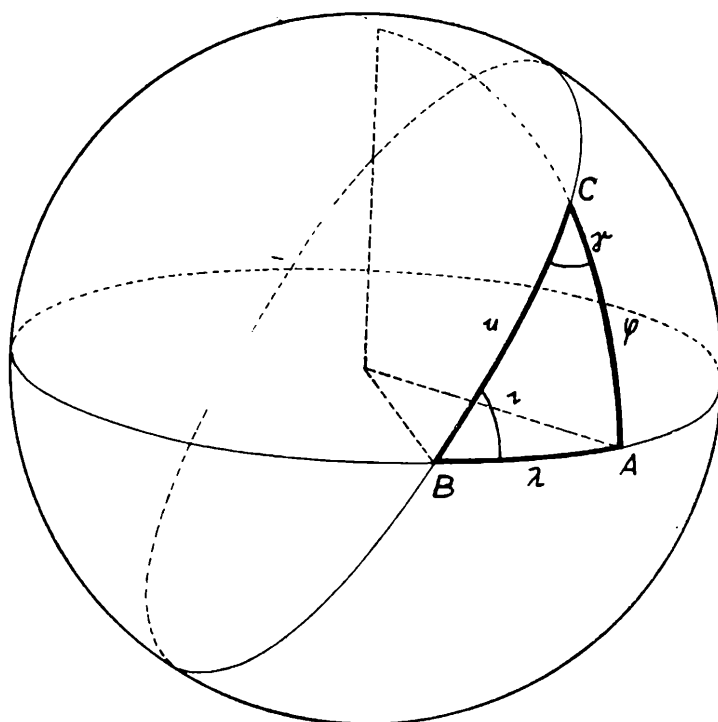
Rovina dráhy družice protíná sférickou Zemi v největší kružnici k , která svírá s rovníkem úhel i a protíná jej v bodě B . Libovolný bod C , ležící na kružnici k , je vzdálen od bodu B o veličinu u . Vedeme-li bodem C poledník, protne rovník v bodě A , a pak AB je rozdíl zeměpisných délek λ mezi bodem C a B a AC je zeměpisnou (přesněji geocentrickou)

šířkou φ bodu C . Úhel u vrcholu C nazveme γ . Pak veličiny ve sférickém trojúhelníku ABC jsou vázány vztahy (viz článek M. Menšík, Sférická geometrie v tomto čísle).

$$\cos u = \cos \varphi \cos \lambda, \quad \sin i = \frac{\sin \varphi}{\sin u}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin \lambda}{\sin u}$$

$$\cos u = \cotg i \cotg \gamma, \quad \cos i = \frac{\tg \lambda}{\tg u}, \quad \cos \gamma = \frac{\tg \varphi}{\tg u}$$

$$\cos i = \sin \gamma \cos \varphi, \quad \tg i = \frac{\tg \varphi}{\sin \lambda}, \quad \tg \gamma = \frac{\tg \lambda}{\sin \varphi}.$$



Obr. 3

Pomocí těchto rovnic můžeme vypočítat pro jednotlivá u polohu bodu C (tj. jeho zeměpisné souřadnice) bod po bodu. Sovětská akademie věd vydala soubor tabulek, kde jsou tyto veličiny tabulovány (Žonglovič-Amelin) *Sbornik tablic i nomogramov dlja obrabotki nabljudenij iskusstvennyh sputnikov Zemli*, Moskva 1960). Z tabulek uvádíme malý výpis pro sklon dráhy 65° . Uvádíme přeponu u (délku na dráze), rozdíl zeměpisných délek λ a geocentrickou šířku φ' , T je čas, který potřebovala družice - při rovnoměrném pohybu - k proběhnutí úseků u° (tj. $90 \text{ min} = 360^\circ$) a $\Delta\lambda$ je otočení Země za čas T ve stupních.

Tab. 1

u	φ'	λ	$\Delta\lambda$	T
0°	0°,00	0°,00	0°,00	0,0 min.
10	9,06	4,26	0,62	2,5
20	18,06	8,74	1,25	5,0
30	26,95	13,71	1,88	7,5
40	35,63	19,52	2,50	10,0
50	43,97	26,73	3,12	12,5
60	51,71	36,20	3,76	15,0
70	58,39	49,26	4,38	17,5
80	63,19	67,35	5,00	20,0
90	65,00	90,00	5,62	22,5

Tuto tab. 1 snadno rozšíříme pro další hodnoty $u > 90^\circ$ až do 360° , protože hodnoty φ' i λ probíhají souměrně kolem 90° a hodnoty $\Delta\lambda$ i T rovnoměrně narůstají.

Pomocí této tabulky nebo přímo pomocí našich vzorců vypočteme si některé hodnoty pro vybraná místa:

Tab. 2

	1. Praha	2. Brno	3. Bratislava	4. Bojkanur	5. Perigeum (předpoklad)
φ	+50°,08	+49°,20	+48°,15	+47°,22	
φ'	+49°,89	+49°,01	+47°,94	+47°,03	+13°,75
λ	-14°,42	-16°,62	-17°,12	-63°,42	-
λ_u	-33°,62	-32°,46	-31°,14	-30°,04	-173°,54
u	57°,55	56°,40	55°,03	53°,84	165°,00
T	+14m,39	+14m,10	+13m,76	+13m,46	+41m,25
δT	+0,16	+0,16	+0,15	+0,15	+0,45
λ_n	-30°,02	-28°,94	-27°,70	-26°,68	-163°,23
$\delta\lambda_n$	+0,0/m04	+0,0/m,04	+0,0/m,04	+0,0/m,04	+0,0/m,11
u'	122°,45	123°,60	124°,97	126°,16	15°,00
T'	+30m,61	+30m,90	+31m,24	+31m,54	+3m,75
$\delta T'$	+0,34	+0,34	+0m,35	+0m,35	+0m,05
λ'_n	-138°,73	-139°,82	-141°,05	-142°,08	-5°,52
$\delta\lambda'_n$	+0,0/m,08	+0,0/m,08	+0,0/m,09	+0,0/m,09	+0,0/m,01

Význam jednotlivých veličin: φ je zeměpisná (geografická) šířka, φ' je geocentrická šířka, λ je zeměpisná délka (počítána kladně na západ a záporně na východ od Greenwiche), λ_u je rozdíl zeměpisných délek od výstupného uzlu dráhy (úsek BA , obr. 2), u (úhel BC) je délka uvažova-

ného místa na dráze, počítána od výstupného uzlu, T je tomu odpovídající čas v minutách při oběhu $P = 90$ min., tj. $T_{\min} = u^\circ/4$, δT je změna T , zvýšíme-li periodu P o 1 minutu, λ_n je rozdíl zeměpisných délek od výstupného uzlu s ohledem na zemskou rotaci (mezitím, co družice dospěje z bodu B do C , posune se uzel B rotací Země o úhel $\frac{T}{4}$), $\delta\lambda_n$ je změna v délce, změní-li se perioda o 1 minutu. Protože se Země otáčí, ocitne se pozorovací místo C ještě jednou v rovině dráhy družice, tj. na kružnici k , tentokrát blíže k sestupnému uzlu, a to zcela symetricky vzhledem k vrcholu dráhy. Proto naše tabulka přináší i hodnoty u' , které jsou doplňkem do 180° a představují druhý průchod drahou, tentokrát na sestupné větvi. Tomu odpovídají jak příslušné časy T' , tak i jejich změny $\delta T'$ i rozdíly délek, počítané od výstupného uzlu λ'_n a jejich změny. Jak v následující kapitole ukážeme, vypočteme pomocí těchto veličin snadno tzv. *efemeridu* družice, tj. její polohu pro daný okamžik.

Výpočet přibližné efemeridy

Výpočet přibližné polohy družice tzv. *efemeridy* si rozdělíme na dvě etapy. V první vypočteme okamžik T_i , kdy družice prochází na své dráze výstupným uzlem U a v jaké zeměpisné délce se tak stane, v druhé vypočteme čas potřebný k tomu, aby družice dosáhla geocentrické rovnoběžky φ' , na které je naše pozorovací stanoviště, a v jaké zeměpisné délce se tak stane. Aby družice byla dobře pozorovatelná (slyšitelná), musí se vypočtená zeměpisná délka co nejvíce blížit zeměpisné délce stanoviště.

A. *Výpočet času průchodu uzlem.* Označme T_0 okamžik startu družice, ΔT_1 je oprava na dobu, ve které družice dosáhne kruhové rychlosti (tuto veličinu odhadujeme podle amerických pokusů, pro které se uvádí doba 6 až 8 minut); počítáme-li s hodnotou 6 min = 360 s, dostáváme pro průměrnou akceleraci hodnotu $a = \frac{v}{t}$, $v = 7900$ m/s, takže $a = 7900 \text{ m/s} : 360 \text{ s} = 22 \text{ m/s}^2$ čili 2 g; za tuto dobu uletí zhruba horizontální dráhu 1200 km rychlostí 7900 km za 1,5 min. Bude tedy hodnota $\Delta T_1 = 6^{\text{m}},0 - 1^{\text{m}},5 = 4^{\text{m}},5$; dostaneme tak efektivní dobu startu $T'_0 = T_0 + 4^{\text{m}},5$. Jinými slovy: o 4,5 min bychom museli novou družici dříve odstartovat, aby se setkala s družicí, která již obíhá na téže dráze. K této době musíme přičíst čas, který družice potřebuje, aby dospěla do výstupného uzlu. V úhlové míře to bude hodnota $360^\circ - u^\circ$, v časové míře $P - T$, kde u i T jsou hodnoty pro kosmodrom Bojkanur z naší tab. 2. Tím dostaneme okamžik prvního průchodu výstupným uzlem. Pro i -tý průchod musíme ještě přidat hodnotu $P \cdot (i - 1)$. Uvážíme-li i možnou odchylku periody ΔP od námi zvolené $P = 90,0$ min, dostaneme konečný vzorec:

$T_i = T_0 + \Delta T_1 + (P + \Delta P - T - \delta T \cdot \Delta P) + (P + \Delta P)(i - 1)$,
po úpravě:

$$T_i = T_0 + \Delta T_1 + P \cdot i - T + \Delta P(i - \delta T).$$

Dosadíme-li do vzorce numerické hodnoty pro náš případ, dostaneme:

$$T_i = T_0 + 4,5 \text{ min.} - 13,46 \text{ min.} + 90,0 \text{ min.} \cdot i + \Delta P(i - 0,15 \text{ min.})$$

$$T_i = T_0 - 8,96 \text{ min.} + 90,0 \text{ min.} \cdot i + \Delta P(i - 0,15).$$

Abychom nemusili pokaždé do vzorce dosazovat, utvoříme si tabulku pro různá i (tab. 3).

Tab. 3

i	T_i	$(i - 0,15)$	λ_i	$\delta\lambda_i$
1	1h 21m,0	0,85	346°,00	+ 0°,20
2	2 51,0	1,85	8,78	+ 0,44
3	4 21,0	2,85	31,56	+ 0,68
4	5 51,0	3,85	54,34	+ 0,93
5	7 21,0	4,85	77,12	+ 1,18
6	8 51,0	5,85	99,90	+ 1,42
7	10 21,0	6,85	122,68	+ 1,67
8	11 51,0	7,85	145,47	+ 1,91
9	13 21,0	8,85	168,25	+ 2,16
10	14 51,0	9,85	191,03	+ 2,40
11	16 21,0	10,85	213,81	+ 2,65
12	17 51,0	11,85	236,59	+ 2,89
13	19 21,0	12,85	259,37	+ 3,14
14	20 51,0	13,85	282,15	+ 3,38
15	22 21,0	14,85	304,93	+ 3,63
16	23 51,0	15,85	327,71	+ 3,87
17	25 21,0	16,85	350,49	+ 4,12
18	26 51,0	17,85	113,28	+ 4,36
atd.				

Zeměpisnou délku výstupného uzlu dostaneme z tohoto vzorce:

Pro první průchod: $\lambda_1 = \lambda - \lambda_u + \left(\frac{T_i - T'_0}{4} \right) + k \Delta\Omega$

pro i -tý průchod: $\lambda_i = \lambda_1 + \left(\frac{P}{4} + \Delta\Omega \right)(i - 1)$,

kde λ je zem. délka Bojkanuru a λ_u jeho vzdálenost v délce od výstupného uzlu. Dosadíme-li numerické veličiny $\lambda_1 = -33^\circ,38 + 19^\circ,13 + 0^\circ,19$, dostáváme pro první průchod výchozí hodnotu $346^\circ,00$, další pak na-

růstají o hodnotu $\frac{P}{4} = 22^\circ,50$, ke které musíme ještě připočítat opravu na pohyb uzlu, který v našem případě činí $+0^\circ,22$ a denní pohyb $0^\circ,06$.

Změní-li se perioda o 1 min, změní se délka o $0,25^\circ$, ale změní se i posun uzlu o $-0^\circ,09216 = -0^\circ,0057$, takže oprava činí $+0^\circ,2442$ stupně na otáčku (viz poslední sloupec tab. 3.).

Druhá etapa výpočtu je redukce na šířku pozorovacího místa. Tu získáme ze vzorce $T = \frac{u^\circ}{4}$, který byl již dříve uveden.

Príslušné veličiny pro vybraná čs. města jsou uvedeny v tab. 2. Tam nalezneme i opravu na zeměpisnou délku λ , resp. pro druhý průchod nalezneme v této tabulce hodnotu T° a λ' .

Výpočet časů a délek se pak děje podle vzorců:

$$T_v = T_i + T + \delta T \cdot \Delta P^m, \quad \lambda = \lambda_i + \lambda + \delta \lambda^{o/m} \cdot \Delta P^m,$$

$$T_s = T_i + T' + \delta T' \cdot \Delta P^m, \quad \lambda_s = \lambda_i + \lambda' + \delta \lambda'^{o/m} \cdot \Delta P^m.$$

Užití této metody a tabulek si nejlépe osvětlíme na příkladu:

Jaké podmínky viditelnosti byly pro Voschod 2 v Bratislavě 18. 3. 1965 večer?

Voschod 2 byl - jak víme - vypuštěn 18. 3. 1965 v 10 hod. MČ, čili v 7 hod. svět. času. Perioda oběhu byla $90^m,9$ tj. o $0^m,9$ vyšší než hodnoty, pro které jsou propočteny naše tabulky. Z tab. 2 zjistíme opravu $T' = +31^m,24 + 0,35 \cdot 0^m,9 = +31^m,555 \doteq +31^m,6$ a pro $\lambda' = -141^\circ,05 + 0^{o/m},09 \cdot 0^m,9 = -140^\circ,97$. Vypočteme nyní průchody pro bratislavskou rovnoběžku pro 6., 7. a 8. oběh (číslováme *ukončené* oběhy):

Pro šestý oběh platí:

$T_0.$	$7^h 00^m,0$ SČ,
tab. 3: $T_6.$	$8^h 51^m,0, \delta T 5,85$
pro $\Delta P = 0^m,9, \Delta P \cdot ST$	$5,2$
$\lambda_6.$	$99^\circ,90, \delta \lambda + 1^{o/m},42;$
$\Delta P \cdot \delta T = 0,9 \cdot 1,42$	$+1,28$
T_6 pro Voschod 2	$15^h 56^m,2$
T pro Bratislavu	$+ 31^m,6$
T_6 Bratislava .	$16^h 27^m,8$ SČ;
λ_6 Voschod 2	$101^\circ,18$
λ'	$-140^\circ,97$
λ_6 Bratislava	$- 39^\circ,79$

Pro další oběhy buď výpočet opakujeme, nebo počítáme podle vzorců:

$T_{i+1} = T_i + P$, tedy T_7 Brat. = $16^h 27^m,8 + 1^h 30^m,9 = 17^h 58^m,7$ SČ
a délka

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \frac{P}{4} + \Delta \Omega, \lambda \text{ Brat.} = -40^\circ,11 + 22^\circ,95 = -16^\circ,78 \text{ EGr.}$$

Podobně pro průchod 8 získáme $T_{8Br.} = 18^h 29^m,6$ SČ a $\lambda_{8Br.} = +6^\circ,23$. Vše platí pro bratislavskou rovnoběžku, tj. $\varphi = +48^\circ,2$. Z uvedených hodnot vidíme, že první průchod nastal v zeměpisné délce o $22^\circ,99$ na

východ od Bratislavy, naproti tomu poslední $22^{\circ},95$ na západ od Bratislavy. Prostřední průchod, který nastal v $17^{\text{h}}58^{\text{m}},7$ SČ čili v $18^{\text{h}}58^{\text{m}},7$ SEČ, naproti tomu nastal nejen na bratislavské rovnoběžce, ale i téměř na bratislavském poledníku, neboť jsme vypočetli zem. délku přeletu $-16^{\circ},78$, zatím co pro střed Bratislavy platí $\lambda = -17^{\circ},12$; jinými slovy loď měla podle našeho výpočtu prolétnout blízko zenitu. To potvrzuje i novinová zpráva, která mluví o „Voschodu nad Bratislavou“:

„Pracovníci AŮ-SAV pozorovali ve čtvrtek večer při jejím 8. obletu (poznámka: počítá se tu i neúplný oblet prvý - proto odchylka od našeho značení) směrem od SZ k JV V $18^{\text{h}}58^{\text{m}}$ proletěl zenitem poslední stupeň nosné rakety a za *necelou minutu* následovaly další dvě tělesa - zřejmě ochranný kryt družice a *kosmická loď*. Všechna tři tělesa byla velmi dobře viditelná pouhým okem “ Je tu tedy velmi dobrý souhlas. Vzhledem k výstřednosti družicové dráhy může však dojít v krajních případech k odchylkám až $\pm 2,7^{\circ}$ v délce u , čili $\pm 0,7$ min. v čase. Pro tento případ bychom musili přejít k přesnějšímu výpočtu, který naznačujeme ke konci tohoto článku. Čtenáře, kteří by se zajímali o zcela přesné výpočty, odkazujeme na skripta prof. E. Buchara, *G e o d e t i c k á a s t r o n o m i e* I. (učební texty ČVUT - Praha 1963, p. 59—61).

Odhad velikosti argumentu perigea u Voschodu 2

Na tiskové konferenci prohlásil kosmonaut A. Leonov z Voschodu 2, že experiment vstupu do vesmíru se odehrál ve výšce 300 až 400 km nad Zemí, a to před průchodem lodi perigeem. Vstup do prostoru byl nad Kavkazem a asi po 10 minutách pobytu se kosmonaut vrátil do kabiny, když loď byla nad Jenisejem.

Protože známe výstřednost dráhy (u Vostoku 2 byla 0,024), můžeme z rovnice elipsy

$$r = a(1 - e^2) / (1 + e \cos v)$$

určit i úhel v , tzv. *pravou anomálii*. Jak víme, pro Voschod $2a = 6712$ km. Pro výšku $H_1 = 400$ km bylo $r_1 = R + H_1$, tj. $6378 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6778 \text{ km}$. Podobně pro výšku $H_2 = 300$ km bylo $r_2 = 6678 \text{ km}$. Z našeho vzorce plyne pro prvý případ $v_1 = -115^{\circ},9$ a pro druhý $v_2 = -79^{\circ},2$. Záporné znaménko vyjadřuje, že se experiment odehrál před průchodem perigeem. Pro výstup, který proběhl nad Kavkazem, čili v šířce asi 45° , platí příslušné $u \doteq 51^{\circ}$, a tedy argument perigea bude $\omega = u_1 - v_1$, $\omega_1 = 51^{\circ} + 115^{\circ},5 = 166^{\circ},5$. Obdobně pro návrat do kabiny: pro Jenisej u_2 bude kolem 82° a příslušný argument $\omega = 82^{\circ} + 79^{\circ},2 = 161^{\circ},2$. Perigeum tedy leželo někde mezi 160° a 170° . Protože „Kavkaz“ se zdá lepším orientačním cílem, můžeme přijmout hodnotu $\omega = 165^{\circ}$ (viz tab. 2).

Můžeme provést i jednoduchou kontrolu času stráveného kosmonautem v prostoru. Mezi úhlem v - (pravou anomálií) - a časem t platí tzv. *rovnice středu* platící pro menší výstřednosti:

$$M = n \cdot t = v - 2e \sin v + \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e \sin 2v$$

Pro náš případ, kdy $e = 0,024$ a tedy e^2 je 0,000 57, můžeme se omezit jen na první dva členy rozvoje:

$$M = n \cdot t = v - 2e \sin v$$

Ve vzorci značí n střední úhlovou rychlost družice u Voschoďu 2, $n = 360^\circ : 90.9 \text{ min}$, tj. $3,69^\circ$ za minutu. Čas t počítáme od průchodu perigeem. Součin $n \cdot t$ je tzv. *střední anomálie* M . Protože výstřednost $e = 0,024$, bude výraz $2e$ vyjádřený ve stupních roven $2^\circ,76$, takže $M^\circ = v^\circ - 2,76^\circ \sin v$. Dosadíme-li do této rovnice naše hodnoty v_1 a v_2 , dostáváme $M_1 = 113,^\circ 0$ a příslušné $t_1 = 28,6 \text{ min.}$, $M_2 = 76^\circ,5$ a příslušné $t_2 = 19^\circ,3$, čili čas strávený v kosmu byl $t_1 - t_2 = 9,3 \text{ min}$, což velmi dobře odpovídá času udanému kosmonautem.

Další zpřesnění. Známe-li polohu perigea, můžeme své výpočty zpřesnit, protože nyní počítáme s pohybem družice ne zcela rovnoměrným na její dráze (v perigeu se pohybuje nejrychleji, v apogeu nejpomaleji). Nyní čas τ příslušný danému úhlu u můžeme počítat z těchto vztahů:

$$v = u - \omega \quad \tau = (v - 2e \sin v) : n + \tau_0,$$

kde τ_0 je čas, který družice potřebuje k proběhnutí dráhy od uzlu do perigea

$$\tau_0 = (\omega - 2e \sin \omega) : n.$$

Tím dosáhneme větší přesnosti předpovědi.

Také v těchto všech případech s výhodou můžeme počítat podle dříve uvedených tabulek Žongloviče-Amelina. Vedle řešení pravoúhlého sférického trojúhelníka přinášejí totiž i hodnoty pro rovnici středu: $v - M$, poměr $\frac{r}{a}$ a pro celou řadu hodnot různých excentrit e .

Naopak méně přesné, ale názornější jsou některé grafické metody, o kterých se zmíníme v některém z příštích článků.

P a v e l A n d r l e, Astr. ústav ČSAV:

O jednom „rozdílu“ mezi fyzikou a astronomií

(Dokončení)

Přejdeme nyní ke studiu eliptické dráhy při vodorovném vrhu. Zavedeme pravoúhlou soustavu souřadnic, která má směr os stejný jako v rovnici (1), ale počátek má ve středu elipsy. Označme souřadnice vůči této soustavě x' , y' . Mezi oběma soustavami souřadnic zřejmě platí vztahy

$$x' = x \quad y' = y - \sqrt{a^2 - b^2}; \quad (4)$$

rovnice eliptické dráhy vrženého předmětu bude

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1, \quad (5')$$

kde a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa elipsy. Naším úkolem bude určit právě tyto poloosy nebo jiné veličiny, z nichž je lze vypočíst. V problémech tohoto typu se ukazuje výhodným přejít nejdříve zpět k souřadné soustavě (4), čímž (5) přejde na tvar

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 - 2y \sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2}{a^2} = 1. \quad (5)$$

Do rovnice (5') zavedeme, jak je v astronomii zvykem, polární souřadnice, průvodič r a pravou anomálii v^1 (obr. 2) vztahy

$$x = r \sin v \quad y = -r \cos v. \quad (6)$$

Dosadíme-li (6) do (5'), dostaneme řešením takto získané rovnice

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos v}, \quad (7)$$

kde $p = a(1 - e^2)$ je parametr elipsy, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ je výstřednost (číselná) elipsy.

Abychom mohli určit p a e , uvážíme podmínky na počátku vrhu. V tento okamžik je těleso nejdál od středu Země (v apogeu) a pohybuje se pouze ve směru osy x . Matematicky tuto skutečnost zapíšeme takto: Pro čas $t = 0$ je

$$v = 180^\circ \quad r = R + h, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = -V \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = 0, \quad (8)$$

kde Δx je velmi malý přírůstek dráhy za velmi krátký časový interval Δt . Ostatní veličiny mají stejný význam jako v případě parabolické dráhy.

Viděli jsme tedy, že za čas Δt se změní souřadnice x o Δx , souřadnice y o Δy . Zrovna tak se r změní o Δr a v o Δv . Ze vztahů (6) dostaneme

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= (r + \Delta r) \sin(v + \Delta v), \\ y + \Delta y &= -(r + \Delta r) \cos(v + \Delta v) \end{aligned} \quad (9)$$

a s pomocí (6) lze psát

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta r \sin v + r \Delta v \cdot \cos v, \\ \Delta y &= -\Delta r \cos v + r \Delta v \sin v \end{aligned} \quad (10)$$

¹⁾ Pravá anomálie je úhel mezi průvodičem uvažovaného bodu dráhy a průvodičem perigea. Měříme ji ve směru pohybu tělesa.

Z posledních vztahů nám okamžitě vyplývá²⁾

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \sin v + r \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \cos v, \quad (11)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \cos v + r \frac{\Delta v}{\Delta t} \sin v$$

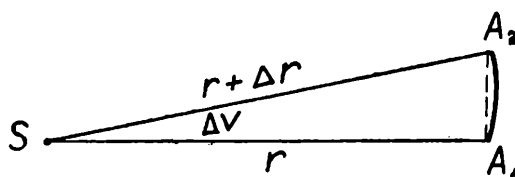
a pro $v = 180^\circ$ lze (11) zjednodušit takto

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_0 = -r \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_0; \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_0 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)_0 \quad (12)$$

a s pomocí (8)

$$V = (R + h) \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_0 \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)_0 = 0. \quad (13)$$

Z nebeské mechaniky jsou velmi dobře známy Keplerovy zákony. Druhý Keplerův zákon nám říká, že plocha opsaná průvodičem za daný časový interval je vždycky stejná. Na obr. 3 máme vyznačenu plošku opsanou průvodičem za čas Δt . Poněvadž Δv je velmi malé, liší se výseč elipsy SA_1A_2 zanedbatelně málo od trojúhelníka SA_1A_2 , takže lze její plochu vyjádřit podle sinové věty ve tvaru²⁾



Obr. 3. Plocha opsaná průvodičem za čas Δt .

$$\Delta P = \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta v = \frac{1}{2} r^2 \Delta v$$

a odtud

$$2 \frac{\Delta P}{\Delta t} = r^2 \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (14)$$

V nebeské mechanice se dokazuje, že platí

$$r^2 \frac{\Delta v}{\Delta t} = \sqrt{G \cdot M} \sqrt{p}, \quad (15)$$

kde G je gravitační konstanta, M hmota Země a p parametr elipsy z rovnice (7). Dosadíme-li za gravitační konstantu a hmotu Země, zjistíme, že $G M = 3,9863 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$. Pro $v = 180^\circ$ vyplývá z (15)

²⁾ Při úpravě (9) využíváme skutečnosti, že všechny veličiny $\Delta x, \dots$ jsou velmi malé, takže lze jejich součiny a kvadráty zanedbat. Dále lze psát $\sin v = \Delta v$, $\cos v = \sqrt{1 - \sin^2 \Delta v} \doteq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \Delta v = 1 - \frac{1}{2} (\Delta v)^2 = 1$.

s pomocí (8)

$$p = \frac{1}{G \cdot M} (R + h)^2 \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_0^2 \quad (16)$$

Dosadíme-li za $\left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_0$ z (13), dostaneme

$$p = \frac{V^2 (R + h)^2}{G \cdot M} \quad (17)$$

a podle (7)

$$R + h = \frac{p}{1 - e},$$

takže

$$e = 1 - \frac{p}{R + h} = 1 - \frac{V^2 (R + h)}{G M} \quad (18)$$

Tím je naše úloha v podstatě vyřešena. Nám však jde ještě o to určit vzájemnou polohu eliptické a parabolické dráhy. Budeme proto hledat průsečík elipsy s tečnou rovinou k povrchu Země. Přímka $y = R$ má v soustavě souřadnic (6) rovnici

$$r = - \frac{R}{\cos v}. \quad (19)$$

Odtud je vidět, že pravou anomálii v_0 průsečíku elipsy s tečnou rovinou k Zemi dostaneme jako řešení rovnice

$$\frac{p}{1 + e \cos v_0} = - \frac{R}{\cos v_0} \quad (20)$$

a odtud

$$\cos \varphi_0 = \frac{R}{p + Re}, \quad (21)$$

kde $v_0 = 180^\circ + \varphi_0$. S pomocí (17) a (18) dostaneme

$$\begin{aligned} \cos \varphi_0 &= \frac{1}{1 + \frac{V^2 h (R + h)}{G M R}} = 1 - \frac{V^2 h (R + h)}{G M R} + \\ &+ \left(\frac{V^2 h (R + h)}{G M R} \right)^2 - \end{aligned} \quad (22)$$

Vzhledem k velké hodnotě $G M$ [viz (15)], je druhý člen ve jmenovateli zlomku (22) velmi malý, takže lze všechny členy geometrické řady s výjimkou prvních dvou zanedbat a psát

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{V^2 h (R + h)}{G M R}. \quad (23)$$

Z trojúhelníku SDE na obr. 4 lze určit dálku vrhu při eliptické dráze

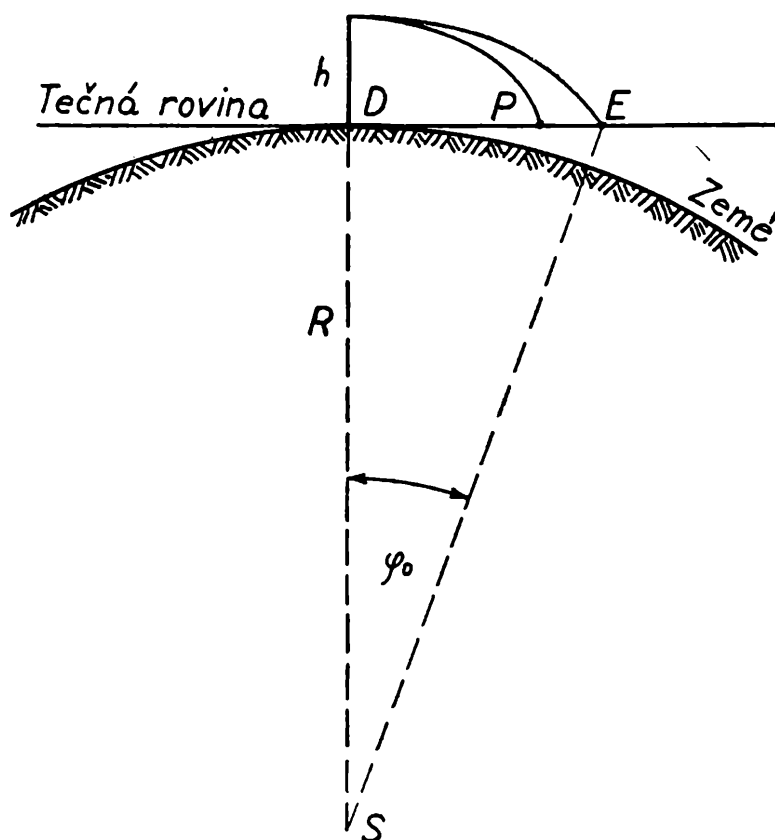
$$d_{el} = R \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (24)$$

Z (23) vyjádříme sinus úhlu φ_0 se stejnou přesností jako v (22)

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0} = \sqrt{\frac{2 V^2 h (R + h)}{G M R}}. \quad (25)$$

Nyní se omezíme na takovou přesnost, že zanedbáme všechny mocniny

$$\left[V \sqrt{\frac{h}{G M}} \right]^n$$



Obr. 4. Dálka vrhu při eliptické a při parabolické dráze.

kde $n \geq 3$. Je to nejhrubší možné přiblížení, aby se nám nesetřel rozdíl mezi elipsou a parabolou. Kvadratické členy jsme zde zanedbat nemohli, poněvadž potom by byl kosinus úhlu φ_0 roven jedné. Hlubavý čtenář jistě namítne, že v rovnicích (11) jsme také zanedbávali kvadratické členy. To je pravda, ale mezi (11) a (25) je zásadní fyzikální rozdíl. V (11) nám šlo o to, aby veličiny $\Delta x, \dots$ byly co nejmenší (ti, kdo znají základy vyšší matematiky si jistě všimli, že jsme ve skutečnosti hledali derivace daných funkcí podle času). Naproti tomu

veličiny (25) jsou dány výškou věže a rychlostí a nemůžeme je učinit libovolně malými. Proto bylo třeba brát tyto veličiny přesněji. Lze tedy pro úhel φ_0 psát

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{\frac{2 V^2 h (R + h)}{G M R}} \quad (26)$$

a podle (24)

$$d_{\text{el}} = R \cdot \sqrt{\frac{2 V^2 h (R + h)}{G M R}} = V \sqrt{\frac{2 h}{\frac{G M}{R^2}}} \sqrt{\frac{R + h}{R}} \quad (27)$$

Abychom nalezený výraz upravili, využijeme Newtonova zákona všeobecné přitažlivosti. Podle něj je na povrchu Země jednotková hmota přitahována silou

$$g_0 = \frac{G M}{R^2},$$

která je číselně rovna gravitačnímu zrychlení Země. To znamená, že platí

$$d_{\text{el}} = V \sqrt{\frac{2 h}{g_0}} \sqrt{\frac{R + h}{R}} \quad (28)$$

a podle (3)

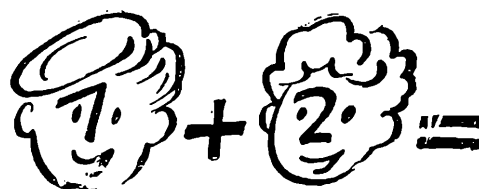
$$d_{\text{el}} = d_{\text{par}} \sqrt{\frac{R + h}{R}} = d_{\text{par}} \left(1 + \frac{h}{2R} \right). \quad (29)$$

Z (29) je vidět, že vzájemná poloha eliptické („astronomické“) a parabolické („fyzikální“) dráhy je taková, jak je v silně přehnaném měřítku vyznačeno na obr. 4. Jak poměry vypadají ve skutečnosti, tj. jak málo se elipsa a parabola navzájem liší, vyplýne z příkladu:

Pro výšku věže 100 metrů (např. střední televizní stožár) a rychlost $V = 100$ m/s (asi poloviční rychlost střely) vyplývá, že délka vrhu je přibližně 450 metrů, při čemž bod dopadu je pro eliptickou dráhu asi o 3,5 milimetru dál. Protože teprve na osmi kilometrech se povrch Země odchýlí od roviny o 5 metrů (na 450 metrech činí odchylka asi 16 mm), vidíme plnou oprávněnost posledního předpokladu v úvodu článku.

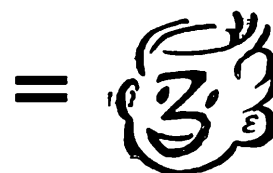
V závěru bych chtěl ještě jednou zdůraznit toto. I když necháme stranou odpor zemské atmosféry, *platí uvedené postupy pouze pro malé výšky a rychlosti*. Je samozřejmé, že např. výpočet dráhy mezikontinentální rakety je mnohem složitější.

Matematické zábavy



E v ž e n Ě í m a n, CSc., Praha.

Matematický problém



Zo Švédska hlásia tento zaujímavý úkol:

Nájdite všetky čísla, ktoré majú tu vlastnosť, že premiestením poslednej číslice pred všetky ostatné, vznikne celistvý násobok pôvodného čísla. Netreba vypisovať čísla líšiace sa od pôvodného len viacnásobným cyklickým opakovaním jeho číslic.

Keby napr. povodné číslo znelo $A = 1027$, potom premiestením poslednej číslice 7 vpred vznikne nové číslo $B = 7102$, ktoré by malo byť - ale nie je - celistvým násobkom pôvodného čísla $A = 1027$.

Vašou úlohou je práve nájsť čísla vyhovujúce danej podmienke. Mysleli sme, že by úlohu snadno rozriešil počítačový stroj, ale bolo nám povedané, že je veľmi obťažné tento problém naprogramovať. Apelujeme preto na Vás, milí priatelia, aby ste pomohli ukázať, že tu veru netreba počítačový stroj, resp. ako sa mal problém programovať. Trochou vtipu a trebár s nepatrnými matematickými znalosťami sa Vám iste podarí stanoviť aspoň niekoľko takových čísiel.

Máte na to celé prázdniny. Ak nedostaneme do troch mesiacov dostatočný počet riešení, pomôžeme Vám malým pokynom.

Mená riešiteľov, ktorí nám najskôr oznámia vyhovujúce čísla, uverejníme.

Je šestka nevyhnutelná? Řešení

V č. 2 byla uveřejněna tato úloha:

Zvolme si libovolná tři po sobě následující přirozená čísla, z nichž poslední je dělitelné třemi. Sečtěte je a v získaném součtu sečtěte jednotlivé cifry. Nedostali jste ještě šestku? Sečtěte tedy cifry posledního vypočítaného čísla. Teď už jistě vyšla šestka většině z vás. Lze dokázat, že po konečném počtu kroků, tj. výpočtů ciferných součtů, dospějeme k jednocifernému součtu, kterým je číslo šest.

Řešení. Zvolená čísla můžeme napsat ve tvaru $3k + 1, 3k + 2, 3k + 3$, přičemž je k některé přirozené číslo nebo nula. Součet s zvolených čísel je $s = 9k + 6$, což je číslo, které dává při dělení devíti zbytek šest. Stejný zbytek získáme při dělení součtu cifer čísla s devíti atd. Všechna čísla, která při postupu popsaném v textu úlohy vypočítáme, dávají při dělení devíti zbytek šest. Je třeba dokázat, že počet cifer těchto čísel klesá a že tedy nutně skončíme u jednociferného čísla. To je však zřejmé z toho, že součet cifer každého přirozeného

čísla $s < 10^n$ je menší než $9n$. Přitom je pro $n \geq 3$ číslo $9n < 10^{n-1}$. Klesne tedy po konečném počtu kroků počet cifer vypočítaných čísel pod dvě; pro dvojciferná čísla s dokazovaná věta platí.

J. Šedivý

Zajímavé číslo

V č. 3 byla na str. 140 ukázána zajímavá vlastnost čísla 210. Odečteme-li od něho kterékoli prvočíslo mezi 100 a 200, dostaneme opět prvočíslo. Protože nikdo z čtenářů se nepřihlásil na náš dotaz o existenci podobných jiných čísel - kromě uvedeného čísla 600 a intervalu (525; 600) - uvádím jako další příklad číslo 2310 a interval (2142; 2300).

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $2310 - 2143 = 167$ | 11) $2310 - 2243 = 67$ |
| 2) $2310 - 2153 = 157$ | 12) $2310 - 2251 = 59$ |
| 3) $2310 - 2161 = 149$ | 13) $2310 - 2267 = 43$ |
| 4) $2310 - 2179 = 131$ | 14) $2310 - 2269 = 41$ |
| 5) $2310 - 2203 = 107$ | 15) $2310 - 2273 = 37$ |
| 6) $2310 - 2207 = 103$ | 16) $2310 - 2281 = 29$ |
| 7) $2310 - 2213 = 97$ | 17) $2310 - 2287 = 23$ |
| 8) $2310 - 2221 = 89$ | 18) $2310 - 2293 = 17$ |
| 9) $2310 - 2237 = 73$ | 19) $2310 - 2297 = 13$ |
| 10) $2310 - 2239 = 71$ | |

O. S.

Průsečík výšek v méně známé roli. Řešení

V č. 6 byla otištěna tato úloha:

Představme si, že máme v terénu vytyčen nepravoúhlý trojúhelník ABC a jeho průsečík výšek - bod V . Umístíme-li do bodu V svou pozorovatelnu, pod jakými úhly budeme vidět strany AB , BC , CA trojúhelníka ABC ? Pro ostroúhlý trojúhelník ABC provedete výpočet jistě snadno, nezapomeňte si však ověřit, zda úvahy platí beze změny i pro tupouhlý trojúhelník ABC . Je průsečík výšek jediným bodem v rovině trojúhelníka, ze kterého jsou vidět strany trojúhelníka pod vypočtenými úhly?

Ř e š e n í. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou strany AB , BC , CA vidět z bodu V pod úhly $180^\circ - \gamma$, $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$. V tupouhlém trojúhelníku ABC s tupým úhlem β je vidět strana AC pod úhlem $180^\circ - \beta$, ale strana AB je vidět z bodu V pod úhlem γ a strana BC pod úhlem α . Při důkazu využíváme součtu úhlů v trojúhelnících určených dvěma vrcholy trojúhelníka a patou jedné výšky.

V ostroúhlém trojúhelníku ABC je průsečík výšek V jediným bodem, z něhož jsou strany trojúhelníka vidět pod vypočtenými úhly; v tupouhlém trojúhelníku existuje však ještě další bod V' téže vlastnosti.

Je to čtvrtý vrchol rovnoběžníka $AVCV'$.

Úplné řešení zaslali žáci III.B SVŠ v Ružomberku: *Dušan Baláž, Ján Putera, Karol Trnovský*; existenci bodu V' neuvažovali *Pavel Polcar* z 9. třídy ZDŠ ve Velkém Meziříčí a *Zdeněk Slanina* II.A SPŠCh v Brně.

Jaroslav Šedivý

Řešení doplňovačky z č. 3

Označme členy v 1. řádce a_i , v 2. řádce b_i , v 3. řádce c_i , ve 4. řádce d_i a v 5. řádce e_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Diference posloupnosti v k -té řádce jsou d_k ($k = 1, 2, \dots, 5$), v r -tém sloupci D_r ($r = 1, 2, \dots, 5$). Daná čísla jsou $a_4 = 11$, $c_1 = 6$, $e_5 = 54$.

Z vlastností aritmetických posloupností plyne

$$a_1 = 6 - 2 D_1 = 11 - 3 d_1$$

$$c_4 = 11 + 2 D_4 = 6 + 3 d_3$$

$$e_1 = 6 + 2 D_1 = 54 - 4 d_5$$

$$c_5 = 54 - 2 D_5 = 6 + 4 d_3$$

$$e_4 = 11 + 4 D_4 = 54 - d_5$$

$$a_5 = 54 - 4 D_5 = 11 + d_1$$

Řešením této soustavy 6 z á v i s l ý c h lineárních rovnic jsou celistvé difference

$$d_1 = 3, d_3 = 7, d_5 = 11, D_1 = 2, D_4 = 8, D_5 = 10.$$

Výsledná tabulka pak vypadá takto

2	5	8	11	14
4	9	14	19	24
6	13	20	27	34
8	17	26	35	44
10	21	32	43	54

Došlo sice několik řešení, avšak vesměs obsahovala jen výslednou tabulku bez odvození.

O. S.

Kdo na tom vydělal? Řešení

V č. 6 byla otištěna tato úloha:

V době egyptských faraónů platili rolníci daně podle výměry obdělávaných pozemků. Na tom není nic zvláštního, pozoruhodný je po matematické stránce způsob, jak určovali výběrčí daní výměru pozemků. Měřili-li pozemek, který měl tvar trojúhelníka nebo čtyřúhelníka, zjistili pouze délky stran těchto geometrických útvarů. Za obsah čtyřúhelníka se stranami a, b, c, d pak prohlašovali číslo $P' = \frac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{1}{2}(b+d)$, tj. součin průměru délek protějších stran. Pro trojúhelník používali v podstatě stejného vzorce, považovali v něm jen čtvrtou stranu za nulovou, tj. $d = 0$, číslo $P' = \frac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{1}{2}b$.

Pro čtvercový pozemek vychází při použití „egyptského“ vzorce správný výsledek $P' = a^2$. Pro všechny trojúhelníky vychází však číslo P' větší než skutečný obsah P trojúhelníka. To je okamžitě patrné z nerovností mezi stranami a výškou trojúhelníka. Zamyslete se nad tím, jaký je vztah mezi čísly P , P' u rovnoběžníků a lichoběžníků, popřípadě deltoidů. Dokažte vztah, který odhadnete. Při jakém tvaru pozemku platil rolník daň odpovídající skutečné výměře, kdy prodělával a mohl vůbec někdy vydělat?

Ř e š e n í. Má-li rovnoběžník strany a , b a výšku v , je vždy $b \geq v$. Protože je $P = a \cdot v$, $P' = a \cdot b$, je nutně $P' \geq P$. Rovnost platí jen pro pravoúhlé rovnoběžníky. Má-li lichoběžník hlavní základnu a , vedlejší c a ramena b , d , je jeho obsah $P = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$, číslo $P' = \frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{1}{2}(b + d)$. Aspoň jedno z ramen b , d lichoběžníka je však delší než výška v , je proto $\frac{1}{2}(b + d) > v$ a v důsledku toho také $P' > P$.

Svírají-li strany a , b deltoidu úhel γ , je jeho obsah $P = ab \cdot \sin \gamma$ a číslo $P' = \frac{1}{4}(a + b)^2$. Platnost nerovnosti $P' \geq P$ dokážeme snadno, vyjdeme-li z nerovnosti $(a - b)^2 \geq 4ab \cdot (\sin \gamma - 1)$ platné pro všechna kladná a , b a libovolný dutý úhel γ . Rovnost nastane jen při $a = b$, $\gamma = 90^\circ$, tj. pro deltoid, který je čtvercem. Lze dokázat, že pro všechny čtyřúhelníky platí nerovnost $P' \geq P$, přičemž rovnost platí jen pro pravoúhlé rovnoběžníky, jen tenkrát tedy rolník platil daň odpovídající výměře. Vydělat nemohl nikdy.

Nejllepší řešení uvedl *Dušan Baláž*, III.B SVŠ, Ružomberok; dobře řešili *L. Lůžek*, II.E SVVŠ, Teplice; *Z. Slanina*, II.A SPŠCh, Brno; *D. Svobodová*, SVVŠ, Praha 5; řada dalších zaslala řešení neúplná.

Jaroslav Šedivý

Řešení úlohy o jednom prvočísle

V 6. čísle letošního ročníku přinesly **R o z h l e d y** jednu úlohu o Mersehniově prvočísle $p = 2^{4423} - 1$. Položili jsme tehdy čtenářům tři otázky: Kolik číslic má v desítkové soustavě toto číslo, kterou číslicí začíná a kterou končí?

Do redakce našeho časopisu zaslali svá řešení tito čtenáři:

Miroslav Dont, SZTŠ-OM Litomyšl, *Stanislav Dvořák*, 2.E SVVŠ Teplice, *Bohumír Fátón*, 3.B SVVŠ Nový Bydžov, *Dr. Mil. Hlaváček*, Praha, *Zdeněk Kašík*, 1.C SVVŠ Jeseník, *Bohumír Kocich*, Frýdek-Místek, OU-NHKG, F3, *Pavel Kovařík*, 2. roč. SPŠ stav., Praha, *Iudmila Minaříková*, 3.D SVVŠ Teplice, *Jitka Petráčková*, 3.E SVVŠ Teplice, *Radovan Straka*, 3.B SVVŠ, Krnov, *Ervín Weigend*, 2.E SVVŠ, Teplice.

Otiskujeme řešení, jehož autorem je dr. Mil. Hlaváček.

Počet číslic a první číslici vypočteme logaritmicky. Položme $2^{4423} = x$, z čehož $\log x = 4423 \log 2$. Pro větší přesnost uijeme pro $\log 2$ mantisy

sedmimístné*) a určíme interval, ve kterém se x musí nacházet. Platí postupně

$$\begin{aligned} 0,3010299 < \log 2 < 0,3010301, \\ 4423 \cdot 0,3010299 < \log x < 4423 \cdot 0,3010301, \\ 1331,4552477 < \log x < 1331,4561323, \\ 285 \cdot 10^{1329} < x < 286 \cdot 10^{1329}. \end{aligned}$$

První číslice je tedy 2. Z charakteristiky 1331 je patrné, že počet číslic tohoto prvočísla je 1332.

Abychom určili poslední číslici, píšme

$$2^{4423} = (2^4)^{1105} \cdot 2^3 = 16^{1105} \cdot 8.$$

Každá mocnina (s celým kladným mocnitelem) celého čísla končícího číslicí 6 končí zase číslicí 6, jak lze snadno dokázat matematickou indukcí; součin s číslem 8 tedy končí číslicí 8 a odečtením 1 dostáváme 7 jako poslední číslici.

Potud tedy řešení dr. Mil. Hlaváčka. Všimněme si ještě ostatních došlých příspěvků. Můžeme říci, že všichni řešitelé došli ke správnému výsledku, i když používali různých postupů. Jako určitou závadu bychom vytkli, že při určování počtu číslic a při hledání první číslice čísla p většina řešitelů nepracovala s nerovnostmi. Odhad pomocí nerovností, jak jsme jej viděli ve výše uvedeném řešení, je zde nutný z logických důvodů. Logaritmy jsou totiž v tabulkách uváděny vždy s určitou nepřesností (závislou na počtu číslic mantisy). Znásobíme-li toto neúplné číslo dosti velikým činitelem, nepřesnost výsledku se tím ještě zvětší a je proto třeba vyšetřovat velikost této nepřesnosti.

Pokud se týče posledních číslic čísla p , tu si řešitelé všímají pravidelnosti, s jakou se opakují koncové číslice v posloupnosti mocnin $2^1, 2^2, 2^3, \dots$. Někteří přitom použili i obsáhlých tabulek (např. P a v e l K o v a ř í k). R a d o v a n S t r a k a rozlišuje čtyři případy

$$2^{4n+1}, 2^{4n+2}, 2^{4n+3}, 2^{4n+4}$$

a zkoumá, do které skupiny patří číslo 2^{4423} .

Ještě jednu závěrečnou poznámku. V šestém čísle jsme psali, že číslo p je největším dosud známým prvočíslem. Opírali jsme se přitom o knihu polského matematika prof. dr. W. Sierpińského, kterou pod názvem *A selection of problems in the theory of numbers* vydalo r. 1964 americké nakladatelství Pergamon Press.

Čtenář Adolf Kodym nás upozornil na článek D. B. Gilliese v časopise *Mathematics of computation* (1964, čís. 85, str. 93). Podle tohoto autora je největším dnes známým prvočíslem číslo $2^{11213} - 1$. Je tedy vidět, že i v této oblasti jde vývoj rychle kupředu.

J. S.

*) Najdeme ji i ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických“,



Geometrická místa bodů v prostoru

Pod tímto názvem vyšla v nakladatelství Mladá fronta nová knížka, jejímž autorem je doc. Josef Holubář. Knižka je 11. svazkem známé edice *Škola mladých matematiků*, o které pečuje ústřední výbor matematické olympiády a ústřední výbor ČSM. V našem časopise už byla zmínka o tomto novém chystaném svazku, když se v lednu 1965 jeho autor dožil sedmdesátin. Nebude však škodit, když si knížky povšimneme ještě podrobněji.

Autor vychází z toho, že je středoškolačkům celkem dobře znám pojem geometrického místa bodů v rovině, zatímco prostorové úlohy jim dělají určité potíže. Knižku rozděluje do dvou částí. První část má název *Některá analogická geometrická místa bodů v rovině a prostoru*. Autor v ní sleduje analogii mezi elipsou a rotačním elipsoidem,

mezi hyperbolou a rotačním dvoudílným hyperboloidem, mezi parabolou a rotačním paraboloidem apod. Obsáhlejší druhá část s názvem *Další příklady geometrických míst bodů v prostoru* přináší řadu úloh rozřešených i úlohy, kde řešení není uvedeno a je připojen v závorce jen výsledek. Autor všude klade důraz na přesnou formulaci a podtrhuje význam diskuse. Ke knížce je připojen doslov, kde je čtenář informován o dalších náročnějších učebnicích, jež by mu mohly pomoci při studiu. Náklad 7500 výtisků se částečně dostává na knižní trh, částečně jej matematická olympiáda zajistila pro své řešitele. Knižka se dostane též do školních matematických knihovniček. Můžeme ji všem čtenářům doporučit. Má 60 stran, 21 obrázků a stojí 2,50 Kčs.

Jiřina Sedláčková

Proveďte si objednávku Rozhledů na rok 1965/6 ještě v červnu,

nebudete mít v září nesnáze s doručováním!

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

kuželovitý	конусообразный
kvádr	прямоугольный параллелепипед
kvadrant	четверть
kvalita	качество
kvantita	количество
kvocient	знаменатель геометрической последовательности

↳ L ↳

ležet	лежать, располагаться
libovolný	любой, произвольный, какой-либо
lichoběžník	трапеция
lichý	нечетный
limita	предел, m.
lišit se	разниться
logaritmické pravítko; běžec, pevná část, posuvná část	логарифмическая линейка; бегунок, корпус, движок
logaritmovat	логарифмировать
logaritmus dekadický, přirozený	логарифм десятичный, натуральный

↳ M

mantisa	мантисса
matematický	математический
matematika	математика
méně	менее
menšenec	уменьшаемое
menšitel	вычитаемое
metoda	прием, метод, m.
mez	граница, предел, m.
mez vrženého stínu, vlastního stínu	контур падающей тени, собственной тени
mezikruží	круговое кольцо
měření	мерение, измерение
měřit	вымеривать

měřítko	масштаб
mimoběžky	скрещивающиеся прямые
minimum	минимум
minuta	минута
míti se k	относиться к .
míti vlastnost	обладать свойством
míra, oblouková	мера, радианная
mnohočlen	многочлен
mnohohran	многогранный угол
mnohonásobný	многократный
mnohostěn	многогранник
mnohoúhelník nepravidelný, pravidelný, tečnový	многоугольник неправильный, правильный, описанный
množina	множество, семейство
množství	количество
mocnina	степень
mocnitel	показатель степени
modul	модуль, m.

N

nabývat hodnoty	принимать значения
nahradit	подставить
nahrazení	подстановка, замена
najít	отыскать
nalezený	найденный
nanášet, nanést úsečku	откладывать, отложить отрезок
narýsovat	очертить
navzájem	взаимно
náčrt	набросок, эскиз
náhoda	случай
nákres	изображение
nárys	вертикальная проекция
následovat	следовать
násobek	кратное
násobenec	множимое
násobení	умножение
násobit	умножать
násobitel	множитель
násobný	кратный
nástroj	прибор
návod	указание
názornost	наглядность
nejjemnější, nejdrobnější	мельчайший
nejmenší, nejmenší společný násobek	наименьший, общее наименьшее кратное
největší, největší společná míra	наибольший, общее наибольшее делимое
nekonečně, nekonečný	бесконечно, бесконечный
neomezeně, neomezený	безгранично, неограниченный
nepohyblivý	неподвижный
nepoužitelný	неприменимый

(Pokračování)