6. ročník

FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE KONANÉ VE ŠKOLNÍM ROCE 1964-65

FO

ŠESTÝ ROČNÍK

FYZIKÁLNÍ

OLYMPIÁDY

ZPRÁVA O ŘEŠENÍ ÚLOH

ZE SOUTĚŽE KONANÉ

VE ŠKOLNÍM ROCE 1964/65

ŠESTÝ ROČNÍK

FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

PRAHA 1966

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Zpracoval Jan Tesař
Recenzovali Zdeněk Ungermann a Evžen Říman, CSc.

1. ÚVOD

Školním rokem 1964/65 zahájila soutěž fyzikální olympiáda (FO) druhé pětiletí svého trvání.

Soutěž má spolu s matematickou olympiádou (MO) vést žáky k samostatné práci, vzbudit v nich zájem o úspěšné studium matematiky a fyziky a zvýšit úroveň vyučování a vyučovací výsledky v těchto předmětech. Obě soutěže zároveň přispívají k vyhledávání a podpoře žáků vynikajících v matematice a ve fyzice, a tím pomáhají zajišťovat větší příliv matematicky a fyzikálně školených pracovníků pro naši hospodářskotechnickou výstavbu.

Obě soutěže se řídí společným organizačním řádem, který je uveřejněn ve Věstníku ministerstva školství a kultury v sešitě 12, ze dne 30. dubna 1963, a byl vyhlášen výnosem ministerstva školství a kultury (MŠK) dne 14. března 1963, č. j. 2293/63-I/1. Citovaný organizační řád obsahuje řadu opatření, která mají sloužit ke zvýšení vědomostí a znalostí matematiky a fyziky a ke vzbuzení a udržení zájmu o tyto vědecké disciplíny, které jsou tak důležité pro techniku, národní hospodářství, dopravu, kulturu a všechny obory věd. Nejdůležitější z těchto opatření jsou uvedena v brožuře V. ročník fyzikální olympiády, vydané Státním pedagogickým nakladatelstvím v roce 1965.

V letošním školním roce učinilo MŠK další krok k zvýšení úrovně vyučování matematice a fyzice, jež bude mít vliv i na zvýšení úrovně soutěže FO. Podle výnosu ze dne 25. 3. 1965, č. j. 10262/65-II/1, adresovaného odborům školství a kultury všech KNV, se MŠK rozhodlo zřídit na přírodovědné větvi středních všeobecně vzdělávacích škol (SVVŠ, na Slovensku SVŠ) od 1. září 1965 speciální třídy pro žáky nadané na matematiku a fyziku od druhého ročníku. MŠK doporučuje KNV, aby v každém kraji, a to v místě, kde je vysoká škola technického směru, byla zřízena jedna taková třída při vybrané SVVŠ.

KNV mají zřídit tuto třídu na škole, která je velmi dobře vybavena pro vyučování přírodovědným předmětům, zejména fyzice, a vyučováním v této třídě mají pověřit vynikající učitele, zvláště učitele matematiky a fyziky.

Pořadateli FO jsou podle organizačního řádu ministerstvo školství a kultury spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČMF) a s Československým svazem mládeže (ČSM).

Řízením soutěže FO pověřilo MŠK na návrh ústředního výboru JČMF ústřední výbor fyzikální olympiády (ÚV FO).

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY VE ŠKOLNÍM ROCE 1964

ÚV FO se skládá ze zástupců pořádajících institucí, tedy ze zástupce MŠK, ze zástupce JČMF, ze zástupce ČSM a z učitelů fyziky, a to jak ze základních a středních škol, tak i z vysokých škol. Funkční období členů ÚV FO je tříleté.

Kromě toho jsou členy ústředního výboru i všichni předsedové krajských výborů fyzikální olympiády (KV FO).

Sídlo ÚV FO je Praha 1 - Malá Strana, Maltézské nám. 1.

Ve školním roce 1964/65 měl ústřední výbor FO toto složení:

Předseda: RNDr. **Miloslav Valouch,** profesor matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze.

Místopředseda: RNDr. **Marta Chytilová,** vědecká pracovnice Výzkumného ústavu pedagogického v Praze.

Jednatel: **Jan Tesař,** učitel SVVŠ v. v. v Praze.

Další členové (v abecedním pořadí):

Josef Bartůněk, ústřední inspektor MŠK v Praze,

Hana Fischová, instruktorka oddělení studující mládeže ÚV ČSM v Praze,

RNDr. **Rostislav Košťál,** profesor Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově,

Zbyněk Kubíček, odborný asistent pedagogické fakulty v Olomouci, RNDr. **Ivan Náter,** zástupce docenta elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě,

Jaroslav Pospíšil, odborný asistent přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci,

Evžen Říman, CSc., docent Českého vysokého učení technického v Praze,

Emil Sokol, odborný asistent pedagogické fakulty v Košicích,

RNDr. **Ladislav Thern,** docent Vysoké školy lesnické a dřevařské ve Zvolenu,

RNDr. **Bohumil Vlach,** docent přírodovědecké fakulty J. E. Purkyně v Brně.

3. PŘEDSEDOVÉ KRAJSKÝCH VÝBORŮ FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY VE ŠKOLNÍM ROCE 1964/65

Pro řízení soutěže v prvním kole a na provedení soutěže v druhém kole v kategoriích A, B, C se zřizují krajské výbory fyzikální olympiády. Jejich předsedy a členy jmenuje odbor školství a kultury KNV na návrh poboček JČMF v kraji. Skládají se ze zástupců odboru školství a kultury, ze zástupců poboček JČMF působících v krajích, ze zástupců krajského výboru ČSM a z učitelů fyziky. V krajských výborech jsou pokud možno zastoupeni též učitelé z vysokých škol.

Ve školním roce 1964/65 byli předsedy KV FO v jednotlivých krajích:

Hl. m. Praha — **František Černický,** odborný asistent matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze.

Středočeský — **František Fišer,** učitel SVVŠ v. v. v Českém Brodě.

Jihočeský — **Konrád Hofman,** odborný asistent pedagogické fakulty v Českých Budějovicích.

Západočeský — RNDr. **Jaroslav Feifer,** docent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni.

Severočeský — **Josef Sušanka,** učitel SVVŠ v Teplicích.

Východočeský — **Zdeněk Ungermann,** odborný asistent pedagogické fakulty v Hradci Králové.

Severomoravský — **František Živný,** ředitel SVVŠ v Novém Bohumíně.

Jihomoravský — RNDr. **Rostislav Košťál,** profesor Vyššího vojenského učiliště ve Vyškově.

Západoslovenský — RNDr. **Ivan Náter,** zástupce docenta elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě.

Středoslovenský — **Andrej Grega,** odborný asistent pedagogické fakulty v Banské Bystrici.

Východoslovenský — **J. Daniel-Szabó,** profesor přírodovědecké fakulty university v Košicích.

4. OKRESNÍ VÝBORY FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

V kategorii D řídí soutěž prvního kola a provádějí soutěž druhého kola okresní výbory fyzikální olympiády (OV FO), zřízené v sídlech ONV. Okresní výbory FO se skládají ze zástupců odborů školství a kultury příslušného ONV, ze zástupců příslušné pobočky JČMF, ze zástupců okresního výboru ČSM a ze tří až pěti učitelů. Členy OV FO jmenuje odbor školství a kultury ONV.

Zřízení okresního výboru FO ohlásí jeho předseda příslušnému KV FO a ÚV FO.

5. POKYNY K ÚPRAVĚ, POSTUPU ŘEŠENÍ A KLASIFIKAČNÍ ZÁSADY PRO OPRAVOVÁNÍ ÚLOH SOUTĚŽE

Účastníci soutěže vypracují ve stanovených termínech řešení každé úlohy samostatně, přehledně, čitelně a úpravně na zvláštním půlarchu formátu A4. Pokyny pro úpravu záhlaví prvního listu jsou uvedeny vždy v letáku fyzikální olympiády.

Pomocné obrázky, náčrty nebo schémata k řešení úlohy se provádějí tužkou pomocí pravítka a kružidla.

Úlohy se řeší nejprve obecně a teprve potom se provádí výpočet číselné hodnoty hledané fyzikální veličiny.

V obecném řešení je nutno vysvětlovat a zdůrazňovat postup řešení. Řešení bez slovního výkladu se hodnotí jako nevyhovující.

Při výpočtu číselné hodnoty hledané veličiny z obecných vztahů se dosazují za obecné veličiny jejich číselné hodnoty i s jednotkami a s jednotkami se počítá až do konečného výsledku.

Do složitých obecných vztahů je možno dosazovat za dané veličiny jen jejich číselné hodnoty a k číselnému výsledku připsat příslušnou jednotku. V takovýchto případech je však nutno provést rozměrovou zkoušku.

Řešení úloh se klasifikuje takto:

a) výborně, jestliže je úloha řešena správně nebo řešení má nanejvýš jen formální chyby nebo jen malou odbornou závadu;

b) dobře, jestliže řešení vystihuje úkol, který měl řešitel podat, ale má přitom větší odborné nedostatky. Dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky;

c) nevyhovující, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné nebo je podané řešení z větší části neúplné. Řešení je nevyhovující také tehdy, jestliže chybí výklad postupu nebo je neúplný, takže z něho nelze posoudit myšlenkový postup podaného řešení. Také nesamostatně vypracované úlohy jsou nevyhovující.

Při řešení úloh se mají žáci opírat především o učebnice fyziky. Učitel fyziky nebo referent FO jim poradí i jiné vhodné studijní pomůcky. Jednota československých matematiků a fyziků vydává pro žáky časopis Rozhledy matematicko-fyzikální, ve kterém najdou studijní texty a další zprávy o soutěži. Doporučujeme proto žákům, aby tento časopis odbírali.

6. PRŮBĚH SOUTĚŽE VE ŠKOLNÍM ROCE 1964/65

Soutěž FO probíhala podle organizačního řádu ve čtyřech kategoriích. V kategorii A soutěžili žáci třetích ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol (SVVŠ, na Slovensku SVŠ) a třetích a čtvrtých ročníků středních odborných škol (SOŠ), v kategorii B žáci druhých ročníků a v kategorii C žáci prvních ročníků všech středních výběrových škol. Soutěže v kategorii D se zúčastnili žáci devátých tříd základních devítiletých škol (ZDŠ).

Účast v kategorii pro vyšší třídu mohl povolit žáku z nižší třídy vyučující učitel spolu s referentem FO na škole.

Soutěž v kategoriích B, C, D se konala ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

A. *První kolo soutěže*

První kolo soutěže probíhalo na školách v kategoriích A, B, C od září 1964 do 15. února 1965, v kategorii D od září 1964 do 31. března 1965.

V prvním kole všech čtyř kategorií měli soutěžící žáci za úkol vyřešit devět úloh. Kromě toho měli žáci soutěžící v kategoriích A, B, C prostudovat samostatně po jednom studijním tématu uveřejněném v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální.

Úlohy pro první kolo soutěže navrhovali s. Hofman, s. Tesař a s. Černický v kategorii A — v kategorii B s. Živný, s. Grega, s. Bayer, s. Tesař; v kategorii C s. dr. Chytilová, s. Tesař; v kategorii D prof. dr. Košťál, dr. Chytilová.

Úspěšnými řešiteli prvního kola byli ti žáci, kteří úspěšně (tj. s klasifikací 1. nebo 2. stupně) řešili z daných devíti úloh aspoň šest. Experimentální úlohu musil řešit (třeba neúspěšně) každý, aby se mohl stát úspěšným řešitelem prvního kola soutěže.

Řešení prvních tří úloh odevzdali žáci soutěžící v kterékoli kategorii svému učiteli fyziky nejpozději do 30. listopadu 1964, úlohu čtvrtou až šestou do 10. ledna 1965 v kategoriích A, B, C a do 31. ledna 1965 v kategorii D, úlohu sedmou až devátou do 15. února 1965 v kategoriích A, B. C a do 31. března 1965 v kategorii D.

Pokyny pro soutěžící žáky a pro učitele byly uveřejněny v časopise Rozhledy matematicko- fyzikální, ročník 43, sešit 1. V témže čísle byly uveřejněny úlohy pro první kolo šestého ročníku FO pro všechny kategorie.

Kromě toho byly vydány ve Státním pedagogickém nakladatelství dva letáky s titulem VI. ročník soutěže fyzikální olympiáda, jeden pro kategorii D, jeden pro kategorie A, B, C. V těchto letácích byly podávány žákům přesné a podrobné informace o organizaci soutěže, pokyny pro soutěžící žáky a učitele a texty úloh pro první kolo soutěže všech čtyř kategorií. Leták pro kategorie A, B, C byl vydán v nákladu 5 000 výtisků, leták pro kategorii D v nákladu 10 000 výtisků. Letáky byly zaslány jednotlivým KV FO, které je doručily školám. Autorem obou letáků je jednatel ÚV FO.

Časopis Rozhledy matematicko-fyzikální obsahuje také témata k prostudování pro první kolo šestého ročníku FO, a to pro kategorii A v čísle 2, str. 93 a v čísle 3 na str. 123; pro kategorii B v čísle 4 na str. 184 a v čísle 5 na str. 226; pro kategorii C v čísle 2 na str. 88 a v čísle 3 na str. 130. Uvedená témata jsou otisknuta také v této publikaci na str. 59 až 133.

Učitelé fyziky na školách vybrali ve stanovených termínech od soutěžících žáků řešené úlohy a opravili a zhodnotili je po dohodě s referenty pro FO na škole. Podle výsledné klasifikace úloh vybrali referenti pro FO spolu s ředitelem školy a s předmětovou komisí pro fyziku žáky, kteří ukončili úspěšně první kolo soutěže. Po skončení prvního kola soutěže odeslali referenti pro FO opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) spolu s návrhem na zařazení úspěšných řešitelů do druhého kola soutěže příslušnému KV FO (v kategoriích A, B, C) a OV FO (v kategorii D). Po kontrole úloh rozhodl KV FO (v kategoriích A, B, C), popř. OV FO (v kategorii D) o definitivním zařazení úspěšných řešitelů do druhého kola soutěže. Počet žáků vybraných do druhého kola soutěže z téže školy nikde nepřestoupil kvótu 10 % celkového počtu žáků příslušného ročníku této školy.

Počet soutěžících žáků v prvním kole soutěže v jednotlivých kategoriích je uveden podle krajů v tabulce II na str. 22.

B. *Druhé kolo soutěže*

Druhé kolo soutěže FO se konalo v kategoriích A, B, C jako kolo krajské, v kategorii D jako kolo okresní.

Úlohy pro druhé kolo soutěže navrhli s. Hofman, s. Tesař a s. Javůrek v kategorii A; v kategorii B s. Živný, s. Bayer, s. Tesař; v kategorii C s. Ungermann; v kategorii D s. dr. Košťál, s. dr. Chytilová a s. Novotný.

S. Valouchová, s. Matyášová a s. Březinová ze sekretariátu ÚV JČMF rozmnožily v lednu 1965 texty a autorská řešení úloh a zaslaly je k prostudování členům ÚV FO s. dr. Valouchovi, s. dr. Chytilové, s. Tesařovi, s. Hofmanovi, s. dr. Feiferovi, s. dr. Košťálovi, s. Fišerovi a s. Ungermannovi. Na schůzi uvedených členů ÚV FO konané dne 19. února v Praze byly vybrány, upraveny a schváleny v definitivním znění úlohy pro druhé kolo soutěže, a to pro kategorie A a B čtyři teoretické a jedna experimentální úloha, pro kategorii C a D čtyři teoretické úlohy.

Koncem měsíce února 1965 rozeslal ÚV FO na jednotlivé KV FO podrobné pokyny o organizaci druhého kola soutěže v kategoriích A, B, C; zejména podrobně byly v pokynech uvedeny pomůcky potřebné k řešení experimentálních úloh. Texty úloh pro druhé kolo kategorií A, B, C byly rozeslány v polovině března v zalepených obálkách KV FO. Texty experimentálních úloh byly ve zvláštních obálkách, protože se tyto úlohy pracovaly v druhém soutěžním dnu, kdežto teoretické v prvním dnu. Jedna z úloh v každé kategorii je kontrolní; kontrolovala, zda žáci prostudovali předepsané studijní téma.

Druhé kolo kategorií A, B, C se konalo současně ve všech krajích ve dnech 27. a 28. března 1965. Konalo se zpravidla v krajském městě, jen v některých krajích pro každou kategorii v jiném městě.

Řešené úlohy opravili členové KV FO. Úspěšnými řešiteli byli ti žáci, kteří vyřešili úspěšně v kategoriích A, B alespoň tři, v kategoriích C a D alespoň dvě úlohy. Nejlepší řešitelé druhého kola soutěže dostali od KV FO čestná uznání a knižní nebo věcné ceny, které jim byly předány buď na slavnostech uspořádaných KV FO po ukončení druhého kola soutěže, nebo prostřednictvím ředitelství škol, na kterých studují.

Přehled o počtu soutěžících žáků v druhém kole kategorií A, B, C FO je uveden v tab. IV na str. 26.

Pro kategorii B a C bylo druhé kolo závěrečné. Nejlepší z úspěšných řešitelů druhého kola FO v kategorii A byli doporučeni KV FO do soutěže třetího kola, která je kolem celostátním.

Druhé kolo kategorie D bylo organizováno jako kolo okresní a konalo se v okresech současně v neděli dne 25. dubna 1965 dopoledne, výjimečně se svolením příslušného školského odboru ONV v pondělí 26. dubna dopoledne. Texty úloh pro kategorii D, schválené na schůzi ÚV FO dne 19. února 1965, byly zaslány okresním výborům FO v zalepených obálkách s upozorněním, že obálky mohou být otevřeny teprve těsně před zahájením soutěže za přítomnosti soutěžících žáků.

Vypracované úlohy opravili členové OV FO. Úspěšnými řešiteli v kategorii D byli, právě tak jako v kategorii C, ti žáci, kteří vyřešili úspěšně aspoň dvě ze zadaných úloh. Všechny úlohy druhého kola v kategorii D byly teoretické.

Okresní výbory FO sestavily seznamy a pořadí úspěšných řešitelů a poslaly KV FO zprávu o průběhu a výsledcích druhého kola v kategorii D.

Druhé kolo soutěže FO v kategorii D bylo zakončeno téměř ve všech okresech závěrečnou besedou, na které byla úspěšným řešitelům předána čestná uznání, popř. i knižní nebo věcné dary, jež poskytla sdružení rodičů a přátel školy. Nejlépe se osvědčily závěrečné slavnosti na těch okresech, kde konaly závěrečné besedy okresní výbory FO a MO společně.

C. *Třetí kolo soutěže*

Třetí, celostátní kolo soutěže FO, se konalo ve dnech 29. a 30. dubna 1965 v Bratislavě. Jeho přípravou a organizací byl pověřen KV FO Západoslovenského kraje.

Úlohy pro toto kolo (čtyři teoretické a jednu experimentální) navrhli s. dr. Náter, s. dr. Chytilová, s. Baník, s. Zámečník. Byly vybírány stejným způsobem jako úlohy pro druhé kolo soutěže a zároveň s nimi. V definitivním znění byly schváleny na schůzi ÚV FO dne 19. února 1965. Na této schůzi byl zároveň schválen program třetího kola.

Účastníci třetího kola byli určeni na schůzi ÚV FO, která se konala dne 24. dubna 1965. Účastnili se jí členové ÚV FO s. dr. Valouch, s. dr. Chytilová, s. Tesař a předsedové všech KV FO nebo jejich zástupci. Z návrhů podaných krajskými výbory FO bylo vybráno do třetího kola soutěže 78 úspěšných řešitelů úloh druhého kola soutěže, kteří měli v klasifikaci úloh druhého kola součet známek 5 až 9, a ti, jimž při klasifikaci těchto úloh vyšel součet 10, pokud vypracovali nevyhovujícím způsobem nejvýše jednu z úloh druhého kola. V Západočeském, Středoslovenském a Východoslovenském kraji byly tyto podmínky splněny jen u jednoho z žáků těchto krajů, v Severočeském u žádného řešitele. Proto byl počet účastníků třetího kola doplněn v těchto krajích žáky se součtem známek 10 a se dvěma úlohami řešenými nevyhovujícím způsobem, aby každý kraj byl ve třetím kole zastoupen aspoň dvěma účastníky.

Z hlavního města Prahy bylo do třetího kola pozváno 36 účastníků, ze Středočeského kraje 3, z Jihočeského kraje 4, ze Západočeského a Severočeského po dvou, z Východočeského a Severomoravského po sedmi, z Jihomoravského 6, ze Západoslovenského 7, ze Středoslovenského a Východoslovenského po dvou. Pozvánky do třetího kola byly uvedeným žákům doručeny prostřednictvím škol, na kterých studovali. V podrobných pokynech byli účastníci třetího kola seznámeni s celkovou organizací třetího kola soutěže, včetně příjezdu do Bratislavy, ubytování, stravování a odjezdu z Bratislavy.

Z pozvaných žáků se k soutěži nedostavila jedna žákyně z Prahy, jejíž neúčast pro náhlé onemocnění byla telegraficky omluvena ředitelstvím školy. Ostatní žáci v počtu 77 se sjeli do Bratislavy ve středu 28. dubna v odpoledních a večerních hodinách. Následujícího dne se shromáždili v 7h 45 min ve velké posluchárně v budově Komenského university na Šafaříkově náměstí.

Shromážděné žáky přivítal za KV FO Západoslovenského kraje s. dr. Náter, jménem ÚV FO prof. dr. Košťál a také zástupce povereníctva školství jim tlumočil pozdrav a přál jim úspěch v soutěži. Potom dostali žáci pokyny, jak mají upravit písemné řešení úloh, a byly jim rozdány potřebné papíry a texty čtyř soutěžních teoretických úloh.

Dozor při řešení úloh konali členové ÚV FO s. Bartůněk, s. prof. dr. Košťál, s. doc. Feifer, s. dr. Náter, s. Fišer a s. Tesař a členové KV FO Západoslovenského kraje.

Odpoledne téhož dne uspořádal pro účastníky soutěže KV FO Západoslovenského kraje autokarový zájezd na Děvín spojený s prohlídkou zřícenin hradu a slovenského pohřebiště v blízkosti hradu. Večer navštívili žáci ve Slovenském národním divadle činohru Lišky, dobrú noc.

Dne 30. dubna se konala v laboratořích strojní fakulty Slovenské vysoké školy technické druhá část soutěže, experimentální úloha. Žáci byli rozděleni na tři skupiny, které postupně po hodině přicházely, aby dokončily poslední část soutěže. Dozor při měření v laboratořích měl s. dr. Náter, asistenti elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické a všichni členové ÚV FO, kteří se třetího kola zúčastnili, pokud nekonali dozor u skupiny, která v sousední místnosti zpracovávala výsledky získané měřením. I v této místnosti konali dozor asistenti elektrotechnické fakulty z Bratislavy. V odpoledních hodinách dne 30. dubna 1965 se žáci rozjížděli do svých domovů.

Třetí kolo soutěže proběhlo bez závad, neboť bylo výborně připraveno. Při řešení teoretických úloh byli žáci rozsazeni v takových vzdálenostech od sebe a dozor byl tak dokonalý, že opisování a nesamostatná práce byly téměř nemožné. Experimentální úlohy byly připraveny tak, že 26 žáků mohlo samostatně pracovat, každý se samostatnou soupravou měřicích přístrojů. K defektu některého z přístrojů během měření nedošlo. Hlavní zásluhu o bezvadný průběh soutěže má s. dr. Náter a asistenti elektrotechnické fakulty Slovenské vysoké školy technické, kteří ochotně po oba dny věnovali svůj volný čas pracím spojeným s průběhem soutěže.

Každou úlohu třetího kola opravovali nezávisle na sobě dva recenzenti, kteří se pak dohodli na společné známce. Aspoň jeden z nich byl ve všech případech členem ÚV FO a ten ručil za správnost hodnocení opravené úlohy každého žáka. První úlohu opravoval s. prof. dr. Košťál s členy KV FO Jihomoravského kraje, druhou s. Frant. Fišer a s. Kurt Fišer, třetí s. doc. dr. Feifer s členy KV FO Západočeského kraje, čtvrtou s. Tesař a s. dr. Chytilová a pátou s. dr. Náter s asistenty elektrotechnické fakulty Slovenského vysokého učení technického v Bratislavě.

Úspěšnými řešiteli třetího kola soutěže byli žáci, kteří uspokojivě vyřešili aspoň tři ze soutěžních úloh. Bylo jich 46.

Pořadí úspěšných řešitelů a prvních dvacet vítězů stanovil ÚV FO na schůzi, která se konala v Praze dne 27. května 1965. Na této schůzi byly zároveň navrženy věcné i knižní odměny vítězům třetího kola v celkovém obnose 12 000 Kčs.

Přehled o výsledcích třetího kola soutěže je patrný z tabulek VI a VII na str. 40 a 43.

7. VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

A. *Soutěž prvního kola v kategoriích A, B, C*
Přehled o počtu soutěžících žáků v prvním kole soutěže FO podle jednotlivých krajů v kategoriích A, B, C podávají tabulky I, II, III.

Tabulka I

Počet škol zapojených do soutěže

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C		
	SVVŠ	SOŠ	celkem	SVVŠ	SOŠ	celkem	SVVŠ	SOŠ	celkem
Hl. m. Praha	10	2	12	16	3	19	17	5	22
Středočeský	11	–	11	13	1	14	18	2	20
Jihočeský	6	–	6	5	–	5	7	2	9
Západočeský	10	1	11	13	2	15	14	3	17
Severočeský	16	–	16	11	–	11	19	3	22
Východočeský	29	4	33	35	4	39	36	12	48
Severomoravský	19	2	21	21	1	22	26	10	36
Jihomoravský	25	2	27	30	3	33	33	13	46
Západoslov.	14	–	14	16	2	18	27	6	33
Středoslov.	7	1	8	13	1	14	25	6	31
Východoslov.	8	3	11	6	–	6	7	2	9
Celkem	155	15	170	179	17	196	229	64	293

Z tabulky I je patrno, že do prvního kola soutěže se zapojilo v kategorii A 155 SVVŠ a 15 středních odborných škol (SOŠ), v kategorii B 196 škol (179 SVVŠ a 17 SOŠ), v kategorii C 293 školy

Tabulka II

Přehled o počtu soutěžících v prvním kole

Vysvětlivky: S – počet soutěžících, Ú – počet úspěšných řešitelů

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek
Hl. m. Praha	126	15	85	5	98	22	60	12	169	34	118	20	393	71	263	37
Středočeský	32	7	18	2	40	9	18	4	65	20	47	13	137	36	83	19
Jihočeský	12	–	12	–	11	2	11	2	40	7	32	5	63	9	55	7
Západočeský	29	6	17	3	46	5	15	3	106	8	30	1	181	19	62	7
Severočeský	61	18	32	6	61	23	41	13	254	87	117	45	376	128	190	64
Východočeský	154	30	46	3	238	51	50	5	399	97	109	25	791	178	205	33
Severomoravský	65	10	55	8	74	13	30	3	185	42	51	7	324	65	136	18
Jihomoravský	98	10	48	4	155	39	57	7	344	80	108	20	597	129	213	31
Západoslovenský	70	16	27	8	112	35	21	4	254	99	41	12	436	150	89	24
Středoslovenský	14	2	10	1	28	12	13	1	71	25	37	11	113	39	60	13
Východoslovenský	35	4	27	4	25	5	16	2	53	18	29	8	113	27	72	14
Celkem	696	118	377	44	888	216	332	56	1 940	517	719	167	3 524	851	1 428	267

Tabulka III

Počet úloh 1. kola opravených učiteli na školách

Kategorie	A			B			C			Celkový počet oprav. úloh		
Klasifikace	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Hl. m. Praha	352	376	298	224	303	236	305	527	412	881	1 206	946
Středočeský	105	127	26	116	135	96	198	256	167	419	518	289
Jihočeský	75	8	25	71	5	23	182	24	22	328	37	70
Západočeský	68	76	54	92	106	85	251	263	212	411	445	351
Severočeský	236	105	121	131	83	49	834	363	129	1 201	551	299
Východočeský	248	67	14	253	103	15	502	269	52	1 003	439	81
Severomoravský	324	154	11	181	157	83	456	335	162	961	646	256
Jihomoravský	212	234	83	357	229	257	626	610	605	1 195	1 073	945
Západoslovenský	157	163	105	212	162	99	373	421	472	742	746	676
Středoslovenský	28	60	37	57	85	46	171	235	127	256	380	210
Východoslovenský	124	57	40	39	77	25	73	161	155	236	295	220
Celkem	1 929	1 427	814	1 733	1 445	1 014	3 971	3 464	2 515	7 633	6 336	4 343

(229 SVVŠ a 64 SOŠ). Na většině těchto škol soutěžili žáci ve všech kategoriích. Celkový počet škol zapojených do soutěže VI. ročníku FO je 351, z toho 269 SVVŠ a 82 SOŠ.

Řešitelů prvního kola soutěže bylo podle tabulky II v kategorii A 696, v kategorii B 888, v kategorii C 1 940. Úspěšně vyřešilo úlohy I. kola v kategorii A 377 (54,2 %), v kategorii B 332 (37,4 %), v kategorii C 719 (37,1 %) žáků z celkového počtu soutěžících žáků v těchto kategoriích. Celkem soutěžilo v prvním kole 3 524 chlapců a dívek a s úspěchem absolvovalo toto kolo 1 428 (40,5 %) soutěžících chlapců a dívek.

Z celkového počtu soutěžících bylo v prvním kole v kategorii A dívek 118 (17,1 %), v kategorii B 216 (24,3 %), v kategorii C 517 (26,6 %) dívek. V průměru se účastnilo prvního kola 24,1 % dívek.

Přitom bylo z celkového počtu chlapců v každé kategorii úspěšných: v kategorii A 57,6 %, v kategorii B 41,1 %, v kategorii C 38,8 % chlapců; z celkového počtu dívek v jednotlivých kategoriích bylo v kategorii A úspěšných 37,3 %, v kategorii B 25,9 %, v kategorii C 32,3 % dívek. Ve všech kategoriích úhrnem (A, B, C) bylo úspěšných 43,3 % chlapců z celkového počtu chlapců a 31,4 % dívek z celkového počtu dívek.

Přehled o počtu úloh opravených v prvním kole učiteli fyziky a referenty FO na školách je uveden v tabulce III.

V průběhu prvního kola opravili učitelé fyziky a referenti FO na školách celkem 18 312 úloh. Z nich bylo klasifikováno známkou prvního stupně

7 633 (41,7 %), známkou druhého stupně 6 336 (34,6 %) úloh. Nevyhovujících úloh bylo 4 343 (23,7 %).

B. *Soutěž 2. kola v kategoriích A, B, C*

KV FO nemají většinou možnost pozvat k soutěži krajského kola FO všechny úspěšné řešitele prvního kola. Jsou vázáni jednak finančními prostředky, které jim uvolňuje KNV k provedení druhého kola soutěže, jednak možností ubytovat účastníky druhého kola soutěže a také možností opatřit si dostatečný počet souprav pomůcek k provedení experimentální úlohy. Proto pozvou do krajského kola soutěže jen omezený počet účastníků, které vybírají z těch řešitelů prvního kola soutěže, kteří odevzdali nejlépe řešené úlohy prvního kola. Proto je počet účastníků druhého kola menší, než je počet úspěšných řešitelů prvního kola.

Přehled o počtu soutěžících v druhém kole podle krajů je v tabulce IV.

Z tabulky IV je patrno, že do druhého kola se dostalo 1 272, tj. 84,1 % úspěšných řešitelů prvního kola soutěže.

Celkem soutěžili v druhém kole soutěže FO žáci z 206 SVVŠ a 42 SOŠ. Dívek se účastnilo druhého kola 225, tj. 17,7 % z celkového počtu soutěžících žáků; v jednotlivých kategoriích bylo dívek: v kategorii A 35 (10,6 %), v kategorii B 44 (14,5 %) a 146 (22,7 %) v kategorii C. Procenta jsou počítána z celkového počtu soutěžících žáků v jednotlivých kategoriích.

Tabulka IV

Přehled o počtu soutěžících v druhém kole

Vysvětlivky: S – počet soutěžících, Ú – počet úspěšných řešitelů

Kraj	Kategorie A				Kategorie B				Kategorie C				Celkem			
	S		Ú		S		Ú		S		Ú		S		Ú	
	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek	celkem	z toho dívek
Hl. m. Praha	56	2	45	2	57	5	31	4	76	7	25	1	189	14	101	7
Středočeský	13	1	6	–	14	4	3	–	38	11	8	2	65	16	17	2
Jihočeský	12	–	9	–	11	2	5	1	32	5	8	–	55	7	22	1
Západočeský	17	3	5	1	13	3	3	–	27	–	10	–	57	6	18	1
Severočeský	30	5	4	–	33	10	8	1	109	43	11	3	172	58	23	4
Východočeský	43	3	16	1	40	3	14	–	104	23	17	3	187	29	47	4
Severomoravský	50	6	22	3	29	3	5	–	51	7	16	3	130	16	43	6
Jihomoravský	47	4	15	1	52	7	11	1	102	20	24	–	201	31	50	2
Západoslovenský	26	6	10	1	20	4	3	–	38	10	11	3	84	20	24	4
Středoslovenský	10	1	3	–	13	1	3	–	37	12	10	3	60	14	16	3
Východoslovenský	27	4	4	–	16	2	5	–	29	8	9	3	72	14	18	3
Celkem	331	35	139	9	298	44	91	7	643	146	149	21	1 272	225	379	37

Tabulka V

Přehled o počtu úloh opravených členy KV FO

Kategorie	A			B			C			Celkem			Celkový počet opr. úloh
Klasifikace	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Praha	120	90	64	54	82	55	21	33	173	195	205	292	692
Středočeský	20	18	17	12	22	16	24	60	47	56	100	80	236
Jihočeský	23	11	26	7	11	37	21	15	92	51	37	155	243
Západočeský	15	16	54	5	12	48	16	20	72	36	48	174	258
Severočeský	8	38	104	14	32	119	17	36	383	39	106	606	751
Východočeský	51	50	114	30	50	120	36	47	333	117	147	567	831
Severomoravský	45	74	131	16	41	88	14	44	146	75	159	365	599
Jihomoravský	29	46	116	29	41	137	48	35	261	106	122	514	742
Západoslovenský	29	30	71	3	32	65	26	17	109	58	79	245	382
Středoslovenský	4	9	25	5	11	49	9	25	114	18	45	188	251
Východoslovenský	6	7	7	6	9	10	5	14	17	17	30	34	81
Celkem	350	389	729	181	343	744	237	346	1 747	768	1 078	3 220	5 066

Úspěšných řešitelů úloh druhého kola bylo 379, tj. 29,8 % z celkového počtu soutěžících žáků. V jednotlivých kategoriích byl tento stav: v kategorii A 139 (42 %), v kategorii B 91 (30,5 %), v kategorii C 149 (23,2 %). Z celkového počtu chlapců bylo úspěšných 32,7 %, z celkového počtu dívek 16,8 %. V jednotlivých kategoriích jsou tyto výsledky: v kategorii A 43,9 %, v kategorii B 33,4 %, v kategorii C 25,7 % chlapců z celkového počtu chlapců; v kategorii A 25,7 %, v kategorii B 15,9 % a v kategorii C 16,4 % dívek z celkového počtu dívek.

Přehled o počtu úloh opravených členy KV FO je uveden v tabulce V. Výborně bylo klasifikováno 22,3 % úloh, dobře 24 % úloh a nevyhovujících řešení bylo 53,7 %.

Dále uvádíme jmenný seznam nejlepších deseti řešitelů kategorií A, B, C. V kategorii A označujeme tučným písmem žáky, kteří postoupili do třetího kola soutěže. V Praze postoupilo do třetího kola 36 úspěšných řešitelů druhého kola soutěže.

Pořadí prvních deseti úspěšných řešitelů druhého kola soutěže v kategoriích A, B, a C podle krajů.

U žáků všeobecně vzdělávacích škol neuvádíme značku SVVŠ.

Kraj hl. město Praha

Kategorie A: Petr Barči, Praha 2, ul. W. Piecka; **Petr Hemelka,** Praha 7, Nad Štolou; **Ladislav Mravec,** SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova; **Miloš**

Šidlichovský, Praha 2, W. Piecka; **Václav Koupil,** Praha 2, W. Piecka; **Jaroslav Košťálek,** Praha 2, W. Piecka; **Pavel Ložek,** SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova, **Jiří Novotný,** Praha 2, W. Piecka; **Jiří Votruba,** Praha 7, Nad Štolou; **Václav Steiner,** Praha 2, W. Piecka.

Do třetího kola postoupili ještě další žáci: **Jan Fadrhons,** Praha 6, Velvarská; **Pavel Hlídek,** Praha 2, W. Piecka; **Rudolf Jisl,** SPŠE, Praha 1, Příkopy; **Bohumil Sýkora,** Praha 2, W. Piecka; **Jiří Havelka,** Praha 7, Nad Štolou; **Jiří Kuželka,** Praha 7, Nad Štolou; **Jiří Šoler,** Praha 2, W. Piecka; **Vít Štosek,** SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova; **Jaroslav Janeba,** Praha 7, Nad Štolou; **Miloš Jiřík,** Praha 6, Velvarská; **Jan Cífka,** Praha 6, Na dlouhém lánu; **Milan Valas,** Praha 6, Velvarská; **Zdislav Šíma,** Praha 6, Na dlouhém lánu; **Václav Fidler,** Praha 6, Parléřova; **Jaroslav Dittrich,** Praha 2, W. Piecka; **Radko Borský,** Praha 6, Na dlouhém lánu; **Jaroslav Hájíček,** Praha 4, Ohradní; **Jiří Kříž,** Praha 6, Parléřova; **Jan Pernica,** Praha 6, Na dlouhém lánu; **Jaroslava Plomerová,** Praha 2, W. Piecka; **Miroslav Šnorek,** Praha 2, W. Piecka; **Jaroslav Klusoň,** SPŠ JT, Svatoslavova; **Antonín Pleštil,** Praha 4, Ohradní; **Rostislav Zábrodský,** Praha 2, W. Piecka; **Miloslav Kouba,** SPŠ JT, Praha 4, Svatoslavova.

Kategorie B: Jaroslav Vodsloň, Praha 1, Štěpánská; Tomáš Ganz, Praha 1, Štěpánská; Petr Ludvík, Praha 1, Štěpánská; Jan Fähnrich, Praha 7, Nad Štolou; Tomáš Vávra, Praha 3, Sladkovského; Jaroslav Civín, Praha 3, Sladkovského;

František Kraus, SPŠE, Praha 2, Ječná; Václav Šmíd, Praha 3, Sladkovského; Hana Drašnarová, Praha 2, W. Piecka; Tomáš Rafl, Praha 2, W. Piecka.

Kategorie C: Pavel Novák, Praha 1, Štěpánská; Jan Čermák, Praha 2, W. Piecka; Petr Deberský, Praha 2, W. Piecka; Michal Chytil, Praha 2, W. Piecka; Jan Macek, Praha 3, Sladkovského; Miroslav Mráz, Praha 8, Kollárova; Bohumil Čapek, Praha 2, W. Piecka; Jaromír Durdík, Praha 2, W. Piecka; Vít Bělič, Praha 6, Na dlouhém lánu; Jiří Němec, Praha 6, Na dlouhém lánu.

Kraj Středočeský

Kategorie A: Vladimír Loula, Nové Strašecí; **Jaroslav Příhoda,** Čakovice; **Zdeněk Navrátil,** Nové Strašecí; Ivan Rádl, Kolín; Jan Šmidrkal, Rakovník; Pavel Procházka, Nymburk.

Kategorie B: Otakar Plundr, Český Brod; Ladislav Tovara, Čáslav; Jaroslav Černý, Slaný.

Kategorie C: Václav Kříž, Beroun; Jana Rajsová, Čáslav; Jiří Kreuzinger, SPŠ, Čelákovice; Jiří Houska, Čakovice; Zdeněk Vacek, Čakovice; Alena Klosová, Český Brod; Josef Slepička, Český Brod; Vojtěch Hrdina, Brandýs nad Labem.

Kraj Jihočeský

Kategorie A: David Preiss, Jindřichův Hradec; **Jan Holek,** Tábor; **Ladislav Tomášek,** Pelhřimov; **Václav Píštěk,** Pelhřimov; Zdeněk Blažek, Jindřichův Hradec; Pavel Burda, Týn nad Vltavou; Jan Roháček, Strakonice; Jan Samec, Strakonice; Jiří Pechouš, Písek.

Kategorie B: Antonín Jileček, Vodňany; František Allmer, Strakonice; Petr Kříha, České Budějovice; Marie Holubová, České Budějovice; Jan Mach, České Budějovice.

Kategorie C: Václav Nýdl, České Budějovice; Václav Šmajcl, České Budějovice; Jaroslav Podlešák, České Budějovice; Bohumír Bednář, České Budějovice; Jiří Krtek, České Budějovice; Jan Góč, Vodňany; Josef Beran, Pelhřimov; Jan Pelánek, České Budějovice.

Kraj Západočeský

Kategorie A: Jiří Bok, Karlovy Vary; **Přemysl Breník,** Plzeň, Ul. pionýrů; Josef Bartoš, Aš; Marcela Luňáčková, Karlovy Vary; Jan Mazanec, Karlovy Vary.

Kategorie B: Jiří Bílek, Rokycany; Jan Štěpáník, Horažďovice; Jan Nauš, Klatovy.

Kategorie C: Jiří Bouzek, Plzeň, Ul. pionýrů; Jiří Vilímovský, Plzeň, Ul. pionýrů; Jan Kastl, Přeštice; Jindřich Klůfa, Ostrov nad Ohří; Pavel Kuch, SPŠ, Klatovy; Pavel Wohlmut, Domažlice; Jan Slavík, Plzeň, Ul. pionýrů; Jiří Blhota, Plzeň, Ul. pionýrů; František Dušek, Ostrov nad Ohří; Jan Louda, Plzeň, Ul. pionýrů.

Kraj Severočeský

Kategorie A: Jan Mainzer, Teplice; **Aleš Reter,** Liberec; Vlastimil Semenec, Ústí nad Labem, Jateční; Jan Peršín, Liberec.

Kategorie B: Jan Bayerle, Teplice; Ladislav Dvořák, Tanvald; Oldřich Bílík, Teplice; Josef Křivánek, Teplice; Jan Novák, Teplice; Drahoslava Čápová, Teplice; Libor Douša, Teplice; Jaroslav Hubáček, Teplice.

Kategorie C: Zdenka Cmuntová, Teplice; Miroslav Novák, Teplice; Hana Rezlerová, Česká Lípa; Stanislav Hotmar, Tanvald; Stanislav Cais, Litoměřice; Lubomír Synek, Liberec; Josef Talavašek, Teplice; Dušan Novotný, Děčín; Jan Mühlstein, Teplice; Alena Pokorná, Děčín; Milan Dušejovský, Teplice.

Kraj Východočeský

Kategorie A: Pavel Holan, Hradec Králové; **Miroslav Řezníček,** Hradec Králové; **Jan Hrníčko,** Skuteč; **Břetislav Beneš,** Pardubice; **Bohuslav David,** Vysoké Mýto; **Jan Ámos Víšek,** Pardubice; **Marcela Bílková,** Hradec Králové; Stanislav Černý, Turnov; Jindřich Ansorge, Broumov; Ivan Filippov, Hradec Králové.

Kategorie B: Jaroslav Zamastil, Vysoké Mýto; Petr Moravec, Hradec Králové; Leoš Heger, Hradec Králové; Jindřich Cupal, Česká Třebová; Pavel Křivka, Česká Třebová; Rudolf Foret, Moravská Třebová; Radovan Čaněk, Hostinné; František Tesař, Pardubice; Pavel Limberský, Vysoké Mýto; Radko Škaloud, Hradec Králové.

Kategorie C: Bohuslav Vacek, Česká Třebová; Jan Sedláček, Hradec Králové; Pavel Adam, Trutnov; Ivo Kozák, Úpice; Milan Fireš, Náchod;

Helena Smrčková, Hradec Králové; Pavel Sýkora, Vojenská škola, Moravská Třebová; Jan Rejlek, Jičín; Josef Havlíček, SPŠ, Pardubice; Jar. Hrdličková, Nová Paka.

Kraj Severomoravský

Kategorie A: Ivan Chajda, Přerov; **Emil Běťák**; Ostrava 1; **Rajmund Koplík,** Přerov; **Milan Hutyra,** SPŠ chem., Ostrava 1; **Jura Charvát,** Příbor; **Gabriela Ježková,** Havířov; Jiří Schorník, Opava; Pavel Gregor, Přerov; Jaroslav Pažout, Zábřeh; Vladimír Horečka, Nový Jičín; **Alice Mátlová,** Ostrava 1.

Kategorie B: František Tomášek, Litovel; Pavel Novotný, Olomouc Hejčín; Jiří Nejedlý, Hranice; Miroslav Kavan, Opava; Jaroslav Vaněk, Litovel.

Kategorie C: Mojmír Simerský, SPŠ vak. elektr., Rožnov pod Radhoštěm; Zdeněk Kašlík, Jeseník; Rudolf Kuzník, Havířov; Roman Kotecký, Ostrava 1; Jarmila Holečková, Hranice; Pavel Jeřábek, Jeseník; Petr Varadinov, Bruntál; Miloslava Staňková, Olomouc, tř. Jiřího z Poděbrad; Břetislav Chytil, Olomouc, tř. Jiřího z Poděbrad; Eva Kubištová, Nový Bohumín.

Kraj Jihomoravský

Kategorie A: Eduard Černý, SPŠ el., Brno, Leninova; **Richard Špíšek,** Brno, Koněvova; **Miroslav Sedláček,** SPŠ el., Brno, Leninova;

Rudolf Goldflam, Brno, Koněvova; **Vladislav Baborovský,** Brno, Koněvova; **Josef Humlíček,** Velké Meziříčí; Aleš Lacina, Brno, Koněvova; Jiří Handlíř, SPŠ el., Brno, Leninova; Jan Brodský, Brno, Koněvova; Pavel Nesvadba, Brno, Koněvova; Zdeněk Mikulášek, Brno, Koněvova; Přemysl Svoboda, Holešov.

Kategorie B: Zdeněk Dědourek, Brno, Koněvova; Zdeněk Slanina, SPŠ chem., Brno, Vranovská; Vladimír Handlíř, SPŠ chem., Brno, Vranovská; Jana Štěpánková, Brno, Královo pole; Jiří Šmerk, Kyjov; Jan Surovčiak, Znojmo; Michal Šaffer, Kroměříž; Josef Frolka, Strážnice; Jiří Obalil, SPŠ el., Brno, Leninova; Stanislav Slouka, SPŠ el., Brno, Leninova; Jaroslav Prokůpek, SPŠ el., Telč.

Kategorie C: Václav Božek, Brno, Koněvova; Jiří Leicman, SPŠ stroj., Brno, Sokolská; Jaroslav Kiefmann, Brno, Koněvova; Jiří Trmač, Brno, Královo pole; Ladislav Ježek, SPŠ el., Brno, Leninova; Vlastimil Bartoš, Holešov; František Klein, Brno, Elgartova; Jiří Najbrt, Brno, Lerchova; Jaroslav Kníž, SPŠ žel., Valtice; Ivo Svoboda, Kyjov; Ladislav Obdržálek, Brno, Koněvova.

Kraj Západoslovenský

Kategorie A: Tamara Marcisová, Bratislava, Novohradská; **Ján Bezek,** Bratislava, Vazovova; **Ján Pallag,** SVVŠ maď., Komárno; **Vladimír Grančič,** Bratislava, Metodova; **Rudolf Juráček,** Piešťany; **Ján Čižmárik,** Bratislava, Novohradská; **Ján Janík,** Bratislava, Novohradská; Branislav

Rovan, Bratislava, Novohradská; Pavol Kaboš, Galanta; Alojz Rakús, Trnava, Hollého ul.

Kategorie B: Juraj Polenda, Bratislava, Novohradská; Peter Falath, Zlaté Moravce; Luboš Malina, Bratislava, Novohradská.

Kategorie C: František Hajnovič, Bratislava, Novohradská; Pavol Holič, Bratislava, Novohradská; Peter Kožíšek, Bratislava, Novohradská; Michal Tvrdoň, Bratislava, Novohradská; Vlado Karvaš, Bratislava, Novohradská; Jana Výrobíková, Bratislava, Novohradská; Anna Hamošová, Bratislava, Novohradská; Gejza Wimmer, Bratislava, Novohradská; Mária Jančeková, Bratislava, Novohradská; Lubomír Kadlec, Hlohovec; Branislav Vašička, Bratislava, Vazovova.

Kraj Středoslovenský

Kategorie A: Pavol Ščepko, Banská Bystrica; **Gabriel Králik,** Prievidza; Vladimír Uhrinčať, SPŠ tp., Ružomberok.

Kategorie B: Peter Mederly, Prievidza; Marian Babiak, Banská Bystrica; Lubomír Vlček, Brezno.

Kategorie C: Erich Wiszt, Ban. Bystrica; Marián Fúrik, Zvolen; Janka Bubelková, Ružomberok; Peter Kaprálik, Martin; Ľubor Adamec, Zvolen; Pavol Palčinský, Ružomberok; Jozef Kameník, Lučenec; Peter Bolvanský, SPŠ, Zvolen; Anna Handáková, Ružomberok; Magda Hatarová, Martin.

Kraj Východoslovenský

Kategorie A: Alexander Doktor, Košice, Šrobárova; **Jozef Pač,** Trebišov; Viliam Klimo, SPŠ chem., Svit; Vladimír Chladný, Rožnava.

Kategorie B: František Čižmárik, Prešov, Svojdomov; Milan Stehlík, SPŠ stroj., Košice; Matej Datko, Kežmarok; Juraj Taptič, Medzilaborce; Štefan Gašpar, Bardejov.

Kategorie C: Jozef Studenovský, Košice, Kováčska; Štefan Trenkler, Prešov, Svojdomov; Marcela Gašparová, SPŠ stroj., Košice; Juraj Medvecký, Košice, Kováčska; Juraj Majerčák, Spišská Nová Ves; Vasil Roháľ, Medzilaborce; Alica Pirická, Košice, Kováčska; Eva Švarcová, Košice, Šrobárova; Ilja Novák, Košice, Šrobárova.

C. *Soutěž 1. a 2. kola v kategorii D*

Úplné statistické údaje o průběhu soutěže FO v kategorii D není možno podat ani v letošním ročníku, neboť ústřednímu výboru FO došly o průběhu soutěže v této kategorii zprávy jen ze sedmi krajů a ani ty nejsou všude úplné. Podle zpráv, které máme k dispozici, účastnili se prvního kola v těchto krajích celkem 7 384 chlapci a dívky z 1 120 ZDŠ. Z nich úspěšně absolvovalo 1. kolo celkově 3 275 žáků, z toho 1 239 dívek, tj. 38 % z celkového počtu úspěšných řešitelů prvního kola soutěže.

V druhém kole této kategorie soutěžilo v uvedených sedmi krajích celkem 2 836 žáků, z toho 1 109 dívek. Úspěšně vyřešilo úlohy druhého kola

2 268 žáků, tj. 79,9 % účastníků druhého kola, z toho 845 dívek, tj. 76,2 % z počtu dívek soutěžících v druhém kole.

Učitelé na školách v těchto sedmi krajích opravili celkem 57 425 úloh prvního kola a členové OV FO 10 130 úloh druhého kola soutěže.

Největší počet účastníků soutěže FO v kategorii D vykazuje kraj Východočeský, Středočeský a hl. m. Praha.

Nejvíce chyb dělali soutěžící žáci v jednotkách fyzikálních veličin a v jejich přeměnách, zaměňovali některé pojmy, např. měrnou váhu a hustotu, váhu a množství látky apod. Veliké potíže jim působí obecné řešení úloh, dosazování číselných hodnot i s jejich jednotkami do obecných výrazů a v mnoha případech chybí žákům také správný úsudek.

Stručný přehled o činnosti OV FO a o průběhu soutěže FO v kategorii D podává zpráva KV FO hl. m. Prahy, kterou citujeme:

Zpráva o průběhu kategorie D VI. ročníku FO (1964—65)

1. **Průběh I. a II. kola.** Protože byly včas uveřejněny úlohy FO a protože včas vyšly letáčky FO, byly dány dobré předpoklady k plynulému průběhu soutěže.

V Praze se několikrát sešel aktiv obvodních referentů FO a koordinoval činnost OV FO na obvodech. Zvláštní přednášky pro řešitele FO v letošním školním roce nebyly, uskuteční se na zkoušku na několika pražských obvodech v příštím ročníku.

Po rozboru situace bylo dohodnuto, že druhé kolo FO bude jednotně v celé Praze v pondělí

26. 4. dopoledne. Datum bylo vhodně vybráno, jak je zřejmé z toho, že II. kola se zúčastnilo asi 94 % pozvaných. Nápadným jevem proti loňsku je, že výběr na školách byl odpovědnější, takže z 539 žáků navržených školami, bylo vybráno do II. kola 518 žáků, tj. asi 97 %.

Také poměrně vysoké procento žáků splnilo podmínky II. kola (více než 85 %), přičemž relativní počet neúspěšných řešitelů je u dívek větší.

Opět se soutěže zúčastnili i žáci 8. ročníku. Tak v Praze 2 obsadil první místo bezpečně žák 8. ročníku J. Turek. Podobná zpráva přišla i z Prahy 5 a dalších obvodů. V Praze 10 je na prvním místě dívka.

2. **Zapojení škol.** Nápadné je, že se letos zvýšil počet škol, které se do akce nezapojily. Je jich letos 23 % (loni 18 %). Zvlášť vysoký je tento počet v Praze 1, kde je dokonce 50 % škol, které se soutěže nezúčastnily. Neúčast do 30 % škol má Praha 2, Praha 9, Praha 10. Naproti tomu nutno pochválit Prahu 4 a Prahu 7, kde se zapojily všechny školy.

3. **Aktivita referentů.** Z nejaktivnějších obvodních referentů kategorie D FO vyzdvihuji práci s. Josefa Kohouta z Prahy 5 (ZDŠ Nepomucká), který neúnavně pracoval pro zdárný průběh FO na obvodě: soustavně instruoval učitele fyziky, informoval ředitele škol, vybudoval čtyřčlenný obvodní výbor FO a stále spolupracoval s obvodními inspektory, takže i na OŠK ONV našel plnou podporu. Vzhledem k tomu, že jde o všestranně obětavého učitele, který je také obvodním metodikem, bylo by vhodné jeho práci ocenit.

4. **Výběr úloh.** Úlohy byly vybrány dobře. Snad úlohy II. kola mohly být trochu obtížnější, neboť takto je většina žáků úspěšnými řešiteli II. kola. Neobvyklá řešení se neobjevila. Nejobtížnější bylo pro žáky řešení 4. úlohy II. kola, což ukazuje na velmi špatný stav v elektromontážních pracích na školách (šlo o několik schémat zapojení žárovek a přepínačů v kombinovaných zapojeních). Žáci většinou řešili úlohy jen úvahou a třetí část úkolu (zapojení schodišťových přepínačů) nezvládli, protože se tomu ve fyzice nevyučuje a v elektromontážních pracích se to obvykle vynechává.

D. *Soutěž třetího kola*

Z celkového počtu 139 úspěšných řešitelů druhého kola soutěže v kategorii A vybral ÚV FO ve shodě s organizačním řádem FO podle návrhů KV FO 78 nejlepších řešitelů, které pozval k účasti ve třetím kole soutěže. Jedna z pozvaných dívek se k soutěži pro onemocnění nedostavila. Soutěžilo tedy v třetím kole celkem 77 žáků. Přehled o účasti a o výsledcích soutěže třetího kola podává tabulka VI.

Mezi účastníky třetího kola byly čtyři dívky, po jedné z Východočeského a Západoslovenského kraje a dvě z kraje Severomoravského. Podle druhu škol se zúčastnilo třetího kola 68 žáků SVVŠ a 9 žáků SPŠ.

Třetí kolo dokončilo úspěšně 46 žáků, neúspěšných je 31. Dívky byly úspěšné 2, jedna z Východočeského kraje a jedna z kraje Západoslovenského;

Tabulka VI
Přehled o výsledcích soutěže třetího kola

Kraj	Účastníci			
	celkový počet	úspěšní *1–46*	z nich vítězové *1–20*	neúspěšní *47–77*
Hl. m. Praha	35	26(74,3 %)	12(34,3 %)	9(25,7 %)
Středočeský	3	1(33,3 %)	1(33,3 %)	2(66,7 %)
Jihočeský	4	2(50 %)	–	2(50 %)
Západočeský	2	–	–	2(100 %)
Severočeský	2	–	–	2(100 %)
Východočeský	7	5(71,5 %)	2(28,5 %)	2(28,5 %)
Severomorav.	7	3(42,9 %)	1(14,3 %)	4(57,1 %)
Jihomoravský	6	4(66,7 %)	3(50 %)	2(33,3 %)
Západoslov.	7	5(71,5 %)	1(14,3 %)	2(28,5 %)
Středoslov.	2	–	–	2(100 %)
Východoslov.	2	–	–	2(100 %)
Celkem	77(100 %)	46(59,7 %)	20(26 %)	31(40,3 %)

ostatní dívky skončily mezi neúspěšnými řešiteli. Z žáků průmyslových škol bylo úspěšných sedm žáků.

Celkově soutěžili v třetím kole FO žáci z 36 SVVŠ a 4 SPŠ, úspěšní řešitelé jsou z 19 SVVŠ a ze 3 SPŠ.

Nejlepších 20 řešitelů bylo podle organizačního řádu FO prohlášeno vítězi soutěže VI. ročníku fyzikální olympiády. Mezi dvaceti vítězi je jedna dívka, z žáků průmyslových škol jsou mezi vítězi čtyři chlapci.

Každý z vítězů dostal čestný diplom, podepsaný náměstkem ministra školství a kultury dr. Františ-

Vítězové šestého ročníku FO

Pořadí	Jméno	Škola	Navržená odměna věcná	knižní
1	Miloš Šidlichovský	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	1 000	200
2	Jiří Kuželka	SVVŠ Praha 7, Nad Štolou	900	150
3	Pavel Ložek	SPŠJT Praha 4, Svatosl. 4	750	150
4–5	Josef Humlíček	SVVŠ Velké Meziříčí	650	150
4–5	Richard Spíšek	SVVŠ Brno, Koněvova 47	650	150
6	Pavel Hlídek	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	550	150
7	Eduard Černý	SPŠE Brno, Leninova 40	500	150
8	Ján Janík	SVŠ Bratislava, Novohradská	450	150
9–10	Rudolf Jisl	SPŠE Praha 1, Příkopy 16	400	150
9–10	Miroslav Řezníček	SVVŠ Hradec Králové, Tylovo n.	400	150
11–13	Jaroslav Dittrich	SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2	400	100
11–13	Jiří Novotný	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	400	100
11–13	Jiří Šoler	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	400	100
14–15	Jaroslav Hájíček	SVVŠ Praha 4, Ohradní 5	350	100
14–15	Vladimír Loula	SVVŠ Nové Strašecí	350	100
16	Marcela Bílková	SVVŠ Hradec Králové, Tylovo n.	300	100
17	Bohumil Sýkora	SVVŠ Praha 2, W. Piecka	250	100
18–20	Petr Hemelka	SVVŠ Praha 7, Nad Štolou 1	250	100
18–20	Jura Charvát	SVVŠ Příbor	250	100
18–20	Miloslav Kouba	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova	250	100

kem Kahudou a předsedou ústředního výboru FO prof. dr. Miloslavem Valouchem. Mimoto byly vítězům VI. ročníku FO navrženy peněžité částky na nákup věcných odměn a studijní odborné literatury podle vlastního výběru. Odměny byly odstupňovány od 350.— Kčs do 1 200,— Kčs. Celková částka na ně činila 12 000,— Kčs.

Další úspěšní řešitelé s pořadovým číslem 21—46 jsou tito žáci:

21	Petr Barči	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
22	Jan Ámos Víšek	SVVŠ Pardubice, Spořilov
23	Tamara Marcisová	SVVŠ Bratislava, Novohradská
24—27	Rajmund Koplík	SVVŠ Přerov
24—27	Jiří Kříž	SVVŠ Praha 6, Parléřova 2
24—27	Jan Pernica	SVVŠ Praha 6, Na dlouhém lánu 43
24—27	Vít Štosek	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova 4
28—35	Břetislav Beneš	SVVŠ Pardubice
28—35	Ján Bezek	SVŠ Bratislava, Vazovova ul.
28—35	Jan Cífka	SVVŠ Praha 6, Na dlouhém lánu
28—35	Ján Čižmarik	SVŠ Bratislava, Novohradská ul.
28—35	Václav Fidler	SVVŠ Praha 6, Parléřova ul.
28—35	Václav Píštěk	SVVŠ Pelhřimov
28—35	Miroslav Sedláček	SPŠE Brno, Leninova 40
28—35	Milan Valas	SVVŠ Praha 6, Velvarská 33
36—40	Vladimír Grančič	SVŠ Bratislava, Metodova 1
36—40	Pavel Holan	SVVŠ Hradec Králové, Tylovo nábř.
36—40	Antonín Pleštil	SVVŠ Praha 4, Ohradní 5
36—40	David Preiss	SVVŠ Jindřichův Hradec
36—40	Zdislav Šíma	SVVŠ Praha 6, Na dlouhém lánu 43
41—46	Ivan Chajda	SVVŠ Přerov, Komenského 29
41—46	Miloš Jiřík	SVVŠ Praha 6, Velvarská 33
41—46	Jaroslav Klusoň	SPŠJT Praha 4, Svatoslavova 4
41—46	Václav Koupil	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
41—46	Václav Steiner	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
41—46	Miroslav Šnorek	SVVŠ Praha 2, W. Piecka

Přehled o klasifikaci úloh třetího kola podává tabulka VII.

Tabulka VII

Čísla v 2. – 5. sloupci značí počty známek 1., 2. a 3. stupně.

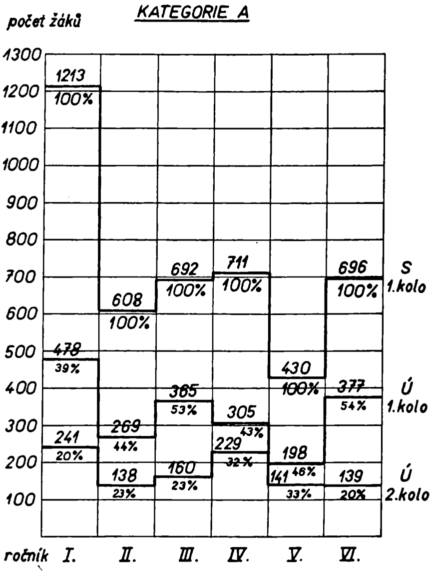
Známka	výborně	dobře	nevyhovuje	průměrná známka	téma z oboru
1. úloha	8	39	30	2,29	mechanika; fyz. kyvadlo
2. úloha	14	10	53	2,51	mechanika; výtok kapaliny
3. úloha	20	38	19	1,99	elektřina; určení impedance
4. úloha	8	25	44	2,47	optika; kombinace tří čoček
5. úloha	34	22	21	1,83	exper. z elektř.; měření elektromot. napětí

Z teoretických úloh nejlépe dopadla úloha na určení impedance obvodu, ve kterém jsou sériově zařazeny odpor, induktance a kapacitance. Tato úloha se vztahuje k tématu, které měli žáci studovat v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální. S nejhorším výsledkem vyřešili žáci úlohu druhou, jež předpokládá znalost látky probírané v I. tř. SVVŠ, s níž se žáci v dalších ročnících téměř nesetkají.

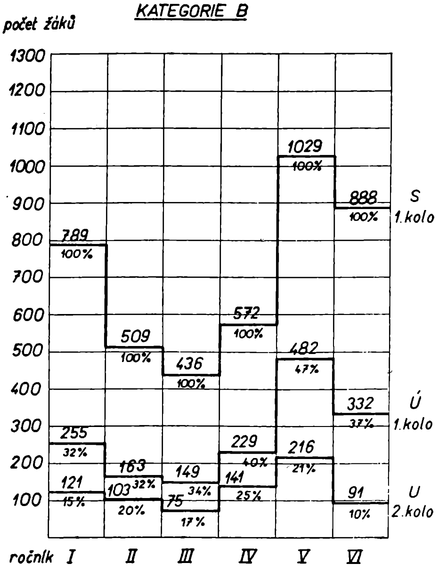
8. HODNOCENÍ VI. ROČNÍKU SOUTĚŽE FO

Kdybychom hodnotili úspěšnost prvních dvou kol jednotlivých ročníků soutěže FO v kategoriích A, B a C podle počtu žáků zapojených do soutěže, byl by šestý ročník jedním z nejúspěšnějších, jak je patrno z grafů I, II, III, IV, které znázorňují počty žáků soutěžících v jednotlivých ročnících FO. Celkově (graf IV) je počet žáků (3 524) zapojených v šestém ročníku do soutěže jen o málo menší, než byl v ročníku V. (3 674); v kategorii A (graf I) soutěžilo letos téměř tolik žáků jako v ročníku IV. a III. a proti ročníku minulému se zvětšil počet soutěžících žáků v této kategorii o více než o 50 %. Také účast žáků v kategoriích B a C (graf II a III) je jen o málo menší, než byla v ročníku minulém, který měl v těchto kategoriích dosud největší počet řešitelů.

Daleko horší se však zdá stav soutěže FO, uvědomíme-li si, kolik žáků, kteří se v prvním kole do soutěže zapojili (S-1. kolo) dokončilo úspěšně druhé kolo (Ú-2. kolo) soutěže. Z grafů je patrno, že v kategorii A je to pětina žáků, v kategorii B 10,3 %, v kategorii C dokonce jen 7,7 % a celkem 10,8 % z počtu žáků, kteří řešili úlohy prvního kola. „Úmrtnost“ žáků během soutěže byla každoročně veliká, v šestém ročníku však je největší vůbec, a to ve všech kategoriích.

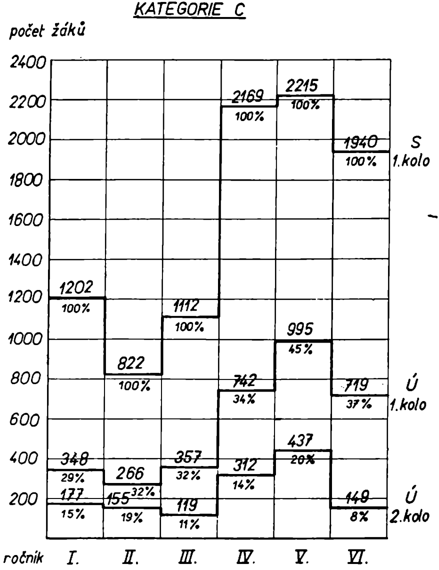

počet žáků
KATEGORIE A
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
1213
100%
608
100%
692
100%
711
100%
430
100%
696
100%
478
39%
269
44%
365
53%
305
43%
229
32%
377
54%
241
20%
138
23%
160
23%
198
46%
141
33%
139
20%
S
1.kolo
Ú
1.kolo
Ú
2.kolo
ročník I. II. III. IV. V. VI.

Graf I

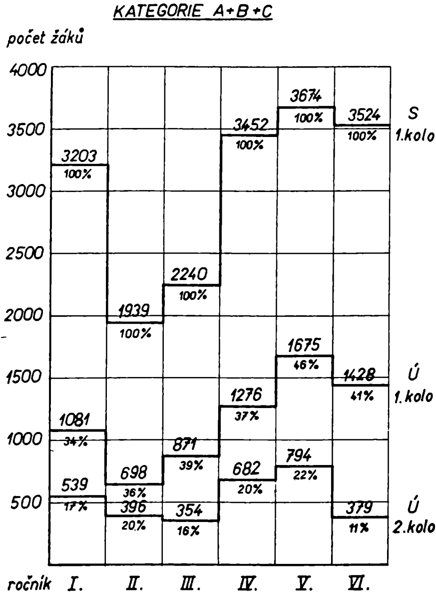


KATEGORIE B
počet žáků
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
789
100%
509
100%
436
100%
572
100%
1029
100%
888
100%
S
1. kolo
482
47%
332
37%
Ú
1. kolo
255
32%
163
32%
149
34%
229
40%
216
21%
121
15%
103
20%
75
17%
141
25%
91
10%
U
2. kolo
ročník I
II
III
IV
V
VI

Graf II


KATEGORIE C
počet žáků
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
2169
100%
2215
100%
1940
100%
S
1.kolo
1202
100%
1112
100%
822
100%
995
45%
742
34%
719
37%
Ú
1.kolo
437
28%
348
29%
266
357
32%
312
14%
177
15%
155
32%
19%
119
11%
149
8%
Ú
2.kolo
ročník
I.
II.
III.
IV.
V.
VI.

Graf III


KATEGORIE A+B+C
počet žáků
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
3203
100%
1939
100%
2240
100%
3452
100%
3674
100%
3524
100%
S
1.kolo
1081
34%
698
36%
871
39%
1276
37%
682
20%
1675
46%
794
22%
1428
41%
Ú
1.kolo
539
17%
396
20%
354
16%
379
11%
Ú
2.kolo
ročník I. II. III. IV. V. VI.

Graf IV

Jednou z příčin tohoto úkazu je větší obtížnost úloh v prvním i druhém kole letošní soutěže ve srovnání s předcházejícími ročníky, druhou, pravděpodobně nejdůležitější příčinou, je úprava počtu soutěžních úloh, kterou provedl ÚV FO počínaje letošním ročníkem.

V prvních pěti ročnících FO se stal úspěšným řešitelem druhého kola soutěže každý žák, který úspěšně vyřešil dvě ze čtyř soutěžních úloh, z nichž jedna byla experimentální a druhá kontrolovala, jak žák prostudoval uložené studijní téma. Protože experimentální úloha se vypracuje snadněji než teoretická, neboť se při jejím řešení postupuje podle daného návodu, mohl se stát poměrně snadno úspěšným řešitelem druhého kola soutěže každý žák, prostudoval-li studijní téma. V šestém ročníku měli žáci obtížnější úkol, neboť musili v kategoriích A a B vyřešit úspěšně alespoň tři z pěti daných úloh, aby se stali úspěšnými řešiteli druhého kola soutěže. V kategorii C zůstaly sice v druhém kole čtyři soutěžní úlohy, avšak místo úlohy experimentální byla do soutěže druhého kola zařazena úloha teoretická, takže i v kategorii C je daleko obtížnější stát se úspěšným řešitelem druhého kola FO, než tomu bylo v prvních pěti ročnících, i když k tomu stačí tak jako dříve dvě úspěšně vyřešené úlohy.

Lze tedy očekávat, že vyřazením experimentální úlohy z druhého kola soutěže se zvýší požadavky na soutěžící žáky, a tím se soutěž zkvalitní. Zároveň se však dosáhne i větší regulérnosti soutěže FO. Zařazením experimentální úlohy do soutěže druhého kola FO se totiž prodlužuje trvání soutěže o jeden den. Protože KV FO jsou při provádění druhého kola soutěže odkázány na peněžní dotaci KNV, která nebývá vždy postačující, a často také proto, že nemají možnost obstarat si dostatečný počet souprav k provedení experimentální úlohy, nemohou pozvat do druhého kola všechny úspěšné řešitele prvního kola soutěže. Proto provádějí do druhého kola výběr podle kvality žákovských řešení úloh prvního kola, které soutěžící žáci odevzdali. Řada žáků však nepracuje úlohy prvního kola samostatně, a proto se stává, že se často dostávají do druhého kola slabí žáci, kteří odevzdali nesamostatně zpracované úlohy prvního kola, na úkor lepších žáků, kteří odevzdali sice úlohy prvního kola zpracované méně kvalitně, avšak samostatně.

Po vyřazení experimentální úlohy z druhého kola soutěže budou mít KV FO možnost zařadit do druhého kola všechny úspěšné řešitele prvního kola soutěže.

Proto bude v příštím, sedmém ročníku zavedena v druhých kolech soutěže stejná úprava, jaká byla letos v kategorii C, i v kategoriích A a B.

Výsledky letošní soutěže FO se ve srovnání s loňskou soutěží jeví horšími i při porovnání počtu žáků soutěžících v druhém kole s počtem úspěšných řešitelů tohoto kola soutěže. V kategorii A je letos podle tabulky IV na str. 26 42 % úspěšných řešitelů, loni jich bylo 77,1 %. Obdobně tomu je i v kategoriích B a C, kde je v šestém ročníku 30,5 % a 23,2 % úspěšných řešitelů, zatímco v pátém ročníku ukončilo úspěšně soutěž druhého kola v těchto kategoriích 54,8 %

a 53,8 % žáků zapojených do soutěže druhého kola. I zde se projevuje ve všech kategoriích obtížnost soutěžních úloh druhého kola a nová úprava jejich počtu jako příčiny, které velmi ovlivnily uvedené výsledky. Zdá se však, že letošní způsob hodnocení výsledků druhého kola, a tedy letošní čísla 42 %, 30,5 % a 23,2 % lépe a spravedlivěji vystihují stav druhého kola v kategoriích A, B a C, než tomu bylo v minulém školním roce, kdy tato čísla byla značně vyšší. Přibližně stejných výsledků by byli pravděpodobně dosáhli i loňští účastníci FO, kdyby byla soutěž organizována loni týmž způsobem jako letos. Svědčí o tom zprávy téměř ze všech krajů, které vesměs uvádějí, že úroveň žákovských řešení soutěžních úloh byla loni průměrně stejná jako letos.

Vedle uvedených dvou hlavních příčin, které způsobily v letošním ročníku FO zdánlivé zhoršení stavu soutěže, je nutno upozornit i na závady ze strany soutěžících žáků a někde i učitelů a škol, jejichž žáci se zapojili do soutěže FO. Ředitelství některých škol zúčastněných na soutěži se omezují v převážné většině jen na formální poměr k soutěži, neumožňují žákům návštěvy seminářů a kursů, které pro účastníky soutěže pořádají pobočky JČMF, a nedbají na to, aby nadaní žáci získali mimotřídním vedením předpoklady k úspěšnému zakončení soutěže. Učitelé některých škol naopak doporučují návštěvu přednášek a seminářů pro účastníky olympiády i žákům, kteří nemají pro soutěž předpoklady, snad v domnění, že tyto přednášky mohou nahradit práci ve škole. Takovíto žáci na přednáškách nic nezískají a často rušením kázně a pořádku ztěžují práci ostatním účastníkům. Proto jsou výsledky v soutěži u mnoha žáků slabé a nejsou úměrné práci vykonané v instruktáži a přednáškách.

Na žákovských řešeních soutěžních úloh prvního kola jsou často patrny známky nesamostatné práce nebo neporozumění dané úloze. V některých případech jsou žákovská řešení kopií autorských řešení zasílaných na školy ústředním výborem FO, na některých školách mají skupiny žáků zcela shodná řešení. Ukazuje se také, že mnozí žáci, hlavně v kategorii C, nestudují předepsané studijní téma, ačkoli jsou na ně upozorňováni a dobře vědí, že aspoň jedna z úloh druhého a často i úloha prvního kola se bude k tématu vztahovat.

Zásadní chybou, která se ustavičně při řešení soutěžních úloh vyskytuje, je neúplný nebo zcela chybějící slovní výklad postupu při řešení úlohy. Takovéto úlohy, právě tak jako úlohy nepracované samostatně, mají být klasifikovány jako nevyhovující.

Výsledky třetího kola soutěže FO jsou zaznamenány v tabulce VI na str. 40. I zde je patrný vliv zvětšeného počtu soutěžních úloh a nová úprava při určování úspěšných řešitelů tohoto kola soutěže na zmenšeném počtu úspěšných řešitelů proti předcházejícím ročníkům soutěže, jak je patrno z tabulky VIII. Podle ní vypadají výsledky letošní soutěže vzhledem k loňskému ročníku horší, ačkoli úroveň vědomostí a znalostí fyziky letošních účastníků soutěže třetího kola byla lepší než loňských.

Tabulka VIII

Přehled o počtu soutěžících (S) a úspěšných řešitelů (Ú) třetího kola v dosavadních šesti ročnících FO

Ročník	Kategorie A		
	S	Ú	Ú v %
I.	80	27	34
II.	71	56	79
III.	80	50	63
IV.	81	70	86
V.	76	52	68
VI.	77	46	60

Pro srovnání úspěchů jednotlivých krajů v soutěži FO jsou jediným objektivním kritériem výsledky třetího kola soutěže. Statistiky z druhého kola nejsou zcela vhodným podkladem pro srovnávání, protože výsledky druhého kola závisí podstatně na různých okolnostech, např. jak byl konán dozor při řešení úloh, jak daleko byli žáci při řešení úloh od sebe, jaké pokyny při řešení dostali, na ne zcela stejnoměrné klasifikaci úloh v jednotlivých krajích apod.

Ve třetím kole letošního ročníku dosáhli vynikajícího úspěchu žáci z Prahy, a zejména žáci SVVŠ v Praze 2, W. Piecka. Ze 78 žáků vybraných ústředním výborem FO do třetího kola bylo 36 žáků z Prahy. Poněvadž jedna žákyně se pro onemocnění soutěže třetího kola nezúčastnila, soutěžilo v třetím kole 35 (45,5 %) žáků z Prahy, z toho 13 (16,9 %) ze SVVŠ v Praze 2, W. Piecka. Mezi 46 úspěšnými řešiteli je 26 (56,5 %) žáků z Prahy a 10 (21,3 %)

ze SVVŠ v Praze 2, W. Piecka, mezi 20 vítězi je 12 (60 %) žáků z Prahy a 6 (30 %) ze SVVŠ W. Piecka.

Z celkového počtu 46 úspěšných řešitelů je 37 žáků z velkých měst s vysokými školami (Praha 26, Bratislava 5, Brno 3, Hradec Králové 3) a jen 9 z menších měst. Z toho je patrno, že jen velká města poskytují mnohostrannou příležitost k mimoškolnímu soukromému sebevzdělání a jsou vhodným prostředím pro rozvoj a výchovu fyzikálně nadaným žákům.

Ke zkvalitnění FO pomáhají opatření, která zavedlo novým organizačním řádem MŠK. Nejdůležitější z těchto opatření jsou uvedena v brožuře V. ročník fyzikální olympiády. Všechna slouží nejen FO, ale všeobecně ke zvýšení znalostí z matematiky a z fyziky a k vzbuzení a udržení zájmu o tyto předměty. Jsou to v první řadě semináře pro účastníky FO, které pořádají po dohodě s KV FO a s odborem školství KNV pobočky JČMF. Náplní těchto seminářů je prohlubování těch partií učiva fyziky, které souvisí s tematikou soutěžních úloh, konzultace o individuálním studiu a rozbor nedostatků, které se vyskytují v žákovských řešeních. Semináře jsou hojně navštěvovány a jsou organizovány ve všech krajích. V některých krajích, zvláště tam, kde učí fyzice větší počet neaprobovaných učitelů, se konají i konzultace a instruktáže pro učitele, kteří opravují soutěžní úlohy FO. Konzultace se konají nejen v krajských, nýbrž i v okresních městech. Velký význam pro soutěž FO má dále třítýdenní prázdninové soustředění, které pořádá MŠK každoročně pro úspěšné řešitele kategorie B matematické a fyzikální olympiády. Podobné akce organizují také téměř všechny KV FO spolu s odbory školství a kultury při KNV a s pobočkami JČMF, a to nejen pro úspěšné řešitele kategorie B, nýbrž někde i pro úspěšné řešitele kategorie C.

Šestý ročník FO proběhl celkem bez závad. K nepříjemnostem došlo jen v kraji Středočeském a Západoslovenském. Ve Středočeském kraji zaslalo ředitelství SVVŠ v Příbrami krajskému výboru FO nedoporučeně žákovská řešení jedenácti účastníků soutěže, navržených k postupu do druhého kola. Zásilka došla velmi opožděně, až tři dny po ukončení soutěže druhého kola. Touto nehodou bylo postiženo 11 žáků, kteří se v loňském roce v soutěži dobře umístili. Pro KNV Středočeského kraje je tato nehoda tím nepříjemnější, že přišli o dalších osm účastníků druhého kola v soutěži FO tím, že do soutěže nemohli zařadit žáky SVVŠ v Hořovicích, kteří se loni v soutěži umístili na předních místech, protože na škole byla epidemie infekční žloutenky. Také v kraji Západoslovenském byly krajskému výboru FO odeslány z několika škol soutěžní úlohy řešitelů FO až po uplynutí předepsaného termínu a KV FO nemohl proto tyto žáky zařadit do druhého kola soutěže.

9. ZÁVĚR ŠESTÉHO ROČNÍKU FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Šestý ročník FO byl zakončen podáním návrhu ministerstvu školství a kultury na výplatu odměn vítězům třetího kola soutěže FO, zorganizováním soustředění pro řešitele kategorie B ve Vojtěchově a návrhem na zařazení žáka Ladislava Dvořáka z Tanvaldu do speciální třídy pro zvlášť nadané žáky v matematice a fyzice v Praze. Návrh byl předložen ministerstvu školství a kultury.

Organizace a uskutečnění šestého ročníku FO si vyžádaly mnoho obětavé práce všech referentů a četných učitelů fyziky, kteří soutěž na školách propagovali, řídili a organizovali, podíleli se na opravách úloh, vedli řadu zájmových kroužků, měli s řešiteli soutěže konzultace, přednášeli ve střediscích, předložili návrhy úloh pro soutěž a jejich řešení atd. Byla to veliká nehonorovaná práce, vyžadující mnoho brigádnických hodin. Uvědomíme-li si, že jen v kategoriích A, B, C opravovali učitelé a referenti FO na školách 18 312 žákovských řešení úloh prvního kola a každou z nich nezávisle na sobě dva učitelé, pak by si tato práce vyžádala asi 10 000 brigádnických hodin, počítáme-li, že učitel opraví jednu úlohu za 15 minut, což je odhad velmi nízký, neboť oprava většiny úloh potřebuje čas mnohem delší.

O úspěšný průběh FO mají zásluhu též četní ředitelé škol a okresní a krajští inspektoři, kteří soutěž mezi žáky propagovali.

Jednota československých matematiků a fyziků spolu s ÚV FO děkuje všem, kteří tuto práci bez nároku na jakoukoli odměnu obětavě konali.

Dále je nutno poděkovat těm členům ÚV FO, KV FO, OV FO a učitelům, kteří organizovali soutěž ústředně, v krajích a okresech, podíleli se na vypracování úloh a autorských řešení, na opravách úloh druhého a třetího kola, na opatřování a přípravě souprav potřebných k provedení experimentálních úloh druhého kola, kteří vypracovali studijní texty pro kategorie A, B a C, organizačně zajišťovali hladký průběh druhého a třetího kola a konali dozor při druhém a třetím kole soutěže. Jsou to zejména profesor dr. Vl. Valouch, dr. M. Chytilová, J. Tesař, ústřední inspektor Jos. Bartůněk, prof. dr. R. Košťál, F. Černický, F. Fišer, K. Hofman, dr. J. Feifer, J. Sušanka, Z. Ungermann, F. Živný, dr. I. Náter, A. Grega, J. Daniel-Szabó, E. Říman, M. Voráček, J. Pitner, všichni předsedové a jednatelé KV FO, zejména J. Kesner, J. Konrád, dále L. Vašek, M. Rádl, K. Fišer, dr. M. Bayer a další.

Dále je nutno ocenit obětavou práci dr. Nátera při přípravě a organizaci třetího kola soutěže, jež se v šestém ročníku konalo v Bratislavě. Při této příležitosti je nutno poděkovat všem členům KV FO v Bratislavě za jejich práci při přípravě třetího kola a za návrhy úloh pro třetí kolo soutěže, rektorátu Komenského university v Bratislavě za propůjčení posluchárny ke konání třetího kola soutěže a děkanátu elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě za propůjčení laboratoří a posluchárny k provedení experimentální úlohy. Dále děkujeme dr. Náterovi a asistentům elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě za vzorné vybavení pracovišť přístroji a pomůckami pro experimentální úlohu, při které konali dozor.

Všechnu uvedenou činnost je nutno hodnotit nejen po stránce pracovní, nýbrž také jako významnou politickovýchovnou činnost, neboť ministerstvo školství a kultury každou práci pro MO a FO za politickovýchovnou uznává.

Z členů ÚV FO je nutno zvlášť poděkovat prof. dr. Košťálovi, který sestavil program přednášek a besed pro soustředění žáků ve Vojtěchově a postaral se o obsazení těchto přednášek a besed přednášejícími.

Na organizaci soutěže FO se podílely též krajské výbory JČMF, které po finanční stránce zabezpečovaly konání přednášek a besed pro účastníky prvního kola FO. Je též nutno vysoko ocenit organizační práci s. Valouchové, s. Březinové a s. Matyášové, které obstarávaly rozmnožování letáků, autorských řešení a návrhů úloh pro druhé a třetí kolo soutěže, rozesílaly letáky, pozvánky na zasedání ÚV FO, zápisy o průběhu schůzí ÚV FO apod. Byla to práce vyžadující velikého počtu neplacených hodin.

Spolupráce ČSM byla slabá, jen v Jihomoravském kraji prováděl ČSM propagaci soutěže, hlavně zásluhou zástupce KV ČSM a KV FO Jihomoravského kraje, inž. Vybírala. Zásluhou inž. Vybírala zaplatil KV ČSM jako každoročně třem nejlepším řešitelům úloh druhého kola FO v Jihomoravském kraji vyhlídkový let nad Brnem.

10. STUDIJNÍ TEXTY PRO PRVNÍ KOLO VI. ROČNÍKU FO

A. KATEGORIE A

Kondrád Hofman, České Budějovice
a dr. Marta Chytilová, Praha:

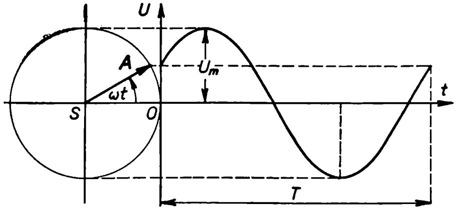
Vektorové znázornění střídavých proudů a symbolický počet

Závislost střídavého proudu a střídavého napětí na čase je dána rovnicemi

$$i = I_m \sin \omega t \qquad u = U_m \sin (\omega t + \varphi)\,,$$

které mají obdobný tvar jako závislost výchylky jednoduchého kmitavého pohybu na čase $y = A \sin (\omega t + \varphi)$. Průběh střídavého proudu a napětí je tedy harmonický děj.

Časovým rozvinutím střídavého proudu nebo střídavého napětí je sinusoida, kterou získáme, nanášíme-li na osu x čas t a na osu y okamžité hodnoty příslušné veličiny. Okamžité hodnoty střídavého napětí získáme jako pravoúhlé průměty průvodiče $SA = U_m$, který se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω, do osy y. Příslušná sinusoida je určena točivým vektorem $\mathbf{SA}$, jehož velikost $SA = U_m$, počáteční fází φ a úhlovou rychlostí otáčivého vektoru ω, kterou pro harmonický děj nazýváme úhlovou frekvencí. Na obr. 1. je znázorněno časové rozvinutí střídavého napětí $u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$.



Obr. 1

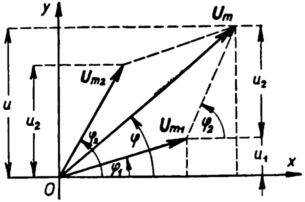
Otáčení vektorů nemůžeme znázornit graficky. Můžeme určit jen polohu točivého vektoru v čase t, v čase např. $t = 0$. Takový vektor se nazývá *časový vektor* a značí se **A**.

Při sčítání nebo odčítání střídavých proudů nebo střídavých napětí platí pro časové vektory stejná pravidla jako pro vektory. Máme-li sčítat např. dvě střídavá napětí

$u_1 = U_{m_1} \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\quad u_2 = U_{m_2} \sin(\omega t + \varphi_2)$,

sčítáme v časovém rozvinutí algebraicky okamžitá napětí. Okamžitá napětí v čase $t = 0$ jsou průměty vektorů $\mathbf{U}_{m_1}$ a $\mathbf{U}_{m_2}$ do osy y. Z obr. 2 je patrno, že výsledné okamžité napětí $u = u_1 + u_2$ je dáno průmětem výsledného vektoru $\mathbf{U}_m$ do osy y.

Poněvadž oba točivé vektory mají stejnou úhlovou rychlost, nemění se při otáčení jejich vzájemná poloha, nemění se ani velikost výsledného vektoru (znázorněná v libovolném čase úhlopříčkou téhož



Obr. 2

rovnoběžníka), který se otáčí se stejnou úhlovou rychlostí jako složky. Výsledné napětí je proto opět sinusové

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) .$$

Z obr. 2 určíme pro velikost vektoru $\boldsymbol{U}_m$

$$U_m^2 = U_{m_1}^2 + U_{m2}^2 + 2\, U_{m_1} U_{m_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

pro počáteční fázi φ

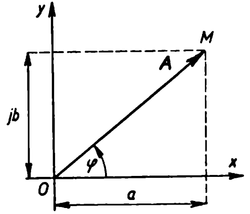
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{m_1} \sin \varphi_1 + U_{m_2} \sin \varphi_2}{U_{m_1} \cos \varphi_1 + U_{m_2} \cos \varphi_2} .$$

Zpravidla nás nezajímají okamžité ani vrcholové hodnoty, ale hodnoty efektivní U a I a fázové posuvy. Pracujeme proto s časovými vektory, jejichž velikost je určena efektivními hodnotami

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Symbolický počet zavádí pro točivé a časové vektory matematické *symboly* a pomocí těchto symbolů řeší obvody střídavých proudů.

Obrázek 3 představuje Gaussovu rovinu komplexních čísel. Každý bod M roviny je určen komplexním číslem $a + jb$, kde $j = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka; naopak každému komplexnímu číslu odpovídá určitý bod Gaussovy roviny.



Obr. 3

Koncový bod vektoru **A** je jednoznačně určen komplexním číslem $a + jb$; poněvadž všechny vektory mají počáteční bod v bodě O, je každý vektor určen komplexním číslem $a + jb$. Pokládáme proto komplexní číslo $a + jb$ za matematický symbol vektoru $\mathbf{A}$ a píšeme

$$\mathbf{A} = a + jb\,.$$

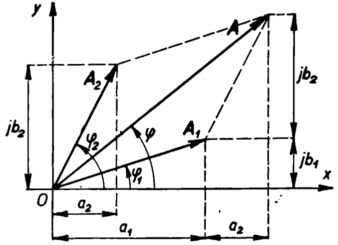
Symbolický počet používá pravidel platných pro počítání s komplexními čísly.

Velikost vektoru $\mathbf{A}$, kterou značíme A, je zároveň absolutní hodnotou příslušného komplexního čísla

$$A = |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Pro úhel φ, který svírá vektor $\mathbf{A}$ s kladně orientovanou reálnou osou, platí tg $\varphi = \frac{b}{a}$. Úhel φ je argumentem komplexního čísla $a + jb$.

Každý symbol má složku reálnou a složku imaginární. Reálné složky můžeme algebraicky sčítat na reálné ose x, imaginární složky na imaginární ose y.



Obr. 4

Jsou-li dány dva vektory

$$\boldsymbol{A}_1 = a_1 + jb_1 \,, \quad \boldsymbol{A}_2 = a_2 + jb_2 \,,$$

pak pro jejich součet platí

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)\,.$$

Podle obr. 4 je

$$A = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}.$$

Násobíme-li vektor $\boldsymbol{A} = a + jb$ imaginární jednotkou j, dostáváme $j\boldsymbol{A} = ja - b$; je to vektor $\boldsymbol{A}$ otočený o úhel $+\frac{\pi}{2}$. Násobíme-li vektor $\boldsymbol{A} = a + jb$ zápornou imaginární jednotkou $-$j, dostáváme $-j\boldsymbol{A} = -ja + b$; je to vektor $\boldsymbol{A}$ otočený o $-\frac{\pi}{2}$. Dělíme-li vektor $\boldsymbol{A} = a + jb$ imaginární jednotkou j, dostáváme $\frac{\boldsymbol{A}}{j} = \frac{a}{j} + b = -ja + b$; je to opět vektor $\boldsymbol{A}$ otočený o úhel $-\frac{\pi}{2}$.

1. *Jednoduché obvody střídavého proudu*

Jednoduché obvody střídavého proudu jsou obvody, v nichž se vyskytuje jen odpor R, nebo jen indukční odpor $L\omega$ (induktance) nebo jen kapacitní odpor $\frac{1}{C\omega}$ (kapacitance).

Tyto obvody jsou uvedeny v učebnici fyziky pro

3. roč. SVVŠ. Výsledky zopakujeme a vyznačíme je graficky a symbolicky.

1.1. Je-li v obvodu střídavého proudu jen *odpor* R, je střídavé napětí s proudem ve stejné fázi a Ohmův zákon platí pro hodnoty okamžité, vrcholové i efektivní

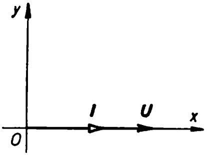
$$u = Ri\,,\quad U_m = RI_m\,,\quad U = RI\,.$$

Graficky tento případ znázorňuje obr. 5a; symbolicky píšeme

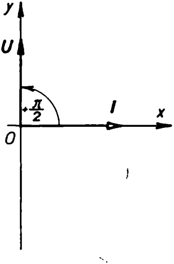
$$U = RI\,.$$

Poněvadž $\varphi = 0$, je výkon $P = UI$.

1.2. Je-li v obvodu zapojena jen *cívka* o indukčnosti L se zanedbatelným odporem R vzhledem



Obr. 5 a



Obr. 5 b

k induktanci, je fázové posunutí napětí vzhledem k proudu $+\frac{\pi}{2}$; platí tedy

$$i = I_m \sin \omega t, \qquad u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

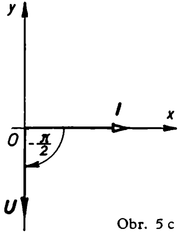
Výkon $P = UI \cos \frac{\pi}{2} = 0$; cívkou prochází jalový proud.

Grafické znázornění je na obr. 5b. Vektor proudu $\boldsymbol{I}$ nanášíme na reálnou osu, vektor napětí $\boldsymbol{U}$ na kladně orientovanou imaginární osu. Symbolicky píšeme

$$\boldsymbol{U}_L = \mathrm{j}L\omega\boldsymbol{I}\,.$$

1.3. Je-li v obvodu zapojen jen *kondenzátor* s kapacitou C, je fázové posunutí napětí vzhledem k proudu $-\frac{\pi}{2}$; platí tedy

$$i = I_m \sin \omega t\,, \qquad u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$



Obr. 5 c

Výkon $P = UI \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; kondenzátorem prochází jalový proud.

Grafické znázornění je na obr. 5c. Vektor $\mathbf{I}$ nanášíme na reálnou osu, vektor napětí $\mathbf{U}$ na záporně orientovanou imaginární osu.

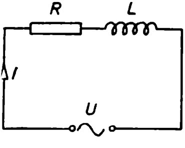
Symbolicky píšeme

$$\mathbf{U}_C = \frac{\mathbf{I}}{\mathrm{j}C\omega}.$$

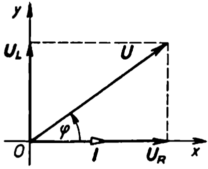
2. Obvody se sériově spojenými členy

2.1. Na obr. 6a je znázorněn obvod, v němž na střídavé napětí U je zapojen odpor R s cívkou o indukčnosti L v sérii. Celým obvodem prochází stejný proud $i = I_m \sin \omega t$, napětí na obou členech jsou však fázově posunuta.

Ve vektorovém diagramu (obr. 6b) naneseme vektor proudu $\mathbf{I}$ na reálnou osu; napětí $\mathbf{U}_R$ na odporu R je ve stejné fázi s proudem, a proto jeho



Obr. 6 a



Obr. 6 b

vektor $\boldsymbol{U}_R$ naneseme také na reálnou osu, $\boldsymbol{U}_R = \boldsymbol{I}R$. Napětí na svorkách cívky o indukčnosti L (a zanedbatelném odporu vzhledem k odporu R) je fázově posunuto o $+\frac{\pi}{2}$ vzhledem k proudu, a proto vektor napětí $\boldsymbol{U}_L$ naneseme na kladně orientovanou imaginární osu, $U_L = L\omega I$. Svorkové napětí U je dáno vektorem znázorněným orientovanou úhlopříčkou obdélníka. Jeho velikost je

$$U = I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = IZ\,,$$

kde $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ je impedance; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}$.

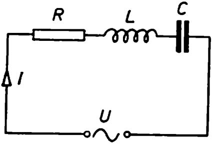
Výkon $P = UI\cos\varphi = U_R I$.

Symbolicky píšeme

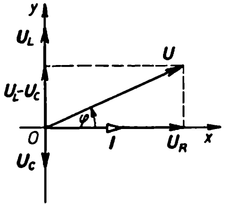
$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R + \boldsymbol{U}_L = R\boldsymbol{I} + \mathrm{j}L\omega\boldsymbol{I}\,.$$

2.2. Na obr. 7a je znázorněn obvod, v němž na střídavé napětí U je sériově zapojen odpor R, cívka s indukčností L a kondenzátor o kapacitě C. Celým obvodem prochází stejný proud $i = \boldsymbol{I}_m \sin\omega t$, napětí na odporu R je ve stejné fázi s proudem, napětí na svorkách cívky je fázově posunuto o $+\frac{\pi}{2}$, na svorkách kondenzátoru o $-\frac{\pi}{2}$ vzhledem k proudu.

Ve vektorovém diagramu sestrojíme vektor $\boldsymbol{I}$ opět na reálnou osu a podobně vektor napětí na odporu $\boldsymbol{U}_R = \boldsymbol{I}R$. Vektor napětí $\boldsymbol{U}_L = L\omega\boldsymbol{I}$ na kladně orientovanou imaginární osu, vektor napětí $\boldsymbol{U}_C =$



Obr. 7 a



Obr. 7 b

$= \dfrac{I}{C\omega}$ na záporně orientovanou imaginární osu. Z obr. 7b plyne

$$U =$$

$$= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} =$$

$$= IZ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Použijeme-li symbolického počtu, dostaneme

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R + \boldsymbol{U}_L + \boldsymbol{U}_C = \boldsymbol{I}R + \mathrm{j}L\omega\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{I}}{\mathrm{j}C\omega} =$$

$$= \boldsymbol{I}\left[R + \mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right].$$

Je-li imaginární složka napětí rovna nule, naštává *sériová rezonance*. Podmínku vzniku sériové rezonance vyjadřuje rovnice

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0.$$

Odtud plyne také $\omega^2 = \frac{1}{CL}$ nebo $T = 2\pi\sqrt{CL}$.

Při sériové rezonanci dále platí

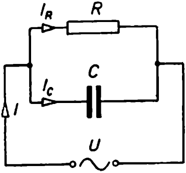
$$Z = R, \varphi = 0; \quad I = \frac{U}{R};$$

$$\boldsymbol{U}_C = \frac{\boldsymbol{I}}{\mathrm{j}C\omega} = -\mathrm{j}L\omega\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{U}_L.$$

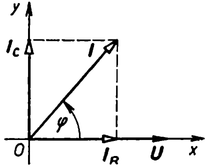
Impedance Z se rovná odporu R. Proud $\boldsymbol{I}$ je při sériové rezonanci maximální a je ve stejné fázi s napětím U. Napětí na svorkách cívky a kondenzátoru jsou v každém okamžiku stejně veliká, ale opačného znaménka, proto se jejich součet rovná nule; přitom mohou být i mnohem větší, než je napětí na odporu R.

3. Obvody s paralelně spojenými členy

3.1. Na obr. 8a je znázorněn obvod, v němž na střídavé napětí U jsou paralelně zapojeny odpor R a kondenzátor o kapacitě C. Odporem R prochází proud $I_R = \frac{U}{R}$, který je s napětím U ve stejné fázi. Kondenzátorem C prochází proud $I_C = C\omega U$, který je fázově posunut o $+\frac{\pi}{2}$ vzhledem k napětí U. Při sestrojování vektorového diagramu (obr. 8b)



Obr. 8 a



Obr. 8 b

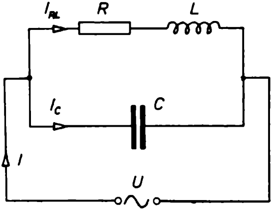
vycházíme z napětí U, které je pro odpor R a kapacitanci $\frac{1}{C\omega}$ stejné. Na reálné ose sestrojíme vektor napětí $\boldsymbol{U}$ a vektor proudu $\boldsymbol{I}_R$. Poněvadž fázový rozdíl proudu I_C a napětí U je $+\frac{\pi}{2}$, naneseme vektor $\boldsymbol{I}_C$ na kladně orientovanou imaginární osu. Výsledný proud je dán vektorem $\boldsymbol{I}$. Jeho velikost je

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_C}{I_R} = CR\omega.$$

Symbolicky píšeme

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_R + \boldsymbol{I}_C = \frac{\boldsymbol{U}}{R} + \mathrm{j}C\omega\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right).$$



Obr. 9

3.2. Obvod znázorněný na obr. 9 řešíme jen symbolickým počtem. Pro vektor proudu platí

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_C + \boldsymbol{I}_{LR} = \mathrm{j}C\omega\boldsymbol{U} + \frac{\boldsymbol{U}}{R + \mathrm{j}L\omega} =$$

$$= \boldsymbol{U}\left[\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + \mathrm{j}\omega\left(C - \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}\right)\right].$$

Je-li imaginární složka proudu rovna nule, nastává *paralelní rezonance*. Podmínku jejího vztahu vyjadřuje rovnice

$$C - \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = 0\,.$$

Odtud plyne také

$$\omega^2 = \frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad \text{nebo} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}\,.$$

Můžeme-li velikost členu $\left(\frac{R}{L}\right)^2$ zanedbat vzhledem k $\frac{1}{CL}$, dostáváme

$$T = 2\pi\sqrt{CL}\,,$$

tedy stejný vzorec jako při sériové rezonanci.

Při paralelní rezonanci je proud nejmenší. Z rovnice

$$I = U\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}$$

po dosazení z rezonanční podmínky dostaneme

$$I = U\frac{RC}{L}\,.$$

Výraz $\frac{L}{RC}$ se nazývá *rezonanční odpor*. Napětí U a proud I jsou ve stejné fázi.

Proud procházející kondenzátorem je

$$\mathbf{I}_C = \mathrm{j}C\omega\mathbf{U}\,.$$

Proud procházející větví LR je

$$\mathbf{I}_{LR} = \frac{\mathbf{U}}{R + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathbf{U}(R - \mathrm{j}L\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} =$$

$$= \mathbf{U}\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} - \mathrm{j}\mathbf{U}\frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\,.$$

Dosadíme-li z podmínky pro rezonanci, dostaneme

$$\mathbf{I}_{LR} = \mathbf{U}\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} - \mathrm{j}\mathbf{U}C\omega\,.$$

Kondenzátorem prochází jen proud jalový, kdežto cívkou prochází proud činný i jalový. Imaginární složka proudu, který prochází cívkou, se rovná proudu, který prochází kondenzátorem, má však opačné znaménko. Proto jejich součet se rovná nule.

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} = \mathbf{U}\frac{RC}{L}\,.$$

Výsledný proud je činný.

B. KATEGORIE B

Jan Tesař, Praha:

Děje v plynech

Dokonalý plyn

Za dokonalý čili *ideální plyn* pokládáme látku skládající se z molekul o stejné hmotnosti, o kterých předpokládáme, že mají tvar stejně velikých koulí o nepatrných rozměrech, jež lze zanedbat vzhledem k objemu, který vyplňují. Molekuly dokonalého plynu jsou dokonale pružné a nepůsobí na sebe navzájem žádnými silami, kromě okamžiků srážek. Proto se pohybují setrvačností přímočaře a svou rychlost mění náhle jen při vzájemných srážkách a při nárazech na stěny nádoby, v níž je plyn uzavřen. Žádné jiné pohyby, např. otáčivé kolem osy, nekonají. Při rázech si vyměňují svoje rychlosti podobně jako dokonale pružné koule o stejné hmotnosti při středových rázech. Srazí-li se molekula 1 s molekulou 2, pokračuje molekula 2 v pohybu molekuly 1 a při další srážce předá molekula 2 svou rychlost molekule 3 a ta zase další molekule. Výměna rychlostí mezi jednotlivými molekulami pokračuje tak dlouho, pokud nedojde k nárazu na stěnu nádoby. Při tomto neustálém neuspořádaném pohybu zůstává počet molekul v daném uzavřeném objemu stálý.

V nádobě s dokonalým plynem naráží v každém okamžiku nesmírný počet molekul na stěny nádoby a působí na ně tlakem. Velikost tohoto tlaku má hodnotu

$$p = \tfrac{2}{3} n_0 \bar{w}\,, \tag{1a}$$

kde p značí tlak plynu, n_0 počet molekul plynu v jednotkovém objemu a $\bar{w}$ střední kinetickou energii neuspořádaného pohybu jedné molekuly. Uvedený vzorec se vypočítá z představ kinetické teorie dokonalého plynu a je odvozen jako vztah (9) v článku doc. Vladimíra Rudolfa v 2. čísle 42. ročníku časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální.

Násobíme-li obě strany této rovnice objemem V nádoby, vychází

$$p\,V = \tfrac{2}{3} n_0\,V \bar{w}\,, \tag{1b}$$

kde $n_0\bar{w}$ značí střední kinetickou energii neuspořádaných pohybů molekul ideálního plynu, obsažených v objemové jednotce a $U = V n_0 \bar{w}$ celkovou kinetickou energii neuspořádaných pohybů všech molekul ideálního plynu v objemu V. Veličina U se nazývá vnitřní energie dokonalého plynu. Vztah (1b) můžeme upravit na tvar

$$p\,V = \tfrac{2}{3}\,U\,. \tag{1c}$$

Označíme-li T absolutní teplotu dokonalého plynu, je vztah mezi veličinami p, V, T vyjádřen stavovou rovnicí dokonalého plynu

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_0 m}{\varrho_0 T_0} = B\,, \tag{2}$$

kde $T_0 = 273{,}15\ {}^0\mathrm{K}$, $p_0 = 760$ torr $\doteq 1{,}01\,325\,.$ $.\,10^5\ \mathrm{N\,m^{-2}}$; V_0 je objem zvolené hmotnosti m ideálního plynu, který má při teplotě T_0 a tlaku p_0 hustotu ϱ_0, T je absolutní teplota plynu a p a V jeho objem při teplotě T. Velikost konstanty B závisí podle vztahu (2) jen na velikosti zvolené hmotnosti m.

Kilomol[1]) M_k dokonalého plynu má objem V_k (kilomolový objem). Konstanta B má pro kilomol ideálního plynu hodnotu, která se značí R a nazývá se univerzální plynová konstanta. Její hodnota je

$$R = 8{,}31\,696 \,.\, 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1} \,.$$

Stavová rovnice pro jeden kilomol dokonalého plynu má tedy jednoduchý tvar

$$p\, V_k = R\, T \,. \tag{3}$$

Porovnáme-li vztah (1c) se vztahem (2), dostaneme pro zvolenou hmotnost m dokonalého plynu vztah

$$U = \tfrac{3}{2} B\, T = k\, T \,, \tag{4}$$

kde k má pro zvolenou hmotnost m dokonalého plynu stálou hodnotu.

Vnitřní energie dokonalého plynu o určité hmotnosti závisí tedy jen na jeho teplotě a při rostoucí teplotě se zvětšuje podle vztahu (4).

Vratné děje v dokonalých plynech

Nemění-li se teplota T_1, tlak p_1, ani objem V_1 plynu o hmotnosti m, je plyn v mechanické a tepelné rovnováze. Veličiny tlak, objem a tep-

[1]) Kilomol (kmol) libovolné látky: $M_k = \mu$ kg kmol^{-1}, kde μ je poměrná molekulová hmotnost. Např. pro O_2 je $\mu = 32$, $M_k = 32$ kg kmol^{-1}.

lota charakterizují tedy určitý rovnovážný stav plynu, a proto se nazývají *stavové veličiny*.

Změní-li se jedna nebo dvě ze stavových veličin, např. změní-li se teplota plynu na T_2 a tlak na p_2, poruší se rovnovážný stav plynu a jeho objem se bez vnějšího působení sám od sebe upraví na hodnotu V_2 tak, že hodnoty p_2, V_2 a T_2 splňují opět rovnici (2). Plyn přitom změní svůj původní stav, charakterizovaný stavovými veličinami o hodnotách p_1, V_1 a T_1, na jiný rovnovážný stav, který charakterizují stavové veličiny o velikostech p_2, V_2 a T_2. Každý

přechod plynu z určitého rovnovážného stavu do jiného rovnovážného stavu se nazývá děj v plynu.

Lze tedy stavovou rovnici dokonalého plynu vyjádřit ve tvaru

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} = B\,. \qquad (5)$$

Vyhovují-li hodnoty stavových veličin stavové rovnici dokonalých plynů, je plyn v mechanické i tepelné rovnováze.

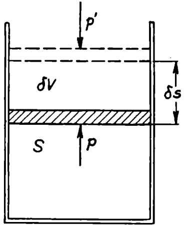
Velikou důležitost mají děje, při kterých se objem plynu zvětšuje (expanze) a děje, při nichž se objem plynu zmenšuje (komprese). Při expanzi plyn práci koná, při kompresi práci přijímá (práci konají vnější síly působící na plyn).

Je-li ve válcovité nádobě uzavřen dokonalý plyn určité hmotnosti pístem, který se může pohybovat bez tření, a má-li tlak plynu hodnotu p a vnější tlak na píst je p' (obr. 10), pak se plyn může jen rozpínat, jestliže $p > p'$, a jen stlačovat, je-li $p < p'$. Při rovnosti obou tlaků může probíhat právě tak expanze jako komprese plynu v nádobě. Oba případy jsou stejně dobře možné a mohou probíhat stejně v obou směrech.

Takové děje, při kterých může nastat buď expanze plynu, nebo jeho komprese, nazývají se děje vratné. Vratnými jsou děje v plynech, které probíhají nekonečně pomalu.

Kdyby se totiž změna stavu plynu ve válci dála konečnou rychlostí, měnila by se velikost tlaku p plynu ve válci a přestala by platit rovnost $p = p'$.

Plyn uzavřený ve válci přijme při kompresi určitou práci, kterou vykonají vnější síly tlakem na píst. Při stejně veliké expanzi plyn práci vykoná. Jestliže



Obr. 10

oba děje jsou vratné, je $p = p'$. Proto je *práce plynem při vratné kompresi přijatá stejně veliká jako práce vykonaná plynem při stejně veliké vratné expanzi.* Jsou-li oba děje, nebo jeden z nich, nevratné, pak při kompresi je $p' > p$, a proto plyn přijme při kompresi větší práci, než je schopen vykonat při stejně veliké expanzi. Proto mají tepelné stroje pracující vratnými ději s dokonalým plynem (ideální tepelné stroje) *větší účinnost než stroje pracující za stejných jinak okolností nevratně.*

Při dějích, které probíhají nekonečně pomalu, dochází v každém okamžiku k tak malým změnám nejen tlaku, nýbrž i objemu a teploty plynu uzavřeného ve válci, že můžeme všechny tyto změny zanedbat a pokládat veličiny p, T a V za stálé. *Proto platí během vratného děje stále stavová rovnice dokonalého plynu a plyn zůstává v průběhu vratného děje ve stavu mechanické a tepelné rovnováhy.*

Vratné děje ve skutečnosti neexistují. Jejich představa se zavádí proto, že se dají teoreticky snadněji propracovat než skutečné děje a poznatky takto získané můžeme v prvním přiblížení aplikovat i na skutečné děje v plynech.

Uvažujme nyní, jakou práci vykoná dokonalý plyn hmotnosti m o objemu V, uzavřený ve válcovité nádobě pístem o průřezu S, jestliže se plyn vratně rozpíná (obr. 10). Má-li tlak plynu v nádobě hodnotu p, působí na píst ve směru kolmém k jeho průřezu síla $F = p\,S$. Předpokládáme-li, že se píst posune bez tření o tak malou délku δs[2]), že můžeme

---

[2]) Změny veličin, ke kterým při dějích v plynech dochází, budeme značit písmenem Δ, jsou-li konečné, tj. tak veliké, že je nelze zanedbat vzhledem k hodnotě veličiny, jejíž změnu označují, a písmenem δ, jsou-li tak malé, že je lze zanedbat vzhledem k hodnotě veličiny, jejíž změnu označují. Značí tedy např. Δp konečnou změnu tlaku, δp tak malou změnu tlaku, že ji lze zanedbat (nekonečně malou změnu tlaku).

zanedbat změnu tlaku plynu při jeho expanzi a pokládat p za konstantní, změní se objem plynu o nekonečně malou hodnotu $\delta V = S \delta s$ a plyn při ní vykoná práci

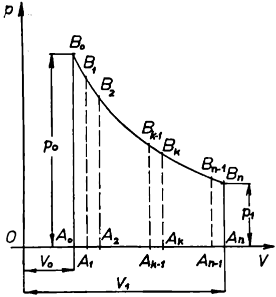
$$A = F \delta s = p S \delta s = p \delta V . \qquad (6)$$

Vztah (6) platí jen pro vratné děje.

Práci A vykonanou plynem při vratném ději můžeme určit také graficky z tzv. pracovního diagramu, neboli $p - V$ diagramu příslušného vratného děje.

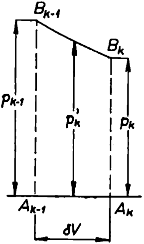
Pracovní diagram zobrazuje závislost tlaku p plynu na jeho objemu V v pravoúhlém souřadném systému. Velikosti objemu jsou souřadnicemi x, příslušné hodnoty tlaku souřadnicemi y. Počáteční objem V_0 plynu je zobrazen úsečkou OA_0 (obr. 11), konečný V_1 úsečkou OA_n; velikost počátečního tlaku p_0 zobrazuje úsečka A_0B_0, výsledného A_nB_n. Oblouk B_0B_n znázorňuje závislost tlaku plynu na jeho objemu v intervalu $< A_0A_n >$. Úsečkou A_0A_n je zobrazen konečný přírůstek $\Delta V = V_1 - V_0$ objemu plynu.

Rozdělme interval A_0A_n na n velmi malých stejných intervalů, jejichž koncové body označíme A_1, $A_2, \ldots A_{n-1}$. Libovolná úsečka $A_{k-1}A_k$ zobrazuje velmi malý přírůstek δV objemu plynu (obr. 12). Plošku $A_{k-1}A_kB_kB_{k-1}$ můžeme pokládat za lichoběžník, neboť velmi malý oblouk $B_{k-1}B_k$ je možno pokládat za úsečku. Střední příčka tohoto lichoběžníka znázorňuje průměrný tlak p_k' v intervalu $V_{k-1}V_k$ a jeho obsah $p_k' . \delta V$ práci, kterou plyn vykoná při nekonečně malé vratné expanzi z objemu



Obr. 11

V_{k-1} na V_k. Součet plošek všech těchto lichoběžníků určuje velikost práce, kterou plyn vykoná při ději zobrazeném obloukem B_0B_n křivky, znázorňující závislost tlaku plynu na jeho objemu. Velikost práce, kterou plyn vykoná při vratné expanzi z objemu V_0 na objem V_1, je určena velikostí plochy omezené na $p - V$ diagramu úsečkou A_0B_0, znázorňující počáteční tlak plynu, úsečkou A_nB_n, jež udává velikost výsledného tlaku plynu, úsečkou A_0A_n, zobrazující velikost $\Delta V = V_1 - V_0$ expanze plynu, a obloukem B_0B_n křivky, jež znázorňuje závislost tlaku plynu na jeho objemu v intervalu A_0A_n. Táž plocha určuje práci, kterou vykonají vnější síly



Obr. 12

působící na plyn, uzavřený v nádobě, při jeho vratné kompresi z objemu V_1 na objem V_0.

Z obr. 11 je patrno, že *práce vykonaná plynem při vratné expanzi nezávisí jen na počátečním a konečném stavu plynu, nýbrž i na způsobu, jak plyn přešel z počátečního stavu do stavu výsledného.*

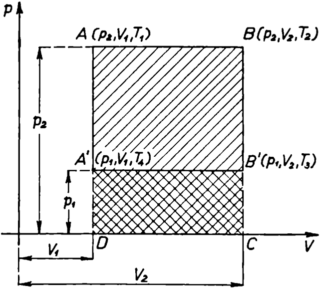
Děj, jehož počáteční a konečný stav je totožný, se nazývá kruhovým dějem (cyklem).

Uvažujme děj, který se skládá ze čtyř vratných dějů a probíhá v určité hmotě dokonalého plynu. Plyn má v počátečním stavu objem V_1, teplotu T_1 a tlak p_2. Zvyšujeme-li jeho teplotu a udržujeme jeho tlak stálý, rozpíná se izobaricky a při teplotě T_2 dosáhne objemu V_2. Potom zmenšíme tlak plynu na hodnotu p_1 a udržujeme jeho objem stálý. Při tomto izochorickém ději se plyn ochladí na teplotu T_3. Pak ho ochlazujeme při stálém tlaku p_1, až nabude počáteční objem V_1. Na konci této izobarické komprese bude mít plyn teplotu T_4. Zvýšíme-li nyní izochoricky tlak na počáteční hodnotu p_2, nabude teplota hodnotu T_5. Protože všechny čtyři děje jsou vratné, řídí se stavovou rovnicí dokonalého plynu a veličiny V_2, T_3, T_4 a T_5 mají hodnoty

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}, \quad T_3 = T_2 \cdot \frac{p_1}{p_2}, \quad T_4 = T_1 \cdot \frac{p_1}{p_2}, \quad T_5 = T_1.$$

Protože $T_5 = T_1$, tvoří uvažované čtyři děje jeden vratný kruhový děj.

Podle obr. 13 vykoná dokonalý plyn při izobarické expanzi práci určenou obsahem obdélníka $ABCD$, při izochorickém zmenšení tlaku práci nekoná ani nepřijímá, při izobarické kompresi



Obr. 13

přijme práci určenou obsahem obdélníka $A'B'CD$ a při izochorickém zvýšení tlaku práci ani nekoná, ani nepřijímá. Práci vykonanou během kruhového děje určuje tedy obsah obdélníka $ABB'A'$. Tento poznatek lze zobecnit:

Velikost práce vykonané dokonalým plynem při vratném kruhovém ději je určena obsahem obrazce omezeného v p — V diagramu křivkami, které znázorňují závislost tlaku plynu na jeho objemu v průběhu celého děje.

První termodynamická věta

První termodynamická věta je vyjádřením zákona zachování energie pro děje mechanické a tepelné. Omezíme se jen na děje probíhající v dokonalých plynech.

Předpokládáme, že dokonalý plyn dané hmotnosti je ve válci s pohyblivým pístem. Působením vnější tlakové síly na píst plyn stlačujeme, přičemž vykonáváme mechanickou práci A'. Současně mu dodáme teplo ΔQ. Tím se zvýší vnitřní energie plynu ve válci o hodnotu

$$\Delta U = U - U_0 ,$$

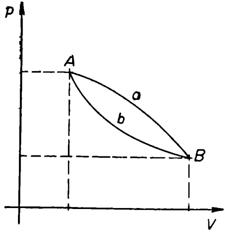
kde U značí konečnou a U_0 počáteční hodnotu vnitřní energie plynu.

Matematicky vyjádříme tento poznatek rovnicí

$$\Delta U = U - U_0 = \Delta Q + A' . \quad (7)$$

Jestliže naopak plyn uzavřený ve válci koná mechanickou práci nebo vydává teplo, zmenší se jeho vnitřní energie o hodnotu vyhovující rovnici (7).

Plyn můžeme převést ze stavu 1 do stavu 2 různými ději. Na obr. 14 značí body A, B dva různé stavy určité hmoty ideálního plynu a oblouky AaB a AbB dva děje, jimiž je možno převést plyn ze stavu 1 do stavu 2. Dokázalo se, že přírůstek vnitřní



Obr. 14

energie plynu je stejný, převedeme-li plyn ze stavu 1 do stavu 2 libovolným vratným dějem.

Přírůstek vnitřní energie dokonalého plynu nezávisí na ději, jímž převedeme plyn z jednoho stavu do jiného stavu, nýbrž jen na počátečním a konečném stavu. Je-li tedy stav plynu na počátku a na konci děje totožný, je přírůstek vnitřní energie plynu během děje nulový.

Při kruhovém ději je $U = U_0$. Proto platí pro vratný kruhový děj podle vztahu (7) rovnice

$$\Delta Q = -A' = A \,, \qquad (8)$$

kde A značí práci, kterou plyn během kruhového děje vykoná.

Má-li tepelný stroj pracovat periodicky, musí se v jeho pracovním plynu opakovat stále kruhové děje. Podle vztahu (8) není možno sestrojit periodicky pracující tepelný stroj, který by konal větší práci než odpovídá teplu, které pracovní plyn přijímá během práce z okolí (tepelné lázně).

Matematická formulace první termodynamické věty, uvedená v rovnici (7), se dobře nehodí k vyšetřování dějů v ideálních plynech. Abychom získali vhodnější vyjádření této věty při vratných dějích v plynech, určíme veličinu ΔU pomocí stavových veličin.

Kilomolové teplo C_v při stálém objemu je číselně rovno teplu, kterým se ohřeje jeden kilomol dokonalého plynu o 1 °K, jestliže objem plynu je při tomto ději stálý. Jednotkou kilomolového tepla je J kmol^{-1} deg^{-1}. Má-li se tedy zvýšit teplota jednoho kilomolu plynu při stálém objemu o hodnotu δT, je nutno dodat mu teplo

$$\delta Q = C_v \, . \, \delta T \, .$$

Objem plynu zůstane přitom stálý, a proto plyn nekoná práci. Podle vztahu (7) platí tedy rovnice

$$\delta U = C_v \, . \, \delta T \, . \qquad (9)$$

Vzhledem ke vztahům (6), (8) a (9) můžeme matematicky formulovat první termodynamickou větu při vratných dějích v dokonalém plynu rovnicí

$$\delta Q = \delta U + p \, . \, \delta V_k = C_v \delta T + p \, . \, \delta V_k \, , \qquad (10)$$

platnou pro jeden kilomol plynu. Písmenem V_k značíme kilomolový objem plynu, veličiny δQ, δU a δV_k jsou nekonečně malé změny tepla, vnitřní energie plynu a kilomolového objemu.

Teplo, kterým se ohřeje 1 kmol plynu o 1 °K při konstantním tlaku, je číselně rovno kilomolovému teplu C_p při stálém tlaku. Zvýší-li se při stálém tlaku teplota jednoho kilomolu dokonalého plynu o δT, je třeba plynu dodat teplo $C_p \delta T$, pro něž platí podle rovnice (10) vztah

$$C_p \delta T = C_v \delta T + p \delta V_k .$$

Ze stavové rovnice pro dokonalý plyn však plyne

$$p \delta V_k = R \delta T ,$$

takže

$$C_p \delta T = C_v \delta T + R \delta T$$

a po úpravě

$$C_p = C_v + R , \tag{11}$$

což je *Mayerova rovnice.* Dělíme-li obě strany číslem C_v, dostaneme

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} ,$$

kde $\frac{C_p}{C_v} = \varkappa$ je tzv. *Poissonova konstanta.*

Měřením se zjistilo, že $\varkappa$ má pro jednoatomové plyny hodnotu

$$\varkappa = \tfrac{5}{3} = 1{,}67 ,$$

pro dvouatomové plyny je

$$\varkappa = 1{,}40 .$$

Entropie

Protože práce, kterou koná ideální plyn při expanzi, závisí na ději, jenž v plynu probíhá, závisí také veličina ΔQ na způsobu, jakým se mění stav plynu. To je při výpočtech často velmi nevhodné. Proto se v termodynamice definuje nová veličina, zvaná entropie, nezávislá na tom, jak změna stavu plynu probíhá. Entropie se značí S a její nekonečně malá změna δS je definována jako podíl nekonečně malého tepla δQ, dodaného plynu, a teploty T, při které bylo toto teplo plynu dodáno vratným dějem. Je tedy

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} . \tag{12}$$

Pomocí entropie je možno první termodynamickou větu pro jeden kilomol dokonalého plynu vyjádřit ve formě

$$\delta S = \frac{C_v \delta T + p \,.\, \delta V_k}{T} = \frac{C_v}{T} \delta T + R \frac{\delta V_k}{V_k} . \tag{13}$$

Jednotkou entropie je $[S] = \mathrm{J\ deg}^{-1}$. Entropie je veličina skalární.

Entropie závisí, právě tak jako vnitřní energie dokonalého plynu, jen na počátečním a konečném stavu plynu.

Podle obr. 14 můžeme každý vratný kruhový děj *AaBbA* rozložit na dva děje *AaB* a *BbA*. Má-li entropie při stavech zobrazených body A a B hodnoty S_1 a S_2, změní se její velikost při ději *AaB* o $S_2 - S_1$ a při ději *BbA* o $S_1 - S_2$. Poněvadž entropie je veličina skalární, je celková změna ΔS entropie při kruhovém ději $AaBbA$ rovna

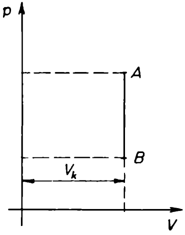
$$\Delta S = S_2 - S_1 + S_1 - S_2 = 0 .$$

Změna entropie ideálního plynu při vratném kruhovém ději je rovna nule.

Stavové změny dokonalého plynu

Dodáváme-li nebo odnímáme-li plynu teplo, dochází ke změnám všech, nebo aspoň dvou stavových veličin p, V, T. Všechny tyto změny budeme vztahovat na kilomol dokonalého plynu a na změny vratné. Nejdůležitější vratné děje v ideálním plynu jsou: děj izochorický, izobarický, izotermický a adiabatický.

a) D ě j i z o c h o r i c k ý. Izochorický je takový děj



Obr. 15

v plynu, při kterém zůstává objem plynu stálý. Proto platí rovnice

$$V_k = \text{konst.}, \Delta V_k = 0\,, \; A = p\,\Delta V_k = 0$$

Při tomto ději plyn práci nekoná, jak je patrno i z obr. 15. V $p - V$ diagramu je průběh tohoto děje zobrazen úsečkou AB rovnoběžnou s osou p (izochora).

Teplo ΔQ dodané plynu se podle I. termodynamické věty ($A = 0$) spotřebuje na zvýšení vnitřní energie plynu, jehož teplota roste z hodnoty T_1 na hodnotu T_2. Protože

$$\Delta V_k = 0\,,$$

je

$$\Delta Q = \Delta U = C_v \Delta T\,,$$

takže

$$\Delta Q = C_v\,(T_2 - T_1)\,.$$

Nekonečně malý přírůstek entropie je podle vztahu (13)

$$\delta S = C_v \frac{\delta T}{T}\,.$$

Celkovou změnu entropie z hodnoty S_1 na hodnotu S_2 při zvýšení teploty z hodnoty T_1 na hodnotu T_2 nelze určit prostředky elementární matematiky. Použijeme-li k výpočtu integrálního počtu, dojdeme k výsledku

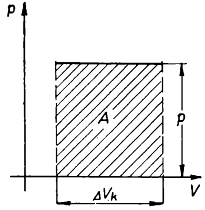
$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1}\,.\text{[3]} \qquad (14)$$

---

[3]) Značkou ln značíme tzv. přirozený logaritmus, který má za základ Eulerovo číslo e = 2,7 182 818 . . . Přirozený logaritmus jakéhokoli čísla $a > 0$ vypočítáme pomocí dekadických logaritmů ze vztahu $\ln a = 2{,}302\,585 \,.\, \log a$.

b) Děj izobarický. Při izobarickém ději je tlak plynu konstantní (obr. 16). Podle stavové rovnice dokonalého plynu platí pro mechanickou práci vykonanou plynem vztah

$$A = p\,\Delta V_k = R\,\Delta T = R\,(T_2 - T_1)$$



Obr. 16

a teplo plynu dodaného je určeno výrazem

$$\Delta Q = C_v \Delta T + R\,\Delta T = (C_v + R)\,\Delta T =$$
$$= C_p \Delta T = C_p\,(T_2 - T_1)\,.$$

Dodané teplo se tedy spotřebuje částečně na vzrůst vnitřní energie plynu, zčásti na vykonání mechanické práce.

Nekonečně malý přírůstek entropie má hodnotu

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} = C_p \frac{\delta T}{T}\,.$$

Integrací tohoto výrazu získáme podobně jako v rovnici (14) vztah

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} . \qquad (15)$$

Vnitřní energie plynu vzroste o $U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1)$.

Velikost práce vykonané při ději izobarickém se dá určit také z pracovního diagramu. Protože tlak plynu při tomto ději na objemu nezávisí, je průběh tlaku v $p - V$ diagramu zobrazen úsečkou rovnoběžnou s osou V (izobara). Pro velikost práce vychází z tohoto diagramu také

$$A = p \, \Delta V_k .$$

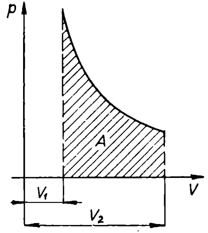
c) Děj izotermický. Při tomto ději zůstává teplota plynu stálá, takže platí pro 1 kilomol dokonalého plynu vztahy $T = k_1$, $\Delta T = 0$ a podle stavové rovnice $p \, V_k = R \, T = k_2$; k_1 a k_2 jsou konstanty.

Závislost tlaku na objemu je v $p - V$ diagramu zobrazena rovnoosou hyperbolou (izoterma). Podle obr. 17 je velikost práce při expanzi plynu z objemu V_1 na objem V_2 určena číselně obsahem vyčárkované plochy, který však nelze určit prostředky elementární matematiky.

Protože teplota plynu se při tomto ději nemění, je

$$\Delta U = 0 \text{ a } U = \text{konst.}$$

Všechno teplo dodané plynu se přemění v mecha-



Obr. 17

nickou práci. Proto platí pro nekonečně malé změny příslušných veličin rovnice

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{p\delta V_k}{T} = R\,\frac{\delta V_k}{V_k},$$

neboť

$$\frac{p}{T} = \frac{R}{V_k}.$$

Obdobně jako ve vztahu (14) vychází po integraci

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (16a)$$

Protože teplota plynu je konstantní, lze upravit vztah

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T},$$

platný pro nekonečně malé přírůstky příslušných veličin, na vztah

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T},$$

platný pro konečné přírůstky těchto veličin. Pak platí

$$\Delta Q = T(S_2 - S_1) = R\,T \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (16b)$$

d) Děj adiabatický. Při adiabatickém ději je plyn dokonale tepelně izolován tak, aby z okolí nemohl teplo přijímat, ani je do okolí vydávat. Pak $\Delta Q = 0$. Ze stavové rovnice pro kilomol dokonalého plynu potom vychází pro práci hodnota

$$A = -\Delta U = -C_v \Delta T = -C_v(T_2 - T_1).$$

Ze vztahu

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

plyne

$$\delta S = 0, \; \Delta S = S_2 - S_1 = 0$$

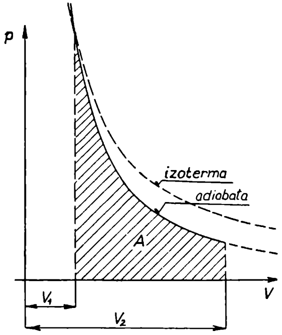
a

$$S = \text{konst.} \qquad (17)$$

Rovnici udávající závislost tlaku plynu na jeho objemu nelze odvodit při tomto ději bez znalostí vyšší matematiky. Proto ji uvádíme bez důkazu

$$p\,V_k^{\varkappa} = \text{konst.}, \qquad (18)$$

kde $\varkappa = \dfrac{C_p}{C_v}$ značí Poissonovu konstantu. Graficky je tato závislost zobrazena křivkou (adiabata), jejíž průběh je nakreslen na obr. 18.[4])



Obr. 18

---

[4]) Při určité hodnotě konstanty v rovnici (18) závisí průběh adiabaty jen na velikosti $\varkappa$, takže každé hodnotě $\varkappa$ odpovídá jiná adiabata. Všechny tyto adiabaty se však protínají na $p - V$ diagramu v jednom bodě, jehož souřadnice $V_k = 1$, neboť při $V_k = 1\ \text{m}^3$ je číselná hodnota $V_k^\varkappa = 1$ pro všechny hodnoty $\varkappa$. Protože izoterma je zvláštní případ adiabaty ($\varkappa = 1$), prochází tímto bodem i příslušná izoterma.

Carnotův kruhový děj

Carnotův kruhový děj je ideálním pracovním dějem pro tepelné a pro chladicí stroje. Jeho princip si vysvětlíme na tepelných strojích.

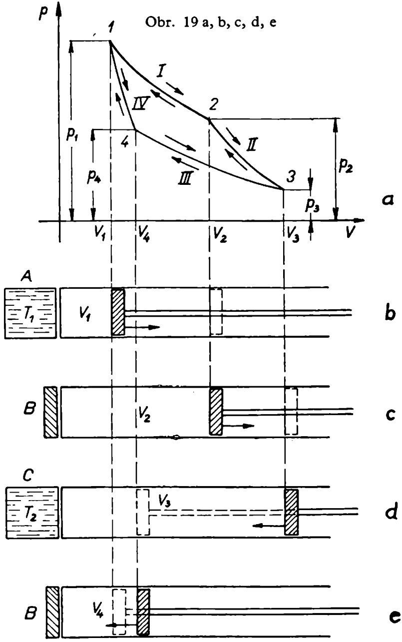
1. Carnotův ideální tepelný stroj. Při ideálním Carnotově kruhovém ději pracuje v tepelném stroji vratně dokonalý plyn mezi dvěma teplotami, T_1 ohřívače a T_2 chladiče. Protože při izotermických dějích se všechno teplo dodané plynu mění v práci, volil Carnot za první a třetí pracovní děj vratné izotermické děje. Poněvadž však na konci prvního děje, izotermické expanze, je teplota pracovního plynu T_1 a na počátku třetího děje, izotermické komprese, musí mít plyn teplotu T_2, vložil Carnot mezi tyto dva děje jako druhý děj vratnou adiabatickou expanzi, při které se ohřívači neodebírá teplo. Z obdobných důvodů vložil mezi třetí a první děj jako čtvrtý děj vratnou adiabatickou kompresi, protože se při ní neodevzdává teplo chladiči. Carnotův ideální stroj pracuje tedy vratně s dokonalým plynem ve čtyřech dějích, které dávají dohromady jeden kruhový děj (obr. 19a).[5])

Pracovní plyn je uzavřen ve válci, ve kterém se pohybuje bez tření píst. Plášť válce a píst jsou zhotoveny z dokonale tepelně izolujícího materiálu. Výměna tepla může nastat jen dnem válce. Aby stroj pracoval vratně, je nutno stále upravovat vnější tlak na píst tak, aby byl v každém okamžiku rovný tlaku pracovního plynu ve válci.

---

[5]) Na obr. 19a označují šipky vně kruhového diagramu průběh děje v Carnotově tepelném stroji a šipky uvnitř diagramu průběh děje v Carnotově chladicím stroji.

Obr. 19 a, b, c, d, e


p
1
I
2
IV
4
II
p_1
p_2
p_4
III
3
p_3
a
V_1
V_4
V_2
V_3
V
A
I
T_1
V_1
b
II
B
V_2
c
C
III
T_2
V_3
d
IV
B
V_4
e

Úvahy provedeme pro kilomol dokonalého plynu. Plyn má na počátku prvního děje teplotu T_1 ohřívače a objem V_1 při tlaku p_1.

a) Dno válce je ve styku s ohřívačem A a plyn se při teplotě T_1 izotermicky rozpíná z objemu V_1 na objem V_2 (obr. 19b). Během tohoto děje předá ohřívač pracovnímu plynu teplo ΔQ_1. Entropii plynu označíme na počátku děje S_1, na jeho konci S_2. Podle vztahů (16a) a (16b) platí

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ a } \Delta Q_1 = T_1 (S_2 - S_1) .$$

b) Po ukončení prvního děje odpojíme ohřívač od pracovního válce a dno válce tepelně izolujeme izolační deskou B. Plyn se dále rozpíná adiabaticky z objemu V_2 na objem V_3, kdy jeho teplota klesne na hodnotu T_2, kterou má chladič (obr. 19c). Během tohoto adiabatického děje plyn nepřijímá teplo a koná práci na útraty své vnitřní energie. Označíme-li teplo přijaté při tomto ději ΔQ_2 a entropii na konci děje S_3, platí podle vztahu (17)

$$\Delta Q_2 = 0 \text{ a } S_3 - S_2 = 0 .$$

c) Po ukončení druhého děje odstraníme izolující desku B a dno válce uvedeme ve styk s chladičem C s tepelnou lázní o teplotě $T_2 < T_1$ (obr. 19 d). Působením vnější síly na píst plyn izotermicky stlačujeme z objemu V_3 na takový objem V_4, aby další adiabatická komprese převedla plyn do počátečního stavu. Na kompresi je nutno vynaložit práci, která se mění v teplo $\Delta Q_3'$ odevzdané chladiči. Označíme-li entropii plynu na konci třetího děje S_4, platí pro rozdíl entropií na konci a na počátku tohoto děje a pro přijaté teplo $\Delta Q_3 = - \Delta Q'_3$ podle vztahů (16a) a (16b) rovnice

$$S_4 - S_3 = R \ln \frac{V_4}{V_3} \text{ a } \Delta Q'_3 = - T_2 (S_4 - S_3) =$$
$$= T_2 (S_3 - S_4) .$$

d) Při čtvrtém ději se dno válce izoluje tepelně izolační deskou B a plyn se adiabaticky stlačuje na objem V_1 (obr. 19e). Při této kompresi se vykoná působením vnější síly na píst mechanická práce A_4, která zvýší vnitřní energii plynu na původní hodnotu a plyn přejde do počátečního stavu. Entropie S_5 na konci tohoto děje má hodnotu $S_5 = S_1$. Proto platí

$$\Delta Q_4 = 0 \text{ a } S_5 - S_4 = 0 ,$$

kde ΔQ_4 značí teplo přijaté plynem během čtvrtého děje.

Poněvadž entropie je veličina skalární, nabude celková změna entropie během Carnotova kruhového děje hodnotu

$$\Delta S = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_3) +$$
$$+ (S_5 - S_4) = R \left(\ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \frac{V_4}{V_3} \right) = S_5 - S_1 = 0.$$

Z této rovnice se určí objem V_4, který je třeba znát, aby děj proběhl kruhově. Po její úpravě vychází

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} = r .$$

Číslo r udává tzv. expanzní poměr, tj. poměr objemů plynu po expanzi a před expanzí při prvním ději. Z posledního výrazu je patrno, že při izotermické kompresi je nutno zmenšit objem plynu v témž poměru, ve kterém se jeho objem zvětšil při izotermické expanzi.

Podle zákona zachování energie odpovídá mechanická práce, vykonaná během jednoho cyklu, celkovému teplu, které přijal plyn během celého cyklu od obou lázní. Proto platí

$$A = \Delta Q_1 - \Delta Q_3' = T_1 (S_2 - S_1) - T_2 (S_3 - S_4) .$$

Protože však

$$S_3 = S_2 \text{ a } S_4 = S_5 = S_1 ,$$

je mechanická práce, kterou plyn během jednoho cyklu vykonal, určena rovnicí

$$\begin{aligned} A &= T_1 (S_2 - S_1) - T_2 (S_2 - S_1) = \\ &= (T_1 - T_2)(S_2 - S_1) . \end{aligned}$$

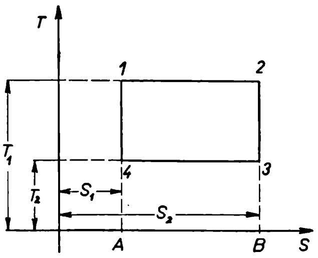
T e p e l n o u ú č i n n o s t í η nazýváme poměr tepla odpovídajícího mechanické práci vykonané strojem v průběhu jednoho kruhového děje a tepla, které plyn v téže době přijal od teplejší lázně. Je tedy účinnost Carnotova tepelného stroje pracujícího vratně s ideálním plynem mezi teplotami T_1 a T_2, určena vztahem

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_3'}{\Delta Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1 (S_2 - S_1)} = \\ &= \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} . \qquad (19) \end{aligned}$$

Carnotův dokonalý stroj má největší tepelnou účinnost ze všech strojů pracujících vratně mezi týmiž *teplotami* T_1 *a* T_2, neboť první a třetí děj, ze kterých se Carnotův kruhový děj skládá, jsou děje izotermické, při nichž se všechno teplo přijaté plynem mění v mechanickou práci, bez jakékoli změny vnitřní energie plynu, a druhý a čtvrtý děj jsou děje adiabatické, při kterých plyn nepřijímá ani nevydává teplo do okolí. Proto se mění v mechanickou práci celkové teplo přijaté plynem během kruhového děje.

Vztah (19) platí jen pro ideální Carnotův stroj. Můžeme to ukázat také na tzv. tepelném čili *T-S* diagramu.

Tepelný diagram znázorňuje závislost absolutní teploty plynu na jeho entropii. V pravoúhlém souřadném systému, ve kterém nanášíme na osu *x* číselné hodnoty entropie a na osu *y* příslušné teploty,



Obr. 20

zobrazí se vratné adiabatické děje úsečkami rovnoběžnými s osou T, neboť při vratných adiabatických dějích je entropie konstantní (obr. 20). Vratné izotermické děje jsou v tomto diagramu zobrazeny úsečkami rovnoběžnými s osou S, neboť při vratných izotermických dějích je teplota konstantní.

Diagram vratného Carnotova kruhového děje je tedy obvod obdélníka *1, 2, 3, 4.* Obsah tohoto obdélníka $(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)$ odpovídá práci vykonané plynem při jednom kruhovém ději a obsah obdélníka *1, 2, B, A* teplu, přijatému plynem při izotermické expanzi. Účinnost Carnotova děje je tedy určena poměrem obsahů obdélníka *1, 2, 3, 4* a obdélníka *1, 2, B, A.*

Ze vzorce (19) je patrno, že účinnost tepelného stroje je tím větší, čím vyšší je teplota ohřívače a čím nižší je teplota chladiče. Kdyby byla teplota chladiče $T_2 = 0$ °K, pak by měl Carnotův ideální stroj účinnost rovnou 1.

2. Ideální Carnotův chladicí stroj. V Carnotově ideálním chladicím stroji probíhá vratný kruhový Carnotův děj v obráceném pořádku než ve stroji tepelném. Jeho průběh můžeme sledovat na obr. 10a, b, c, d, e.

a) Dokonalý plyn má na počátku prvního děje teplotu T_2 chladnější lázně. Dno pracovního válce je ve styku se studenější lázní a plyn se vratně izotermicky rozpíná. Při této expanzi přijme ze studenější lázně teplo ΔQ_3 a zvětší svůj objem z hodnoty V_4 na V_3.

b) Při druhém ději je dno válce deskou B izolováno proti okolí. Plyn ve válci se působením vnější síly na píst vratně adiabaticky stlačuje a jeho teplota se zvětšuje. V okamžiku, kdy dosáhne teploty T_1 teplejší lázně, bude mít objem V_2. Pak se odstraní izolační deska B a dno válce se uvede ve styk s teplejší lázní teploty T_1.

c) Při teplotě T_1 se plyn vratně izotermicky stlačuje až na objem V_1, který se určí z expanzního poměru

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Při této kompresi odevzdá teplejší lázni teplo $\Delta Q_1 > > \Delta Q_3$. Potom se odpojí tepelná lázeň ode dna válce a dno se izoluje izolační deskou B.

d) Poslední děj je vratná adiabatická expanze z objemu V_1 na objem V_4. Při tomto ději se plyn ochladí na teplotu T_2 a vrátí se do počátečního stavu.

Všechny uvedené děje jsou vratné, a proto je nutno upravovat vnější tlak na píst tak, aby se stále rovnal tlaku plynu ve válci.

Velikost práce, teplo přijaté nebo vydané plynem a změny entropie v průběhu jednotlivých dějů se vypočítají obdobným způsobem jako u Carnotova tepelného stroje.

Pracovní plyn ve válci převede do teplejší lázně teplo

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_3 + \Delta Q_2,$$

kde ΔQ_2 značí teplo, které je ekvivalentní práci A, vynaložené na udržení chodu stroje při stlačování plynu. Pracovní účinnost chladicího stroje je

$$\eta = \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_3 + \Delta Q_2}.$$

Obdobně jako u tepelného stroje se z vypočítaných změn entropie při jednotlivých dějích určí

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

U chladicích strojů se vedle tepelné účinnosti počítá i s tzv. chladicí účinností. Je to poměr

$$\chi = \frac{\Delta Q_3}{\Delta Q_2}.$$

Z posledních tří rovnic se určí

$$\chi = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \tag{20}$$

Podobně jako tomu bylo u tepelného stroje, platí i u ideálního Carnotova chladicího stroje, že všechny vratně pracující chladicí stroje, které pracují mezi týmiž teplotami, mají stejnou tepelnou i chladicí účinnost. Nevratně pracující chladicí stroje mají vždy menší tepelnou i chladicí účinnost než stroje pracující vratně.

Druhá termodynamická věta

Carnotův tepelný stroj pracující vratně s dokonalým plynem odebírá ohřívači teplo, část ho změní v práci a zbytek odevzdá chladiči. Mnohem výhodnější by byl stroj, který by změnil v práci celé množství tepla, které přijal z ohřívače. Pak by byl chladič zbytečný a stroj by mohl pracovat s jedinou tepelnou lázní, ze které by periodicky ubíral teplo a měnil je beze zbytku v práci. Takto pracující stroj, nazvaný perpetuum mobile druhého druhu, by neodporoval zákonu zachování energie. Mohl by získávat ohromná množství energie, např. ochlazováním mořské vody nebo ovzduší a mohl by pracovat zároveň jako chladicí stroj.

Takovýto stroj se nepodařilo sestrojit a od druhé polovice minulého století se fyzikové důvodně domnívají, že není možný. Tento poznatek je vyjádřen druhou větou termodynamickou, která se dá formulovat různým způsobem. Našemu účelu nejlépe vyhovuje formulace Planckova:

Není možno sestrojit stroj, který by pracoval periodicky a který by nezpůsoboval žádné jiné změny, než že by odebíral teplo tepelné lázni a měnil je v rovnomocnou práci.

Dieslův tepelný stroj

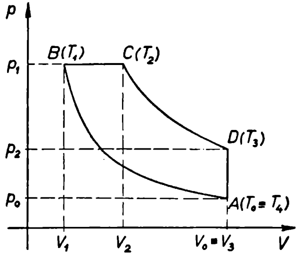
V Dieslově tepelném stroji probíhají periodicky v pracovním plynu kruhové děje, sestávající ze čtyř dějů, z adiabatické komprese, izobarické expanze, adiabatické expanze a z děje izochorického. Vyšetříme, jakou tepelnou účinnost má Dieslův tepelný stroj, pracující vratně s dokonalým plynem.

Při prvním ději (obr. 21) píst stlačuje adiabaticky vzduch, nasátý do válce z objemu V_0 na objem V_1. Tlak přitom roste z hodnoty $p_0 = 1$ at na p_1 a teplota z T_0 na T_1. Předpokládáme, že ve válci je jeden kilomol vzduchu. Entropii vzduchu označíme na počátku děje S_0, na konci S_1. Protože jde o adiabatický děj, platí vztahy

$$\Delta Q_1 = 0\,, \quad S_1 - S_0 = 0\,, \quad A_1 = -\,C_v\,(T_1 - T_0)\,,$$

kde A_1 značí práci vykonanou plynem při tomto ději

a C_v kilomolové teplo při stálém objemu. Poněvadž $A_1 < 0$, jde o práci přijatou stlačeným vzduchem.
Na začátku druhého děje se vstříkne do pracovního válce pohonná látka, která se ve stlačeném silně zahřátém vzduchu zapálí. Hořením se uvolní teplo



Obr. 21

ΔQ_2, teplota ve válci vzroste z hodnoty T_1 na hodnotu T_2, směs vzduchu a plynů, vzniklých hořením, zvětší svůj objem z hodnoty V_1 na hodnotu V_2 při konstantním tlaku p_1. Jde tedy o děj izobarický. Označíme-li entropii plynu na konci tohoto děje S_2, platí

$$\Delta Q_2 = C_p (T_2 - T_1) , \quad S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} ,$$
$$A_2 = R (T_2 - T_1) ,$$

kde C_p značí kilomolové teplo plynu při stálém tlaku.

Při třetím ději se směs plynů dále rozpíná, avšak adiabaticky, a koná práci A_3. Teplota směsi plynů dosáhne hodnoty T_3, tlak klesne na p_2 a objem na $V_3 = V_0$. Entropii na konci třetího děje označíme S_3; pro tento děj platí

$$\Delta Q_3 = 0 \qquad S_3 - S_2 = 0$$
$$A_3 = - C_v (T_3 - T_2) .$$

Na počátku čtvrtého děje se otevře výpustný ventil a tlak ve válci klesne při konstantním objemu $V_3 = V_0$ na p_0 a teplota směsi na $T_4 = T_0$. Jestliže označíme entropii na konci tohoto děje S_4 a teplo vzniklé při tomto ději ΔQ_4, pak platí

$$\Delta Q_4 = C_v (T_0 - T_3) \qquad S_4 - S_3 = C_v \ln \frac{T_0}{T_3} ,$$

neboť jde o děj izochorický. Protože $\Delta Q_4 < 0$, jde o teplo vydané směsí plynů.

Všechny uvedené vztahy platí za předpokladu, že stroj pracuje vratně. Proto je nutno upravovat vnější tlak na píst tak, aby se v průběhu celého kruhového děje stále shodoval s tlakem plynu ve válci.

Protože entropie je skalární veličina, je celková změna entropie

$$\Delta S = (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) +$$
$$+ (S_4 - S_3) = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + C_v \ln \frac{T_0}{T_3} .$$

Protože $S_4 = S_0$, je $\Delta S = S_4 - S_0 = 0$.

Platí tedy rovnice

$$C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = - C_v \ln \frac{T_0}{T_3} .$$

Dělíme-li obě strany rovnice veličinou C_v, dostaneme

$$\frac{C_p}{C_v} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{T_3}{T_0},$$

takže

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\varkappa} = \frac{T_3}{T_0}, \qquad (21)$$

kde $\varkappa = \dfrac{C_p}{C_v}$ je Poissonova konstanta.

Druhý děj Dieslova cyklu je děj izobarický. Proto platí

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1},$$

takže

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = q. \qquad (22)$$

Poměr q udává změnu objemu při druhém ději (hoření paliva) a nazývá se plnicí poměr. Je vždy větší než 1.

Směs plynů přijme při jednom kruhovém ději teplo

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 =$$
$$= C_p (T_2 - T_1) + C_v (T_0' - T_3)$$

a vykoná práci odpovídající tomuto teplu.

Teplo přijaté plyny při hoření paliva má hodnotu ΔQ_2. Je tedy tepelná účinnost Dieslova tepelného stroje pracujícího vratně s dokonalým plynem

$$\eta = \frac{\Delta Q}{\Delta Q_2} = \frac{C_p (T_2 - T_1) - C_v (T_3 - T_0)}{C_p (T_2 - T_1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}. \qquad (23)$$

Aby výraz (23) mohl být porovnán se vzorcem (19) $\eta = 1 - \frac{T_0}{T_2}$, udávajícím účinnost Carnotova ideálního cyklu, pracujícího při stejných mezných teplotách jako Dieslův kruhový děj, provedeme úpravu vztahu (23)

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{\frac{T_3}{T_0} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \frac{T_0}{T_1}.$$

Dosadíme-li podle vztahů (21) a (22) za $\frac{T_3}{T_0} = q^\varkappa$ a za $\frac{T_2}{T_1} = q$, je

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{q^\varkappa - 1}{q - 1} \frac{T_0}{T_1} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{q^\varkappa - 1}{q - 1} \frac{T_0}{T_2} \frac{T_2}{T_1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varkappa} \frac{q^\varkappa - 1}{q - 1} q \frac{T_0}{T_2} = 1 - \varepsilon \frac{T_0}{T_2},$$

kde

$$\varepsilon = \frac{1}{\varkappa} \frac{q^\varkappa - 1}{q - 1} q.$$

Pro $\varkappa = 1,4$ ukazuje závislost výrazu ε na q tabulka

q	1,5	2	2,5	3
ε	1,64	2,34	3,10	3,92

Z tabulky je patrno a dá se i početně dokázat, že při všech vyskytujících se hodnotách $\varkappa$ má výraz pro všechna $q > 1$ hodnotu větší než 1. Proto je účinnost Dieslova vratného kruhového děje, pracujícího s dokonalým plynem, menší než účinnost Carnotova ideálního kruhového děje, probíhajícího mezi stejnými teplotami T_2 a T_0.

C. KATEGORIE C

Jan Tesař, Praha:

Zákon zachování hybnosti

Hybnost

Narazí-li pohybující se těleso na jiné těleso nebo na pevnou stěnu, působí na ně silou. Velikost této síly závisí na hmotnosti tělesa, které způsobuje náraz, na rychlosti tohoto tělesa vzhledem k druhému tělesu a na době, po kterou trvá působení prvního tělesa na druhé.

Kdyby např. narazila na pevnou stěnu stejně velikou rychlostí dvě tělesa různých hmotností, jež působí na stěnu po stejnou dobu, působilo by těleso o větší hmotnosti na stěnu tolikrát větší tlakovou silou, kolikrát je jeho hmotnost větší než hmotnost druhého tělesa. Kdyby na stěnu narazila dvě tělesa o stejných hmotnostech různou rychlostí a působila by na ni při nárazu stejně dlouho, tlačilo by rychlejší těleso na stěnu tolikrát větší tlakovou silou, kolikrát je jeho rychlost vzhledem k pevné stěně větší než rychlost druhého tělesa.

Velikost silového působení tělesa na jiné těleso v daném časovém intervalu je přímo úměrná součinu hmotnosti tohoto tělesa a jeho rychlosti vzhledem k druhému tělesu. Proto přisuzujeme tělesu o hmotnosti m, které se pohybuje rychlostí v, fyzikální veličinu p, která se nazývá *hybnost*. Platí tedy vztah

$$p = m v \,. \tag{1a}$$

Hmotnost je veličina skalární, rychlost je vektor. Násobíme-li vektor skalárem, je veličina určená jejich součinem vektor, který má souhlasný směr a orientaci jako násobený vektor. Označíme-li velikost vektoru hybnosti p a velikost vektoru rychlosti v, pak platí rovnice (1a). Chceme-li vyznačit vektorový charakter hybnosti, píšeme [1])

$$\boldsymbol{p} = m \boldsymbol{v}$$

Jednotkou hybnosti je $[p] = 1 \text{ kg ms}^{-1}$.

Koná-li těleso rovnoměrný přímočarý pohyb, koná ho setrvačností bez působení síly a jeho rychlost je stálá. Protože také hmotnost pohybujícího se tělesa je konstatní veličina, můžeme zákon setrvačnosti vyjádřit rovnicemi

$$p = konst. \tag{2a}$$

[1]) Skaláry značíme v tisku kurzívou, např. hmotnost m, objem V, vektory polotučně, např. sílu $\boldsymbol{F}$, rychlost $\boldsymbol{v}$, hybnost $\boldsymbol{p}$.

nebo vektorově

$$\boldsymbol{p} = \textbf{konst.} \qquad (2b)$$

Hybnost tělesa, na které nepůsobí žádné jiné těleso silou (vnější síla), zůstává při pohybu konstantní.

Tento poznatek lze vyjádřit i jinak. Má-li totiž hybnost tělesa konstantní velikost a směr, pak se vektor hybnosti tělesa nemění, a proto se nemění ani velikost hybnosti. Označíme-li změnu jakékoliv veličiny řeckým písmenem Δ, lze uvedené poznatky vyjádřit rovnicemi

$$\Delta \boldsymbol{p} = m\,\Delta \boldsymbol{v} = 0 \qquad (3a)$$

a

$$\Delta p = m\,\Delta v = 0\,. \qquad (3b)$$

Nepůsobí-li na těleso, které je v klidu nebo v pohybu, žádná vnější síla, nemění se hybnost tělesa.

Působí-li na těleso vnější síla, mění se rychlost tělesa, těleso koná nerovnoměrný pohyb a rovnice (2) a (3) neplatí.

Impuls síly

Začne-li působit síla na pevné těleso, které se nachází v klidu, buďto těleso deformuje, nebo je uvede do pohybu s určitým zrychlením. Působení vnější síly na těleso se tedy projeví buď deformačními účinky (statickými), nebo účinky pohybovými.

Působí-li na totéž těleso stejně velká síla jednou delší dobu, podruhé kratší dobu, jsou deformační nebo pohybové účinky síly na těleso tolikrát větší, kolikrát delší dobu síla na těleso působí.

Působí-li na totéž těleso dvě nestejně veliké síly po stejně dlouhou dobu, pak větší síla deformuje těleso tolikrát více, nebo mu udělí zrychlení tolikrát větší, kolikrát má větší hodnotu než síla menší.

Jsou tedy účinky vnější síly, působící na totéž těleso, přímo úměrné velikosti této síly a době, po kterou síla na těleso působí.

Proto můžeme účinky vnější síly na těleso měřit součinem síly a doby, po kterou síla na těleso působí. Tato fyzikální veličina, kterou značíme I, se nazývá *impuls síly*. Poněvadž síla je veličina vektorová a čas veličina skalární, je impuls veličina vektorová a její vektor má souhlasný směr a orientaci jako vektor síly.

Účinek síly na těleso se tedy vyjadřuje impulsem síly, který je vektorově definován rovnicí

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\, t \tag{4a}$$

a jeho velikost má hodnotu

$$I = F\, t\,. \tag{4b}$$

Jednotkou impulsu je

$$[I] = \mathrm{N\,s} = \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}\,.$$

Veliký účinek na těleso může mít podle rovnic (4) i malá síla působící dlouhou dobu. Dopadají-li často na totéž místo na kameni kapky vody působící při dopadu na kámen jen malou tíhovou silou, vyhloubí po dlouhé době v kameni veliký důlek, i když na kámen nepůsobí chemicky.

I velmi krátce působící síla může mít na těleso veliké účinky, je-li veliká. Při střelbě puškou veliká tlaková síla rozpínajících se plynů vzniklých hořením paliva, která působí jen velmi malý zlomek sekundy, udělí střele ohromné zrychlení, takže střela opustí hlaveň rychlostí o velikosti sta metrů za sekundu.

Impuls síly a hybnost

Působí-li na těleso o hmotnosti m, které je v klidu, konstantní síla F, pak koná těleso pohyb rovnoměrně zrychlený a dosáhne za čas t, po který síla na těleso působí, rychlosti $v = a\,t$, kde a značí zrychlení pohybu tělesa.

Rovnici (1) lze v tomto případě upravit na tvar

$$p = m\,v = m\,a\,t$$

a rovnici (4) na tvar

$$I = F\,t = m\,a\,t = p\,. \tag{5a}$$

Z posledních dvou rovnic je patrno, že vektor hybnosti má stejný směr a orientaci jako vektor zrychlení tělesa a že totéž platí pro vektor impulsu. Lze tedy rovnici (5a) psát i vektorově

$$\mathbf{I} = \mathbf{p} = m\,\mathbf{a}\,t\,. \tag{5b}$$

Vzorce (5) platí jen v tom případě, že jde o konstantní sílu a o pohyb, na jehož počátku je těleso v klidu, a měříme-li čas od okamžiku, kdy se těleso začalo pohybovat.

Jestliže konstatní síla $\mathbf{F}$ začne působit na pohybující se těleso ve směru jeho rychlosti v čase t_1 a končí své působení v čase t_2 od začátku pohybu tělesa, působí celkem po dobu

$$\Delta t = t_2 - t_1\,.$$

Byla-li v čase t_1 rychlost pohybujícího se tělesa $\mathbf{v}_1$ a v čase t_2 rychlost $\mathbf{v}_2$, je

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{v} .$$

Za dobu Δt se změní hybnost z hodnoty $\mathbf{p}_1$ na hodnotu $\mathbf{p}_2$ o

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\,\mathbf{v}_2 - m\,\mathbf{v}_1 = m\,\Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t = \mathbf{I},$$

takže je

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\,\Delta t\,, \qquad (6a)$$

pro velikosti platí

$$p_2 - p_1 = F\,\Delta t\,,$$

čili při přímočarém pohybu

$$F\,\Delta t = m\,(v_2 - v_1) = m\,\Delta v\,, \qquad (6b)$$

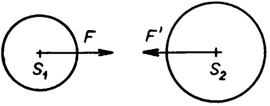
kde $m\,\Delta v$ značí změnu hybnosti, kterou způsobí síla F, působící po dobu Δt na těleso hmotnosti m, jestliže těleso mělo na počátku časového intervalu Δt rychlost v_1 a na konci v_2.

Impuls síly a změna hybnosti mají stejnou velikost a stejný směr i orientaci. Také jejich rozměry jsou stejné. Přesto nesmíme obě veličiny zaměňovat. Jedna z nich je příčinou a druhá následkem. Při dopadu tělesa na pevnou stěnu je změna jeho hybnosti příčinou vzniku impulsu síly, která působí deformaci pevné stěny. Při střelbě z pušky způsobí naopak impuls síly rozpínajících se plynů, vzniklých hořením paliva, změnu hybnosti střely i pušky.

Impuls síly se rovná změně hybnosti pohybujícího se tělesa.

To platí i tehdy, jestliže je těleso v klidu v okamžiku, kdy na ně začala působit síla.

Silové působení těles je vzájemné (obr. 22). *Působí-li jedno těleso na druhé silou (akce), působí druhé těleso na první stejně velikou silou (reakce).* Akce a reakce mají stejný směr, jsou však opačně orientovány a současně vznikají a současně zanikají.



Obr. 22

Tyto vlastnosti akce a reakce vyplývají z třetího Newtonova pohybového zákona, který se dá vyjádřit rovnicí

$$F = -F',$$

kde F značí velikost akce a F' velikost reakce. Násobíme-li obě strany velikostí Δt doby, po kterou na sebe obě tělesa působí, dostaneme rovnici

$$F\,\Delta t + F'\,\Delta t = 0\,.$$

Veličina $F\,\Delta t$ je impuls síly, kterým působí první těleso na druhé, takže platí

$$F\,\Delta t = m_2\,\Delta v_2\,,$$

kde $m_2\,\Delta v_2$ značí změnu hybnosti druhého tělesa. Obdobně platí

$$F'\,\Delta t = m_1\,\Delta v_1\,,$$

kde $F'\,\Delta t$ značí velikost impulsu síly, kterou druhé těleso působí na těleso první, a $m_1 \Delta v_1$ je změna hybnosti prvního tělesa.

Platí tedy rovnice

$$\Delta \boldsymbol{p} = m_1 \Delta \boldsymbol{v}_1 + m_2 \Delta \boldsymbol{v}_2 = 0 \qquad (7a)$$

a

$$\Delta p = m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0\,, \qquad (7b)$$

kde znaménko + značí v první rovnici vektorový, v druhé rovnici algebraický součet změny hybnosti obou těles.

Dvě tělesa, která na sebe vzájemně působí akcí a reakcí, tvoří *soustavu dvou těles*. Nepůsobí-li na soustavu dvou těles žádné jiné síly (vnější), nazývá se tato soustava *uzavřená (izolovaná) soustava dvou těles*.

V izolované soustavě dvou těles platí rovnice (7).

Často se setkáváme s případem, že na sebe působí navzájem více těles než dvě. Pak mluvíme o soustavě těles.

Názvem soustava těles označujeme soubor k těles, která pokládáme za jeden celek. Takovou soustavou těles je např. sluneční soustava. Také každé těleso je soustavou těles, neboť je složeno z částic, např. z molekul, které vzhledem k jejich malým rozměrům pokládáme za hmotné body.

Celková hmotnost soustavy těles (hmotných bodů) je rovna součtu hmotností všech těles (hmotných bodů) patřících do soustavy a také celková hybnost soustavy je rovna součtu hybností všech těles (hmotných bodů) soustavy.

Pohyby těles uvnitř soustavy způsobují síly, které působí na jednotlivá tělesa. Tyto síly mohou být způsobovány tělesy nacházejícími se mimo soustavu a do soustavy nepatřícími. Takovýmto silám říkáme *vnější síly*. Vnější síly mohou jednotlivé body v soustavě přemísťovat a působit deformaci soustavy nebo mohou uvést soustavu jako celek do pohybu. *Vnější síly tedy mohou změnit celkovou hybnost soustavy.*

Soustava, na kterou nepůsobí žádná vnější síla, se nazývá *uzavřená (izolovaná) soustava těles.*

V uzavřené soustavě existují jen síly, kterými na sebe vzájemně působí tělesa patřící do soustavy. Tyto síly se nazývají *síly vnitřní.*

Vnitřními silami jsou např. soudržné (kohezní) síly, kterými na sebe navzájem působí molekuly tělesa, gravitační síly, kterými na sebe vzájemně působí tělesa sluneční soustavy, síly mezi tělesy nabitými elektrickými náboji, síly působící vzájemně mezi Zemí a tělesy na zemském povrchu apod.

Každá dvě tělesa (hmotné body) soustavy působí na sebe navzájem akcí a reakcí. Proto platí pro jejich hybnosti rovnice

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 + m_2 \Delta \mathbf{v}_2 = 0 .$$

Protože tato rovnice platí pro kteroukoli dvojici vnitřních sil soustavy, platí i pro celou soustavu, takže pro změnu hybnosti $\Delta \mathbf{p}$ uzavřené soustavy těles platí rovnice

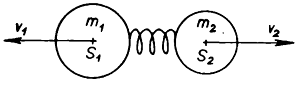
$$\Delta \mathbf{p} = m_1 \Delta \mathbf{v}_1 + m_2 \Delta \mathbf{v}_2 + \ldots + m_n \Delta \mathbf{v}_n = 0 . \quad (8)$$

Rovnice (8) je zobecněním rovnice (7a) a nazývá se *zákon zachování hybnosti*. Dá se vyjádřit větou: *Celková hybnost uzavřené soustavy těles (hmotných bodů) zůstává během pohybu (a ovšem i za klidu) konstantní.*

Srovnáváme-li rovnici (8) s rovnicí (3), vidíme, že zákon setrvačnosti, vyjádřený rovnicí (3) nebo (2), je zvláštním případem zákona zachování hybnosti.

Těžiště soustavy těles

Vyšetřme pohyb dvou koulí malých rozměrů o hmotnostech m_1 a m_2, které se mohou pohybovat bez tření v přímém žlábku ve vodorovné rovině. Koule se dotýkají konců stlačené pružiny. Koule a pružina tvoří uzavřenou soustavu těles (obr. 23). Odstraníme-li zařízení stlačující pružinu, pružina se prudce prodlouží a tlačí na obě koule stejně



Obr. 23

velikými silami F_1 a F_2, které působí velmi krátkou dobu Δt, mají totožnou vektorovou přímku a jsou opačně orientovány. Síly F_1 a F_2 udělí koulím stejně veliké opačně orientované impulsy, které uvedou koule do pohybu. Koule dosáhnou na konci doby Δt rychlosti v_1 a v_2. Protože byly na počátku ve stavu klidu, jsou v_1 a v_2 přírůstky rychlostí. Proto platí podle zákona zachování hybnosti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad \text{a} \quad \frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Obě koule se pohybují dále těmito rychlostmi pohybem přímočarým rovnoměrným a vykonají za libovolnou dobu t dráhy $s_1 = v_1 t$ a $s_2 = v_2 t$, takže

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Zanedbáme-li dráhy, které koule vykonaly za velmi krátkou dobu Δt a pokládáme-li délku stlačené pružiny a rozměry koulí za velmi malé vzhledem k drahám s_1 a s_2, pak bod, ve kterém počal pohyb obou koulí, dělí v každém okamžiku spojnici poloh obou koulí v obráceném poměru k hmotnostem obou těles. Tento bod splňuje tedy vlastnosti *hmotného středu (těžiště)*.

Dvě tělesa, tvořící uzavřenou soustavu těles, která je jako celek v klidu, mohou konat uvnitř soustavy posuvné pohyby, pokud splňují zákon zachování hybnosti. Těžiště soustavy zůstává přitom v klidu. (9)

Chceme-li určit hmotný střed soustavy více než dvou těles (hmotných bodů), najdeme nejprve hmotný střed S_1 soustavy kterýchkoli dvou těles (hmotných bodů) A, B. V bodě S_1 si myslíme soustředěnou hmotnost $(m_1 + m_2)$ bodů A a B. Na spojnici bodu S_1 s libovolným třetím tělesem (hmotným bodem) C leží hmotný střed soustavy tří těles (hmotných bodů) A, B, C, který dělí spojnici $S_1 C$ v obráceném poměru součtu hmotností $(m_1 + m_2)$ k hmotnosti m_3 tělesa (hmotného bodu) C. Obdobným způsobem můžeme pokračovat dále, až najdeme hmotný střed S soustavy všech těles (hmotných bodů).

Věta (9) platí pro každou uzavřenou soustavu o jakémkoli počtu těles (hmotných bodů).

Koná-li soustava těles jako celek posuvný pohyb, lze popsat pohyb soustavy pohybem jejího těžiště. Tělesa soustavy mohou v soustavě konat působením vnitřních sil ještě vlastní pohyby, takže konají pohyby složené. Vlastní pohyby těles soustavy musí vyhovovat zákonu zachování hybnosti.

Vyšetřujeme-li tedy posuvný pohyb tělesa, které je soustavou molekul, můžeme těleso pokládat za bod, ve kterém je soustředěna hmotnost celého tělesa. Tento bod je těžištěm tělesa.

Poznatky o vlastnostech těžiště těles a soustav těles mají veliký praktický význam, který je patrný z několika příkladů. Dělo koná při výstřelu zpětný pohyb, jehož rychlost se vypočítá ze zákona zachování hybnosti. Těžiště soustavy „dělo — střela" při tom nezmění polohu, nebereme-li v úvahu tření při pohybu. Těžiště střepin granátů po explozi by se ve vzduchoprázdném prostoru pohybovalo podle zákonů o šikmém vrhu. Totéž platí i při vrhu diskem, oštěpem ap. Ačkoli se disk nebo oštěp při pohybu otáčejí, jejich těžiště by ve vakuu konalo pohyb podle zákonů šikmého vrhu. Při seskoku z klidného vozíku nebo při výskoku z klidně stojící loďky zůstává těžiště soustavy „člověk — vozík" a „člověk — loďka" v klidu.

Ráz těles

Srazí-li se dvě tělesa, která se obě pohybují, nebo narazí-li pohybující se těleso na jiné klidné, nastává *ráz*. Při rázu dochází k náhlé změně vektoru rychlosti i hybnosti obou těles. Následkem toho vznikne podle upraveného vztahu (6b) síla velikosti

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t},$$

která se nazývá *nárazová síla*. Nárazová síla je během trvání rázu proměnlivá, závisí na okamžité velikosti deformace. Uvedený vzorec udává střední velikost nárazové síly.

Při velké změně hybnosti, ke které dojde při krátce trvajícím nárazu, je číselná hodnota poměru $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ veliká. Proto nabývají nárazové síly při prudkých nárazech velikých hodnot. Při srážce vlaků působí tak veliké síly, že často roztříští vagóny, zatímco při brzdění, kde dochází k stejné změně hybnosti, avšak za mnohem delší dobu, nevzniká škoda. Zvedáme-li zvolna závaží na niti, je nit napínána tíhovou silou. Pokusíme-li se zvednout závaží prudkým trhnutím směrem vzhůru, nit se přetrhne, protože nárazová síla dosáhne veliké hodnoty. I zde je změna hybnosti v obou případech stejná. Z obou uvedených příkladů je patrno, že stejně veliká změna hybnosti může mít za následek různě veliké účinky podle toho, za jak dlouhou dobu k této změně hybnosti dojde.

Abychom měli konkrétní představu o velikosti nárazových sil, vyřešíme příklad:

Ocelová koule hmotnosti 500 g spadne z výšky $h = 3$ cm na ocelovou desku. Ráz trvá dobu $\Delta t =$

$= 0{,}000\,2$ s. Jak veliká je nárazová síla a jaký je poměr nárazové síly k tíhové síle koule?

Označení veličin a dané hodnoty: Hmotnost koule je $m = 0{,}5$ kg, výška nad deskou $h = 0{,}03$ m, $\Delta t = 0{,}0002$ s. Změny hybnosti koule při rázu označíme Δp, velikost nárazové síly F a tíhovou sílu $G = \mathrm{mg}$, kde $\mathrm{g} = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ značí tíhové zrychlení.

Řešení. Koule má ve výšce h nad deskou vzhledem k desce potenciální energii $W_p = hmg$, při dopadu na desku kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2}\,mv^2$, kde v značí rychlost, se kterou dopadne koule na desku.

Podle zákona zachování energie je $\frac{1}{2}mv^2 = hmg$, takže

$$v = \sqrt{2\,hg}.$$

Po odrazu se koule pohybuje stejnou rychlostí opačným směrem. Celková změna rychlosti má velikost $\Delta v = v - (-v) = 2\,v$, takže nárazová síla dosáhne velikosti

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{2v}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2\,hg}}{\Delta t}. \qquad (10)$$

Číselně:

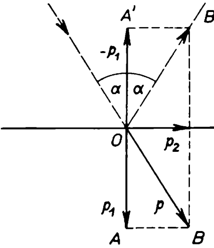
$$F = \frac{2\,.\,0{,}5\sqrt{2\,.\,0{,}03\,.\,10}}{0{,}000\,2}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{0{,}6}}{0{,}000\,2}\,\mathrm{N} \doteq \frac{0{,}8}{0{,}000\,2}\,\mathrm{N} = 4\,000\ \mathrm{N} \doteq 400\ \mathrm{kp}\,.$$

Obecně je určena velikost nárazové síly vztahem (10), *číselnou hodnotu má přibližně 4 000* N.

Tíhová síla je 0,5 kp, tj. přibližně 5 N. Je tedy poměr $\frac{F}{G} \doteq 800$. *Nárazová síla koule je přibližně 800krát větší než tíhová síla.*

Dopadne-li dokonale pružná koule na dokonale pružnou pevnou stěnu tak, že směr pohybu dopadající koule svírá s kolmicí ke stěně v místě dopadu (kolmice dopadu) úhel dopadu $\alpha \neq 0°$, můžeme rozložit podle obr. 24 vektor hybnosti $\boldsymbol{p}$ v místě dopadu na dvě složky $\boldsymbol{p}_1$ ve směru kolmice dopadu a $\boldsymbol{p}_2$ ve směru rovnoběžném se stěnou. Složka ve



Obr. 24

směru kolmice dopadu změní za velmi krátkou dobu Δt nárazu svou velikost z $\boldsymbol{p}_1$ na 0. Proto vznikne síla $\boldsymbol{F}$ souhlasně orientovaná se složkou $\boldsymbol{p}_1$ hybnosti.

Stejně velikou opačně orientovanou reakcí $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ působí po stejnou dobu Δt stěna na kouli. Impuls této reakce $-\boldsymbol{F}\,\Delta t$ je příčinou změny hybnosti z hodnoty 0 na $-\boldsymbol{p}_1$, takže se koule od stěny odrazí.

Složka hybnosti $\boldsymbol{p}_2$ se během rázu nezmění, neboť v jejím směru žádná vnější síla nepůsobí. Odražená koule se proto pohybuje ve směru určeném výslednicí vektorů $\boldsymbol{p}_2$ a $-\boldsymbol{p}_1$ rychlostí, jakou dopadla na pevnou stěnu. Úhel, který svírá směr pohybu odražené koule s kolmicí dopadu (úhel odrazu) je vzhledem ke shodnoti trojúhelníků $\triangle\, OAB$ a $\triangle\, OA'B'$ stejný jako úhel dopadu.

Dopadá-li pružná koule na pružnou pevnou stěnu, odrazí se od stěny stejnou rychlostí, jakou dopadla a její úhel odrazu je roven úhlu dopadu.

Průběh rázu je děj dosti složitý. Narazí-li dvě tělesa na sebe, způsobují nárazové síly nejprve změnu tvaru (deformaci) obou těles.

a) Jsou-li tělesa dokonale nepružná, zůstávají trvale deformována. Jakmile se při rázu jejich rychlosti vyrovnají, přestanou na sebe působit silami a pohybují se stejnou rychlostí jako jedno těleso. Kinetická energie obou těles před rázem je větší než po rázu o přírůstek vnitřní energie obou těles, který se projeví zvýšením jejich teploty.

b) Srazí-li se dvě dokonale pružná tělesa, rozdělíme si průběh rázu na dvě fáze. V první fázi nabudou tělesa obdobně jako nepružná tělesa stejné rychlosti a když jsou nejvíce deformována, začnou se vzpružovat (nabývat původního tvaru). Souhrn kinetických energií obou těles před rázem se při deformaci mění v elastickou energii. Rychlosti jejich pohybů (rychlosti pohybů jejich těžišť) se při stlačování vyrovnávají. Při vzpružování (restituci) se tato elastická energie zase velmi rychle mění v energii kinetickou, takže u dokonale pružných těles je úhrnná kinetická energie před rázem i po rázu stejná. Rychlost obou koulí, která byla v okamžiku největší deformace stejná, se při vzpružování začne různit, a proto při dokončení rázu se koule odrazí a po odrazu se pohybují různými rychlostmi.

Středový přímý ráz koulí

Podle způsobu, jak se navzájem tělesa před rázem pohybují, rozeznáváme různé druhy rázů. U homogenních koulí, jejichž těžiště se pohybují po společné přímce, dochází vždy k středovému přímému rázu. Protože jsou nárazové síly mnohem větší než všechny ostatní síly (síla tření, tíhová síla apod.), které na tělesa působí, můžeme všechny ostatní síly zanedbat. Posuvný pohyb koulí můžeme považovat za pohyb jejich těžišť, v nichž si myslíme soustředěny celkové hmotnosti koulí m_1 a m_2. Nárazové síly jsou v této soustavě silami vnitřními. Těžiště první koule má před rázem rychlost v_1, po rázu w_1, těžiště druhé koule se pohybuje před rázem rychlostí v_2, po rázu w_2. Podle zákona zachování hybnosti platí

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \,. \qquad (11)$$

A. Jsou-li obě koule dokonale nepružné, pohybují se po rázu jako jedno těleso rychlostí $w_1 = w_2 = w$, takže platí

$$w\,(m_1 + m_2) = m_1 v_1 + m_2 v_2\,,$$

takže

$$w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{12}$$

Rychlost obou koulí po rázu je určena vztahem (12).

Při rázu nepružných koulí nelze rychlost koulí po rázu počítat podle zákona zachování energie, neboť úhrnná kinetická energie obou koulí před rázem je větší než po rázu.

Úbytek pohybové energie po rázu se změní ve vnitřní energii obou koulí. Velikost ΔW tohoto úbytku má hodnotu

$$\Delta W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, w^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \Bigg[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 -$$

$$- (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2 + 2\, m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2} -$$

$$- \frac{1}{2} \, \frac{m_1^2 v_1^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 - 2 v_1 v_2 + v_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2\,.$$

B. Protože rychlosti w_1 a w_2, kterých nabývají po rázu pružné koule, jsou různé, vyskytují se v rovnici (11) dvě neznámé veličiny w_1 a w_2. Zde můžeme k výpočtu těchto dvou neznámých veličin užít zákona zachování energie, takže získáme pro jejich určení druhou rovnici

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 . \qquad (13)$$

Řešením rovnic (11) a (13) můžeme určit obě neznámé rychlosti. Protože rovnice (13) je kvadratická, je řešení soustavy uvedených dvou rovnic zdlouhavé.

Úlohu můžeme vyřešit jednodušším způsobem: U dokonale pružných koulí se elastická energie deformovaných koulí promění po restituci v plné hodnotě v energii kinetickou. Proto probíhá restituce stejným způsobem jako stlačování. Jsou tedy síly působící restituci každé koule stejně veliké jako síly, které působily stlačování téže koule, což platí i o změnách hybnosti. V okamžiku, kdy stlačování přechází ve vzpružování, mají obě koule stejně velikou rychlost w, určenou jako u nepružných koulí vztahem (12).

Vyjádříme-li tedy rovnicí, že změna hybnosti u první koule je při restituci stejná jako při stlačování, dostaneme

$$m_1 (w_1 - w) = m_1 (w - v_1) ,$$

z níž vychází

$$w_1 = 2\,w - v_1 = 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 \qquad (14)$$

a obdobně pro rychlost druhé koule po rázu

$$w_2 = 2\,w - v_2 = 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2\,. \qquad (15)$$

Přesvědčíme se ještě, že obě koule mají celkovou kinetickou energii W' po rázu stejnou jako před rázem.

$$W' = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (2w - v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (2w - v_2)^2 =$$

$$= 2\,m_1 w^2 - 2\,m_1 w v_1 + \frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + 2 m_2 w^2 -$$

$$- 2\,m_2 w v_2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 =$$

$$= 2\,w^2 (m_1 + m_2) - 2\,w\,(m_1 v_1 + m_2 v_2) + \frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2\,.$$

Dosadíme-li za $w = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, vychází

$$W' = 2\,\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} - 2\,\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2\,,$$

což je kinetická energie před rázem.

Při řešení úloh o rázu je nutno velikosti souhlasně orientovaných vektorů rychlosti označovat stejným znaménkem, opačně orientovaných nesouhlasným znaménkem.

Na závěr vyřešíme úlohu.

Příklad. Dvě dokonale pružné stejně veliké koule se pohybují proti sobě. Jejich těžiště se pohybují po společné přímce. První koule má hmotnost 4 kg a pohybuje se rychlostí 1 m s^{-1}, druhá koule o hmotnosti 2 kg se pohybuje rychlostí 2 m s^{-1}. Jaká je rychlost obou koulí po rázu?

Označení veličin a dané hodnoty. Poněvadž jsou vektory rychlostí obou koulí opačně orientovány, označíme rychlost první koule kladně, rychlost druhé koule záporně. Hmotnost první koule je $m_1 = 4$ kg, druhé $m_2 = 2$ kg, první se pohybuje rychlostí $v_1 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, druhá $v_2 = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Rychlost první koule po rázu označíme w_1, rychlost druhé w_2.

Řešení

1. Příklad můžeme řešit dosazením daných hodnot do odvozených vzorců (14) a (15). Pak vychází

$$w_1 = 2\,\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = 2\,\frac{4-4}{6}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s\,kg}} - 1\,\mathrm{m\,s^{-1}} = -1\,\mathrm{m\,s^{-1}},$$

$$w_2 = 2\,\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Koule se po rázu pohybují opačným směrem než před rázem. Rychlost mají v tomto případě stejnou, jako měly před rázem.

2. Příklad však můžeme řešit také užitím zákonů zachování hybnosti a zachování energie. Ze zákonů zachování hybnosti a zachování energie vychází

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 , \qquad (16)$$

$$\frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 . \qquad (17)$$

Obě rovnice jsou zřejmě rozměrově správné. Budeme tedy počítat jen s číselnými hodnotami. Dosadíme-li do obou rovnic dané číselné hodnoty, dostaneme

$$4 - 4 = 4\, w_1 + 2\, w_2 ,$$

$$\frac{1}{2} 4 \,.\, 1 + \frac{1}{2} 2 \,.\, 4 = 2\, w_1^2 + \frac{1}{2} \,.\, 2\, w_2^2 .$$

Z první rovnice vychází $w_2 = -2\, w_1$,

z druhé $\qquad 2\, w_1^2 + w_2^2 = 6$.

Dosadíme-li do druhé rovnice za w_2, dostaneme rovnici $2 w_1^2 + 4 w_1^2 = 6$, odkud vychází $w_1 = \pm 1$ a z první $w_2 = \mp 2$.

Hodnoty $w_1 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a $w_2 = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ úloze nevyhovují, neboť obě koule by při těchto rychlostech neměnily orientaci své rychlosti a musely by tedy po rázu pokračovat v pohybu původním směrem, což není možné.

Naší úloze tedy vyhovují jen hodnoty $v_1 = -1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a $v_2 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, které souhlasí s výsledkem získaným výpočtem prvním způsobem.

3. Soustavu rovnic (16) a (17) lze řešit jednodušším způsobem: Provedeme úpravu

$$m_1 (w_1 - v_1) = m_2 (v_2 - w_2) \qquad (16a)$$

$$m_1 (w_1^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - w_2^2) \qquad (17a)$$

Protože $w_1 - v_1 \neq 0$ a $v_2 - w_2 \neq 0$, je poměr výrazů na levých stranách rovnic (17a) a (16a) roven poměru výrazů na jejich pravých stranách, takže platí

$$w_1 + v_1 = v_2 + w_2. \qquad (18)$$

Ze soustavy rovnic (18) a (16) vypočítáme

$$w_1 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1,$$

což je výraz (14) a

$$w_2 = 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2, \qquad \text{což je výraz (15).}$$

11. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE A

První kolo soutěže

1. Z bodu, který se nachází ve výšce h nad zemským povrchem, jsou současně a všemi směry, ležícími v téže vertikální rovině, vymrštěny stejnou počáteční rychlostí v_0 kuličky. Dokažte, že všechny kuličky se nacházejí v každém okamžiku na kružnici.

Jaký je poloměr té kružnice a jaký pohyb koná její střed?

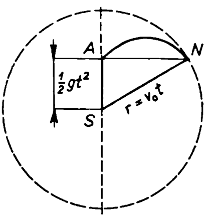
Pohyb se děje v homogenním gravitačním poli. Odpor vzduchu zanedbáme.

Označení veličin: Kuličky vymrštíme z místa A, které volíme za počátek souřadnicového systému, jehož osa x je vodorovná, osa y svislá. Tíhové zrychlení označíme g.

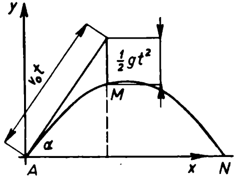
Řešení: Vztahujeme-li pohyb kuliček k pevnému bodu A, z něhož byly všechny kuličky současně vymrštěny všemi směry, pak každá z kuliček se pohybuje po jiné parabolické dráze (šikmý vrh).

Předpokládejme, že v bodě A je umístěn hmotný bod S, který začne padat v okamžiku, kdy byly kuličky uvedeny do pohybu. Vzhledem k tomuto padajícímu bodu budou všechny kuličky konat přímočarý rovnoměrný pohyb rychlostí v_0, takže každá z kuliček, ať se pohybuje kterýmkoli směrem, bude mít od bodu S v čase t stejnou vzdálenost $r = v_0t$ (obr. 25a).

V libovolném čase t se tedy nacházejí všechny kuličky na kružnici o poloměru $r = v_0t$, jejímž středem je bod S, který se nachází na svislé přímce



Obr. 25 a



Obr. 25 b

procházející bodem A (pod bodem A) a má od bodu A vzdálenost $AS = \frac{1}{2} g t^2$.

Střed této kružnice padá tedy volným pádem. Úlohu lze řešit též analyticky.

Kulička vymrštěná z bodu A pod libovolným úhlem α, měřeným s kladným směrem osy x, se nachází v čase t v bodě M (obr. 25b), jehož souřadnice jsou $x = v_0 t \cos \alpha$ a $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$.

Z těchto rovnic vyloučíme parametr α. Vyjádříme z nich

$$\cos \alpha = \frac{x}{v_0 t} \quad \text{a} \quad \sin \alpha = \frac{y + \frac{1}{2} g t^2}{v_0 t};$$

umocníme obě rovnice na druhou a sečteme-li je, dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1,$$

takže

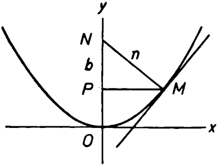
$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = (v_0t)^2.$$

Tato rovnice je rovnicí kružnice o středu $S\ (0, -\frac{1}{2}g\,t^2)$ a poloměru $r = v_0t$.

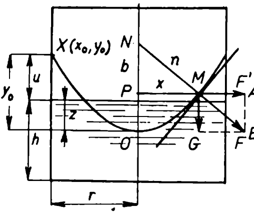
2. Jeden druh obrátkoměrů je trubice s vnitřním poloměrem r, naplněná kapalinou do výšky h. Kapalina je v trubici uzavřena. Otáčí-li se kapalina stejnou úhlovou rychlostí ω jako trubice, vytvoří povrch kapaliny plochu rotačního paraboloidu. Podle polohy vrcholu paraboloidu lze měřit počet k obrátek za minutu.

Stanovte vztah, podle něhož lze zhotovit stupnici udávající k. Subnormála $PN = b$ paraboly je pravoúhlý průmět normály $n = MN$ na osu paraboly. Délka subnormály paraboly $b = p$, kde p značí parametr paraboly (obr. 26a). Objem rotačního paraboloidu je $V = \frac{1}{2}\pi\,x^2y$.

Označení veličin: Na každou částici vody



Obr. 26 a



Obr. 26 b

o hmotnosti m, která má vzdálenost x od rotační osy, působí dvě síly k sobě kolmé, tíha $G = m\,g$ částice a odstředivá síla $F' = m\,x\,\omega^2$. Jejich výslednice F je kolmá k povrchu kapaliny a má tedy směr normály. Úsečka b je subnormálou hledané křivky (obr. 26b). Označení ostatních veličin je patrno z obrázku.

Řešení: Z podobnosti trojúhelníků $\triangle$ MPN a $\triangle$ MAB vychází

$$\frac{F'}{G} = \frac{mx\omega^2}{mg} = \frac{x}{b}, \text{ takže } b = \frac{g}{\omega^2}.$$

Při konstantní úhlové rychlosti je subnormála b konstantní. Jedinou křivkou mající tuto vlastnost je parabola, jež se dá analyticky vyjádřit rovnicí $x^2 = 2\,b\,y$, jestliže volíme za počátek pravoúhlého souřadnicového systému (osa x je vodorovná a osa y

svislá) bod O, ve kterém se nachází vrchol paraboloidu. Rovnici paraboly pak můžeme psát $x^2 = = 2by = \frac{2g}{\omega^2} y$. Bod X má v této souřadnicové soustavě souřadnice $x_0 = -r$ a $y_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$. Protože objem kapaliny se při rotaci nemění, je podle obrázku $\pi r^2 (h + u) - \frac{1}{2}\pi r^2 y = \pi r^2 h$, odkud vychází $y_0 = 2u$.

Podle obrázku je však $y_0 = z + u$, a proto $2u = z + u$ a

$$z = u = \frac{y_0}{2} = \frac{\omega^2}{4g} r^2.$$

Z tohoto vztahu vyjde

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{gz} \text{ a } f = \frac{1}{\pi r} \sqrt{gz}.$$

Za jednu minutu vykoná obrátkoměr $k = 60 f$ otáček. Platí tedy

$$k = \frac{60\sqrt{g}}{\pi r} \sqrt{z} = c \sqrt{z}. \qquad (1)$$

Číslo c je pro daný obrátkoměr konstantní.

Podle vztahu (1) lze provést kalibraci obrátkoměru.

3. Dva kondenzátory o kapacitách C_1 a C_2 jsou spojeny za sebou a baterie je nabita na napětí U. Kondenzátory přepojme paralelně, aniž bychom je vybili.

a) Dokažte, že v prvním případě je elektrická energie baterie větší než v případě druhém, a určete rozdíl obou energií.

b) V jakou formu energie se přeměnil přebytek elektrické energie při změně zařazení kondenzátorů?

c) Jak velký by byl tento rozdíl elektrické energie baterií při obou způsobech zařazení kondenzátorů, kdyby $C_1 = C_2$?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $C_1 = 9\ \mu\text{F}$, $C_2 = 6\ \mu\text{F}$, $U = 1\ 200\ \text{V}$.

Označení veličin: Kapacitu baterie kondenzátorů při sériovém zapojení označíme C'. Její velikost určíme ze vztahu

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \text{ odkud vychází } C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Kapacita paralelně zapojených kondenzátorů $C'' = C_1 + C_2$. Energii kondenzátorové baterie označíme při spojení sériovém W', při spojení paralelním W'', velikost náboje každého kondenzátoru při sériovém zařazení označíme Q.

Řešení: Při sériovém spojení má baterie kondenzátorů elektrickou energii o hodnotě

$$W' = \frac{1}{2} C' U^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U^2$$

a přitom je na každém kondenzátoru náboj

$$Q = C' U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U.$$

Při přepojení se proto nabije baterie o kapacitě C'' nábojem $2Q$ na napětí U'. Proto je

$$2Q = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = (C_1 + C_2) U',$$

takže

$$U' = \frac{2\, C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} U.$$

Energie baterie při paralelním zapojení kondenzátorů má velikost

$$W'' = \frac{1}{2} C'' U'^2 = \frac{2 C_1^2 \,.\, C_2^2}{(C_1 + C_2)^3} U^2.$$

a) Rozdíl energií je

$$W' - W'' = \frac{C_1 C_2 (C_1 - C_2)^2}{2 \,.\, (C_1 + C_2)^3} U^2. \qquad (1)$$

Protože zlomek na pravé straně rovnice (1) má kladnou hodnotu, jestliže $C_1 \neq C_2$, je $W' > W''$, což se mělo dokázat. Rozdíl obou energií udává vztah (1).

b) Přebytek energie baterie se při jejím přepojení ze sériového zařazení na zařezení paralelní změnil v teplo, neboť při tomto přepojení došlo k pohybu náboje.

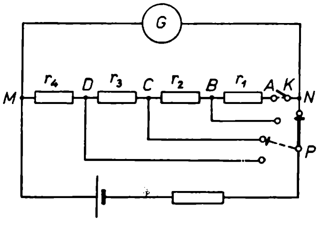
c) Kdyby $C_1 = C_2$, měl by zlomek na pravé straně rovnice (1) hodnotu rovnou nule, a proto by se rovnal nule i rozdíl obou energií.
Pro dané hodnoty vyjde:

$$W' - W'' = \frac{9 \,.\, 6(9-6)^2 \,.\, 10^{-24}}{2\,(9+6)^3 \,.\, 10^{-18}}\, 12^2 \,.\, 10^4\, \frac{F^4V^2}{F^3} =$$

$$= 0{,}104 \text{ J}.$$

Rozdíl obou energií je číselně přibližně 0,104 J, obecně je určen vztahem (1). Uvažovaná baterie kondenzátoru má při sériovém zařazení větší energii než při zařazení paralelním.

4. Na obr. 27 je schematicky znázorněn galvanometr o odporu R s citlivostí z μA na dílek. Ke galvanometru lze klíčem K připojit bočník s odpory r_1, r_2, r_3, r_4. Obvod, ve kterém chceme měřit proud, připojíme vždy ke zdířce M a do některé ze zdířek N (bočník je přitom klíčem K odpojen) nebo A, B, C, D (bočník je zapojen). Jaké musí být odpory r_1, r_2, r_3, r_4, má-li citlivost galvanometru při přepojení ze zdířky N do zdířky A klesnout n-krát,



Obr. 27

při přepojení do zdířky B n^2-krát, do zdířky C n^3-krát a do zdířky D n^4-krát?

Počítejte nejprve obecně a potom pro $n = 10$, $z = 10\ \mu A$ na dílek, $R = 100\ \Omega$.

Jaké budou měrné rozsahy, má-li stupnice galvanometru 60 dílků?

Označení veličin a dané hodnoty: Odpor galvanometru je $R = 100\,\Omega$. Napětí mezi body M a P obvodu označíme U, celkový proud protékající obvodem I, proud procházející galvanometrem I_1, bočníkem I_2. Stupnice galvanometru má $k =$ $= 60$ dílků, citlivost galvanometru je $z = 10\ \mu A$ na dílek $= 10^{-5}$ A na dílek.

Řešení: a) Je-li spínačem spojen vodivě bod P s bodem N a bočník je klíčem K od obvodu odpojen, pak $I_1 = I = \frac{U}{R}$. Poněvadž galvanometr má citlivost z, je měrný rozsah přístroje z až kz, tj. $10\ \mu A$ až 0,6 mA.

b) Je-li bočník klíčem K do obvodu zařazen a zároveň je bod P vodivě spojen spínačem s bodem N, a tedy i s bodem A, má se citlivost zmenšit n-krát na hodnotu $nz = 100\ \mu A$ na dílek, takže měrný rozsah přístroje bude obecně nz až knz, tedy 0,1 mA až 6 mA.

Protože k větvi s galvanometrem je paralelně přiřazena větev s bočníkem, v níž jsou sériově zapojeny odpory r_1, r_2, r_3 a r_4, bude protékat galvanometrem proud $I_1 = \frac{I}{n} = \frac{U}{R}$ a bočníkem proud

$$I_2 = I - I_1 = \frac{n-1}{n} I = \frac{U}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}.$$

Proto platí

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n-1} = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{R},$$

takže

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{R}{n-1}. \qquad (1)$$

c) Je-li bočník klíčem K do obvodu zařazen a bod P je vodivě spojen spínačem s bodem B, pak je odpor r_1 přiřazen do větve s galvanometrem a bočník obsahuje sériově zařazené odpory r_2, r_3 r_4. V tomto případě je citlivost přístroje $n^2 z = 1$ mA na dílek, takže měrný rozsah přístroje je obecně $n^2 z$ až $kn^2 z$, tj. 1 mA až 60 mA. Galvanometrem a odporem r_1 prochází proud $I_1 = \frac{I}{n^2} = \frac{U}{R + r_1}$, odpory r_2, r_3, r_4, proud

$$I_2 = I - I_1 = \frac{n^2 - 1}{n^2} I = \frac{U}{r_2 + r_3 + r_4}.$$

Proto je

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{r_2 + r_3 + r_4}{R + r_1},$$

takže

$$r_2 + r_3 + r_4 = \frac{R + r_1}{n^2 - 1}. \qquad (2)$$

d) Zůstává-li bod A dále spojen klíčem K s bodem N a připojíme-li bod P spínačem k bodu C a potom k bodu D, zmenší se citlivost přístroje na hodnoty n^3z a n^4z a měrné rozsahy budou obecně n^3z až kn^3z a n^4z a kn^4z a pro dané hodnoty 10 mA až 600 mA a 0,1 A až 6 A.

Je-li bod P vodivě spojen spínačem s bodem C, pak jsou do větve s galvanometrem zařazeny odpory r_1 a r_2, je-li bod P vodivě spojen s bodem D, jsou do větve s galvanometrem sériově zapojeny odpory r_1, r_2, r_3.

Obdobně jako v c) odvodíme rovnice

$$r_3 + r_4 = \frac{R + r_1 + r_2}{n^3 - 1} \tag{3}$$

a

$$r_4 = \frac{R + r_1 + r_2 + r_3}{n^4 - 1}\,. \tag{4}$$

Dosadíme-li do rovnice (1) za $r_2 + r_3 + r_4$ hodnotu určenou vztahem (2), vypočítáme

$$r_1 = \frac{R}{n - 1} - \frac{R + r_1}{n^2 - 1},$$

odkud určíme

$$r_1 = \frac{R}{n}\,. \tag{5}$$

Dosadíme-li do vztahu (2) za $r_3 + r_4$ hodnotu ze vztahu (3) a za r_1 ze vztahu (5), vypočítáme

$$r_2 = \frac{R}{n^2}\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li do rovnice (3) za r_4 hodnotu ze vztahu (4) a za r_1 a r_2 hodnoty z výrazů (5) a (6), vypočítáme

$$r_3 = \frac{R}{n^3}\,. \tag{7}$$

Velikost odporu r_4 se určí z výrazu (4), do kterého dosadíme za r_1, r_2, r_3 hodnoty vyjádřené výrazy (5), (6), (7). Vyjde

$$r_4 = \frac{R}{n^3(n-1)}\,. \tag{8}$$

Po dosazení daných hodnot do vztahů (5), (6), (7) a (8) vyjde

$$r_1 = \frac{100}{10}\,\Omega = 10\,\Omega,\ r_2 = \frac{100}{100}\,\Omega = 1\,\Omega,$$

$$r_3 = \frac{100}{1\,000}\,\Omega = 0{,}1\,\Omega,\ r_4 = \frac{100}{1\,000\,.\,9}\,\Omega = \frac{1}{90}\,\Omega.$$

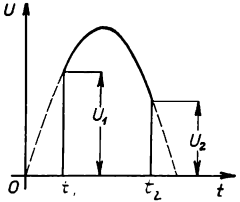
Velikosti odporů jsou obecně určeny vztahy (5), (6), (7) a (8) a mají hodnotu 10 Ω, 1 Ω, 0,1 Ω a $\frac{1}{90}\,\Omega$.

5. Doutnavka má zápalné napětí U_1, zhášecí $U_2 < U_1$ (obr. 28).

a) Při jakém efektivním napětí U střídavého proudu se doutnavka rozsvítí?

b) Po jakou část periody svítí, je-li připojena k síti o efektivním napětí U_3?

Řešte nejprve pokud možno obecně, potom pro hodnoty $U_1 = 80$ V, $U_2 = 70$ V, $U_3 = 120$ V.



Obr. 28

Označení veličin: Čas označíme t, efektivní napětí střídavého proudu U, okamžité napětí u a vrcholové napětí U_m. Pro uvedené veličiny platí vztahy

$$U_m = U\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$u = U_m \sin \frac{2\pi}{T} t = U\sqrt{2} \sin \frac{360°}{T} t \,. \qquad (2)$$

a) Doutnavka se rozsvítí, jestliže vrcholové napětí U_m střídavého proudu dosáhne stejné nebo větší hodnoty, než je hodnota U_1 zápalného napětí. Má-li se tedy doutnavka rozsvítit, musí platit $U_m \geqq U_1$, takže podle vztahu (1) musí být

$$U \geqq \frac{U_1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ U_1. \qquad (3)$$

Ze vztahu (3) určíme pro dané hodnoty $U \geqq$ $\geqq 0{,}707 \,.\, 80\ \text{V} = 56{,}56\ \text{V}$.

Doutnavka se rozsvítí, jestliže velikost efektivního napětí střídavého proudu je větší nebo rovna hodnotě 56,56 V, určené obecně vztahem (3).

b) Dosáhne-li okamžité napětí střídavého proudu v jedné půlperiodě velikosti zápalného napětí za dobu t_1 a zhášecího napětí za dobu t_2 od jejího počátku, svítí doutnavka v jedné periodě po dobu $t = 2(t_2 - t_1)$. Poměr $k = \frac{t}{T}$ udává část periody, po kterou doutnavka svítí, takže doutnavka svítí v jedné periodě po dobu $t = k\,T$, kde

$$k = 2\,\frac{t_2 - t_1}{T} = 2\left(\frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T}\right). \qquad (4)$$

Časy t_1 a t_2 vypočítáme ze vztahů

$$U_1 = U_3\sqrt{2}\sin\frac{360°}{T}\,t_1 \text{ a } U_2 = U_3\sqrt{2}\sin\frac{360°}{T}\,t_2\,. \qquad (5)$$

Odtud určíme

$$\sin\frac{360°}{T}\,t_1 = \frac{U_1}{U_3\sqrt{2}}$$

a

$$\sin\frac{360°}{T}\,t_2 = \frac{U_2}{U_3\sqrt{2}}\,. \qquad (6)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$\sin\frac{360°}{T}\,t_1 = \frac{80}{120\sqrt{2}} \text{ a } \sin\frac{360°}{T}\,t_2 = \frac{70}{120\sqrt{2}}\text{, takže}$$

$$\frac{360°}{T}\,t_1 = 28°08',$$

neboť k rozsvícení doutnavky dojde v první čtvrtperiodě, a $\frac{360°}{T} t_2 = 155°38'$, neboť doutnavka zhasne v druhé čtvrtperiodě. Odtud určíme

$$k = \frac{t}{T} = \frac{2(t_2 - t_1)}{T} = 2\,\frac{155°38' - 28°08'}{360°} =$$

$$= \frac{255°}{360°} = 0{,}71.$$

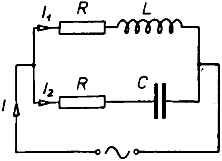
Je tedy

$$t = k\,.\,T = 0{,}71\,T = 71\,\%\,T.$$

Je-li doutnavka připojena k síti o napětí $U_3 = 120$ V, je část periody, po kterou doutnavka svítí, obecně určena vztahy (4), (5) a (6). Za daných podmínek svítí doutnavka 71 % doby, po kterou jí prochází střídavý proud.

6. V uzavřeném obvodu střídavého proudu (obr. 29) je dáno U, R, L, C.

a) Stanovte impedanci obvodu.



Obr. 29

b) Jaká je podmínka rezonance? Jaký je rezonanční odpor?

c) Stanovte proudy $\boldsymbol{I}_1'$, $\boldsymbol{I}_2'$, $\boldsymbol{I}'$ při rezonanci; proudy $\boldsymbol{I}_1'$ a $\boldsymbol{I}_2'$ rozdělte na složku reálnou a imaginární a dokažte, že imaginární složky proudů I_1' a I_2' jsou stejně veliké, ale opačného znaménka.*)

Označení veličin: Nechť ω značí úhlovou frekvenci střídavého proudu a $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ imaginární jednotku. Proud a impedanci označíme obecně ve větvi s cívkou $\boldsymbol{I}_1$ a $\boldsymbol{Z}_1$, ve větvi s kondenzátorem $\boldsymbol{I}_2$ a $\boldsymbol{Z}_2$, v nerozvětvené části obvodu $\boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{Z}$, rezonanční odpor označíme $\boldsymbol{Z}_r$. Úhlovou frekvenci za rezonance označíme ω'.

Řešení: Ve větvi s cívkou je sériově zařazen odpor R a induktance $L\omega$. Odporem R i cívkou

---

*) Protože se poloha koncového bodu úsečky s pevným počátečním bodem dá snadno vyjádřit komplexním číslem, dají se úlohy s okamžitými hodnotami veličin střídavého proudu (napětí, proud, impedance, induktance, kapacitance atd.) řešit výhodně užitím komplexních výrazů. Absolutní hodnota každého z těchto výrazů vyjadřuje velikost uvažované veličiny a poměr imaginární složky tohoto výrazu k jeho reálné složce udává tangentu fázového posunu této veličiny vzhledem k veličině, která byla zvolena za základní.

Protože se komplexní čísla znázorňují v Gaussově rovině jako orientované úsečky, označují se komplexní čísla často jako vektory. Komplexní čísla však ve fyzikálním slova smyslu vektory nejsou. Je to patrné nejlépe z toho, že s komplexními čísly můžeme provádět všechny početní operace, tedy i dělení, vektor vektorem však dělit nelze. Veličiny střídavého proudu, vyjádřené komplexními čísly, by měly být správněji nazývány veličinami komplexními než vektorovými.

V tisku se komplexní veličiny střídavého proudu označují stejně jako vektory polotučným písmem, jejich velikosti kurzívou ($Z = |\boldsymbol{Z}|$, $I = |\boldsymbol{I}|$, $U = |\boldsymbol{U}|$ apod.).

prochází stejný proud. Napětí na odporu je ve stejné fázi s proudem, napětí na cívce je fázově posunuto vzhledem k proudu o $+\frac{\pi}{2}$. Ve vektorovém diagramu naneseme tedy na kladně orientovanou reálnou osu vektor proudu a vektor napětí na odporu R, na kladně orientovanou imaginární osu vektor napětí na cívce. Symbolicky to vyjádříme rovnicí

$$\boldsymbol{U} = R\boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}L\omega\boldsymbol{I}_1 = (R + \mathrm{j}L\omega)\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{I}_1\,,$$

takže

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{U}}{R + \mathrm{j}L\omega} = \left(\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} - \mathrm{j}\,\frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)\boldsymbol{U}. \tag{1}$$

Ve větvi s kondenzátorem protéká též kondenzátorem i odporem R stejný proud. Napětí na odporu je s proudem ve stejné fázi, napětí na kondenzátoru je fázově posunuto vzhledem k proudu o $-\frac{\pi}{2}$. Ve vektorovém diagramu naneseme tedy vektor proudu a vektor napětí na odporu R na kladně orientovanou reálnou osu, vektor napětí na záporně orientovanou imaginární osu. Protože napětí na obou větvích je stejné ($\boldsymbol{U}$), platí symbolický vztah

$$\boldsymbol{U} = R\boldsymbol{I}_2 - \frac{\mathrm{j}}{C\omega}\boldsymbol{I}_2 = \frac{RC\omega - \mathrm{j}}{C\omega}\boldsymbol{I}_2\,,$$

takže

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{C\omega}{RC\omega - \mathrm{j}}\boldsymbol{U} = \frac{RC^2\omega^2 + \mathrm{j}C\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}\boldsymbol{U}. \tag{2}$$

Obě větve jsou zařazeny paralelně. Nerozvětvenou částí obvodu prochází tedy proud $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$, takže

$$\mathbf{I} = \left(\frac{C\omega}{RC\omega - \mathrm{j}} + \frac{1}{R + \mathrm{j}L\omega}\right)\mathbf{U} =$$

$$= \frac{2 \,.\, RC\omega + \mathrm{j}(LC\omega^2 - 1)}{\omega(R^2C + L) + \mathrm{j}R(LC\omega^2 - 1)}\,\mathbf{U}. \qquad (3)$$

a) Podle vztahu $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}$, je

$$\mathbf{Z} = \frac{\omega(R^2C + L) + \mathrm{j}R(LC\omega^2 - 1)}{2RC\omega + \mathrm{j}(LC\omega^2 - 1)} =$$

$$= \frac{2RC\omega^2(R^2C + L) + R(LC\omega^2 - 1)^2}{4R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} +$$

$$+ \mathrm{j}\,\frac{\omega(R^2C - L)(LC\omega^2 - 1)}{4R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}\,. \qquad (4)$$

Komplexní impedance obvodu je určena vztahem (4).

b) Paralelní rezonance nastává, jestliže imaginární složka proudu $\mathbf{I}$ je rovna nule. Podle vztahu $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}$ musí v tomto případě mít imaginární složku rovnu nule i impedance $\mathbf{Z}$. Protože výraz

$$4R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2 \neq 0\,,$$

je podmínka rezonance vyjádřena rovnicí

$$\omega'(R^2C - L)(LC\omega'^2 - 1)^2 = 0\,. \qquad (5)$$

Rezonance nastává v těchto případech:

1. $\omega' = 0$. Pak podle vztahu (4) platí $Z_r = \frac{R}{1} = R$.
Rezonanční odpor je roven odporu R.
Dosazením do výrazů (1), (2) a (3) získáme vztahy:

$$I_1 = \frac{R}{R^2} U = \frac{U}{R} \quad I_2 = 0 \quad I = \frac{-\mathrm{j}}{-\mathrm{j}R} U = \frac{U}{R}.$$

Větví s kondenzátorem proud neprochází ($I_2 = 0$), nerozvětvenou částí obvodu a větví s cívkou prochází stejně veliký proud $I = I_1 = \frac{U}{R}$, rezonanční odpor $Z_r = R$, $\omega' = 0$.

V tomto případě jde tedy o stejnosměrný proud.

2. $R^2C - L = 0$, z níž vychází

$$Z_r = \frac{2RC\omega'^2 \,.\, 2R^2C + R(LC\omega'^2 - 1)^2}{4R^2C^2\omega'^2 + (LC\omega'^2 - 1)^2} = R.$$

I v tomto případě je $Z_r = R$.

3. $LC\omega^2 - 1 = 0$, z níž vychází známý Thomsonův vztah $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Rezonanční odpor má hodnotu

$$Z_r = \frac{2RC(R^2C + L)\omega'^2}{4R^2C^2\omega'^2} = \frac{L + R^2C}{2RC} =$$

$$= \frac{L^2\omega'^2 + R^2}{2R}, \qquad (6)$$

neboť podle rezonanční podmínky je $\frac{1}{L\omega'^2} = C$.

c) Dosazením do výrazů (1), (2) a (3) získáme vztahy: V případě b) 2.:
Dosadíme-li do vztahů (2) a (1) za $C = LR^{-2}$ z rezonanční podmínky, dostaneme po úpravách

$$\boldsymbol{I}_2' = \frac{L^2R^{-3}\omega'^2 + jLR^{-2}\omega'}{L^2R^{-2}\omega'^2 + 1}\boldsymbol{U} = \frac{L^2\omega'^2 + jLR\omega'}{R(R^2 + L^2\omega'^2)}\boldsymbol{U}.$$

$$\boldsymbol{I}_1' = \frac{R - jL\omega'}{R^2 + L^2\omega'^2}\boldsymbol{U} = \frac{R^2 - jLR\omega'}{R(R^2 + L^2\omega'^2)}\boldsymbol{U}.$$

Dosadíme-li do rovnice (3) za $L = R^2C$ podle rezonanční podmínky, dostaneme

$$\boldsymbol{I}' = \frac{2RC\omega' + j(R^2C^2\omega'^2 - 1)}{2R^2C\omega' + jR(R^2C^2\omega'^2 - 1)}\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{U}}{R}.$$

V případě b) 3.:

Dosadíme-li do vztahu (2) $C = \dfrac{1}{L\omega'^2}$ z rezonanční podmínky, vyjde

$$\boldsymbol{I}_2' = \frac{R + jL\omega'}{R^2 + L^2\omega'^2}\boldsymbol{U}.$$

Podle vztahu (1) je

$$\boldsymbol{I}_1' = \frac{R - jL\omega'}{R^2 + L^2\omega'^2}\boldsymbol{U}.$$

$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 = \dfrac{2R}{R^2 + L^2\omega'^2}\boldsymbol{U}$, což souhlasí se vztahem (6).

Z výsledků je patrno, že při rezonanci mají imaginární složky proudů $\boldsymbol{I}_1'$ a $\boldsymbol{I}_2'$ stejnou velikost, ale opačné znaménko. Výsledky v části b) jsou v souhlase s výsledky části c).

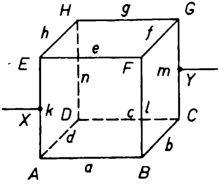
7. Vypočítejte odpor drátěné krychle, jejíž každá hrana má odpor r, jestliže je zdroj stejnosměrného napětí připojen

a) ke středům dvou protilehlých hran,

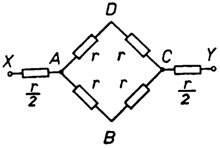
b) ke dvěma protějším vrcholům.

Přechodové odpory v uzlech zanedbejte.

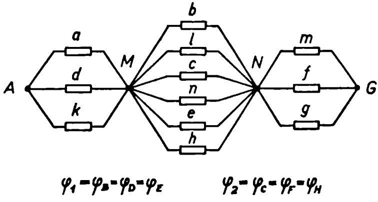
Označení veličin: Vrcholy krychle označíme podle obr. 30a postupně A, B, C, D, E, F, G, H a odpory jednotlivých hran krychle a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n. Všechny hrany mají stejně veliké od-



Obr. 30 a



Obr. 30 b



Obr. 30 c

pory, takže platí $a = b = c = d = e = f = g = h = k = l = m = n = r$.

Řešení: a) Proud vstupuje do krychle v bodě X, který je středem hrany AE, a vystupuje v bodě Y, který je středem hrany CG. Vrchol H krychle má stejný potenciál jako vrchol D a vrchol B stejný potenciál jako vrchol F. Proto vodiči DH a BF proud neprochází. Proud prochází jen dvěma shodnými paralelními větvemi, z nichž jedna obsahuje obvod dolní, druhá obvod horní podstavy krychle. Obvod obsahující dolní podstavu krychle je schematicky naznačen na obr. 30b. Jeho části XA a CY kladou proudu stejně veliké odpory $R_1' = \frac{r}{2}$. Odpor R_1'' rozvětvené části obvodu mezi body A a C se určí z Kirchhoffova zákona. Platí $\frac{1}{R''} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{1}{r}$, takže $R'' = r$.

Odpor celé větve obsahující dolní podstavu krychle je tedy

$$R_1 = \frac{r}{2} + r + \frac{r}{2} = 2r\,.$$

Stejně veliký odpor R_2 klade proudu větev obsahující obvod horní podstavy krychle. Protože obě větve jsou zařazeny paralelně, určíme odpor R celé krychle z rovnice

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R_1} = \frac{1}{r}\,, \text{ takže } R = r\,. \qquad (1)$$

Odpor drátěné krychle je v zapojení podle úlohy a) roven odporu jedné hrany krychle.

b) Proud vstupuje do krychle ve vrcholu A a vystupuje z ní vrcholem G. Vrcholy B, D a E mají stejný potenciál φ_1, vrcholy C, F, H stejný potenciál φ_2. Můžeme tedy nahradit vrcholy B, D, E uzlem M o potenciálu φ_1 a vrcholy C, F, H druhým uzlem N o potenciálu φ_2. Mezi body A a uzlem M protéká proud třemi paralelními vodiči o odporech a, d, k a mezi uzlem N a vrcholem G třemi paralelními vodiči o odporech m, f, g, jak je patrno ze schematického obr. 30c.

Z vrcholů B, D, E o stejném potenciálu φ_1, které můžeme nahradit uzlem M o témž potenciálu φ_1, odtéká proud šesti paralelními vodiči b, l, c, n, e, h stejného odporu r k vrcholům C, F, H o stejném potenciálu φ_2, jež nahradíme uzlem N o potenciálu φ_2.

Můžeme tedy nahradit odpor krychle, jež je připojena ke zdroji stejnosměrného napětí v protějších vrcholech A a G, soustavou tří sériově zařazených skupin paralelně zapojených vodičů. Označíme-li R_{AM} odpor mezi body A a M, R_{MN} odpor mezi uzly M a N, R_{NG} odpor mezi body N a G a R_{AG} odpor celé krychle, platí

$$\frac{1}{R_{AM}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{3}{r}, \text{ takže } R_{AM} = \frac{r}{3}.$$

Obdobně vychází

$$\frac{1}{R_{MN}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{l} + \frac{1}{c} + \frac{1}{n} + \frac{1}{e} + \frac{1}{h} = \frac{6}{r};$$

takže

$$R_{MN} = \frac{r}{6} \text{ a } \frac{1}{R_{NG}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{3}{r},$$

takže $R_{NG} = \dfrac{r}{3}$.

Celkový odpor krychle má velikost

$$R_{AG} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} r. \tag{2}$$

Je-li krychle připojena ke zdroji napětí podle úlohy b), je její odpor roven pěti šestinám odporu jedné její hrany.

Úlohu lze řešit také jinak:

a) Protéká-li sítí krychle celkový proud I, procházejí podle Kirchhoffova zákona vodiči XA, XE, YC, YG o odporech $\frac{r}{2}$ proudy $\frac{I}{2}$, hranami AD, DC, AB, BC, EF, EH, HG, FG o odporech r proudy $\frac{I}{4}$.

Celkový výkon $R\,I^2$ proudu procházejícího krychlí se rovná součtu výkonů proudů v jednotlivých vodičích. Proto platí

$$R\,I^2 = 4\,\frac{r}{2}\left(\frac{I}{2}\right)^2 + 8\,r\left(\frac{I}{4}\right)^2 = r\,I^2\,,$$

takže platí vztah (1).

b) Protéká-li sítí krychle proud I, procházejí podle obr. 30c hranami a, d, k, m, f, g o odporech r proudy $\frac{I}{3}$, hranami b, l, c, n, e, h o odporech r proudy $\frac{I}{6}$. Proto platí pro výkon proudu vztah

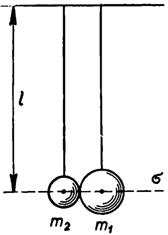
$$R_{AG}I^2 = 6r\left(\frac{I}{3}\right)^2 + 6r\left(\frac{I}{6}\right)^2 = \frac{5}{6}\,r\,I^2\,,$$

takže platí vztah (2).

8. Dvě homogenní ocelové kuličky jsou zavěšeny na vláknech tak, že jsou jejich těžiště ve stejných vzdálenostech l od bodů závěsu a nitě jsou napjaty ve svislém směru, jestliže se kuličky dotýkají (obr. 31). Hmotnosti kuliček jsou m_1 a $m_2 < m_1$. Lehčí kuličku vychýlíme o úhel $\alpha = 90°$ při napjatém vlákně v rovině určené oběma závěsy (v klidové poloze kuliček) a uvolníme.

a) Jak vysoko nad vodorovnou rovinu σ, proloženou těžištěm těžší kuličky, vystoupí obě kuličky po rázu, jsou-li dokonale pružné?

b) Co se stane, vychýlíme-li obdobným způsobem těžší kuličku a uvolníme-li ji?



Obr. 31

c) Jaký je poměr hmotností kuliček, jestliže po rázu obě vystoupí do stejné výšky?

Označení veličin: V okamžiku nárazu má hmotnější kulička rychlost v_1, méně hmotná rychlost v_2 a vektory obou rychlostí mají společnou vektorovou přímku. Za kladnou orientaci vektoru rychlosti považujeme orientaci vektoru v_2. Jde tedy o středový ráz dvou koulí. V první fázi průběhu rázu se obě kuličky stlačují (deformují) a jejich rychlosti se přitom vyrovnávají. Když dosáhnou obě stejné rychlosti v, začnou se vzpružovat (nabývat původního tvaru) a jejich rychlosti se začnou různit. Na konci rázu má hmotnější koule rychlost w_1, méně hmotná w_2. Hmotnější kulička vystoupí po rázu do výšky h_1, méně hmotná do výšky h_2 nad rovinu σ.

Řešení: a) Vychýlíme-li méně hmotnou kuličku při napjaté niti ze svislé polohy o úhel $\alpha = 90°$, nabude kulička vzhledem k rovině σ potenciální energii tíhovou m_2gl, kde m_2 značí její hmotnost a g tíhové zrychlení. Během pádu po kruhovém oblouku se tato energie kuličky postupně mění v energii kinetickou, která má v okamžiku rázu hodnotu $\frac{1}{2} m_2v_2^2$, takže podle zákona zachování energie platí

$$\frac{1}{2} m_2v_2^2 = m_2 g\, l, \text{ odkud určíme } v_2 = \sqrt{2\, l\, g}\,. \quad (1)$$

Při rázu se obě koule stlačují, jejich rychlosti se vyrovnávají, až nabudou společné hodnoty v. V tom okamžiku přestanou na sebe kuličky působit vzájemnými silami a přestanou se deformovat. Podle zákona zachování hybnosti platí

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v,$$

takže

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}\,. \quad (2)$$

Při stlačování se velká část kinetické energie obou pružných koulí mění v energii elastickou. Při vzpružování se elastická energie, kterou koule získaly při stlačování, mění v kinetickou energii, jsou-li koule dokonale pružné. Protože při vzpružování působí na každou z koulí stejně veliká síla jako při stlačování, je změna hybnosti u každé koule při vzpružování stejná jako při stlačování. Pro hmotnější kouli tedy platí podle zákona zachování hybnosti

$$m_1(w_1 - v) = m_1(v - v_1)\,,$$

odkud vypočítáme

$$w_1 = 2v - v_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2\,m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Obdobně určíme $w_2 = \dfrac{v_2(m_2 - m_1) + 2\,m_1v_1}{m_1 + m_2}$. (4)

Dosadíme-li do vztahů (3) a (4) $v_1 = 0$ a $v_2 = \sqrt{2\,l\,g}$, vychází

$$w_1 = \frac{2m_2\sqrt{2lg}}{m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad w_2 = \frac{(m_2 - m_1)\sqrt{2l\,g}}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

Rychlost w_1 má souhlasné znaménko s v_2, rychlost w_2 má znaménko opačné. Hmotnější koule se tedy po rázu pohybuje tím směrem jako méně hmotná před rázem, méně hmotná se odrazí a pohybuje se po rázu opačným směrem než před rázem.

Při ukončení rázu má hmotnější koule kinetickou energii

$$\frac{1}{2}\,m_1w_1^2 = \frac{4\,m_1m_2^2\,lg}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Proto vystoupí po rázu nad rovinu σ do výšky h_1, která je určena podle zákona zachování energie rovnicí

$$m_1g\,h_1 = \frac{4m_1\,m_2^2\,lg}{(m_1 + m_2)^2}, \text{ takže } h_1 = \frac{4\,m_2^2 l}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (6)$$

Méně hmotná koule má při ukončení rázu kinetickou energii

$$\frac{1}{2}\,m_2w_2^2 = \frac{m_2\,g\,(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}\,l$$

a vystoupí do výšky

$$h_2 = \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}\, l. \tag{7}$$

Jestliže jmenovatele zlomku ve vztahu (6) zmenšíme tím, že hmotnost m_1 nahradíme hmotností $m_2 < m_1$, přejde rovnost (6) v nerovnost $h_1 < l$. Ze vztahu (7) je přímo patrno, že také $h_2 < l$, neboť $|m_2 - m_1| < m_1 + m_2$.

Dokonale pružné kuličky dosáhnou po rázu výšek, jež jsou určeny vztahy (6) a (7); obě jsou menší než délka závěsu.

Vztahy (3) a (4) lze určit také jiným způsobem:

Při vzpružování dokonale pružných koulí se úhrnná elastická energie, kterou obě koule získaly při stlačování, změní beze zbytku v kinetickou energii obou koulí. Můžeme tedy úlohu řešit také užitím zákona zachování energie. Úhrnná kinetická energie obou koulí a také jejich hybnost je po rázu stejně veliká jako před rázem. Proto platí soustava rovnic

$$\frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 ,$$

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 .$$

Z ní vychází

$$m_1 (w_1 - v_1)(w_1 + v_1) = m_2 (v_2 - w_2)(v_2 + w_2) , \tag{8a}$$

$$m_1 (w_1 - v_1) = m_2 (v_2 - w_2) . \tag{8b}$$

Kořeny $w_1 = v_1$ a $w_2 = v_2$ nejsou fyzikálně možné, neboť si kuličky nemohou po rázu udržet orientaci a velikost rychlosti takovou, jakou měly před rázem. Proto můžeme dosadit do pravé strany rovnice (8a) za součin $m_2(v_2 - w_2)$ součin $m_1(w_1 - v_1)$ podle rovnice (8b). Tím dostaneme jednoduchou rovnici

$$w_1 = v_2 - v_1 + w_2 .$$

Z této rovnice a z rovnice (8b) vypočítáme

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

a

$$w_2 = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2\, m_1v_1}{m_1 + m_2},$$

což jsou vztahy (3) a (4).

b) Vychýlíme-li hmotnější kuličku při napjaté niti o úhel $\alpha = 90°$ ze svislého směru a uvolníme-li ji, narazí na klidnou méně hmotnou kuličku podle upraveného vztahu (1) rychlostí $v_1 = \sqrt{2\, l g}$, rychlost druhé kuličky $v_2 = 0$. Po dosazení do vztahů (3) a (4) vychází

$$w_1 = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{2\, l\, g}}{m_1 + m_2} \text{ a } w_2 = \frac{2\, m_1\sqrt{2lg}}{m_1 + m_2} .$$

Obě rychlosti mají v tomto případě souhlasné znaménko s rychlostí v_1, neboť $m_1 - m_2 > 0$.

Obě kuličky se po rázu pohybují stejným směrem, jakým se pohybovala hmotnější kulička před rázem.

Rovnice určující výšky obou kuliček nad rovinou σ po rázu mají tvar

$$\frac{1}{2}\, m_1 \frac{2\, l\, g(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = m_1h_1g$$

a

$$\frac{1}{2} m_2 \frac{4\, m_1^2\, 2\, lg}{(m_1 + m_2)^2} = m_2 h_2 g\,.$$

Z nich vyjde

$$h_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}\, l \quad \text{a} \quad h_2 = \frac{4\, m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\, l\,. \qquad (9)$$

Zvětšíme-li jmenovatele zlomku určujícího velikost h_2 tím, že hmotnost m_2 nahradíme hmotností $m_1 > m_2$, přejde rovnost $h_2 = \dfrac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\, l$ v nerovnost $h_2 > l$; h_1 je zřejmě menší než l, neboť $m_1 - m_2 < m_1 + m_2$.

Po rázu vystoupí hmotnější koule nad rovinu σ do výšky menší, než je délka závěsu, méně hmotná do výšky větší, než je délka závěsu.

c) Narazí-li kulička o větší hmotnosti na klidnou méně hmotnou kuličku (úloha b), pak vychází ze vztahů (9) a z rovnosti $h_1 = h_2$ rovnice $|m_1 - m_2| = 2\, m_1$. Protože $m_1 > m_2$, můžeme ji upravit na tvar $m_1 - m_2 = 2\, m_1$. Pak vychází $\dfrac{m_1}{m_2} = -1$, což není fyzikálně možné, neboť hmotnosti obou kuliček jsou kladné.

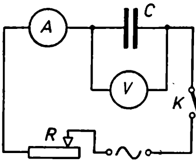
V úloze a), kdy naráží méně hmotná kulička na hmotnější klidnou, plyne ze vztahů (6) a (7) a z rovnosti $h_1 = h_2$ vztah $|m_2 - m_1| = 2\, m_2$, ze kterého vychází $m_1 - m_2 = 2\, m_2$ a $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$.

Obě kuličky mohou vystoupit po rázu stejně vysoko jen v případě, že méně hmotná kulička narazí na hmotnější, která je v klidu, jestliže poměr hmotností obou kuliček $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

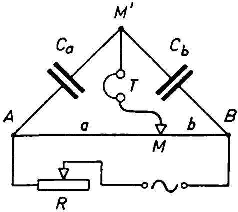
9. Stanovte kapacitu kondenzátoru metodou
a) přímou,
b) můstkovou.

Potřeby: Zdroj střídavého napětí; posuvný reostat *R*; kondenzátor kapacity několik μF, jehož kapacitu budete určovat; sada kondenzátorů o známých kapacitách; dva avomety; spínač *K* proudu; Wheatstoneův můstek; přívodní dráty.

a) **Návod:** 1. Sestavte obvod podle naznačeného schématu (obr. 32a). Proud budete měnit posuvným reostatem *R*. Měření provádějte např. při napětí 22 V s avometem upraveným na rozsah napětí 30 V. Odpor avometu je v tomto případě $3 \,.\, 10^4\ \Omega$.



Obr. 32 a



Obr. 32 b

2. Měření proveďte pětkrát pro různé hodnoty I; naměřené hodnoty I a U zaznamenejte do vhodně upravené tabulky a vypočítejte kapacitu podle zjednodušeného vzorce $I = C\,\omega\,U$.

3. Za hledanou hodnotu C volte aritmetický průměr všech pěti vypočítaných hodnot.

4. Uvažte, zda je odpor avometu při rozsahu 30 V dostatečně veliký, abyste mohli uvedeného zjednodušeného vzorce použít.

b) Návod najdete v učebnici Zdeněk Horák: Praktická fyzika, str. 434, čl. 65.2 (SNTL, Praha 1958). Místo bzučáku a telefonu můžete také užít zdroje střídavého napětí a citlivého ampérmetru. Proveďte pět měření a hodnotu hledané kapacity určete podle návodu v odst. 3a.

Provedení: Měření jsme prováděli podle návodu. Jako voltmetru jsme užili avometu s rozsahem napětí $U_v = 30$ V o odporu $R_v = 3 \,.\, 10^4\ \Omega$. Velikost proudu jsme měnili posuvným reostatem R.

K výpočtu kapacity jsme užili vztahu $C = \frac{I}{\omega U}$. Indukčnost voltmetru a ampérmetru zanedbáváme. Naměřené a vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce. Aritmetický průměr hledané kapacity značíme $\bar{C}$, odchylky kapacit C vypočítaných z naměřených hodnot od aritmetického průměru označujeme Δ a pravděpodobnou chybu výsledku ϑ. Počítáme ji podle vzorce $\vartheta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n(n-1)}}$.

Pravděpodobná chyba výsledku $\bar{\vartheta} = 0{,}005\ \mu$F. Kapacita určená touto metodou je $C = (1{,}124 \pm \pm\, 0{,}005)\ \mu$F.

Tabulka

Naměřené a vypočítané hodnoty při měření kapacity metodou přímou

U[V]	I[mA]	C[μF]	$\bar{C}$[μF]	Δ	Δ^2	$\bar{\vartheta}$
5	1,8	1,145	1,124	− 0,021	0,000441	0,005
10	3,55	1,13		− 0,006	0,000036	
15	5,3	1,125		− 0,001	0,000001	
20	6,9	1,1		+ 0,024	0,000576	
25	8,78	1,12		+ 0,004	0,000016	
		5,620			0,001070	

Protože bylo použito k měření kapacity kondenzátoru zapojení naznačeného na obrázku a kapacita byla počítána podle zjednodušeného vzorce $C = \frac{I}{\omega U}$, není vypočítaný výsledek zcela správný. Kondenzátorem neprotéká proud I, naměřený ampérmetrem, nýbrž proud $I_C = I - \frac{U}{R_v}$, kde U značí napětí na svorkách kondenzátoru, naměřené voltmetrem. Správnou hodnotu C' kapacity kondenzátoru bychom vypočítali ze vztahu $C' = \frac{I_C}{U\omega}$.

Protože $\frac{I}{U}$ má přibližnou hodnotu $\frac{1}{3 \cdot 10^3}\ \Omega^{-1}$ a $\frac{1}{R} \doteq \frac{1}{3 \cdot 10^4}\ \Omega^{-1}$, je naměřená hodnota kapacity kondenzátoru asi o 10 % větší než správná hodnota.

b) K měření kapacity kondenzátoru můstkovou metodou používáme Wheatstoneova můstku. Můstek měl přímý homogenní drát délky 1 m. Zapojili jsme ho do obvodu se střídavým napětím podle obr. 32b. C_a značí kapacitu kondenzátoru, jehož kapacitu určujeme, C_b kapacitu srovnávacího kondenzátoru, jehož kapacitu známe. Jako zdroje střídavého napětí jsme použili zpětnovazebního oscilátoru a jako indikátoru zvuku sluchátek T. Kontaktem M jsme posunovali po drátě AB tak, aby se zvuk ve sluchátkách zeslaboval. V okamžiku, kdy zvuk úplně vymizel nebo byl nejslabší, jsme změřili délky a a b.

V této poloze kontaktu neprochází sluchátky proud a místa M a M' mají stejný potenciál. Napětí na kondenzátoru C_a je stejné jako na délce a drátu a napětí na kondenzátoru C_b je rovno napětí na délce b drátu. Prochází-li větví $AM'B$ proud I_1 a větví AMB proud I_2, platí rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega C_a} I_1 &= R_a I_2 , \\ \frac{1}{\omega C_b} I_1 &= R_b I_2 , \end{aligned} \tag{1}$$

kde R_a značí odpor drátu délky a a R_b odpor drátu délky b. Velikosti těchto odporů jsou přímo úměrné jejich délkám. Proto platí $R_a : R_b = a : b$.

Dělíme-li levou stranu první ze soustavy rovnic (1) levou stranou rovnice druhé a totéž učiníme i s pravými stranami, dostaneme

$$C_b : C_a = R_a : R_b \text{ a po úpravě } C_a : C_b = b : a .$$

Má tedy proměřovaný kondenzátor kapacitu

$$C_a = \frac{b}{a} C_b . \tag{2}$$

Naměřené a vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce:

a[cm]	b[cm]	C_b[μF]	C_a[μF]	$\bar{C}_a$[μF]	Δ	Δ^2	$\bar{\vartheta}$
20	80	0,25	1		−0,015	0,000225	
34,4	65,6	0,5	0,955		+0,030	0,000900	
51,5	48,5	1	0,941	0,985	+0,044	0,001936	0,016
61,5	38,5	2	1,025		−0,040	0,001600	
83,3	16,7	5	1,003		−0,018	0,000324	
			4,924			0,004985	

Metodou můstkovou jsme určili

$$C_a = (0{,}985 \pm 0{,}016)\,\mu\mathrm{F}\,.$$

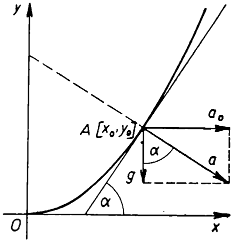
Přesnost této metody závisí ve značné míře na přesnosti použitých srovnávacích kapacit.

Řešení úloh druhého kola

1. Posádka bobu projíždí zatáčkou o poloměru r rychlostí v. Průřez mantinelu zatáčky je parabolický (obr. 33). Rovnice paraboly je $y = k\,x^2$.

a) V jaké výši musí bob projet zatáčku, nemají-li na posádku působit boční síly, a jaký násobek tíhového zrychlení g v zatáčce vzniká?

b) Při jaké rychlosti posádky v kruhové zatáčce je zrychlení $a' = 5\,g$? Může být vypočtenou rych-



Obr. 33

lostí projeta půlkruhová zatáčka, aniž posádka ztratí vědomí?

Zvětšení poloměru při najíždění do zatáčky zanedbejte.

Poznámky: Člověk ztrácí zpravidla vědomí, pohybuje-li se aspoň po dobu 2 s se zrychlením 5 g.

Tečna paraboly $y = k\,x^2$ má v bodě (x_0,y_0) směrnici $k_t = 2\,k\,x_0$.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $r = 16$ m, $v = 72$ km h^{-1}, $k = \frac{25}{32}$ m^{-1}, $g =$ $= 10$ m s^{-2}.

Označení veličin a dané hodnoty: Situaci posádky uvažujeme v bodě A, jehož souřadnice jsou (x_0, y_0). Tečna k parabolické dráze bobu v místě A svírá s osou x úhel α. Setrvačná odstředivá síla působí v místě A zrychlení a_0, celkové zrychlení posádky v bodě A je a. Toto zrychlení má velikost $a' = 5\,g$ při rychlosti v_0. Rychlost $v = 72$ km h^{-1} $=$ $= 20$ m s^{-1} (obr. 33).

Řešení: a) Nemají-li na posádku působit v místě A boční síly, musí bob projet zatáčku v takové výšce, aby výslednice tíhové síly G a setrvačné odstředivé síly měla směr normály. Z obrázku je patrno, že

$$\mathrm{tg}\,\alpha = k_t = 2\,k\,x_0 = \frac{a_0}{g} = \frac{v^2}{rg},$$

takže

$$x_0 = \frac{v^2}{2krg},\ y_0 = kx_0^2 = \frac{v^4}{4kr^2g^2} \quad \text{a} \quad a_0 = \frac{v^2}{r}. \qquad (1)$$

Po dosazení daných hodnot získáme hodnoty $x_0 = 1{,}6$ m, $y_0 = 2$ m, $a_0 = 2{,}5$ g.

Bob musí projet zatáčku ve výšce $y_0 = 2$ m nad nejnižším bodem příslušného průřezu zatáčky. Obecně je tato výška určena vztahem (1).

Celkové zrychlení a v této poloze bobu určíme pomocí Pythagorovy věty. Podle obrázku je

$$a = \sqrt{a_0^2 + g^2} = \sqrt{2{,}5^2 g^2 + g^2} = g\sqrt{7{,}25} \doteq 2{,}7\,g\,. \tag{2}$$

V zatáčce vzniká v této poloze bobu zrychlení určené vztahem (2).

b) Má-li být v kruhové zatáčce zrychlení $a' = 5\,g$, je podle Pythagorovy věty

$$a_0 = \sqrt{a'^2 - g^2} = \frac{v^2}{r}\,,$$

odtud určíme

$$v = \sqrt{r\sqrt{a'^2 - g^2}}\,.$$

Dosadíme-li za a hodnotu $a' = 5\,g$ a za v hodnotu v_0, je

$$v_0 = \sqrt{r\sqrt{25\,g^2 - g^2}} = \sqrt{2\,r\,g\sqrt{6}}\,. \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (3) vyjde $v_0 = 16 \,.\, 2 \,.\, 10\,6\ \mathrm{m^2 s^{-2}} = 28\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 100{,}8\ \mathrm{km\,h^{-1}}$.

Zrychlení v zatáčce má velikost $a' = 5\,g$, jestliže se bob pohybuje rychlostí 28 m s^{-1}, která je obecně určena vztahem (3).

Půlkruhovou zatáčku projede bob rychlostí v_0 za čas

$$t = \frac{\pi r}{v_0} \doteq \frac{50}{28}\,\mathrm{s} < 2\,\mathrm{s}.$$

Při rychlosti v_0 působí v zatáčce zrychlení $a' = 5\,g$ po dobu menší než 2 s. Posádka tedy neztratí vědomí.

2. Závaží je zavěšeno na gumovém vlákně, které má délku l_0, když není zatíženo. Závaží vychýlíme o 90°, aniž bychom přitom vlákno napínali, tak, že délka zůstává l_0. Potom závaží uvolníme. Při průchodu vlákna svislou polohou se jeho délka zvětší na l.

Určete rychlost závaží v tomto okamžiku. Za poloměr křivosti dráhy závaží v nejnižší poloze považujte l.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $l_0 = 0{,}8\ \mathrm{m}$, $l = 1\ \mathrm{m}$.

Označení veličin: Hmotnost závaží označíme m, tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, tíhu $G = m\,g$. Odstředivá síla působící na vlákno při jeho průchodu svislou polohou je F, prodloužení vlákna $\Delta\,l = l - l_0 = 0{,}2\ \mathrm{m}$.

Řešení: Prodloužení vlákna při jeho průchodu svislou polohou způsobuje síla F', jež je výslednicí tíhy tělesa G a odstředivé síly F. Reakcí síly F' je elastická síla, kterou prodloužené vlákno přitahuje těleso k závěsnému bodu.

Při průchodu vlákna svislou polohou mají síla F a G stejný směr i orientaci. Proto je

$$F' = G + \frac{mv^2}{l} = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right). \qquad (1)$$

Elastická energie gumového vlákna má při průchodu vlákna svislou polohou velikost

$$W_e = \frac{1}{2} F' (l - l_0) = \frac{1}{2} m \left(g + \frac{v^2}{l}\right)(l - l_0). \quad (2)$$

Protože kinetická energie závaží má v tomto okamžiku velikost $W_k = \frac{1}{2} m v^2$, kde v značí hledanou rychlost, je celková mechanická energie závaží při průchodu vlákna svislou polohou

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \left(g + \frac{v^2}{l}\right)(l - l_0). \qquad (3)$$

Závaží vychýlené o 90° tak, že nenapjaté vlákno má vodorovný směr, má potenciální energii tíhovou $W_p = m g l$ vzhledem k vodorovné rovině, proložené místem, kde se závaží nachází při průchodu vlákna svislou polohou.

Podle zákona zachování energie platí se zřetelem ke vztahu (3) rovnice

$$m g l = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \left(g + \frac{v^2}{l}\right)(l - l_0).$$

Odstraníme-li zlomky, dostaneme po úpravách

$$v^2 \frac{2l - l_0}{l} = g(l + l_0)$$

a

$$|v| = \sqrt{\frac{gl(l + l_0)}{2l - l_0}}. \qquad (4)$$

Vyhovuje jen kladný kořen, takže pro dané hodnoty vychází

$$v = \sqrt{\frac{10 \,.\, 1 \,.\, 1{,}8}{2 - 0{,}8}} \sqrt{\mathrm{m\,s^{-2}}\, m\, m\, m^{-1}} = \sqrt{15}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \doteq$$

$$\doteq 3{,}86\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Při průchodu vlákna svislou polohou se pohybuje závaží rychlostí 3,86 m s^{-1}, která je obecně určena vztahem (4).

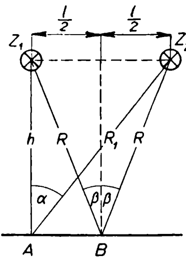
Poznámka: Protože vlákno se při pohybu závaží prodlužuje, nepohybuje se závaží po kružnici, a proto není správné pokládat za poloměr křivosti dráhy závaží v jeho nejnižší poloze délku l. Křivka, po které se pohybuje vychýlené závaží po uvolnění, se velmi málo liší od elipsy o poloosách l a l_0. Vypočítáme-li poloměr křivosti r této elipsy v jejím nejnižším bodě, vychází hodnota $r = \frac{l_0^2}{l}$, a pro v dostaneme potom vztah

$$v = l_0 \sqrt{\frac{g(l + l_0)}{l^2 - l_0 l + l_0^2}},$$

jehož hodnota je $v \doteq 3{,}68$ m s^{-1}, která se od hodnoty $v = 3{,}86$ m s^{-1} liší poměrně málo.

3. Pod stropem montážní haly jsou umístěna ve výšce h nad podlahou dvě osvětlovací tělesa, vzdálená od sebe o l. Jaké je osvětlení na podlaze v místě A a v místě B (viz obr. 34),

a) jestliže světelný tok každého z obou zdrojů Z_1 a Z_2 je Φ;



Obr. 34

b) jestliže světelný tok zdroje Z_1 je Φ_1 a světelný tok zdroje Z_2 je Φ_2?

Předpokládáme, že každý z obou zdrojů má ve všech směrech stejnou směrovou svítivost. Zanedbáváme vliv osvětlení stropu. Zdroje Z_1 a Z_2 považujte za bodové zdroje světla.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h = 4$ m, $l = 3$ m, $\Phi = 250$ Dlm, $\Phi_1 = 300$ Dlm, $\Phi_2 = 200$ Dlm.

Označení veličin: Z_1 a Z_2 na obr. 34 značí osvětlovací tělesa. Svítivost zdroje Z_1 označíme I_1, svítivost zdroje Z_2 je I_2, osvětlení E. Označení ostatních veličin je patrné z obrázku.

Řešení: a) Zdroj Z_1 působí v místě A osvětlení

$E_1 = \frac{I_1}{h^2}$, zdroj Z_2 způsobí v tomtéž místě menší osvětlení E_2, neboť svítí z větší vzdálenosti R_1 šikmo na danou plochu. Protože úsečka AZ_2 spojující zdroj Z_2 s místem A svírá se svislým směrem úhel α, působí zdroj Z_2 v místě A osvětlení

$$E_2 = \frac{I_2}{R_1^2} \cos \alpha \,. \tag{1}$$

Světelný zdroj, který má ve všech směrech stejnou směrovou svítivost I, dává tok $\Phi = 4\,\pi\,I$. Proto jsou hodnoty svítivosti I_1 a I_2 vyjádřeny vzorci $I_1 = \frac{\Phi}{4\pi}$ a $I_2 = \frac{\Phi}{4\pi}$, a proto je

$$E_1 = \frac{\Phi}{4\pi h^2} \quad \text{a} \quad E_2 = \frac{\Phi}{4\pi R_1^2} \cos \alpha. \tag{2}$$

Výsledné osvětlení E podlahy v místě A je rovno součtu osvětlení způsobených jednotlivými zdroji. Proto je

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\Phi}{4\pi h^2} + \frac{\Phi}{4\pi R_1^2} \cos \alpha =$$

$$= \frac{\Phi}{4\pi} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{\cos \alpha}{R_1^2} \right)$$

a po úpravě

$$E = \frac{\Phi}{4\pi} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{h\sqrt{l^2 + h^2}}{(l^2 + h^2)^2} \right), \tag{3}$$

neboť $\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}}$.

Dosadíme-li do vztahu (3) dané hodnoty, vychází

$$E = \frac{2\,500}{4\pi 4^2}\frac{\text{lm}}{\text{m}^2} + \frac{2\,500}{4\pi 5^2}\cdot\frac{4}{5}\frac{\text{lm}}{\text{m}^2} =$$

$$= 12{,}5\ \text{lx} + 6{,}3\ \text{lx} = 18{,}8\ \text{lx}.$$

Osvětlení v místě A je obecně určeno vztahem (3) a má za daných podmínek hodnotu 18,8 lx.

Osvětlení v místě B má podle upraveného vztahu (2) hodnotu

$$E = 2\,\frac{\Phi}{4\pi R^2}\cos\beta,$$

kde $R = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ a $\cos\beta = \frac{h}{R} =$

$$= \frac{h\sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

takže vychází

$$E = \frac{4\Phi\, h\sqrt{4h^2 + l^2}}{\pi(4\,h^2 + l^2)^2}\,. \tag{4}$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$E = \frac{4\,.\,2\,500\,.\,4\sqrt{73}}{3{,}14\,.\,73^2}\,\frac{\text{lm m m}}{\text{m}^4} = 20{,}42\ \text{lx}.$$

Osvětlení v místě B je 20,42 lx, obecně je určeno vztahem (4).

b) Podle upraveného vztahu (3) je

$$E = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\Phi_1}{h^2} + \frac{\Phi_2\, h \sqrt{l^2 + h^2}}{(l^2 + h^2)^2}\right). \qquad (5)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$E = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3\,000}{16} + \frac{2\,000\,.\,4\,.\,5}{5^4}\right)\frac{\text{lm}}{\text{m}^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}(187{,}5 + 64)\ \text{lx} = 20\ \text{lx}.$$

Osvětlení v místě A je 20 lx, obecně je určeno vztahem (5).

Osvětlení v místě B má podle upraveného vztahu (4) velikost

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\cos\beta}{4\pi R^2}(\Phi_1 + \Phi_2).$$

Po dosazení za $\cos\beta$ a za R vychází po úpravě

$$E = (\Phi_1 + \Phi_2)\frac{2h\sqrt{4h^2 + l^2}}{\pi\,(4\,h^2 + l^2)^2}\,. \qquad (6)$$

Dosadíme-li do vztahu (6) dané hodnoty, je

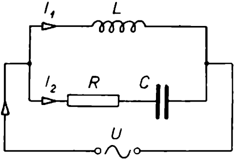
$$E = \frac{2\,.\,4\sqrt{73}\ (3\,000 + 2\,000)}{\pi\ 73^2}\frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = 20{,}42\ \text{lx}.$$

Osvětlení v místě B je obecně určeno vztahem (6), pro dané hodnoty vyjde 20,42 lx.

4. V uzavřeném obvodu střídavého proudu (obr. 35) o úhlové frekvenci ω je dáno napětí U, odpor R, indukčnost L a kapacita C.

a) Určete proudy I_1 ve větvi s cívkou, I_2 ve větvi s kondenzátorem a odporem a proud I v nerozvětvené části obvodu a rozdělte je na složky reálné a imaginární.

b) Udejte, jaká je podmínka rezonance, vypočítejte proudy I'_1, I'_2 a I' v obou větvích a v nerozvětvené části obvodu za rezonance a stanovte rezonanční odpor R_r v obvodu.



Obr. 35

c) Dokažte, že za rezonance jsou imaginární složky proudů I'_1 a I'_2 stejně veliké, ale opačného znaménka.

d) Který z proudů I'_1, I'_2 a I' je za rezonance jen jalový a kterou částí obvodu prochází proud činný i jalový? Proč prochází nerozvětvenou částí obvodu jen proud činný?

Označení veličin: Frekvenci střídavého proudu značíme f, periodu T, imaginární jednotku $\sqrt{-1} = \mathrm{j}$. Úhlovou frekvenci označíme obecně ω, za rezonance ω'.

Řešení: a) Ve větvi s kondenzátorem je ke kon-

denzátoru sériově přiřazen odpor R. Je tedy impedance této větve $\mathbf{Z}_2 = R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C} = \frac{R\omega C - \mathrm{j}}{\omega C}$.
Protože napětí na větvi s cívkou a na větvi s kondenzátorem a odporem je stejné, platí

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}}{\mathrm{j}L\omega} = -\frac{\mathrm{j}}{L\omega}\,\mathbf{U}\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{C\omega}{R\omega C - \mathrm{j}}\,\mathbf{U} = \frac{R\omega^2C^2 + \mathrm{j}\omega C}{R^2C^2\omega^2 + 1}\,\mathbf{U}. \tag{2}$$

Při paralelním zařazení dvou větví platí $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$, takže

$$\mathbf{I} = \left(\frac{R\omega^2C^2 + \mathrm{j}\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1} - \frac{\mathrm{j}}{\omega L}\right)\mathbf{U},$$

odkud po úpravě vychází

$$\mathbf{I} = \frac{RL\omega^3C^2 + \mathrm{j}\,(L\omega^2C - R^2\omega^2C^2 - 1)}{L\omega(R^2\omega^2C^2 + 1)}\,\mathbf{U}\,. \tag{3}$$

Velikosti proudů $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ a $\mathbf{I}$ jsou určeny vztahy (1), (2) a (3).

b) Paralelní rezonance nastane, když imaginární složka celkového proudu $\mathbf{I}$ se rovná nule. Proto je podmínka pro rezonanci vyjádřena rovnicí

$$\begin{aligned} &L\,\omega'^2\,C - R^2\,\omega'^2\,C^2 - 1 = \\ &= C\,\omega'^2\,(L - R^2C) - 1 = 0\,, \end{aligned} \tag{4}$$

takže

$$\omega'^2 = \frac{1}{LC - (RC)^2}\,. \tag{4a}$$

Můžeme-li zanedbat člen $(R\,C)^2$ vzhledem k $L\,C$, vyjde po úpravě Thomsonův vztah $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Z rovnice (3) vychází pro rezonanční proud hodnota

$$\boldsymbol{I}' = \frac{R\omega'^2C^2}{R^2\omega'^2C^2 + 1}\,\boldsymbol{U}$$

a po dosazení z rezonanční podmínky $R^2\,\omega'^2\,C^2 + 1 = L\,\omega'^2\,C$ je

$$\boldsymbol{I}' = \frac{R\omega'^2C^2}{L\omega'^2C}\,\boldsymbol{U} = \frac{RC}{L}\,\boldsymbol{U}. \tag{5}$$

Výraz $R_r = \dfrac{L}{RC}$ udává hodnotu rezonančního odporu. (6)

Z rovnice (5) je patrno, že za rezonance je proud ve stejné fázi s napětím. Cívkou prochází za rezonance proud

$$\boldsymbol{I}_1' = -\frac{\mathrm{j}}{\omega' L}\,\boldsymbol{U}, \tag{7}$$

odporem R a kondenzátorem proud

$$\boldsymbol{I}_2' = \frac{R\omega'^2C^2 + \mathrm{j}\omega' C}{R^2\omega'^2C^2 + 1}\,\boldsymbol{U}.$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu podle rezonanční podmínky $R^2\,\omega'^2\,C^2 + 1 = L\,\omega'^2\,C$, dostaneme

$$\boldsymbol{I}_2' = \left(\frac{RC}{L} + \frac{\mathrm{j}}{\omega' L}\right)\boldsymbol{U}. \tag{8}$$

Rezonanční podmínka je vyjádřena vztahem (4); pro proudy ve větvích a v nerozvětvené části obvodu platí za rezonance vyjádřeny vztahy (7), (8) a (5). Hodnotu rezonančního odporu udává výraz (6).

c) Ze vztahů (7) a (8) je přímo patrno, že imaginární složky proudů I_1' a I_2' jsou za rezonance stejně veliké, ale mají opačné znaménko.

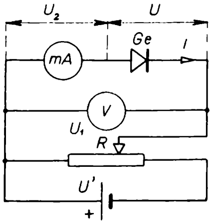
d) Při rezonanci prochází nerozvětvenou částí obvodu jen činný proud, větví s cívkou jen proud jalový, větví s kondenzátorem, zařazeným v sérii s odporem *R*, proud činný i jalový. Součet imaginárních složek proudů I_1' a I_2' je roven nule. Proto obvodem protéká jen proud činný. Protože reálná složka proudu I_1' je rovna nule, je činná složka proudu I_2' stejně veliká jako proud protékající obvodem.

5. Stanovte charakteristiku hrotové germaniové diody.

Potřeby: Germaniová dioda *Ge*, miliampérmetr *mA*, voltmetr *V*, potenciometr *R*, zdroj stejnosměrného napětí *U'*, přívodní dráty, milimetrový papír, kružítko, tužka.

Charakteristika diody udává závislost proudu *I*, který prochází diodou, na napětí *U* na diodě, tj. $I = f(U)$.

Návod: Měření provádějte podle schématu (obr. 36). Proud *I* měřte avometem o rozsahu 1,2 mA nebo 3 mA. Napětí U' (asi 4 V) dodává akumulátor nebo suchá baterie. Odpor miliampérmetru není zanedbatelný vůči odporu germaniové diody, a proto musíte výpočty provádět s ohledem na tento odpor. Nejdříve změříte odpor miliampérmetru; provedete



Obr. 36

to podle téhož schématu, které je na obrázku, avšak germaniovou diodu nahradíte zkratem.

Potom proměřujete charakteristiku, a to tak, že diodu zapojíte nejdříve v propustném směru a napětí U_1 postupně zvyšujete od nuly po 100 mV asi do 2 V. Potom napětí snižujete na nulu.

Měření opakujete při zapojení diody v závěrném směru.

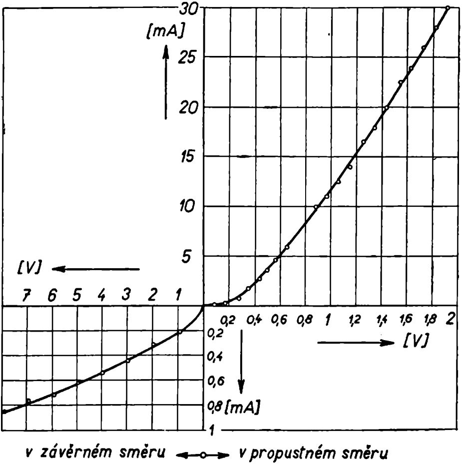
Měřené a vypočítané hodnoty zapisujete do tabulky.

Nakonec sestrojte na milimetrovém papíře charakteristiku diody.

Před zapojením proudu si dejte zapojení zkontrolovat.

Řešení: Abychom mohli provést měření podle zapojení znázorněného na obrázku, musíme znát odpor R_A ampérmetru. Ten určíme tak, že v obvodu nahradíme germaniovou diodu zkratem, změříme při vhodném napětí U proud I, který ampérmetrem protéká, a podle Ohmova zákona vypočítáme R_A. Odpor ampérmetru musíme určit pro každý rozsah, kterého budeme používat, neboť je pro každý rozsah jiný. Odpor užitého ampérmetru měl pro rozsah 1,2 mA velikost 47 Ω, pro rozsah 6 mA měl hodnotu 25 Ω a při rozsahu 60 mA byl 3 Ω.

Nyní zařadíme do obvodu germaniovou diodu. Při užitém zapojení měří ampérmetr přímo proud I, který protéká germaniovou diodou. Voltmetr však neukazuje napětí U na diodě, nýbrž napětí U_1 na celé větvi obsahující diodu i ampérmetr. Napětí U_2 na svorkách ampérmetru vypočítáme podle Ohmova zákona $U_2 = R_A I$, kde R_A značí odpor ampérmetru. Protože je ampérmetr zařazen do větve s diodou sériově, je $U = U_1 - U_2 = U_1 - R_A I$. Hodnoty U_1 a I změříme na zařazených měřicích přístrojích a U vypočítáme ze vztahu $U = U_1 - R_A I$. Naměřené i vypočítané hodnoty zaznamenáme v tabulce a jejich užitím sestrojíme graf $I = f(U)$ (obr. 37). Graf charakteristiky v závěrném směru je nakreslen do třetího kvadrantu a má jiné měřítko než graf charakteristiky ve směru propustném.


30
[mA]
25
20
15
10
5
[V]
7 6 5 4 3 2 1
0,2 0,4 0,6 0,8 1 1,2 1,4 1,6 1,8 2
[V]
0,2
0,4
0,6
0,8 [mA]
1
v závěrném směru
v propustném směru

Obr. 37

Tabulka hodnot v propustném směru

Čís.	I [mA]	U_1[mV]	$U_2 = R_A I$ [mV]	$U = U_1 - U_2$[mV]
1	0,05	100	2,35	97,65
2	0,32	200	15,3	184,7
3	0,78	300	36,7	263,3
4	1,8	400	45,0	355,0
5	2,7	500	67,5	432,5
6	3,6	600	92,5	507,5
7	4,6	700	115,0	585,0
8	5,8	800	145,0	655,0
9	10,0	900	30,0	870,0
10	11,0	1000	33,0	967
11	12,5	1100	37,5	1062,5
12	14,0	1200	42,0	1158
13	16,5	1300	49,5	1250,5
14	18,0	1400	54,0	1346
15	20,0	1500	60,0	1440
16	22,5	1600	67,5	1532,5
17	24,0	1700	72,0	1628
19	26,0	1800	78,0	1722
10	28,0	1900	84,0	1816
28	30,0	2000	90,0	1910

Tabulka hodnot v závěrném směru

Čís.	I[mA]	U_1[V]	$U_2 = R_A I$ [mV]	$U = U_1 - U_2$[mV]
1	0,21	1	9,87	990,13
2	0,31	2	14,6	1985,4
3	0,44	3	20,7	2979,3
4	0,54	4	25,4	3974,6
5	0,61	5	28,7	4971,3
6	0,72	6	33,8	5966,2
7	0,76	7	35,7	6964,3
8	0,85	8	40,0	7960,0

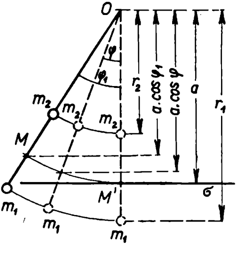
Při měření v propustném směru měl ampérmetr při měřeních 1 až 3 odpor 47 Ω, při měřeních 4 až 8 odpor 25 Ω, při měřeních 9 až 20 odpor 3 Ω. K měření v nepropustném směru bylo použito ampérmetru s odporem 47 Ω.

Řešení úloh třetího kola

1. Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 jsou upevněny na tyčce tak, že jejich středy mají od koncového bodu O tyčky vzdálenosti r_1 a r_2. Vypočítejte dobu kyvu tohoto útvaru, kývajícího kolem vodorovné osy procházející bodem O.

Při výpočtu zanedbejte hmotnost tyčky a odpor prostředí.

Označení veličin: Uvažovaný útvar (obr. 38) je fyzickým kyvadlem. Je ve stálé rovnovážné po-



Obr. 38

loze, jestliže tyčka je ve svislé poloze. Vychýlíme-li tyč o úhel φ_1 z rovnovážné polohy a uvolníme-li ji, začne kývat. Polohu těžiště útvaru v rovnovážné poloze označíme M', v krajní poloze se nachází těžiště v bodě M. Vodorovnou rovinu procházející bodem M' označíme σ. Potenciální energii tíhovou kyvadla budeme značit W_p, kinetickou W_k. Rychlost koule o hmotnosti m_1 označíme v_1, rychlost druhé koule v_2. Úhlová rychlost koulí při kývání je ω, doba kyvu τ, redukovaná délka fyzického kyvadla je l_{red}. Délku matematického kyvadla kývajícího se stejnou periodou jako uvažované kyvadlo fyzické označíme l, úhlovou rychlost kuličky tohoto kyvadla ω'. Vzdálenost těžiště od bodu O označíme a.

Řešení: Svírá-li tyčka se svislým směrem úhel φ_1, nachází se těžiště kyvadla ve výšce $a - a \cos \varphi_1$ nad rovinou σ, při odchylce tyčky kyvadla o úhel φ od rovnovážné polohy je tato vzdálenost $a - a \cos \varphi$. Přejde-li tedy kyvadlo z polohy určené úhlem φ_1 do polohy určené úhlem φ, zmenší se jeho potenciální energie tíhová o $\Delta W_p = (m_1 + m_2) g a (\cos \varphi - - \cos \varphi_1)$ a kyvadlo nabude kinetické energie $W_k = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$. Podle zákona zachování energie platí

$$(m_1 + m_2) g a (\cos \varphi - \cos \varphi_1) = = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) , \qquad (1)$$

neboť $v_1 = r_1 \omega$ a $v_2 = r_2 \omega$.

Těžiště má od koule hmotnosti m_1 vzdálenost $r_1 - a$, od koule hmotnosti m_2 vzdálenost $a - r_2$. Poloha těžiště je tedy určena rovnicí

$$\frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{a - r_2}{r_1 - a},$$

odkud vypočítáme

$$a = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu za a do vzorce (1), dostaneme po úpravě

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\,(m_1 r_1 + m_2 r_2)(\cos\varphi - \cos\varphi_1)}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}. \qquad (2)$$

Výraz

$$l_{\text{red}} = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2} \qquad (3)$$

má rozměr délky a je pro dané fyzické kyvadlo konstantní. Nazýváme ho redukovaná délka uvažovaného fyzického kyvadla. Výraz (2) lze tedy upravit

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\,(\cos\varphi - \cos\varphi_1)}{l_{\text{red}}}}. \qquad (4)$$

Vychýlíme-li kuličku matematického kyvadla, zavěšenou na niti délky l, z rovnovážné do krajní polohy tak, že nit svírá se svislým směrem úhel φ_1, a pak kuličku uvolníme, začne kývat. V poloze nitě odchýlené od svislého směru o úhel φ má kulička dráhovou rychlost v a kinetickou energii $W_k' = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, l^2\, \omega'^2$, kde m značí hmotnost kuličky a ω' úhlovou rychlost v této poloze. Rozdíl potenciálních energií tíhových v polohách kuličky určených úhly φ_1 a φ je $\Delta W'_p = m g l (\cos \varphi - \cos \varphi_1)$. Podle zákona zachování energie platí

$$m g l (\cos \varphi - \cos \varphi_1) = \tfrac{1}{2} m l^2 \omega'^2 ,$$

takže

$$\omega' = \sqrt{\frac{2 g (\cos \varphi - \cos \varphi_1)}{l}} . \qquad (5)$$

Ze vztahů (4) a (5) je patrno, že dané fyzické kyvadlo o redukované délce l_{red} má v každém okamžiku stejnou úhlovou rychlost jako matematické kyvadlo délky $l = l_{\text{red}}$. Proto mají obě kyvadla stejnou dobu kyvu.

Pro dobu kyvu daného útvaru platí tedy vztah

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} = \pi \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{g (m_1 r_1 + m_2 r_2)}} . \qquad (6)$$

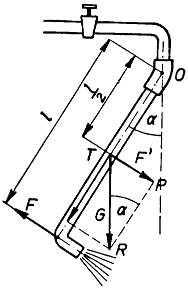
Doba kyvu uvažovaného kyvadla fyzického je určena vztahem (6).

2. Na svislém vyústění vodovodního výtokového ventilu je pomocí dokonale ohybné hadičky připevněna skleněná rourka délky l, vnitřního průřezu S a hmotnosti m_r. Spodní konec rourky je ohnutý o 90° (obr. 39).

Určete úhel α, o který se odchýlí rourka od svislé polohy, jestliže z ní vytéká voda rychlostí v.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 1$ m, $S = 3 \cdot 10^{-5}$ m^2, $m_r = 8 \cdot 10^{-2}$ kg, $v = 2$ m s^{-1}.

Označení veličin: Voda je vytlačována z trubice silou F. Za čas Δt vyteče otvorem trubice



Obr. 39

množství vody $\Delta\, m$ o objemu $\Delta\, V$. Hmotnost vody vyplňující trubici označíme m_v, celkovou hmotnost trubice s vodou $m = m_r + m_v$, tíhu G. Těžiště trubice s vodou se nachází v místě T. Trubice se otáčí kolem osy O kolmé k délce trubice a silou F se vychýlí o úhel α.

Hustota vody je $\varrho = 10^3$ kg m^{-3}, tíhové zrychlení $g = 10$ m s^{-2}.

Řešení: V krátkém časovém intervalu $\Delta\, t$ vyteče průřezem S trubice objem vody $\Delta\, V = S\, v\, \Delta\, t$, který má hmotnost

$$\Delta\, m = S\, v\, \varrho\, \Delta\, t\,. \tag{1}$$

Změna hybnosti elementu $\Delta\, m$ vytékající vody má hodnotu

$$v\, \Delta\, m = S\, v^2\, \varrho\, \Delta\, t\,.$$

Podle zákona o rovnosti impulsu síly a změny hybnosti vytékající vody platí rovnice $F \Delta t = v \Delta m = S v^2 \varrho \Delta t$ a po úpravě

$$F = S v^2 \varrho \,. \qquad (2)$$

Tíhu rourky s vodou si rozložme na dvě navzájem kolmé složky. Složka F' je kolmá k ose rourky.

Protože celková hmotnost m rourky s vodou je $m = m_r + m_v = m_r + S l \varrho$, je

$$G = m g = (m_r + S l g) g \,.$$

V pravoúhlém trojúhelníku $\triangle PTR$ je úhel $\sphericalangle TRP = \alpha$ roven úhlu, o který je trubice odchýlena od původní svislé polohy. Proto je

$$F' = G \sin \alpha = (m_r + S l \varrho) g \sin \alpha \,. \qquad (3)$$

Při určitém úhlu α nastane rovnováha. V tom případě se momenty sil F a F' vzhledem k ose otáčení sobě rovnají. Ramenem síly F je l, ramenem síly F' je $\frac{l}{2}$. Proto platí

$$F l = F' \frac{l}{2}, \text{ čili } F' = 2 F \,. \qquad (4)$$

Dosaďme ze vztahů (2) a (3) do rovnice (4). Potom je

$$(m_r + S l \varrho) g \sin \alpha = 2 S v^2 \varrho \,,$$

odkud určíme

$$\sin \alpha = \frac{2 S v^2 \varrho}{(m_r + S l \varrho) g} \,. \qquad (5)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$\sin\alpha =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^{3}}{(8 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{3})10} \frac{m^2 m^2 s^{-2} kg\, m^{-3}}{kg\, m\, s^{-2}} =$$

$$= 0{,}2191 \,.$$

V tabulkách vyhledáme $\alpha = 12°40'$.

Trubička se odchýlí od svislé polohy o úhel $12°40'$, určený vztahem (5).

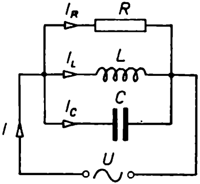
3. V obvodu (viz obr. 40a) střídavého proudu o úhlové frekvenci ω jsou paralelně zařazeny spotřebič o odporu R, cívka o vlastní indukčnosti L a kondenzátor o kapacitě C.

Stanovte α) proud I, impedanci Z obvodu a fázový posun φ mezi napětím U a proudem I;

β) podmínku pro rezonanci. Jaký proud prochází za rezonance obvodem a větvemi s odporem, s cívkou a s kondenzátorem a jaký je za rezonance posun mezi napětím a proudem?

Řešte a) graficky,

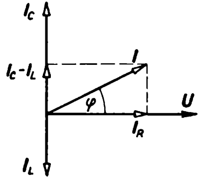
b) symbolickým počtem.



Obr. 40 a

Označení veličin: Zanedbáme-li odpor cívky a přívodních drátů, je v rozvětveném obvodu ve všech paralelních větvích i na svorkách zdroje stejné okamžité napětí, které budeme symbolicky značit $\boldsymbol{U}$ a jeho velikost $U = |\boldsymbol{U}|$. Větvemi s odporem, s cívkou, s kondenzátorem a v nerozvětvené části obvodu protékají proudy, jež budeme po řadě symbolicky značit $\boldsymbol{I}_R$, $\boldsymbol{I}_L$, $\boldsymbol{I}_C$ a $\boldsymbol{I}$ a jejich velikosti $I_R = |\boldsymbol{I}_R|$, $I_L = |\boldsymbol{I}_L|$, $I_C = |\boldsymbol{I}_C|$ a $I = |\boldsymbol{I}|$. Impedanci obvodu označíme symbolicky $\boldsymbol{Z}$ a její velikost $Z = |\boldsymbol{Z}|$. Fázový posun mezi napětím a proudem označíme φ, periodu střídavého proudu T. Úhlovou frekvenci označíme obecně ω, za rezonance ω'. Proudy $\boldsymbol{I}_R$, $\boldsymbol{I}_L$, $\boldsymbol{I}_C$, $\boldsymbol{I}$ a fázový posun φ označíme za rezonance $\boldsymbol{I}'_R$, $\boldsymbol{I}'_L$, $\boldsymbol{I}'_C$, $\boldsymbol{I}'$ a φ'.

Řešení: a—α) Protože je na všech větvích stejné napětí, naneseme kvůli zjednodušení jeho velikost na reálnou osu od počátku v kladném smyslu (obr. 40b). Proud $\boldsymbol{I}_R$ je s napětím ve fázi, a proto naneseme jeho velikost také na reálnou osu v klad-



Obr. 40 b

ném smylu. Ve větvi s cívkou je proud I_L fázově posunut proti napětí o $-\frac{\pi}{2}$, naneseme ho tedy na imaginární osu ve smyslu záporném. Proud I_C ve větvi s kondenzátorem je fázově posunut proti napětí o $+\frac{\pi}{2}$ a jeho velikost tedy naneseme také na osu imaginární, ale ve smyslu kladném. Grafickým složením těchto tří proudů určíme proud protékající obvodem. Užitím Pythagorovy věty vypočítáme podle obrázku

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}\, U =$$

$$= \frac{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2(L\omega^2 C - 1)^2}}{R\omega L}\, U\,. \qquad (1)$$

Fázový rozdíl proudu vzhledem k napětí je podle obrázku určen vztahem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) =$$

$$= \frac{R(L\omega^2 C - 1)}{L\omega}\,. \qquad (2)$$

Impedance

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{R\omega L}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2(L\omega^2 C - 1)^2}} =$$

$$= \frac{R\omega L \sqrt{L^2\omega^2 + R^2\,(L\omega^2 C - 1)^2}}{L^2\omega^2 + R^2\,(L\omega^2 C - 1)^2}\,. \qquad (3)$$

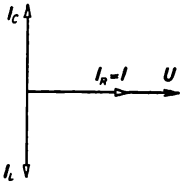
Proud v obvodu je určen vztahem (1), impedance vztahem (3) a fázový rozdíl vztahem (2).

a—β) Má-li nastat rezonance, musí obvodem procházet jen činný proud, jalová složka proudu I se musí rovnat nule. Z obrázku 40b je patrno, že tento případ nastane, jestliže $I_C - I_L = 0$. Z této rovnice vychází $C\omega' U - \frac{U}{L\omega'} = 0$ a z ní dále

$$C\omega' - \frac{1}{L\omega'} = 0 \quad \text{a po úpravě} \quad L\,\omega'^2\,C - 1 = 0\,. \tag{4}$$

Obě rovnice (4) vyjadřují rezonanční podmínku a vyplývá z nich Thomsonův vztah $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Užijeme-li vztahu (4) v rovnicích (1), (2) a (3), vychází $I' = \frac{U}{R}$, tg $\varphi' = 0$, tedy i $\varphi' = 0$ a $Z' = R$.



Obr. 40 c

Za rezonance procházejí větvemi s kondenzátorem a s cívkou jen stejně veliké a v každém okamžiku opačně orientované jalové proudy, obvodem a větví se spotřebičem prochází jen činný proud. Impedance obvodu je rovna odporu R (obr. 40c). Proud a napětí jsou ve stejné fázi.

b—α) Induktanci cívky označíme symbolicky $\boldsymbol{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$, kapacitanci kondenzátoru $\boldsymbol{Z}_C = -\dfrac{\mathrm{j}}{C\omega}$.

Komplexní rovnice $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_R + \boldsymbol{I}_C + \boldsymbol{I}_L$ se tedy substitucí převede na

$$\boldsymbol{I} = \left(\frac{1}{R} - \frac{C\omega}{\mathrm{j}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)\boldsymbol{U} =$$

$$= \left[\frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{Z}}. \qquad (5)$$

Vychází tedy pro velikost (absolutní hodnotu) proudu vztah jako v části a),

$$I = |\boldsymbol{I}| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}\, U. \qquad (5a)$$

Z rovnice (5) vychází

$$\frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = \frac{L\omega + \mathrm{j}\,(L\omega^2 C - 1)R}{R\omega L},$$

takže komplexní impedance bude

$$\boldsymbol{Z} = \frac{R\omega L}{L\omega + \mathrm{j}(L\omega^2 C - 1)R} =$$

$$= \frac{R\omega L[L\omega - \mathrm{j}(L\omega^2 C - 1)R]}{L^2\omega^2 + (L\omega^2 C - 1)^2 R^2} \tag{6}$$

a její velikost

$$Z = \frac{\sqrt{L^2\omega^2 + (L\omega^2 C - 1)^2 R^2}}{L^2\omega^2 + (L\omega^2 C - 1)^2 R^2} R\omega L\,, \tag{6a}$$

jako v části a).

b—β) Paralelní rezonance nastane, jestliže imaginární složka proudu $\boldsymbol{I}$ je rovna nule. Z rovnice (5) vychází rezonanční podmínka $\omega' C - \frac{1}{L\omega'} = 0$ jako v části a).

Z rovnice (5a) vyjde vzhledem k rezonanční podmínce pro velikost proudu vztah

$$I' = \frac{U}{R}\,.$$

Rezonanční odpor Z_r má podle vztahu (6a) hodnotu

$$Z_r = \frac{L^2\omega'^2 R}{L^2\omega'^2} = R;\ I'_R = \frac{U}{R} = I'.$$

Proud v kondenzátoru je

$$\boldsymbol{I}'_C = -\frac{C\omega'}{\mathrm{j}}\boldsymbol{U} = \mathrm{j}C\omega'\boldsymbol{U}$$

a v cívce

$$\boldsymbol{I}'_L = \frac{\boldsymbol{U}}{\mathrm{j}\omega' L} = -\mathrm{j}\frac{\boldsymbol{U}}{L\omega'}\,.$$

Vzhledem k rezonanční podmínce

$$\frac{1}{L\omega'} = C\,\omega' \quad \text{je} \quad I'_L = -\,I'_C.$$

Proud ve větvi s kondenzátorem je stejně veliký jako proud procházející větví s cívkou. Oba proudy jsou však opačně orientovány.

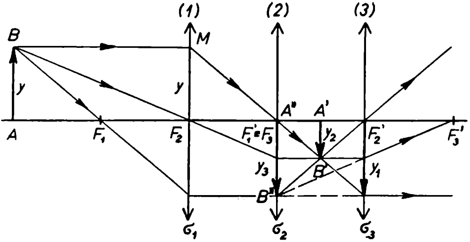
Výsledky vypočítané symbolickým počtem souhlasí s výsledky, které byly odvozeny graficky.

4. Tři tenké spojné čočky o ohniskové vzdálenosti f jsou umístěny ve stejných vzdálenostech za sebou na společné optické ose vodorovného směru. Předmět je umístěn vlevo od levé krajní čočky. Určete polohu výsledného obrazu, jeho velikost vzhledem k předmětu a další vlastnosti (skutečný-zdánlivý, vzhledem k předmětu přímý-převrácený) v těchto případech:

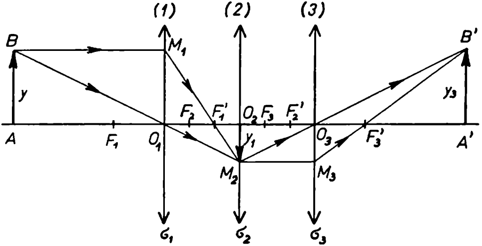
a) Vzdálenost předmětu od levé krajní čočky je $a_1 = 2f$, vzdálenost středů sousedních čoček je f.

b) Vzdálenost předmětu od levé krajní čočky je $3f$, vzdálenost středů sousedních čoček je $d = \frac{3}{2}f$. Předpokládáme, že všude v okolí čoček je stejné prostředí, např. vzduch. Řešte úvahou i graficky.

Označení veličin: Na obr. 41a a 41b označují písmena σ_1, σ_2, σ_3 roviny procházející středy čoček (1), (2), (3), kolmé k společné optické ose těchto čoček. Vzdálenosti předmětů od středů jednotlivých čoček označíme a_1, a_2, a_3, vzdálenosti obrazů



Obr. 41 a



Obr. 41 b

b_1, b_2, b_3. Velikost předmětu je y, prvního obrazu y_1, druhého y_2, třetího y_3. Má-li vzdálenost předmětu od středu příslušné čočky zápornou hodnotu, nachází se předmět v prostoru obrazovém a je zdánlivý. Obrázek v předmětovém prostoru příslušné čočky je zdánlivý a jeho vzdálenost od čočky má zápornou hodnotu. Obraz vytvořený kteroukoli čočkou se stane předmětem pro čočku následující. Je-li jeho vzdálenost od první čočky b_1, je jeho vzdálenost od následující čočky $a_2 = d - b_1$, kde d značí vzdálenost těchto dvou čoček. Při řešení budeme užívat čočkové rovnice $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, z níž vychází pro b vztah

$$b = \frac{af}{a - f}. \qquad (1)$$

Řešení: a) Vzdálenost b_1 prvního obrazu předmětu y od středu levé čočky je podle vztahu (1) $b_1 = 2f$.

Dříve než tento skutečný obraz vznikne, projdou paprsky čočkou (2). Proto je obraz y_1 předmětem (zdánlivým) pro čočku (2). Má od ní vzdálenost $a_2 = d - b_1 = f - 2f = -f$. Vzdálenost druhého obrazu, vytvořeného čočkou (2), od středu této čočky se určí ze vztahu (1). Je $b_2 = \frac{f}{2}$.

Z podobnosti trojúhelníků $\triangle F_1'A'B'$ a $\triangle F_1'F_2M$ vychází $\frac{y_2}{y} = \frac{\frac{f}{2}}{f}$, takže $y_2 = \frac{y}{2}$.

Obraz y_2 je skutečný ($b_2 > 0$), vzhledem k předmětu je převrácený, zmenšený. Má poloviční velikost předmětu a nachází se ve středu úsečky spojující středy čoček (2) a (3).

Tento skutečný obraz je skutečným předmětem pro čočku (3), od jejíhož středu má vzdálenost $a_3 = d - b_2 = \frac{f}{2}$, jak je možno zjistit i na obrázku. Ze vztahu (1) určíme vzdálenost třetího obrazu předmětu y od středu čočky (3) $b_3 = -f$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle F_2' A' B'$ a $\triangle F_2' F_3 B''$ vychází vztah $\frac{y_3}{y_2} = 2$, takže $y_3 = 2 y_2 = y$.

Výsledný obraz je zdánlivý ($b_3 < 0$), vzhledem k předmětu převrácený a stejně veliký. Nachází se v rovině σ_2.

b) Ze vztahu (1) určíme vzdálenost prvního obrazu y_1 předmětu y od středu čočky (1). Vychází $b_1 = \frac{3}{2} f$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle F_1' O_1 M_1$ a $\triangle F_1' O_2 M_2$ určíme poměr $\frac{y_1}{y} = \frac{1}{2}$, takže $y_1 = \frac{1}{2} y$.

Čočkou (1) se vytvoří skutečný ($b_1 > 0$) převrácený obraz y_1 ve vzdálenosti $b_1 = \frac{3}{2} f$ od čočky (1). Obraz je zmenšený, má velikost $y_1 = \frac{1}{2} y$.

Tento obraz leží v rovině σ_2 procházející středem čočky (2) a splývá se svým zdánlivým obrazem, vytvořeným touto čočkou. Je skutečným předmětem pro čočku (3), od jejíhož středu má vzdálenost $a_3 = d - b_2 = d = \frac{3}{2} f$. Ze vztahu (1) vychází $b_3 = 3f$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle F_3'A'B'$ a $\triangle F_3'O_3M_3$ určíme poměr $\frac{y_3}{y_1} = \frac{2f}{f} = 2$ a $y_3 = 2y_1 = y$.

Výsledný obraz je skutečný ($b_3 > 0$) a vzhledem k předmětu přímý. Nachází se ve vzdálenosti $3f$ od čočky (3), napravo od ní. Je stejně veliký jako předmět.

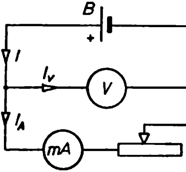
5. Z grafu závislosti svorkového napětí baterie na celkovém proudu z ní odebíraném určete elektromotorické napětí této baterie.

Pomůcky: Baterie, voltmetr známého vnitřního odporu, ampérmetr, posuvný reostat, spojovací vodiče.

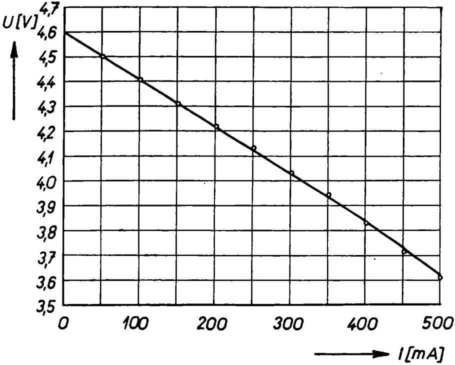
Postup: Navrhněte vhodné zapojení. Svorkové napětí baterie a proud měřte desetkrát při různém zatížení a naměřené hodnoty zaznamenejte do tabulky. Sestrojte graf závislosti svorkového napětí U na proudu I a určete z něho hodnotu elektromotorického napětí $\mathscr{E}$ baterie.

Řešení: Určuje se závislost svorkového napětí suché baterie na proudu z ní odebíraném. Proud byl měřen ampérmetrem s rozsahem do 600 mA, napětí voltmetrem s rozsahem do 6 V o odporu $R_v = 2\,650\ \Omega$, posuvný reostat měl rozsah do 430 Ω.

Chceme-li měřit závislost napětí baterie na cel-



Obr. 42 a



Obr. 42 b

kovém proudu z ní odebíraném, bude nejvýhodnější takové zapojení spotřebiče a měřicích přístrojů do obvodu, aby byl voltmetr zapojen přímo ke svorkám zdroje (obr. 42a). Při tomto způsobu zapojení zjišťujeme přímo svorkové napětí U, jehož závislost na proudu chceme určit.

Proud I odebíraný ze zdroje se větví do větve s voltmetrem (I_V) a do větve s ampérmetrem a reostatem (I_A). Celkový proud má velikost $I = I_V + I_A = I_A + \frac{U}{R_V}$, kde R_V značí známý odpor voltmetru.

Změříme-li tedy při různých hodnotách odporu R reostatu velikosti proudů I_A a napětí U a vypočítáme-li příslušné hodnoty proudů I_V, ze vztahu $I_V = \frac{U}{R_V}$ určíme snadno závislost $U = f(I)$.

Tabulka naměřených a vypočítaných hodnot

Měření čís.	I_A[mA]	U[V]	$I_V = \frac{U}{R_V}$[mA]	$I = I_A + I_V$ [mA]
1	50	4,50	1,70	52
2	100	4,41	1,66	102
3	150	4,32	1,63	152
4	200	4,22	1,59	202
5	250	4,13	1,56	252
6	300	4,03	1,52	302
7	350	3,94	1,49	351
8	400	3,83	1,45	401
9	450	3,72	1,41	451
10	500	3,61	1,36	501

Z tabulky je patrno, že hodnoty I_V ovlivňují výsledek měření jen velmi málo. Výsledek by byl téměř stejný, kdyby se hodnoty I_V vzhledem k hodnotám I_A zanedbaly.

Z hodnot uvedených v tabulce sestrojíme graf závislosti svorkového napětí zdroje na proudu odebíraném z něho. Grafem této závislosti je téměř přímka (obr. 42 b).

Protože elektromotorické napětí je rovno svorkovému napětí zdroje nezatíženého, je $\mathscr{E} = f(0)$. Prodloužíme-li tedy graf, až protne osu y, udává souřadnice y tohoto průsečíku velikost $\mathscr{E}$. Odůvodnění: Vztah mezi elektromotorickým a svorkovým napětím je vyjádřen rovnicí $\mathscr{E} = U + RI$, kde R značí odpor vnějšího obvodu a I proud, který obvodem prochází. Je-li $I = 0$, pak $\mathscr{E} = U$. Z grafu vychází $\mathscr{E} = 4{,}6$ V.

12. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

První kolo soutěže

1. Od vlaku úhrnné hmotnosti m, jedoucího stálou rychlostí v po vodorovné přímé trati, se odtrhl poslední vůz hmotnosti m_1 a po projetí dráhy d se zastavil.

V jaké vzdálenosti od vozu bude vlak v okamžiku, kdy se vůz zastavil, je-li tažná síla lokomotivy stálá, tření žádné části vlaku nezávisí na rychlosti a třecí síla je přímo úměrná hmotnosti pohybující se části vlaku?

Označení veličin: Kinetickou energii posledního vozu v okamžiku jeho odtržení označíme W_1, třecí sílu vozu po kolejích F_t, součinitele tření f, zpoždění odtrženého vozu a', tažnou sílu lokomotivy F, zrychlení vlaku po odtržení vozu a, dráhu ujetou vlakem po odtržení vozu s.

Řešení: Kinetická energie posledního vozu má v okamžiku, kdy se odtrhl, kinetickou energii $W_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2$ a spotřebuje se na překonávání třecí síly $F_t = f m_1 g = k m_1$ po dráze d, takže z rovnice $k m_1 d = \frac{1}{2} m_1 v^2$ vypočítáme

$$k = \frac{v^2}{2d}.$$

Vůz se zastaví po době t se zpožděním a'. Z rovnic $v - a' t = 0$ a $d = v t - \frac{1}{2} a' t^2$ vypočítáme

$$t = \frac{2d}{v}.$$

Tažná síla $F = k m$ lokomotivy je před odtržením vozu v rovnováze s třecí silou, jež brzdí pohyb celého vlaku o hmotnosti m. Po odtržení posledního vozu přemáhá stejná tažná síla jen třecí sílu $k (m - m_1)$, takže její část $k m_1 = m_1 . \frac{v^2}{2d}$ způsobuje zrychlení a vlaku pohybujícího se dále bez posledního vozu. Velikost zrychlení a vypočítáme z podmínky $(m - m_1)\, a = m_1 \frac{v^2}{2d}$.

Je tedy

$$a = \frac{m_1}{m - m_1} \frac{v^2}{2d}.$$

Za dobu t ujede vlak bez odtrženého vozu dráhu

$$s = vt + \frac{1}{2} at^2 = 2d + \frac{1}{2} \frac{m_1}{m - m_1} \frac{v^2}{2d} \frac{4d^2}{v^2} =$$

$$= 2d + \frac{m_1}{m - m_1} d .$$

Bude tedy hledaná vzdálenost mezi vlakem a vozem

$$l = s - d = d + \frac{m_1}{m - m_1} d = \frac{m}{m - m_1} d . \quad (1)$$

V okamžiku, kdy se odtržený vůz zastavil, má od něho vlak vzdálenost určenou výrazem (1). Protože ve výrazu (1) se nevyskytuje v, nezávisí tato vzdálenost na rychlosti, se kterou se vlak pohyboval při odtržení vozu.

2. Na rtuti plave kovový kvádr tak, že jeho boční stěny jsou kolmé k vodorovnému povrchu rtuti. Teplota celé soustavy (kvádr a rtuť) se zvýší z t_1 na t_2.

a) Určete, jak se změní výška části kvádru nad povrchem rtuti.

b) Vyjádřete podmínku, kdy kvádr při ohřátí z teploty t_1 na t_2 klesne hlouběji do rtuti a kdy vystoupí výše.

Úlohu řešte nejprve obecně a potom pro soustavy rtuť-ocel a rtuť-hliník.

Hustota rtuti při 0 °C je $\varrho_r = 13{,}6 \,.\, 10^3$ kg m^{-3}, hustota oceli $\varrho_0 = 7{,}80 \,.\, 10^3$ kg m^{-3}, hustota hliníku při téže teplotě je $\varrho_h = 2{,}69 \,.\, 10^3$ kg m^{-3}; součinitel teplotní objemové roztažnosti rtuti $\beta =$

$= 18{,}2 \,.\, 10^{-5}$ deg^{-1}, součinitel délkové teplotní roztažnosti oceli je $\alpha_0 = 12 \,.\, 10^{-6}$ deg^{-1} a hliníku $\alpha_h = 23{,}7 \,.\, 10^{-6}$ deg^{-1}; teplota $t_1 = 0\ °C$, $t_2 = 100$ °C.

Označení veličin: Výšku kvádru při teplotě 0 °C označíme d_0, d při teplotě t; h značí výšku části kvádru nad hladinou rtuti při teplotě t, h_1 při teplotě t_1, h_2 při teplotě t_2; S_0 je velikost podstavy kvádru při teplotě 0 °C, S při teplotě t, ϱ_0 značí hustotu materiálu kvádru při teplotě 0 °C, ϱ při teplotě t, σ_0 obecně hustotu kapaliny při teplotě 0 °C, σ při teplotě t, α značí součinitele teplotní délkové roztažnosti materiálu kvádru, β součinitele teplotní objemové roztažnosti kapaliny. Součinitel teplotní objemové roztažnosti materiálu kvádru je 3α. Dále označíme V_0 objem kvádru při teplotě 0 °C, V při teplotě t. Hmotnost kvádru se dá vyjádřit výrazy $m = V_0\, \varrho_0 = V\, \varrho$, takže

$$\varrho = \frac{V_0 \varrho_0}{V} = \frac{V_0 \varrho_0}{V_0\,(1 + 3\alpha t)} = \frac{\varrho_0}{1 + 3\alpha t}$$

Obdobně platí

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \beta t}\,.$$

Řešení: Podle Archimédova zákona platí při teplotě t pro plovoucí kvádr rovnice $S\, d\, \varrho\, g = S\,(d - h)\, \sigma\, g$ a po úpravě

$$h = d\left(1 - \frac{\varrho}{\sigma}\right) = d_0\,(1 + \alpha\, t)\left(1 - \frac{\varrho_0\,(1 + \beta t)}{\sigma_0\,(1 + 3\alpha t)}\right). \tag{1}$$

a) Zvýší-li se teplota kvádru z teploty t_1 na teplotu t_2, změní se výška části kvádru vynořené z kapaliny z hodnoty h_1 na hodnotu h_2 o $\triangle h = h_2 - h_1$. Po dosazení příslušných hodnot do vztahu (1) vychází

$$h_2 - h_1 = d_0 \left[(1 + \alpha t_2) \left(1 - \frac{\varrho_0 (1 + \beta t_2)}{\sigma_0 (1 + 3\alpha t_2)} \right) - \right.$$

$$\left. - (1 + \alpha t_1) \left(1 - \frac{\varrho_0 (1 + \beta t_1)}{\sigma_0 (1 + 3\alpha t_1)} \right) \right].$$

Po dalších úpravách tohoto výrazu vychází

$$\triangle h = h_2 - h_1 = d_0 (t_2 - t_1) \,.\, A \,, \qquad (2)$$

kde výraz A má hodnotu

$$A = \alpha - \frac{\varrho_0}{\sigma_0 (1 + 3\alpha t_1)(1 + 3\, \alpha t_2)}$$

$$[\beta - 2\alpha + \alpha\beta (t_1 + t_2) + 3\alpha^2 \beta t_1 t_2] =$$

$$= \alpha - \frac{\varrho_0 (\beta - 2\alpha)}{\sigma_0 (1 + 3\, \alpha\, t_1)(1 + 3\, \alpha\, t_2)} \,, \qquad (3)$$

neboť velikosti výrazů obsahujících součiny a mocniny velmi malých veličin α, β můžeme zanedbat.

Výška části kvádru nad povrchem kapaliny se při zvýšení teploty z t_1 na t_2 změní o Δh, určené obecně vztahem (2) a (3).

b) Je-li teplota t_2 větší než t_1, má součin $d_0 (t_2 - t_1)$ ve výrazu (2) hodnotu kladnou. Proto nabývá Δh kladné hodnoty, jestliže je $A > 0$, a záporné hodnoty, je-li $A < 0$.

Jestliže tedy výraz A, určený vztahem (3), má kladnou hodnotu, pak se výška části kvádru vynořené nad kapalinou při rostoucí teplotě zvětšuje, má-li výraz A hodnotu zápornou, ponořuje se kvádr při rostoucí teplotě hlouběji do kapaliny.

Dosadíme-li do výrazů (2) a (3) dané hodnoty příslušných veličin, pak vychází pro soustavu ocel-rtuť hodnota $\Delta h_0 \doteq - 8 \cdot 10^{-3} d_0$ a pro hliník a rtuť $\Delta h_h \doteq - 0{,}3 \cdot 10^{-3} d_0$.

Rozměrová zkouška: Protože součin αt a podíl $\frac{\varrho}{\sigma}$ jsou bezrozměrná čísla a součiny $\alpha \beta t$ a $\alpha^2 \beta t_1 t_2$ mají stejný rozměr deg^{-1}, má výraz A rozměr $[A] = \mathrm{deg}^{-1}$. Rozměr Δh je tedy $[\Delta h] = \mathrm{m\ deg\ deg}^{-1} = \mathrm{m}$.

Výška části kvádru nad povrchem rtuti se při zvýšení teploty z 0 °C na 100 °C sníží u ocelového kvádru asi o 8 ‰ a u hliníkového kvádru asi o 0,3 ‰ výšky, kterou má kvádr při teplotě 0 °C.

3. Dřevěná nádoba s pískem o celkové hmotnosti m_1 leží na vodorovné kovové desce. Střela hmotnosti m_2, směřující do těžiště nádoby, vletí ve vodorovném směru rychlostí v do nádoby a uvázne v ní. Nádoba se při tom posune o vzdálenost s.

a) Jak veliká je rychlost střely? Součinitel vlečného tření nádoby po desce je f.

b) Jaká část kinetické energie střely se přemění při zabrzdění střely v nádobě na jiné druhy energie, než je energie kinetická?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $m_1 = 25$ kg, $m_2 = 0{,}02$ kg, $s = 0{,}08$ m, $f = 0{,}25$.

Označení veličin: V okamžiku, kdy střela vnikne do nádoby s pískem, nabude tato nádoba, obsahující nyní i střelu, rychlosti u, posouvá se po kovové desce a koná práci A, neboť překonává třecí sílu F_t, působící při posouvání nádoby po kovové desce.

Kinetická energie W_2 střely před dopadem na stěnu nádoby se po vniknutí střely do nádoby částečně mění v kinetickou energii W_1 pohybující se nádoby, částečně v energie jiné, jež mají podle zákona zachování energie velikost $\Delta W = W_2 - W_1$. Podíl $\frac{\Delta W}{W_2}$ označíme p, tíhu nádoby i s vniknuvší střelou G.

Řešení: a) Protože střela uvázne v nádobě s pískem, jedná se o nepružný ráz. Ze zákona zachování hybnosti vychází pro rychlost u nádoby po zasažení střelou rovnice

$$m_2 v = (m_1 + m_2)\, u\,,$$

ze které vypočítáme $u = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v$.

Kinetická energie nádoby s pískem a se střelou

$$W_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1 + m_2} v^2 \quad (1)$$

se mění v mechanickou práci spotřebovanou na překonání třecí síly $F_t = f\,G = f\,(m_1 + m_2)\,g$, působící při posunování nádoby po desce. Nádoba vykoná při tomto pohybu práci

$$A = F_t\, s = f\,(m_1 + m_2)\, g\, s\,.$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$f\,(m_1 + m_2)\, g s = \frac{1}{2}\,\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}\,v^2\,.$$

Odtud vypočítáme hledanou rychlost

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\sqrt{2 f g s}\,. \tag{2}$$

Pro dané hodnoty vychází

$$v = \frac{25{,}02}{0{,}02}\sqrt{2\,.\,0{,}25\,.\,10\,.\,0{,}08}\;\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}}\sqrt{\mathrm{m\,s^{-2}m}} =$$

$$= 788\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Střela se při dopadu na stěnu nádoby pohybovala rychlostí 788 $\mathrm{m\,s^{-1}}$; obecně je tato rychlost určena výrazem (2).

b) Rozdíl kinetických energií střely před nárazem na nádobu a kinetické energie posunující se nádoby

$$W_2 - W_1 = \Delta\,W = \frac{1}{2}\,m_2\,v^2 - \frac{1}{2}\,\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}\,v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,m_2\,v^2\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,v^2 \tag{3}$$

udává hodnotu té části kinetické energie střely, která se změnila v jiné energie, než je kinetická energie posouvající se nádoby.

Podíl $p = \frac{\Delta W}{W_2}$ má hodnotu

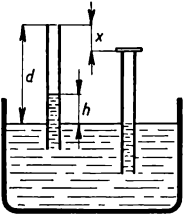
$$p = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \frac{2}{m_2 v^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{100\, m_1}{m_1 + m_2} \%. \tag{4}$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$p = \frac{100 \,.\, 25}{25{,}02} \% = 99{,}92 \% \,.$$

Na jiné energie než na kinetickou energii posouvající se nádoby se změnilo 99,92 % kinetické energie střely. Obecně je tato hodnota určena vztahem (4).

4. Voda vystoupí ve svislé kapiláře, ponořené do nádoby s vodou, do výšky h; neponořená část kapi-



Obr. 43

láry má délku d. Volný konec kapiláry uzavřeme a kapiláru ponoříme do vody tak hluboko, aby povrch vody v kapiláře byl ve stejné výši jako povrch vody v nádobě (obr. 43).

O jakou délku x je nutno kapiláru ponořit?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $d = 21$ cm, $h = 8{,}0$ cm, barometrický tlak $b = 10^5$ N m^{-2}, tíhové zrychlení $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

Označení veličin: Tlak v uzavřené kapiláře ponořené do vody tak hluboko, že povrch vody v kapiláře je ve stejné výši jako v nádobě, označíme p, objem vody v otevřené kapiláře V_0, V v uzavřené kapiláře po jejím ponoření do vody o délku x, hustotu vody $\varrho = 10^3$ kg m^{-3}, poloměr kapiláry r.

Předpokládáme, že voda dokonale smáčí stěny nádoby.

Řešení: V otevřené kapiláře vystoupí voda působením kapilárních sil do výšky h nad vodorovnou rovinu σ proloženou povrchem vody v široké nádobě. Vzduch nacházející se v kapiláře nad vodním sloupcem má objem $V_0 = \pi r^2 (d - h)$ a tlak b. V rovině σ je tedy tlak

$$p = b + h \varrho g . \qquad (1)$$

Uzavřeme-li volný konec kapiláry a ponoříme-li ji do vody hlouběji o takovou délku x, že povrch vody v kapiláře se nachází v rovině σ, zmenší se objem vzduchu v kapiláře na $V = \pi r^2 (d - x)$ a tlak vzroste na hodnotu p, určenou vztahem (1), neboť v obou případech musí být tlak na hladinu σ

stejný. Předpokládáme-li, že se teplota vzduchu po ponoření kapiláry nezmění, platí $p\,V = b\,V_0$, takže

$$p = b\,\frac{V_0}{V} = b\,\frac{d-h}{d-x}. \qquad (2)$$

Dosadíme-li do rovnice (2) za p hodnotu určenou vztahem (1), získáme rovnici

$$h\varrho g = b\left(\frac{d-h}{d-x} - 1\right) = b\,\frac{x-h}{d-x},$$

ze které vypočítáme

$$x = \frac{h\,(d\varrho g + b)}{h\varrho g + b}. \qquad (3)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$x = \frac{0{,}08\,(0{,}21\,.\,10^3\,.\,9{,}8 + 10^5)}{0{,}08\,.\,1000\,.\,9{,}8}\;\frac{\mathrm{m\,N\,m^{-2}m^2}}{\mathrm{N}} =$$

$$= 0{,}081\ \mathrm{m} = 8{,}1\ \mathrm{cm}.$$

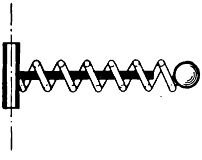
Kapiláru je nutno ponořit o délku 8,1 cm, jež je obecně určena výrazem (3).

5. Pružina je navlečena na tyč, která je připevněna kolmo k čepu. Jeden konec pružiny je připevněn k čepu, na druhém je upevněno těleso o hmotnosti *m*. Délka nezatížené pružiny je *d* (obr. 44). Napínáme-li ji tažnou silou F_0, prodlouží se o délku $\Delta\,l$. Soustava tyč, pružina a těleso vykonává otáčivý pohyb okolo svislé osy *o*. Hmotnost pružiny a tření mezi tyčí a pružinou zanedbáme.

a) Najděte vztah mezi prodloužením pružiny a úhlovou rychlostí, kterou se soustava otáčí okolo osy.

Vypočítejte prodloužení pružiny, je-li frekvence otáčivého pohybu f.

b) Při jaké frekvenci se pružina prodlouží na dvojnásobek?



Obr. 44

c) Jakou hodnotu musí mít frekvence, aby odstředivá síla působící na pružinu byla rovna n-násobku tíhy tělesa?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 0{,}01$ kg, $d = 0{,}2$ m, $\Delta l = 0{,}01$ m, $F_0 = 0{,}125$ N, $f = 5$ Hz, $n = 10$.

Označení veličin a dané hodnoty: Tuhost pružiny označíme k, úhlovou rychlost tělesa ω, frekvenci f, velikost odstředivé síly F, prodloužení pružiny obecně x. Tíhové zrychlení $g = 10 \mathrm{~m~s^{-2}}$, $\pi^2 \doteq 10$.

Řešení: a) Odstředivá síla, která působí prodloužení pružiny při otáčení tělesa hmotnosti m, má velikost $F = m\,\omega^2\,(d + x)$, neboť se těleso pohybuje na pružině prodloužené o délku x. Protože prodloužení pružiny je přímo úměrné velikosti deformující odstředivé síly, je $F = k\,x$, kde konstanta k značí tuhost pružiny. Protože však se pružina prodlouží silou F_0 o délku $\Delta\,l$, platí také vztah $F_0 = k\,\Delta\,l$, takže $k = \dfrac{F_0}{\Delta\,l}$. Platí tedy rovnice

$$m\,\omega^2(d + x) = \frac{F_0}{\Delta\,l}\,x,$$

ze které vypočítáme

$$x = \frac{m\,\omega^2 d\,\Delta\,l}{F_0 - m\,\omega^2\,\Delta\,l} = \frac{4\pi^2 f^2 m\,d\,\Delta\,l}{F_0 - 4\pi^2 f^2 m\,\Delta\,l}. \qquad (1)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$x = \frac{4\,.\,10\,.\,25\,.\,0{,}01\,.\,0{,}2\,.\,0{,}01}{0{,}125 - 4\,.\,10\,.\,25\,.\,0{,}01\,.\,0{,}01}\;\frac{\mathrm{s^{-2}\,kg\,m\,m}}{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}} =$$
$$= 0{,}8\ \mathrm{m}.$$

Výraz (1) udává vztah mezi prodloužením pružiny a úhlovou rychlostí, kterou se soustava otáčí okolo osy. Zároveň udává obecně velikost prodloužení pružiny při frekvenci f. Při frekvenci $5\ \mathrm{s^{-1}}$ se pružina prodlouží o 0,8 m.

b) Má-li se pružina prodloužit na dvojnásobek, prodlouží se o délku d. Z upraveného vztahu (1) potom plyne

$$d = \frac{m\,d\,\Delta\,l\,\omega^2}{F_0 - m\,\omega^2\,\Delta\,l}.$$

Z této rovnice vypočítáme

$$\omega = \sqrt{\frac{F_0}{2m\,\Delta\,l}} \quad \text{a} \quad f = \sqrt{\frac{F_0}{8\pi^2 m\,\Delta\,l}}. \qquad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vychází:

$$f = \sqrt{\frac{0{,}125}{8 \,.\, 10 \,.\, 0{,}01 \,.\, 0{,}01}} \sqrt{\frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{kg m}}} = 3{,}9\ \text{s}^{-1}.$$

Pružina se prodlouží na dvojnásobek při frekvenci 3,9 s^{-1} určené obecně vztahem (2).

c) Má-li se odstředivá síla rovnat n-násobku tíhy tělesa, pak je

$$F = k\,x = \frac{F_0 x}{\Delta\, l} = n\,m\,g,$$

takže

$$x = \frac{n\,m\,g\,\Delta\, l}{F_0}\,.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (1), vypočítáme

$$f = \sqrt{\frac{ngF_0}{4\pi^2\,(n\;mg\Delta\, l + F_0 d)}}\,. \tag{3}$$

Pro dané hodnoty vyjde:

$$f = \sqrt{\frac{10 \,.\, 10 \,.\, 0125}{4 \,.\, 10(10 \,.\, 0{,}01 \,.\, 10 \,.\, 0{,}01 + 0{,}125 : 0{,}2)}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{m s}^{-2}\ \text{kg m s}^{-2}}{\text{kg m s}^{-2}\ \text{m}}} = 3\ \text{s}^{-1}.$$

Odstředivá síla působící na pružinu se rovná n-násobku tíhy tělesa, jestliže frekvence rotačního pohybu tělesa splňuje vztah (3); pro dané hodnoty vyjde 3 s^{-1}.

6. Dvě stejné válcovité nádoby A, B o výšce h a o podstavě velikosti S jsou postaveny vedle sebe na vodorovné desce a jsou spojeny těsně u dna krátkou trubičkou. Nádoba B je uzavřená, do otevřené nádoby A nalijeme vodu.

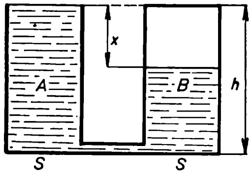
a) Kolik vody je možno maximálně do takto postavených nádob nalít, považujeme-li teplotu t_1 soustavy za stálou?

b) Na jakou hodnotu t_2 je nutno zvýšit teplotu soustavy, aby vzduch úplně vytlačil vodu z nádoby B?

Tlak vodních par, teplotní roztažnost vody a nádob nebudeme uvažovat.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $h = 0,8$ m, $S = 10^{-2}$ m^2, $t_1 = 20$ °C. Barometrický tlak $b = 10^5$ N m^{-2}, tíhové zrychlení $g = 9,8$ m s^{-2}.

Označení veličin a dané hodnoty: Objem V_0 obou nádob je stejný, hustota vody $\varrho = 10^3$ kg m^{-3}. Za stavu, kdy bude nádoba A zcela naplněna vodou, označíme výškový rozdíl povrchů vody v obou nádobách x (obr. 45), tlak vzduchu v nádobě B bude



Obr. 45

p_1, objem vzduchu v této nádobě V_1. Při ohřátí soustavy obou nádob na teplotu t_2 bude objem vzduchu V_2 v nádobě B roven V_0 a jeho tlak bude p_2. Teplotě $t_1 = 20$ °C odpovídá absolutní teplota $T_1 = 293$ °K ($t_1 \triangleq T_1$) a obdobně $t_2 \triangleq T_2$.

Řešení: Objem vzduchu v nádobě B je na počátku $V_0 = S\,h$, jeho tlak je roven barometrickému tlaku b. Po naplnění nádoby A vodou zmenší se objem vzduchu v nádobě B na $V_1 = S\,x$ a tlak vzroste na p_1. Protože jde o děj izotermický, platí $p_1 V_1 = b\,V_0$, takže

$$p_1 = b\frac{V_0}{V_1} = b\,\frac{h}{x}\,. \qquad (1)$$

Zvětšení tlaku vzduchu v nádobě B při naplnění nádoby A vodou až po okraj je rovno hydrostatickému tlaku sloupce vody o výšce x. Proto je

$$p_1 = b + x\,\varrho\,g\,. \qquad (2)$$

Po dosazení za p_1 z výrazu (1) do vztahu (2) dostaneme rovnici $b + x\,\varrho\,g = \dfrac{b\,h}{x}$ a po úpravě

$$g\,\varrho\,x^2 + b\,x - b\,h = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4g\,\varrho\,b\,h}}{2\,\varrho\,g} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\,\varrho\,g}\,.$$

Protože $D > 0$, jsou oba kořeny matematicky reálné. Protože však $D > b^2$, je kořen $x_1 > 0$ a $x_2 < < 0$. Kořen x_2 není tedy fyzikálně možný. Proto je

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4g\varrho bh}}{2g\varrho}\,. \qquad (3)$$

a) Protože objem vzduchu v nádobě B je $V_1 = S\,x$, je možno do soustavy obou nádob nalít vodu (zanedbáme-li objem spojovací trubice) o objemu

$$V = 2\,V_0 - V_1 = S\,(2\,h - x) =$$
$$= S\,\frac{4\,h\,\varrho\,g + b - \sqrt{b^2 + 4\varrho\,g\,b\,h}}{2\varrho\,g}\,. \qquad (4)$$

Pro dané hodnoty je

$$V = 10^{-2}\,.$$
$$.\,\frac{4\,.\,0{,}8\,.\,10^3\,.\,9{,}8 + 10^5 - \sqrt{10^{10} + 4\,.\,10^5\,.\,0{,}8\,.\,10^3\,.\,9{,}8}}{2\,.\,10^3\,.\,9{,}8}$$
$$\mathrm{m}^3 = 8{,}4\,.\,10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 8{,}4\,\mathrm{dm}^3.$$

Výraz (4) je rozměrově správný, neboť

$$\frac{\mathrm{m^2 m\,kg\,m^{-3} m\,s^{-2}}}{\mathrm{kg\,m^{-3} m\,s^{-2}}} = \mathrm{m}^3\,.$$

Do soustavy obou nádob je možno nalít maximálně 8,4 dm^3 vody. Tento objem je určen obecně vztahem (4).

b) Při zvýšení teploty na t_2 bude mít vzduch v nádobě B objem $V_2 = V_0$ a tlak se zvětší na

$$p_2 = b + h\,\varrho\,g\,. \qquad (5)$$

Podle stavové rovnice dokonalého plynu platí pro počáteční a konečný stav vztah

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{b V_0}{T_1}\,.$$

Užijeme-li vztahu (5) a zároveň vyjádříme, že $V_2 = V_0$, získáme rovnici

$$T_2 = T_1\,\frac{b + h\varrho g}{b} = T_1\left(1 + \frac{h\varrho g}{b}\right). \qquad (6)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (6) vyjde $T_2 = 293\left(1 + \frac{0,8 \,.\, 10^3 \,.\, 9,8}{10^5}\right)$ °K, neboť zlomek $\frac{h\varrho g}{b}$ je bezrozměrné číslo. Výpočtem vychází

$$T_2 = 316\ °\mathrm{K} \triangleq 43\ °\mathrm{C}\,.$$

Má-li vzduch zcela vytlačit vodu z nádoby B, je nutno zvýšit jeho teplotu na 43 °C. Obecně je tato teplota určena vztahem (6).

7. Kompresor dodává do chladiče objem V vzduchu za minutu při stálém tlaku p a teplotě ϑ_1. Vzduch se ochlazuje ve spirálovém trubkovém chladiči vodou. Teplota vzduchu vystupujícího z chladiče je ϑ_2. Voda vstupující do chladiče má teplotu ϑ_3, při výstupu z chladiče má teplotu $\vartheta_4 > \vartheta_3$. Jak veliký objem vody se spotřebuje za dobu t v chladiči?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $V = 1,5\ \mathrm{m}^3$, $p = 8$ atm, $\vartheta_1 = 207$ °C, $\vartheta_2 = 47$ °C, $\vartheta_3 = 12$ °C, $\vartheta_4 = 28$ °C, $t = 1$ hodina. Měrné teplo vzduchu při stálém tlaku $c_p = 0,24\ \mathrm{kcal\ kg}^{-1}\ \mathrm{deg}^{-1}$, poměrná molekulová hmotnost vzduchu je $\mu = 28,84$.

Označení veličin a dané hodnoty: Kompresor dodává do chladiče za minutu množství vzduchu objemu V. Za dobu $t = 60$ min. projde tedy chladičem objem $V' = V\,t$ vzduchu, který má hmotnost $m' = V'\,\varrho_1 = V'_0\,\varrho_0$, kde ϱ_1 značí hustotu vzduchu při teplotě T_1 a tlaku $p = 8$ atm, ϱ_0

hustotu vzduchu při teplotě $T_0 = 273$ °K a tlaku $p_0 = 1$ atm $= 1{,}01325 \,.\, 10^5$ N m^{-2}; V_0' je objem vzduchu hmotnosti m' při teplotě T_0 a tlaku p_0. Kilomol dokonalého plynu má kilomolovou hmotnost $M_k = \mu$ kg kmol^{-1}, kde μ značí jeho poměrnou molekulovou hmotnost. Univerzální plynová konstanta je $R = 8{,}317 \,.\, 10^3$ J deg^{-1} kmol^{-1}; teplotě ϑ_1 odpovídá v Kelvinově teplotní stupnici teplota $T_1 = 480$ °K.

Hmotnost vody, která se v chladiči spotřebuje za hodinu, označíme m_1 a její objem V_1; její hustota $\varrho = 10^3$ kg m^{-3}. Měrné teplo vody $c = 1$ kcal kg^{-1} deg $^{-1}$.

Řešení: Zavedeme-li absolutní teplotu, má stavová rovnice dokonalého plynu tvar

$$\frac{pV'}{T_1} = \frac{p_0 V_0'}{T_0} = \frac{p_0 m'}{\varrho_0 T_0} = B\,. \qquad (1)$$

Hodnota konstanty B závisí podle vztahu (1) jen na hmotnosti m' vzduchu. Pro jeden kilomol dokonalého plynu má konstanta B hodnotu, která se značí R a nazývá se univerzální plynová konstanta. Pro jeden kg plynu má tedy B hodnotu $\dfrac{R}{M_k}$ a pro hmotnost m' je $B = \dfrac{m'}{M_k} R$. Rovnici (1) můžeme proto psát ve tvaru

$$\frac{pV'}{T_1} = \frac{m'}{M_k} R\,, \qquad (2)$$

odkud určíme

$$m' = \frac{pVtM_k}{RT_1}.$$

Toto množství vzduchu se ochladí při stálém tlaku z teploty ϑ_1 na teplotu ϑ_2 a vydá při tom teplo

$$Q = c_p m' (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{pVtM_k}{RT_1} c_p (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

kterým se ohřeje množství vody o hmotnosti m_1 z teploty ϑ_3 na ϑ_4. Podle zákona zachování tepla (energie) platí

$$\frac{pVtM_k c_p (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{RT_1} = cV_1\varrho (\vartheta_4 - \vartheta_3).$$

Odtud vypočítáme

$$V_1 = \frac{pVtM_k c_p (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{RT_1 c\varrho(\vartheta_4 - \vartheta_3)}, \tag{3}$$

Rozměrová zkouška:

$$[V_1] =$$

$$\frac{\mathrm{N\,m^{-2}m^3\,min^{-1}\,min\,kg\,kmol^{-1}kcal\,kg^{-1}\,deg^{-1}\,deg}}{\mathrm{N\,m\,deg^{-1}\,kmol^{-1}\,deg\,kcal\,kg^{-1}\,deg^{-1}\,kg\,m^{-3}\,deg}} =$$

$$= \mathrm{m^3}.$$

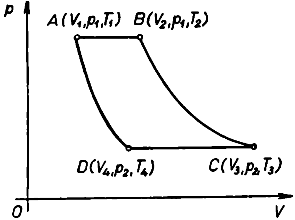
Pro dané hodnoty vyjde

$$V_1 = \frac{8\,.\,1{,}01325\,.\,10^5\,.\,1{,}5\,.\,60\,.\,28{,}84\,.\,0{,}24\,.\,160}{8{,}317\,.\,10^3\,.\,480\,.\,1\,.\,16}$$

$$\mathrm{m^3} = 1{,}26\ \mathrm{m^3}.$$

V chladiči se spotřebuje za hodinu 1,26 m^3 vody. Tato hodnota je obecně určena vztahem (3).

8. Stanovte účinnost kruhového děje složeného z těchto změn (obr. 46):
1. izobarické expanze,
2. adiabatické expanze,
3. izobarické komprese,
4. adiabatické komprese.
Účinnost porovnejte s účinností Carnotova cyklu.



Obr. 46

Označení veličin: Úlohu budeme řešit pro kilomol dokonalého plynu, ve kterém probíhají jen vratné děje. Proto platí v každém okamžiku stavová rovnice dokonalého plynu pro příslušný děj, ze které se dá v každém okamžiku určit ze známých dvou stavových veličin třetí.

Univerzální plynovou konstantu budeme značit R, kilomolové teplo při stálém objemu C_v, při stálém tlaku C_p. Vztah mezi nimi udává Mayerova rovnice

$C_p - C_v = R$ a jejich podíl Poissonova konstanta

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_v}. \tag{1}$$

Účinnost uvažovaného kruhového děje označíme η, účinnost Carnotova kruhového děje, pracujícího mezi stejnými krajními teplotami, jako má uvažovaný děj, označíme η'.

Rozpíná-li se plyn, koná práci ($A > 0$), je-li vnějšími silami stlačován, přijímá práci, a práce plynem vykonaná $A < 0$. Jestliže plyn během děje přijímá teplo, označujeme toto teplo kladně ($\Delta Q > 0$), vydává-li teplo, je hodnota přijatého tepla záporná ($\Delta Q < 0$).

Při izobarickém ději platí tyto vztahy:

$$\Delta Q = C_p (T_2 - T_1),$$
$$A = p (V_2 - V_1) = R (T_2 - T_1),$$
$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{2}$$

kde ln značí přirozený logaritmus, S_2 entropii na konci děje, S_1 entropii na počátku děje.

Při adiabatickém ději pracovní plyn nepřijímá teplo ani je nevydává, jeho tlak se mění z hodnoty p_1 na hodnotu p_2. Pro změny ostatních veličin platí tyto vztahy:

$$\Delta Q = 0, \quad A = -C_v (T_2 - T_1), \quad S_2 - S_1 = 0. \tag{3}$$

Řešení: Při prvním ději přijímá plyn z ohřívače tolik tepla ΔQ_1, že jeho teplota vzroste při stálém tlaku p_1 z hodnoty T_1 na T_2. Přitom se rozpíná z objemu V_1 na V_2, který se dá určit ze stavové rovnice, a koná práci A_1. Podle upravených vztahů (2) platí:

$$\Delta Q_1 = C_p (T_2 - T_1), \quad A_1 = R (T_2 - T_1),$$
$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{4}$$

Při tomto ději plyn přijímá teplo ($\Delta Q_1 > 0$), jeho teplota roste ($T_2 > T_1$) a koná práci ($A_1 > 0$). (4a)

V průběhu druhého děje je plyn od okolí tepelně izolován, takže ani nepřijímá, ani nevydává teplo. Zmenšíme-li jeho tlak na p_2 a teplotu na T_3, změní se jeho objem na hodnotu V_3, která se dá určit ze stavové rovnice. Entropie nabude hodnoty S_3. Plyn koná práci na účet své vnitřní energie. Podle upravených vztahů (3) platí:

$$\Delta Q_2 = 0, \quad A_2 = - C_v (T_3 - T_2), \quad S_3 - S_2 = 0. \tag{5}$$

Protože při tomto ději je $T_3 < T_2$, je $A_2 > 0$. (5a) Plyn koná práci.

Ve třetím ději je plyn působením vnější síly udržován na stálém tlaku p_2 a zároveň je ochlazován v chladiči tak, že jeho teplota nabude takové hodnoty T_4, aby na konci čtvrtého děje dosáhla při tlaku p_1 hodnoty $T_5 = T_1$. Objem plynu je na konci třetího děje V_4 a entropie S_4. Při tomto ději plyn přijímá práci A_3. Podle upravených vztahů (2) platí:

$$\Delta Q_3 = C_p (T_4 - T_3)\,, \quad A_3 = R (T_4 - T_3)\,,$$

$$S_4 - S_3 = C_p \ln \frac{T_4}{T_3}\,. \tag{6}$$

Protože

$$A_3 < 0, \text{ je } T_4 < T_3 \text{ a } \Delta Q_3 < 0. \tag{6a}$$

Plyn tedy odevzdává teplo chladiči.

Při čtvrtém ději je plyn proti okolí tepelně izolován a působením vnější síly je dále stlačován, až jeho tlak dosáhne hodnoty p_1 a teplota hodnoty $T_5 = T_1$. Na konci tohoto děje bude mít plyn objem V_5 a entropii S_5. Podle upravených vztahů (3) platí

$$\Delta Q_4 = 0\,, \; A_4 = -C_v (T_1 - T_4)\,, \; S_5 - S_4 = 0\,. \tag{7}$$

Protože při tomto ději plyn práci přijímá, je $A_4 < < 0$, a proto je $T_4 < T_1$. (7a)

Jestliže všechny čtyři děje, tvořící vyšetřovaný kruhový děj, probíhají vratně, pak $S_5 = S_1$ a také $V_5 = V_1$.

Entropie je veličina skalární. Proto je celková změna entropie za celý děj $\Delta S = (S_2 - S_1) + + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_3) + (S_5 - S_4) = S_5 - S_1$. (8)

Je-li uvažovaný děj kruhový, je $\Delta S = S_5 - S_1 = = 0$. Dosadíme-li v rovnici (8) za výrazy $S_2 - S_1$, $S_3 - S_2$, $S_4 - S_3$ a $S_5 - S_4$ příslušné hodnoty z rovnic (4), (5), (6) a (7), dostaneme po úpravě rovnici

$$\ln \frac{T_4}{T_3} + \ln \frac{T_2}{T_1} = 0\,,$$

ze které vychází

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}. \qquad (9$$

Aby uvažovaný děj byl dějem kruhovým, musí být splněna podmínka vyjádřená rovnicí (9).

Účinnost η můžeme určit dvěma způsoby:

a) Ve druhém a čtvrtém ději, které jsou adiabatické, plyn nepřijímá ani nevydává teplo. Přijímá jen v ději prvním teplo ΔQ_1. Část tohoto tepla ΔQ_3 odevzdá ve třetím ději chladiči, zbytek $\Delta Q_1 + \Delta Q_3$ ($\Delta Q_3 < 0$) se změní v rovnomocnou práci. Proto je účinnost vyšetřovaného kruhového děje určena poměrem

$$\eta = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_3}{\Delta Q_1} = \frac{C_p (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)}{C_p (T_2 - T_1)} =$$

$$= 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{\dfrac{T_3}{T_4} - 1}{\dfrac{T_2}{T_1} - 1} \cdot \frac{T_4}{T_1}.$$

Podle vztahu (9) je

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ a proto je}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_1}. \qquad (10)$$

b) Během uvažovaného kruhového děje vykoná plyn celkovou práci

$$
\begin{aligned}
A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= \\
= R(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) &+ \\
+ C_v(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) &= \\
= C_p(T_2 - T_1 + T_4 - T_3), \text{ neboť } C_v + R = C_p &.
\end{aligned}
$$

Je tedy účinnost

$$\eta = \frac{A}{\Delta Q_1} = \frac{C_p(T_2 - T_1 + T_4 - T_3)}{C_p(T_2 - T_1)},$$

což je hodnota shodná s hodnotou určenou při řešení způsobem a).

Účinnost uvažovaného kruhového děje je určena vztahem (10).

Podle vztahů (4a) a (7a) je $T_2 > T_1 > T_4$ a ze vztahů (5a) a (6a) vychází $T_2 > T_3 > T_4$. Z těchto nerovností je patrno, že při vyšetřovaném ději pracuje dokonalý plyn vratně mezi krajními teplotami T_4 a T_2 ($T_4 < T_2$). Účinnost Carnotova kruhového děje pracujícího mezi stejnými krajními teplotami je $\eta' = 1 - \frac{T_4}{T_2}$.

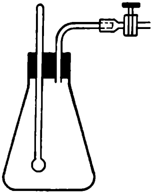
Protože $T_2 > T_1$, je $\frac{T_4}{T_1} > \frac{T_4}{T_2}$, a proto je $\eta < \eta'$.

Účinnost uvažovaného kruhového děje je menší než účinnost Carnotova cyklu, jestliže dokonalý plyn pracuje v obou cyklech mezi stejnými krajními teplotami.

9. Určete součinitele teplotní objemové roztažnosti vzduchu.

Potřeby: Skleněná baňka (asi 250 cm^3), gumová zátka s dvěma otvory, teploměr, skleněná trubička ohnutá do pravého úhlu s gumovou hadičkou a tlačkou, váhy, nádoba s horkou vodou, vařič, větší skleněná nádoba se studenou vodou.

Návod: 1. Skleněnou baňku uzavřete gumovou zátkou, kterou prochází teploměr a skleněná trubička s hadičkou a tlačkou (obr. 47). Tlačku necháte otevřenou a zvážíte baňku s příslušenstvím. Její hmotnost je m_1.



Obr. 47

2. Baňku ponoříte do teplé vody až po zátku a počkáte, až se teplota vzduchu v baňce ustálí. Zaznamenáte příslušný údaj t_1 teploměru a potom uzavřete tlačku.

3. Baňku ponoříte do nádoby se studenou vodou hrdlem obráceným dolů a otevřete tlačku. Voda vnikne do baňky, neboť po ochlazení se v ní zmenšil tlak vzduchu. Když se ustálí teplota, zaznamenáte

si její hodnotu t_2. Potom uvedete baňku, stále ponořenou hrdlem pod hladinu vody v nádobě, do takové polohy, aby povrchy vody v baňce i v nádobě byly ve stejné rovině, a uzavřete tlačku. Jaký tlak bude mít po uzavření tlačky vzduch v baňce? Co udává objem vody, která vnikla do baňky?

4. Baňku vyjmete z vody, osušíte a zvážíte. Naměřenou hmotnost označíte m_2.

5. Baňku s celým příslušenstvím zcela naplníte vodou z nádoby, osušíte ji a znovu zvážíte. Naměřenou hmotnost označíte m_3. Teplota vody t_2' v baňce se bude lišit jen velmi málo od teploty t_2, takže platí $t_2' \doteq t_2$.

6. Za teploty t_1 měl horký vzduch v baňce objem

$$V_1 = \frac{m_3 - m_1}{\varrho}, \tag{1}$$

kde ϱ značí hustotu vody za teploty t_2. Odůvodněte.

Totéž množství vzduchu mělo po ochlazení na teplotu t_2 objem

$$V_2 = \frac{m_3 - m_2}{\varrho}. \tag{2}$$

Odůvodněte.

Poměr

$$\frac{V_1}{V_2} = k = \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2}. \tag{3}$$

Vzduch objemu V_1, uzavřený v baňce při teplotě t_1, změnil po ochlazení na teplotu t_2 svůj objem na V_2 izobaricky. Odůvodněte.

Pokládáme-li vzduch za dokonalý plyn, pak platí

$V_1 = V_0 (1 + \gamma t_1)$ a $V_2 = V_0 (1 + \gamma t_2)$. Z těchto dvou rovnic určete se zřetelem ke vztahu (3)

$$\gamma = \frac{k - 1}{t_1 - kt_2} \,. \tag{4}$$

7. Dosaďte do rovnic (3) a (4) naměřené hodnoty a vypočítejte γ.

Provedení: Baňku upravenou k měření podle obr. 47, obsahující jen vzduch, zvážíme při otevřené tlačce. Její hmotnost je

$$m_1 = 0{,}1641 \text{ kg} \,.$$

Potom baňku ponoříme do horké vody až po zátku. Vzduch v baňce se otepluje, rozpíná se a uniká z baňky tak dlouho, dokud se jeho teplota nevyrovná s teplotou horké vody. Jakmile se to stane, přestane teploměr ukazovat zvyšování teploty. Za tohoto stavu si zaznamenáme jeho údaj

$$t_1 = 55{,}5 \text{ °C} \,,$$

který označuje teplotu vzduchu vyplňujícího celý objem V_1 baňky při tlaku rovném barometrickému tlaku. Potom uzavřeme tlačku a baňku s ohřátým vzduchem ponoříme do nádoby se studenou vodou hrdlem obráceným dolů a otevřeme tlačku. Vzduch v baňce se začne ochlazovat, zmenšuje se jeho tlak a působením tlaku vnějšího vzduchu vniká voda do baňky tak dlouho, dokud teplota a tlak vzduchu v baňce nedosáhnou takových hodnot, jaké mají tyto veličiny v okolním prostředí, tj. dokud teplota vzduchu v baňce nenabude stejné hodnoty, jakou má studená lázeň, a dokud jeho tlak se nevyrovná s barometrickým tlakem. Počkáme tedy, až teploměr přestane ukazovat změnu teploty a uvedeme baňku do takové polohy, aby povrchy vody v nádobě s chladicí lázní a v baňce byly ve stejné vodorovné rovině. Tím docílíme toho, že tlak vzduchu v baňce dosáhne téže hodnoty, jakou má barometrický tlak. Za tohoto stavu zjistíme teplotu vzduchu

$$t_2 = 12{,}5\ °\mathrm{C}$$

v baňce a tlačku uzavřeme.

Označíme-li V_2 objem vzduchu obsaženého v baňce za tohoto stavu, vnikla do baňky voda o objemu $V = V_1 - V_2$.

Po vyjmutí ze studené lázně baňku osušíme a zvážíme. Její hmotnost má nyní hodnotu

$$m_2 = 0{,}237\,2\ \mathrm{kg}\,.$$

Potom naplníme vodou o teplotě t_2 celou baňku a znovu ji zvážíme. Její hmotnost je nyní

$$m_3 = 0{,}7218\ \mathrm{kg}\,.$$

Rozdíl $m_3 - m_1$ udává hmotnost vody téhož objemu V_1, jako má baňka. Objem baňky tedy určíme ze vztahu

$$V_1 = \frac{m_3 - m_1}{\varrho}\,, \qquad (1)$$

kde ϱ značí hustotu vody o teplotě t_2.

Za stavu, kdy baňka měla hmotnost m_2, nacházel se v ní kromě vody vzduch o objemu V_2. Po nahrazení tohoto objemu vzduchu vodou teploty t_2 nabyla baňka hmotnosti m_3. Proto platí

$$V_2 = \frac{m_3 - m_2}{\varrho}\,. \qquad (2)$$

Poměr $\frac{V_1}{V_2}$ označíme k. Pak platí

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2}. \qquad (3)$$

Protože vzduch v baňce, který má při barometrickém tlaku b a teplotě t_2 objem V_2, měl při teplotě t_1 a témže tlaku b objem V_1, je změna stavu plynu izobarická, a proto platí

$$V_1 = V_0 (1 + \gamma t_1) \text{ a } V_2 = V_0 (1 + \gamma t_2),$$

kde V_0 značí objem uvažovaného množství vzduchu za teploty 0 °C a za tlaku b a γ součinitele teplotní objemové roztažnosti vzduchu. Po dosazení posledních dvou výrazů do vztahu (3) dostaneme rovnici

$$\frac{1 + \gamma t_1}{1 + \gamma t_2} = \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2},$$

z níž vypočítáme

$$\gamma = \frac{k - 1}{t_1 - k t_2}. \qquad (4)$$

Určíme

$$k = \frac{0{,}7218 - 0{,}1641}{0{,}7218 - 0{,}2373} = 1{,}151$$

a vypočítáme ze vztahu (4)

$$\gamma = \frac{0{,}151}{55{,}5 - 14{,}39} \text{ deg}^{-1} = 0{,}003\,673 \text{ deg}^{-1}.$$

Řešení úloh druhého kola

1. Jakou nejmenší silou musíme působit na píst stříkačky o průměru d, má-li voda dostříknout do vzdálenosti l na vodorovné rovině σ, vedené místem, ve kterém je ústí stříkačky?

Průměr výtokového otvoru je d_1.

Počítejte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 5$ cm, $l = 50$ m, $d_1 = 5$ mm.

Předpokládáme, že voda je dokonalou kapalinou. Odpor vzduchu zanedbáváme.

Označení veličin: Voda má vystřikovat do vzdálenosti l v rovině σ působením nejmenší tlakové síly působící na píst stříkačky. Musí tedy opouštět ústí stříkačky pod úhlem $\alpha = 45°$ rychlostí, kterou označíme v_0. Této rychlosti dosáhne, bude-li tlak vody ve stříkačce o

$$\Delta p = \frac{1}{2} \varrho_0 v_0^2 \qquad (1)$$

větší, než je barometrický tlak. Hydrostatický tlak ve stříkačce zanedbáváme. Veličina $\varrho_0 = 10^3$ kg m^{-3} značí hustotu vody. Plochu pístu stříkačky označíme S, tlakovou sílu působící na píst F, tíhové zrychlení $g = 10$ m s^{-2}.

Řešení: Částice vody vystřikující z ústí stříkačky budou konat šikmý vrh. Je to pohyb složený ze dvou pohybů k sobě kolmých, z rovnoměrného pohybu ve směru vodorovném, jehož rychlost je $v_x = v_0 \cos \alpha$, a ze svislého vrhu vzhůru, který má počáteční rychlost $v_y = v_0 \sin \alpha$. Dobu, za kterou částice vody opouštějící ústí stříkačky dopadne na rovinu σ, určíme z rovnice $v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0$. Kořen $t_1 = 0$ udává dobu, kdy částice opouštěla ústí stříkačky, a druhý kořen

$$t_2 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

určuje dobu, kdy částice dopadne na rovinu σ. Místo dopadu je od ústí stříkačky vzdáleno

$$s = v_0 t_2 \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Hodnoty l dosáhne s pro úhel $\alpha = 45°$, takže $l = \frac{v_0^2}{g}$

a
$$v_0^2 = lg. \tag{2}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do výrazu (l), vychází pro přetlak Δp hodnota $\Delta p = \frac{1}{2} \varrho_0 l g$. Tlaková síla působící na píst má velikost

$$F = S\Delta p = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \varrho_0 l g = \frac{1}{8} \pi d^2 l \varrho_0 g. \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot vychází

$$F =$$
$$= \frac{1}{8} 3{,}14 \,.\, 25 \,.\, 10^{-4} \,.\, 50 \,.\, 10^3 \,.\, 10 \text{ m}^2 \text{m kg m}^{-3} \text{m s}^{-2} =$$
$$= \frac{625 \,.\, 3{,}14}{4} \text{ N} = 490{,}6 \text{ N}.$$

Má-li voda dostříknout do vzdálenosti $l = 50$ m na vodorovné rovině σ, musíme působit na píst stříkačky nejmenší silou 480,6 N. Obecně je tato síla určena vztahem (3).

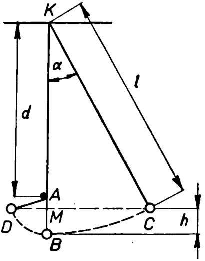
Poznámka: Velikost tlakové síly není závislá na šířce d_1 výtokového otvoru; jeho údaj je tedy pro řešení úlohy zbytečný. Měl by význam, kdyby se mělo vypočítat, jakou rychlostí v se má posunovat ve stříkačce píst při působení síly F. Z rovnice kontinuity $\frac{1}{4}\pi d^2 v = \frac{1}{4}\pi d_1^2 v_0$ vychází pro tuto rychlost hodnota

$$v = v_0 \cdot \frac{d_1^2}{d^2} = \frac{d_1^2}{d^2}\sqrt{lg}\,.$$

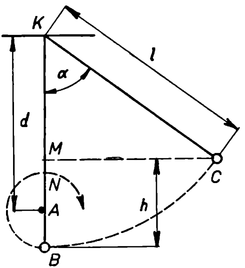
2. Malá kovová kulička je zavěšena na lehkém nepružném vláknu délky l. V klidové poloze se vlákno dotýká zarážky v bodě A, umístěné ve vzdálenosti d pod závěsným bodem K (obr. 48 a, b). Kuličku vychýlíme o malý úhel α z rovnovážné polohy, takže se přemístí z polohy B do bodu C. Potom ji uvolníme.

a) Vypočítejte dobu kmitu tohoto kyvadla.

b) Jak veliký musí být úhel α, aby se po nárazu vlákna na zarážku při daných hodnotách l a d kulička pohybovala po kružnici se středem A?



Obr. 48 a



Obr. 48 b

Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 1{,}44$ m, $d = 1{,}19$ m, tíhové zrychlení $g = 9{,}81$ m s^{-2}, $\pi^2 \doteq 9{,}81$.

Označení veličin: Zarážka umístěná v bodě A je vzdálena od rovnovážné polohy B kuličky kyvadla o $AB = l - d$. Kulička vychýlená z rovnovážné polohy do krajní polohy C se nachází ve vodorovné rovině σ, která má od bodu B vzdálenost $BM = h$, a má vzhledem k rovnovážné poloze potenciální energii tíhovou $W_p = m g h$. Podle zákona zachování energie vystoupí kulička po ukončení poloviny kmitu do bodu D ležícího v téže rovině σ jako bod C a má v této poloze stejně velikou potenciální energii tíhovou jako v bodě C.

Bod M je průsečík roviny σ se svislým vláknem kyvadla v rovnovážné poloze. Je-li $h > 2\,AB = 2\,(l - d)$, takže platí $h > 2\,(l - d)$, nemůže kulička vystoupit do roviny σ, neboť vlákno není dosti dlouhé, aby mohla této výšky dosáhnout. Proto oběhne kolem bodu A a vlákno se obtočí kolem zarážky. Nejvyšší poloha kuličky je v tomto případě bod N, nacházející se ve vzdálenosti $BN = 2\,(l - d)$ nad bodem B.

Řešení: Z fyzikálního hlediska stačí, omezíme-li svoje úvahy na úhly v intervalu $0° < \alpha \leqq 90°$.

a) Má-li uvažované kyvadlo kývat, musí být splněna nerovnost

$$h < 2\,(l - d)\,. \qquad (1)$$

Z obrázků 48a, b je patrno, že $\cos\alpha = \dfrac{l - h}{l}$, takže $h = l\,(1 - \cos\alpha)$. Dosadíme-li tuto hodnotu za h do nerovnosti (1), vyjde $l\,(1 - \cos\alpha) < 2\,(l - d)$ a po úpravě

$$\cos\alpha > \frac{2d - l}{l}\,. \qquad (1a)$$

Po dosazení daných hodnot do vztahu (1a) vypočítáme $\cos\alpha > \dfrac{2\,.\,1{,}19 - 1{,}44}{1{,}44} = \dfrac{0{,}94}{1{,}44}$.

Pomocí tabulek určíme

$$\alpha < 49°15'.$$

Uvažované kyvadlo bude kývat jen v případě, jsou-li splněny ekvivalentní podmínky (1) a (1a), tj., je-li $\alpha < 49°15'$.

Dobou kmitu je doba, za kterou kulička kyvadla vykoná dráhu po oblouku CBD a zpět do bodu C.

Je-li úhel $\alpha < 5°$, pohybuje se kulička po oblouku CB po dobu $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, po oblouku BD po dobu $t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l-d}{g}}$, takže doba kmitu je

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{g}}(\sqrt{l} + \sqrt{l-d}) . \qquad (2)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$T = \frac{\sqrt{9,81}}{\sqrt{9,81}}(\sqrt{1,44} + \sqrt{0,25})\sqrt{\mathrm{m^{-1}\,s^2\,m}} = 1,7\ \mathrm{s}.$$

Doba kmitu uvažovaného kyvadla je obecně určena vztahem (2). Protože tento výraz byl určen ze vzorce pro harmonický pohyb, platí jen pro úhly $\alpha < 5°$. Za těchto podmínek má doba kyvu tohoto kyvadla hodnotu 1,7 s.

b) Je-li $h = 2(l - d)$, vystoupí kulička kyvadla na konci prvního kyvu do bodu $N \equiv M$ v rovině σ, kde má stejně velikou potenciální energii tíhovou jako v místě C. Nemá tudíž podle zákona zachování energie v místě $N \equiv M$ žádnou kinetickou energii, na okamžik se v něm zastaví a spadne volným pádem na zarážku v bodě A.

Jsou-li splněny ekvivalentní podmínky

$$h = 2(l - d) \text{ a } \cos\alpha = \frac{2d - l}{l}, \qquad (3)$$

(pro $\alpha = 49°15'$), vykoná kulička po nárazu vlákna na zarážku dráhu po oblouku polokružnice BM o středu A a spadne volným pádem na zarážku v bodě A.

Je-li $h > 2\,(l - d)$, nachází se nejvyšší poloha kuličky, bod N, svisle pod bodem M. Kulička má v této poloze vzhledem k rovnovážné poloze v místě B potenciální energii tíhovou $W'_p = 2\,m\,g\,(l - d)$. Rozdíl obou potenciálních energií tíhových (v bodě C a v bodě N) kuličky udává velikost její kinetické energie W_k v místě N. Platí tedy

$$W_k = m\,g\,h - 2\,m\,g\,(l - d) = m\,g\,[h - 2(l - d)]\,. \tag{4}$$

Je-li $2\,(l - d) < h$, je $W_k > 0$. Potom má kulička v bodě N rychlost v_0, jejíž vektorová přímka má směr tečny v bodě N k půlkružnici BN o středu A, a je proto vodorovná.

Jestliže je v bodě N velikost odstředivé síly F, kterou kulička napíná vlákno, menší než tíha G kuličky ($F < G$), pak není vlákno napjato a kulička se pohybuje dále po parabole (vodorovný vrh) až do okamžiku, kdy se vlákno napne. Napjaté vlákno přinutí kuličku, aby konala až do bodu B a pak dále přes bod B do bodu N pohyb po kruhovém oblouku. Má-li tedy kulička vykonat část dráhy z bodu N do bodu B po parabole, musí platit vedle podmínky $h > 2\,(l - d)$ ještě také nerovnost $F < G$. Velikost odstředivé síly určíme ze vztahu $F = \dfrac{mv_0^2}{r}$, kde m značí hmotnost kuličky, $r = AB$ poloměr její kruhové dráhy a v_0 její rychlost v bodě N. Nerovnost

$F < G$ lze vyjádřit vztahem $\frac{mv_0^2}{r} < mg$, ze které po úpravě vychází $v_0^2 < rg = g(l - d)$, takže

$$v_0^2 < g(l - d)\,. \qquad (5)$$

Protože velikost kinetické energie kuličky v místě N je určena výrazem (4), je $\frac{1}{2} m v_0^2 = mg[h - 2(l - d)]$, takže $v_0^2 = 2g[h - 2(l - d)]$. Tuto hodnotu dosadíme do vztahu (5) a dostaneme $2g[h - 2(l - d)] < g(l - d)$, odkud vypočítáme

$$h < \frac{5}{2}(l - d)\,. \qquad (6)$$

Podmínku (6) upravíme tak, aby obsahovala úhel α. Protože $\cos\alpha = \frac{l - h}{l}$, je $h = l(1 - \cos\alpha)$. Dosadíme-li do vztahu (6), vyjde $l(1 - \cos\alpha) < \frac{5}{2}(l - d)$ a po úpravách

$$\cos\alpha > \frac{5d - 3l}{2l}\,. \qquad (6a)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$\cos\alpha > \frac{5\,.\,1{,}19 - 3\,.\,1{,}44}{2\,.\,1{,}44} = \frac{1{,}63}{2{,}88}\,.$$

Pomocí tabulek určíme .

$$\alpha < 55°32'.$$

Jestliže jsou splněny podmínky vyjádřené nerovnostmi $2(l - d) < h < \frac{5}{2}(l - d)$ nebo ekvivalentními nerovnostmi $\frac{2d - l}{l} < \cos\alpha < \frac{5d - 3l}{2l}$, pohybuje se kulička kyvadla z bodu N do bodu B částečně po parabolické, částečně po kruhové dráze o středu A. Tento případ při daných hodnotách l a d nastane, jestliže kyvadlo vychýlíme z klidové polohy o úhel vyhovující nerovnostem $49°15' < < \alpha < 55°32'$.

Má-li se kulička kyvadla po nárazu vlákna na zarážku pohybovat po kružnici se středem A, musí mít odstředivá síla v bodě N hodnotu stejně velikou nebo větší než tíha kuličky. Tuto podmínku vyjádříme matematicky nerovností $v_0^2 \geqq g(l - d)$, z níž obdobnými operacemi, jaké jsme prováděli při úpravě vztahu (5), dojdeme k ekvivalentním vztahům

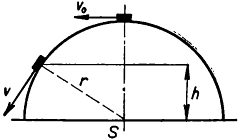
$$h \geqq \frac{5}{2}(l - d) \quad \text{a} \quad \cos\alpha \leqq \frac{5d - 3l}{2l}. \qquad (7)$$

Z druhého z těchto výrazů určíme $\alpha \geqq 55°32'$, jestliže se omezíme na úhly v intervalu $0° < \alpha \leqq \leqq 90°$.

Má-li se kulička kyvadla pohybovat po nárazu vlákna na zarážku trvale po kružnici se středem A, musí být splněny vztahy (7), jež při daných hodnotách l a d jsou splněny pro úhly α, jež mají libovolnou z hodnot $\alpha \geqq 55°32'$.

3. V nejvyšším bodě dokonale hladké polokoule o poloměru r (obr. 49a) spočívající v rovnovážné poloze na vodorovném stole je malé těleso. Tomuto tělesu udělíme horizontální rychlost v_0.

a) V jaké výši nad stolem opustí těleso povrch polokoule?

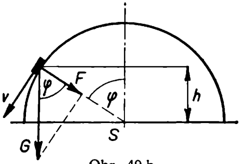


Obr. 49 a

b) Jaká bude tato výška, je-li $v_0 = 0$?
c) Při jaké rychlosti v_0 opustí těleso povrch polokoule ihned v nejvyšším bodě?
Předpokládejte, že se těleso pohybuje bez tření.

Označení veličin: Poloměr polokoule má velikost r. Těleso hmotnosti m opouští povrch polokoule v místě, kde normálová složka F tíhy G tělesa je stejně veliká jako odstředivá síla působící na těleso, které se pohybuje po kružnici o poloměru r. Toto místo se nachází ve výšce h nad podstavou polokoule. Poloměr polokoule příslušný tomuto místu svírá s poloměrem příslušným nejvyššímu bodu polokoule úhel φ (obr. 49b). Rychlost tělesa v místě, kde opouští povrch polokoule, označíme v, tíhové zrychlení g.

Řešení: a) Z obr. 49b je patrno, že v místě, kde těleso opouští povrch polokoule, má normálová složka tíhy tělesa velikost $F = m g \cos \varphi$. Velikost odstředivé síly, která působí na těleso pohybující se na povrchu polokoule po kružnici o poloměru r, má velikost $\dfrac{mv^2}{r}$. Protože tyto síly mají v místě,



Obr. 49 b

kde těleso opouští povrch polokoule, stejnou velikost, platí rovnice $m g \cos \varphi = \frac{mv^2}{r}$. Podle obr. 49 b je však

$$\cos \varphi = \frac{h}{r}, \tag{1}$$

takže

$$v^2 = r g \frac{h}{r} = h g . \tag{2}$$

Těleso nacházející se v nejvyšším místě polokoule mělo vzhledem k povrchu stolu potenciální energii tíhovou $W_1 = m g r$. V místě, kde těleso opouští povrch polokoule, má tato energie hodnotu $W_2 = m g h = m g r \cos \varphi$. Během pohybu tělesa po povrchu polokoule se tedy zmenšila jeho potenciální energie tíhová o $\Delta W_p = m g r (1 - \cos \varphi)$, zatímco jeho kinetická energie vzrostla o $\Delta W_k = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$. Podle zákona zachování energie platí rovnice

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = m g r (1 - \cos \varphi) ,$$

z níž vychází po dosazení za v^2 ze vztahu (2) a za $\cos \varphi$ ze vztahu (1) rovnice

$$\frac{1}{2} gh - \frac{1}{2} v_0^2 = gr - g\,h\,,$$

ze které vypočítáme

$$h = \frac{v_0^2 + 2gr}{3g}\,. \tag{3}$$

Těleso opouští povrch polokoule v místě, které se nachází nad povrchem stolu ve výšce h, určené vztahem (3).

b) Jestliže $v_0 = 0$, má těleso nacházející se v nejvyšším místě polokoule polohu vratkou. Pokud je v této vratké poloze udržováno, neopustí povrch polokoule. Při sebemenším otřesu se však jeho rovnováha poruší, těleso se uvede do pohybu rychlostí $v_0 \to 0$ a podle vztahu (3) opustí povrch polokoule ve výšce

$$h' = \frac{2gr}{3g} = \frac{2}{3}\,r\,. \tag{4}$$

Má-li těleso v nejvyšším místě rychlost ve vodorovném směru $v_0 \to 0$, opustí povrch polokoule v místě, jehož výška nad stolem je určena vztahem (4).

c) Rychlost v_0 tělesa, jež má opustit povrch polokoule ihned v nejvyšším bodě, určíme ze vztahu (3), ve kterém dosadíme za $h = r$. Pak platí

$$\frac{v_0^2 + 2gr}{3g} = r,$$

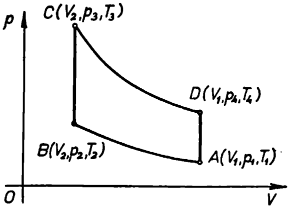
odkud vychází

$$v_0 = \sqrt{gr}\,. \tag{5}$$

Těleso, které opouští polokouli v jejím nejvyšším bodě, má ve vodorovném směru rychlost v_0, jež je určena vztahem (5).

4. Určete účinnost kruhového děje, který se skládá (obr. 50) z adiabatické komprese AB, izochorického děje BC, adiabatické expanze CD a z izochorického děje DA.

Porovnejte účinnost tohoto děje s účinností Carnotova cyklu, pracujícího se stejnými krajními teplotami jako vyšetřovaný děj.



Obr. 50

Označení veličin: Úlohu budeme řešit pro kilomol dokonalého plynu pracujícího vratně, ve kterém tedy platí v každém okamžiku stavová rovnice dokonalého plynu. Při změnách tlaku pracovního plynu musíme stále upravovat i vnější tlak tak, aby byl stále roven tlaku plynu.

Univerzální plynovou konstantu budeme značit R, molekulové teplo při stálém objemu C_v. Účinnost uvažovaného děje označíme η, účinnost Carnotova cyklu η'.

Řešení: Při prvním ději pracovní plyn ani nepřijímá, ani nevydává teplo, je od okolí tepelně izolován. Působením vnější síly je stlačován z objemu V_1 na objem V_2, jeho tlak a teplota rostou z hodnot p_1 a T_1 na hodnoty p_2 a T_2, takže platí stavová rovnice $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$.

Pro přijaté teplo ΔQ_1, pro práci A_1 vykonanou plynem a pro změnu entropie z hodnoty S_1 na S_2 platí během tohoto děje vztahy

$$\Delta Q_1 = 0 \qquad A_1 = -C_v(T_2 - T_1)$$
$$S_2 - S_1 = 0\,. \tag{1}$$

V druhém ději je plyn izochoricky stlačován, až dosáhne teploty T_3 ohřívače. Tlak plynu vzroste na hodnotu p_3, která je určena stavovou rovnicí $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$. Teplo ΔQ_2 v průběhu tohoto děje plynu dodané, práce A_2 plynem vykonaná a změna entropie na hodnotu S_3 jsou určeny výrazy

$$\Delta Q_2 = C_v(T_3 - T_2),\ A_2 = 0,\ S_3 - S_2 = C_v \ln\frac{T_3}{T_2}, \tag{2}$$

kde ln značí přirozený logaritmus.

Třetí děj je adiabatická expanze. Plyn je při něm tepelně izolován proti okolí a zvětšuje svůj objem na hodnotu $V_4 = V_1$ tak, že jeho teplota nabude na konci tohoto děje takové hodnoty T_4, aby při posledním izochorickém ději dosáhl při tlaku p_1 a objemu V_1 teploty T_1. Na konci třetího děje bude mít plyn tlak p_4, který je určen stavovou rovnicí

$$\frac{p_3 V_2}{T_3} = \frac{p_4 V_1}{T_4} .$$

Teplo ΔQ_3 přijaté plynem během tohoto děje, práce A_3 plynem vykonaná a změna entropie na hodnotu S_4 jsou určeny vztahy

$$\Delta Q_3 = 0, \quad A_3 = - C_v (T_4 - T_3), \quad S_4 - S_3 = 0 . \tag{3}$$

Při čtvrtém, izochorickém ději je plyn ve styku s chladičem, jemuž odevzdá část tepla, které přijal z ohřívače. Teplota plynu při tomto ději klesne na hodnotu $T_5 = T_1$, kterou má chladicí lázeň. Tlak plynu se zmenší na p_1 a entropie dosáhne hodnoty S_5.

Protože plyn při tomto ději teplo vydává, musí být v tomto ději $\Delta Q_4 < 0$. Označíme-li A_4 práci vykonanou plynem během čtvrtého děje a S_5 entropii na konci tohoto děje, pak platí

$$\Delta Q_4 = C_v (T_1 - T_4), \; A_4 = 0, \; S_5 - S_4 = C_v \ln \frac{T_1}{T_4} . \tag{4}$$

Má-li být celkový děj, skládající se ze čtyř popsaných dějů, dějem kruhovým, musí platit $S_5 = S_1$. Protože entropie je veličinou skalární, je

$$\Delta S = S_5 - S_1 = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) +$$

$$+ (S_4 - S_3) + (S_5 - S_4) = C_v \left(\ln \frac{T_3}{T_2} + \ln \frac{T_1}{T_4} \right) =$$
$= 0$, neboť

$$S_5 = S_1 \,. \qquad (5)$$

Aby byl uvažovaný děj dějem kruhovým, musí být tedy splněna podmínka

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}, \qquad (6)$$

která vychází z rovnice (5).

Během uvažovaného kruhového děje vykoná plyn práci

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$$
$$= - C_v (T_2 - T_1 + T_4 - T_3) \,. \qquad (7)$$

Teplo přijímá jen v ději druhém. Toto teplo má hodnotu ΔQ_2. Jeho část odevzdá plyn chladiči při čtvrtém ději a zbytek $\Delta Q_2 + \Delta Q_4$ ($\Delta Q_4 < 0$) se mění v rovnomocnou práci.

Účinnost lze vypočítat dvojím způsobem

a) $\eta =$

$$= \frac{\Delta Q_2 + \Delta Q_4}{\Delta Q_2} = 1 + \frac{\Delta Q_4}{\Delta Q_2} = 1 - \frac{C_v(T_4 - T_1)}{C_v(T_3 - T_2)}; \qquad (8)$$

po úpravě vychází

$$\eta = 1 - \frac{\dfrac{T_4}{T_1} - 1}{\dfrac{T_3}{T_2} - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \qquad (9)$$

neboť $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ podle vztahu (6). Protože ve vztahu $\Delta Q_2 = C_v (T_3 - T_2)$ je $\Delta Q_2 > 0$ a $C_v > 0$, je $T_3 > T_2$ a $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta'$, kde η' je účinnost Carnotova ideálního cyklu pracujícího mezi stejnými krajními teplotami jako uvažovaný kruhový děj. Platí tedy

$$\eta < \eta' . \tag{10}$$

Účinnost uvažovaného kruhového děje je určena vztahem (9) a podle vztahu (10) je menší než účinnost Carnotova cyklu, pracujícího mezi stejnými krajními teplotami.

b) $$\eta = \frac{A}{\Delta Q_2} = \frac{-C_v (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)}{C_v (T_3 - T_2)} =$$

$$= \frac{T_3 - T_2 - (T_4 - T_1)}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2},$$

což je vztah (8).

5. Určení hmotnosti tělesa pomocí kmitání pružiny.

Potřeby: Ocelová pružina na zatížení do 1,3 kp, závaží o hmotnosti $m_0 = 0{,}5$ kg, těleso s háčkem neznámé hmotnosti m (asi 0,8 kg), závěs pro pružinu, váhy do 1 kg se závažími.

Návod: Zavěsíme na pružinu o tuhosti k těleso známé hmotnosti m_0 a mírným protažením je rozkmitáme. Pro dobu kmitu platí vztah

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}} . \qquad (1)$$

Tohoto vztahu můžeme užít k změření neznámé hmotnosti m daného tělesa, kmitajícího na téže pružině, jestliže změříme příslušnou dobu kmitu T.

Úkol: a) Odvoďte vztah mezi veličinami m_0, m, T_0, T.
b) Měřením T_0 a T určete pomocí známé hmotnosti $m_0 = 0{,}5$ kg neznámou hmotnost daného tělesa.
c) Určete střední absolutní chybu výsledku.
d) Zjistěte hmotnost m vážením na vahách a porovnejte oba výsledky.

Postup: Doby T_0 a T určete vždy jako průměr deseti měření. Určete vždy dobu potřebnou na dvacet kmitů pružiny. Při každém měření volte stejný rozkmit (asi 2 cm).

Hmotnost m_0 je dána s relativní chybou nejvýše 5 %.

Naměřené hodnoty uspořádejte do tabulky, z deseti měření T_0 a T a vypočítejte aritmetické průměry a z kladných odchylek T_0 a T od jejich průměrů určete střední absolutní chybu doby kmitu podle vzorce

$$\bar{\delta}_T = \frac{5\Sigma \Delta_+ T}{2n\sqrt{n-1}} . \qquad (2)$$

Pomocí relativních chyb vypočítejte pak střední absolutní chybu výsledku. Počítejte s největší možnou přesností.

Řešení: a) Pomocí vzorce (1) určíme tuhost pružiny

$$k = \frac{4\,\pi^2 m_0}{T_0^2} = \frac{4\,\pi^2 m}{T^2} \tag{3}$$

a odtud

$$m = m_0\,\frac{T^2}{T_0^2}\,. \tag{4}$$

b) Naměřené hodnoty T, T_0 a jejich odchylky $\Delta\,T_0$ a $\Delta\,T$ od průměru jsou zaznamenány v tabulce. Písmenem $\overline{T}_0$ a $\overline{T}$ označujeme aritmetické průměry naměřených hodnot T_0 a T.

Velikosti středních absolutních chyb veličin T_0 a T určíme podle vzorce (2)

$$\overline{\delta}\,T_0 = \frac{5\,.\,0{,}023}{2\,.\,10\,.\,\sqrt{9}}\ \mathrm{s} = \frac{1}{12}\,.\,0{,}023\ \mathrm{s} = 0{,}001\,92\ \mathrm{s}$$

$$\overline{\delta}T = \frac{1}{12}\,.\,0{,}021\ \mathrm{s} = 0{,}001\,75\ \mathrm{s}.$$

Relativní chyby veličin T_0 a T mají hodnoty

$$\frac{\overline{\delta}T_0}{\overline{T}_0} = \frac{0{,}001\,92}{1{,}077} = 0{,}0017 = 0{,}17\ \%,$$

$$\frac{\overline{\delta}T}{\overline{T}} = \frac{0{,}001\,75}{1{,}299} = 0{,}001\,3 = 0{,}13\ \%.$$

Měření	$20\ T_0$ [s]	T_0 [s]	$20\ T$ [s]	T [s]	$\Delta T_0 = T_0 - \overline{T}_0$ [s]	$\Delta T = T - \overline{T}$ [s]
1	21,4	1,07	26	1,3	−0,007	+0,001
2	21,6	1,08	26	1,3	+0,003	+0,001
3	21,6	1,08	25,9	1,295	+0,003	−0,004
4	21,5	1,075	26,1	1,305	−0,002	+0,006
5	21,6	1,08	25,9	1,295	+0,003	−0,004
6	21,7	1,085	25,9	1,295	+0,008	−0,004
7	21,6	1,08	25,8	1,29	+0,003	−0,009
8	21,4	1,07	26,0	1,3	−0,007	+0,001
9	21,6	1,08	26,1	1,305	+0,003	+0,006
10	21,4	1,07	26,1	1,305	−0,007	+0,006
		$\overline{T}_0 = 1,077$		$\overline{T} = 1,299$	$\Sigma\Delta_+ T_0 = 0,023$	$\Sigma\Delta_+ T = 0,021$

Relativní chyba hmotnosti m_0 je podle textu úlohy 5 %, takže $\frac{\overline{\delta m_0}}{m_0} = 0{,}05 = 5\ \%$.

Hmotnost uvažovaného tělesa určíme podle vztahu (4)

$$m = \frac{1{,}299^2}{1{,}077^2}\, 0{,}5\ \mathrm{s^2 s^{-2}\ kg} = 0{,}727\ 4\ \mathrm{kg}. \qquad (5)$$

c) Střední absolutní chybu výsledku určíme pomocí vypočítaných relativních chyb. Označíme-li $\frac{\overline{\delta m}}{m}$ relativní chybu výsledku, pak podle upraveného vztahu (4) platí

$$\frac{\overline{\delta m}}{m} = 2\frac{\overline{\delta T_0}}{\overline{T}_0} + 2\frac{\overline{\delta T}}{\overline{T}} + \frac{\overline{\delta m_0}}{m_0} =$$

$$= 0{,}003\ 4 + 0{,}002\ 6 + 0{,}05 = 0{,}056$$

a $\qquad \overline{\delta m} = 0{,}56\ .\ 0{,}727\ 4\ \mathrm{kg} = 0{,}040\ 7\ \mathrm{kg}.$

Měřením kmitů pružiny byla určena hmotnost daného tělesa

$$m = (0{,}727\ 4 \pm 0{,}040\ 7)\ \mathrm{kg}. \qquad (6)$$

d) Vážením na vahách byla naměřena hmotnost téhož tělesa $m = 0{,}732$ kg. Tato hodnota leží v intervalu určeném vztahem (6).

13. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE C

První kolo soutěže

1. Těleso padající volným pádem má v bodě A své dráhy okamžitou rychlost v_1 a v bodě B rychlost $v_2 > v_1$.

Určete vzdálenost d bodů A a B a dobu t, za kterou těleso vykoná dráhu AB. Tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $v_1 = 40 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 70 \text{ m s}^{-1}$.

Označení veličin: Těleso padá volným pádem z místa M. Vzdálenost $MA = s_1$ urazí za dobu t_1, vzdálenost $MB = s_2$ za dobu t_2. Čas, za který vykoná dráhu $AB = d$, označíme t.

Řešení: Ze zákona pro rychlost volného pádu určíme

$$t_1 = \frac{v_1}{g}, \quad t_2 = \frac{v_2}{g} \quad \text{a} \quad t = t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{g}. \tag{1}$$

Vzdálenost d bodů A a B vypočítáme ze vztahu

$$d = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2} g (t_2 + t_1)(t_2 - t_1) =$$

$$= \frac{1}{2} g \frac{v_2 + v_1}{g} \cdot \frac{v_2 - v_1}{g} = \frac{1}{2g} (v_2 + v_1)(v_2 - v_1). \tag{2}$$

Pro dané hodnoty je

$$t = \frac{70 - 40}{10} \text{m s}^{-1} \text{s}^2 \text{m}^{-1} = 3 \text{s},$$

$$d = \frac{1}{20} (70 + 40)(70 - 40) \text{m}^{-1} \text{s}^2 \text{m s}^{-1} \text{m s}^{-1} = 165 \text{ m}.$$

Vzdálenost bodů A a B je 165 m. Je obecně určena vztahem (2). Tuto dráhu vykoná těleso za 3 s, obecně za dobu určenou vztahem (1).

2. V průmyslovém závodě se dopravuje uhlí vozíky po nakloněné rovině délky d vzhůru. Celková hmotnost vozíku s uhlím je m, úhel nakloněné roviny s vodorovnou rovinou je α. Vozík je tažen silou tak, že se pohybuje se zrychlením a.

a) Jak veliká tažná síla působí na vozík?

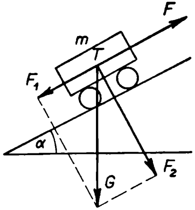
b) Jak veliká mechanická práce se vykoná při dopravě jednoho vozíku?

c) Jak veliký je přírůstek kinetické energie vozíku v nejvyšším bodě dráhy?

d) Jaký je výkon motoru, kterým je vozík tažen vzhůru?

Tření zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 25$ m, $\alpha = 45°$, $a = 1$ m s^{-2}, $m = 3{,}2$ t, tíhové zrychlení $g = 10$ m s^{-2}.

Označení veličin: Tažnou sílu na vozík označíme F (obr. 51), síla udělující vozíku zrychlení a je F'. Vozík se pohybuje po dráze d vzhůru po



Obr. 51

dobu t a dosáhne v nejvyšším místě své dráhy rychlosti v_1. Mechanickou práci vykonanou při dopravě jednoho vozíku označíme A, přírůstek kinetické energie ΔW_k a průměrný výkon motoru P_p.

Řešení: a) Tažná síla na vozík je v rovnováze s pohybovou složkou F_1 tíhy G vozíku na nakloněné rovině a uděluje vozíku ještě zrychlení a. Proto platí

$$F = F_1 + F' = m g \sin\alpha + m a =$$
$$= m(g \sin\alpha + a)\,. \qquad (1)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$F = 3\,200\left(10\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} =$$
$$= 3\,200\,.\,8{,}07\ \mathrm{N} = 25\,824\ \mathrm{N}\,.$$

Na vozík působí tažná síla 25 824 N, určená obecně vztahem (1).

b) Při vytažení jednoho vozíku z nejnižší do nejvyšší polohy se vykoná mechanická práce

$$A = F\,d = m\,(g \sin\alpha + a)\,d\,. \qquad (2)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$A = 25\,824\,.\,25\ \mathrm{N\,m} = 645\,600\ \mathrm{J}\,.$$

Při dopravě jednoho vozíku se vykoná práce 645 600 J, jež je obecně určena vztahem (2).

c) Úlohu je možno řešit dvojím způsobem

1. Vozíku uděluje stálé zrychlení stálá síla $F' = m\,a$, která působí po dráze d. Vykoná tedy práci $A' =$

$= F'd = m\,a\,d$. O stejnou hodnotu vzroste kinetická energie vozíku.

2. Vozík se pohybuje působením konstantní síly $F' = m\,a$ po dráze d pohybem rovnoměrně zrychleným. Platí tedy $d = \frac{1}{2}\,a\,t^2$, takže pohyb vozíku trvá dobu $t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$. V nejvyšším místě dráhy dosáhne vozík rychlosti $v_1 = a\,t = \sqrt{2\,a\,d}$. Proto bude mít vozík v nejvyšším místě své dráhy kinetickou energii o $\Delta\,W_k$ větší než v nejnižším místě dráhy. Rozdíl má velikost

$$\Delta\,W_k = \tfrac{1}{2}\,m\,v_1^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,2\,a\,d = m\,a\,d\,. \qquad (3)$$

Výsledek je stejný jako byl v předcházejícím odstavci.

Pro dané hodnoty vyjde

$$\Delta\,W_k = 3\,200\,.\,1\,.\,25\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m} = 80\,000\,\mathrm{J}.$$

Přírůstek kinetické energie vozíku na dráze d je určen vztahem (3); má velikost 80 000 J.

d) Motor koná práci $A = m\,(g \sin \alpha + a)\,d$ v době $t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$. Má tedy průměrný výkon P_p, jehož velikost je

$$P_p = \frac{m\,(g \sin \alpha + a)\,d\sqrt{a}}{\sqrt{2\,.\,d}} = \frac{m\,(g \sin \alpha + a)\sqrt{2ad}}{2}. \qquad (4)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$P_p = \frac{645\,600 \,.\, 1}{\sqrt{50}} \text{ J s}^{-1} = \frac{645\,600}{5\sqrt{2}} \text{ W} = 91\,288 \text{ W}.$$

Motor, kterým je vozík tažen, má průměrný výkon 91,288 KW. Obecně je tento výkon určen vztahem (4).

Poznámka: Okamžitý výkon motoru se vypočítá ze vztahu $P = \frac{\Delta A}{\Delta t}$, kde $\Delta\, t$ značí nekonečně malý časový interval a $\Delta\, A$ práci vykonanou v čase $\Delta\, t$. Označíme-li $\Delta\, s$ nekonečně malou dráhu, kterou vozík vykoná za dobu $\Delta\, t$, můžeme psát $P = \frac{F\Delta s}{\Delta t}$; protože však $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, kde v značí rychlost vozíku v časovém intervalu Δt, má okamžitý výkon hodnotu

$$P = F v\,. \tag{5}$$

Protože se vozík pohybuje po nakloněné rovině rovnoměrně zrychleně, roste výkon motoru rovnoměrně z nulové hodnoty až na největší hodnotu $P_m = F v_1 = m\,(g \sin \alpha + a) \sqrt{2\, a\, d}$, která je dvojnásobkem průměrného výkonu P_p.

3. Na vodorovné hladké rovině jsou dvě stejně veliké homogenní koule z různého materiálu o hmotnostech m_1 a $m_2 < m_1$. Lehčí koule se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v_2 směrem k těžší kouli, která je v klidu, a narazí na ni tak, že bod nárazu leží na spojnici středů obou koulí. Po rázu se koule pohybují jako jedno těleso rychlostí v.

a) Určete rychlost v.

b) Jakou rychlostí a jakým směrem by se koule po rázu pohybovaly, kdyby byly dokonale pružné?

Tření, odpor vzduchu a otáčení koulí zanedbejte. Řešte obecně, potom pro hodnoty $v_2 = 2 \text{ m s}^{-1}$, $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg.

Označení veličin: Za kladný volíme ten směr vektoru rychlosti, který je souhlasně orientován s rychlostí v_2. V úloze b) označíme rychlost koule o větší hmotnosti (m_1) po rázu w_1, rychlost lehčí koule w_2. V části a) jde o ráz koulí nepružných, neboť se po rázu koule pohybují jako jedno těleso.

Řešení: a) Protože při rázu nepružných koulí se značná část kinetické energie obou koulí změní v energii jinou (teplo a deformační práci), nelze úlohu řešit užitím zákona zachování mechanické energie. Platí však zákon zachování hybnosti. Před rázem je úhrnná hybnost obou koulí $m_2 v_2$, po rázu $(m_1 + m_2)\, v$. Platí tedy $m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$, takže

$$v = v_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \qquad (1)$$

Pro dané hodnoty vyjde

$$v = 2 \frac{1}{3 + 1} \text{ m s}^{-1} \text{ kg kg}^{-1} = 0{,}5 \text{ m s}^{-1} .$$

Koule se po rázu pohybují rychlostí určenou obecně vztahem (1), která je orientována souhlasně s rychlostí v_2 a má hodnotu $0{,}5 \text{ m s}^{-1}$.

b) Ráz dokonale pružných koulí můžeme uvažovat ve dvou fázích. V první fázi se obě koule deformují a při tom vyrovnávají svoje rychlosti stejným způsobem jako nepružné koule. Když dosáhnou stejné rychlosti v, určené vztahem (1), budou nejvíce zdeformovány, neboť na sebe přestanou působit vzájemnými silami. Při stlačování se značná část jejich úhrnné kinetické energie změní v energii elastickou. V druhé fázi se budou obě koule vzpružovat (nabývat původního tvaru). Při vzpružování se jejich elastická energie, kterou získaly při deformaci, velmi rychle mění opět v energii kinetickou. Rychlosti obou koulí, jež byly v okamžiku největší deformace stejné, se při vzpružování začnou různit, a proto při dokončení rázu se koule od sebe odrazí a pohybují se různými rychlostmi.

Protože se elastická energie každé z deformovaných koulí promění při vzpružování v plné hodnotě v energii kinetickou, probíhá vzpružování stejným způsobem jako stlačování. Síly působící vzpružování jsou stejně veliké jako síly, které působily stlačování téže koule. Platí to i o změnách hybnosti.

Vyjádříme-li tedy rovnicí, že změna hybnosti je u koule o menší hmotnosti stejná při vzpružování jako při stlačování, dostaneme rovnici $m_2v - m_2v_2 = m_2w_2 - m_2v$, odkud určíme

$$w_2 = 2\,v - v_2 = 2\,\frac{m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,v_2\,. \tag{2}$$

U koule o větší hmotnosti platí rovnice $m_1v = m_1w_1 - m_1v$. Z této rovnice dostaneme

$$w_1 = 2\,v = 2\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,v_2\,. \tag{3}$$

Po dosazení daných hodnot do vztahů (2) a (3) určíme

$$w_1 = 2\,\frac{1}{3+1}\,2\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,,$$

$$w_2 = \frac{1-3}{1+3}\,.\,2\ \mathrm{m\,s^{-1}} = -\ 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

Obě koule se po rázu pohybují rychlostmi určenými vztahy (2) a (3). Výpočty ukazují, že absolutní hodnoty obou rychlostí jsou stejné, rovny 1 m s^{-1}. Lehčí koule se po rázu pohybuje opačným směrem, těžší stejným směrem jako méně hmotná před rázem.

Úlohu lze řešit i jinak.

Podle zákona zachování hybnosti platí

$$m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2\,,$$

neboť úhrnná hybnost obou koulí před rázem a po něm je stejná. Totéž platí podle zákona zachování energie i o kinetických energiích, takže

$$\tfrac{1}{2}\,m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}\,m_1 w_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2 w_2^2\,.$$

Z první z těchto rovnic určíme

$$w_2 = \frac{m_2 v_2 - m_1 w_1}{m_2} = v_2 - \frac{m_1}{m_2}\,w_1\,. \qquad (4)$$

Dosadíme za w_2 do druhé rovnice a po úpravě dostaneme

$$m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2\,\frac{m_2^2 v_2^2 - 2\,m_1 m_2 v_2 w_1 + m_1^2 w_1^2}{m_2^2}\,.$$

Po dalších úpravách vychází

$$w_1^2\,(m_1 + m_2) - 2\,m_2 v_2 w_1 = 0$$

a dále

$$w_1\,[w_1\,(m_1 + m_2) - 2\,m_2 v_2] = 0\,.$$

Tato rovnice má dva kořeny

1. $w_1 = 0$, pak je podle (4) $w_2 = v_2$,
2. $w_1 = \dfrac{2\,m_2}{m_1 + m_2}\,v_2$ a podle (4)

$$w_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,v_2\,.$$

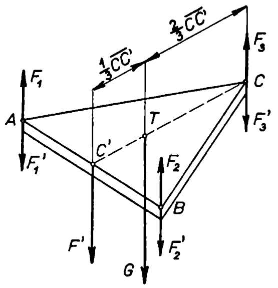
První dvojice kořenů není fyzikálně možná, neboť v tomto případě by měla koule větší hmotnosti zůstat po rázu v klidu a lehčí koule by měla proniknout těžší koulí a pohybovat se po rázu stejnou rychlostí a stejným směrem jako před rázem.

Druhá dvojice kořenů je shodná s hodnotami určenými vztahy (3) a (2).

4. Tři dělníci nesou homogenní desku všude stejné tloušťky, která má tvar obecného trojúhelníku. Podpírají ji ve vrcholech.

Dokažte, že každý z nich podpírá desku stejnou silou.

Označení veličin: Střed strany AB trojúhelníku ABC označíme C', jeho těžiště T a jeho tíhu G. Deska tlačí na podpory ve vrcholech A, B, C silami F_1', F_2', F_3' souhlasně orientovanými se silou G. Stejně velikými opačně orientovanými silami F_1, F_2 a F_3 podpírají dělníci ve vrcholech A, B, C desku (obr. 52).



Obr. 52

Řešení: Tíha G trojúhelníkové desky působí svisle dolů v těžišti T trojúhelníku, které leží na těžnici CC' a dělí ji na dvě části v poměru $C'T : CT = 1 : 2$.

Rozložme sílu G na dvě složky, F_3', která působí svisle dolů ve vrcholu C a F' působící svisle dolů v bodě C'. Podle momentové věty platí vzhledem k orientaci momentů sil F' a F_3' rovnice

$$F' \, . \, C'T - F_3' \, . \, CT = 0,$$

takže

$$\frac{F_3'}{F'} = \frac{C'T}{CT} = \frac{1}{2}.$$

Protože zároveň platí $F_3' + F' = G$, je

$$F_3' = \frac{G}{3} \quad \text{a} \quad F' = \frac{2G}{3}. \qquad (1)$$

Rozložme nyní sílu F' na dvě svisle dolů orientované složky F_1' a F_2', působící ve vrcholech A a B trojúhelníku ABC. Obdobnou úvahou, jako jsme provedli v předcházejícím odstavci, zjistíme, že

$$F_1' = F_2' = \frac{1}{2} F' = \frac{G}{3}. \qquad (2)$$

Tíhová síla G trojúhelníku ABC se tedy rozloží na tři souhlasně se silou G orientované složky F_1', F_2' a F_3', pro které platí

$$F_1' = F_2' = F_3' = \frac{G}{3}.$$

Stejně velikými opačně orientovanými silami $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{G}{3}$ podpírají dělníci trojúhelníkovou desku.

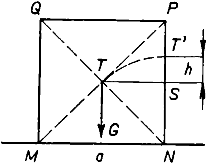
5. Bedna má tvar krychle; její těžiště je v průsečíku tělesových úhlopříček. Bednu můžeme přemístit do vzdálenosti d buď převracením přes hranu, nebo tak, že ji táhneme po zemi.

Součinitel vlečného tření bedny o zem je f. Tření při převracení bedny je zanedbatelně malé.

a) Při kterých hodnotách f se vykoná při přemísťování bedny překlápěním větší práce než při posouvání po zemi?

b) Jakou hodnotu musí mít f, aby práce vykonaná při obou způsobech přemísťování byla stejně veliká?

Označení veličin: Hranu krychle označíme a, tíhu bedny $G = mg$, její těžiště T. Řez bedny vedený těžištěm rovnoběžně se stěnou $ABB'A'$ je $MNPQ$. Těžiště bedny leží ve středu čtverce $MNPQ$. Překlápí-li se bedna kolem hrany BC, která prochází bodem N kolmo k nákresně (obr. 53), zvedá se její těžiště po kruhovém oblouku TT' z po-



Obr. 53

lohy T do polohy T' a jeho výška se vzhledem k povrchu zemskému zvýší o $ST' = h = NT' - NS = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

Řešení: Máme-li přemístit bednu překlápěním kolem hrany BC do vzdálenosti d, musíme ji překlopit celkem n-krát, takže platí $n = \frac{d}{a}$. Při každém překlopení se koná práce, pokud se těžiště bedny přemisťuje z polohy T do polohy T'. Velikost práce, kterou musíme vynaložit na jedno překlopení bedny, je mgh. Celková práce A_1, již musíme vykonat, abychom přemístili překlápěním bednu do vzdálenosti d, je

$$A_1 = nmgh = \frac{d}{a} mg \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{mgd}{2} (\sqrt{2} - 1). \tag{1}$$

Přemísťujeme-li bednu tak, že ji táhneme do vzdálenosti d po zemi, překonáváme třecí sílu $F = f\,m\,g$ po dráze d, takže konáme práci

$$A_2 = f\,m\,g\,d\,. \tag{2}$$

a) Má-li být práce vykonaná při přemísťování bedny překlápěním větší než při jejím posunování po zemi, musí platit $A_1 > A_2$. Proto je

$$\frac{mgd}{2} (\sqrt{2} - 1) > fmgd,$$

takže

$$f < \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0{,}207\,.$$

Má-li součinitel tření hodnotu menší než 0,207, pak se vykoná při přemísťování bedny překlápěním větší práce než při jejím posouvání po zemi.

b) Má-li platit $A_1 = A_2$, pak $\frac{mgd}{2} (\sqrt{2} - 1) =$ $= fmgd$, a

$$f = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0{,}207\,.$$

Má-li součinitel tření hodnotu $f = 0{,}207$, vykoná se při obou způsobech přemísťování stejně veliká práce.

6. Dvě tělesa jsou vržena z bodu A svisle vzhůru se stejnou počáteční rychlostí v_0 v časovém intervalu Δt po sobě.

a) Za jak dlouho od okamžiku, kdy bylo vrženo druhé těleso, a v jaké výšce h nad bodem A se obě tělesa srazí?

b) Jakou podmínku musí splňovat v_0, aby úloha byla při daném Δt reálná?

c) Jakou vzájemnou rychlostí se obě tělesa srazí?

Řešte nejprve obecně, potom pro $v_0 = 24{,}5 \text{ m s}^{-1}$, $\Delta t = 0{,}5$ s, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Označení veličin: Pohyb druhého tělesa až k okamžiku srážky trvá dobu t. Rychlost prvního tělesa v okamžiku srážky označíme v_1, rychlost druhého tělesa v tomtéž okamžiku v_2. Vzájemná rychlost obou těles je v.

Řešení: a) Pohyb každého z obou těles je složen ze dvou pohybů ve svislém směru opačně orientovaných, z pohybu rovnoměrného směrem vzhůru s rychlostí v_0 a z volného pádu.

Druhé těleso se pohybuje až do okamžiku srážky po dobu t, první těleso po dobu $t + \Delta t$. V okamžiku srážky tedy platí

$$h = v_0 (t + \Delta t) - \tfrac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 ,$$

neboť při srážce jsou obě tělesa stejně vysoko nad bodem A. Řešením těchto dvou rovnic určíme t a h. Provedeme jejich úpravu

$$v_0 t + v_0 \Delta t - \tfrac{1}{2} g t^2 - g t \Delta t - \tfrac{1}{2} g \Delta^2 t =$$
$$= v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 ,$$

z níž vychází

$$t = \frac{\Delta t \,(2v_0 - g\Delta t)}{2g\Delta t} = \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g} \qquad (1)$$

a

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 =$$
$$= \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g} \left(v_0 - \frac{g}{2} \cdot \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g} \right) =$$
$$= \frac{(2v_0 - g\Delta t)(2v_0 + g\Delta t)}{8g} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\Delta^2 t}{8} . \qquad (2)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

$$t = \frac{2 \,.\, 24{,}5 - 10 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 10} \ \mathrm{m\, s^{-1}\, s^2\, m^{-1}} = 2{,}2\ \mathrm{s},$$

$$h = \left(\frac{24{,}5^2}{2 \,.\, 10} - \frac{10 \,.\, 0{,}5^2}{8} \right) \mathrm{m^2\, s^{-2}\, s^2\, m^{-1}} =$$
$$\left(\frac{600{,}25}{20} - \frac{2{,}5}{8} \right) \mathrm{m} = 29{,}7\ \mathrm{m}.$$

Obě tělesa se srazila za dobu t ve výšce h nad bodem A. Tyto veličiny jsou obecně určeny vztahy (1) a (2) a mají hodnoty 2,2 s a 29,7 m.

b) Předpokládali jsme, že první těleso bylo vrženo dříve než druhé. Proto je $\Delta t > 0$. Protože také $t > 0$, musí být splněna podmínka $2 v_0 > g \Delta t$, aby úloha byla reálná. Tato podmínka vyplývá ze vztahu (1) nebo (2). Z ní vychází

$$v_0 > \frac{g\Delta t}{2}.$$

Pro $\Delta t = 0{,}5$ s je $v_0 > 2{,}5$ m s^{-1}.

Kdyby bylo první těleso vrženo rychlostí $v_0 = \frac{g\Delta t}{2}$, pak by $t = 0$ a první těleso by vykonalo za dobu Δt celou dráhu a dopadlo by do bodu A právě v okamžiku, kdy dochází k vrhu druhého tělesa.

V případě, že by $v_0 < \frac{g\Delta t}{2}$, dopadlo by první těleso do bodu A dříve, než došlo k vrhu druhého tělesa, tedy za dobu kratší než Δt, neboť ze vztahu (1) vychází $t < 0$.

c) Rychlost prvního tělesa v okamžiku srážky je

$$v_1 = v_0 - g(t + \Delta t) = v_0 - g\,\frac{2v_0 - g\Delta t + 2g\Delta t}{2g} = -\frac{g\Delta t}{2}.$$

Záporná hodnota rychlosti v_1 značí, že v okamžiku, kdy se obě tělesa srazí, padá již první těleso volným pádem.

Rychlost druhého tělesa v okamžiku srážky je

$$v_2 = v_0 - gt = v_0 - g\,\frac{2v_0 - g\Delta t}{2g} = \frac{g\Delta t}{2}.$$

Druhé těleso v okamžiku srážky stoupá.

Bereme-li v úvahu orientaci rychlostí, je vzájemná rychlost dvou těles rovna rozdílu jejich rychlostí. Proto má vzájemná rychlost obou uvažovaných těles v okamžiku srážky hodnotu

$$v = v_2 - v_1 = g \Delta t,$$

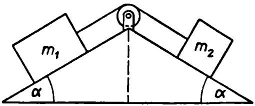
takže $$v = 10 \,.\, 0{,}5 \text{ m s}^{-2} \text{ s} = 5 \text{ m s}^{-1}.$$

Tělesa na sebe narazí rychlostí 5 m s^{-1}, která je obecně určena vztahem (3).

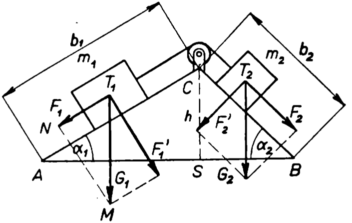
7. Dvě hladké nakloněné roviny svírají s vodorovnou rovinou úhel α; jsou k sobě postaveny výškami tak, že jejich průřez tvoří rovnoramenný trojúhelník (obr. 54a). Ve společném vrcholu je upevněna lehce otáčivá kladka, přes niž je vedeno lano. Na koncích lana jsou upevněna závaží o hmotnostech m_1 a $m_2 < m_1$, která leží na nakloněných rovinách.

a) Určete zrychlení a směr, kterým se soustava pohybuje.

b) Určete tažnou sílu, kterou je napínáno lano. Hmotnost kladky a lana i tření zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 0{,}3$ kg, $m_2 = 0{,}2$ kg, tíhové zrychlení $g = 10$ m s^{-2}.



Obr. 54 a



Obr. 54 b

c) Řešte úlohy a), b) pro $m_1 = m_2$, jestliže jedna nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha_1 = 30°$ a druhá $\alpha_2 = 45°$; $m_1 = m_2 = 0{,}4$ kg.

Označení veličin: Úlohu budeme řešit nejdříve zcela obecně, takže $m_1 \neq m_2$ a $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Trojúhelník *ABC* na obr. 54 b znázorňuje průřez dvou uvažovaných nakloněných rovin se svislou rovinou σ, vedenou těžišti těles o hmotnostech m_1 a m_2. Jedna z rovin svírá s vodorovnou rovinou úhel α_1, druhá α_2. Bod *S* je pata kolmice spuštěné z vrcholu *C* na stranu *AB*. Označíme-li G_1 tíhu tělesa o hmotnosti m_1, působí na těleso hmotnosti m_1 nacházející se na nakloněné rovině, svislým směrem síla $G_1 = m\,g$, která se rozkládá na dvě k sobě kolmé složky, pohybovou F_1 a tlakovou F_1'. Tlaková složka působí kolmo na nakloněnou rovinu a je příčinou tření, které zanedbáváme. Výšku trojúhelníku *ABC* označíme *h*.

Z podobnosti $\triangle\ ACS$ a $\triangle\ MT_1N$ plyne rovnost

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{SC}{AC} = \frac{h}{b_1} = p_1 = \sin \alpha_1,$$

takže

$$F_1 = p_1G_1 = p_1m_1g = m_1\, g \sin \alpha_1\,. \qquad (1)$$

Tíhu tělesa hmotnosti m_2 označíme $G_2 = m_2\, g$, pohybovou složku tíhové síly G_2 označíme F_2, tažnou sílu lana F. Pro sílu F_2 odvodíme stejným způsobem jako u síly F_1 vztah

$$F_2 = p_2G_2 = p_2m_2g = m_2g \sin \alpha_2\,, \qquad (2)$$

kde $p_2 = \sin \alpha_2 = \dfrac{SC}{BC} = \dfrac{h}{b_2}\,.$

V dalších výpočtech budeme kvůli jednoduchosti a přehlednosti užívat označení p_1 a p_2 místo $\sin \alpha_1$ a $\sin \alpha_2$, takže lze všude během výpočtů i ve výsledcích nahradit p_1 a p_2 hodnotami $p_1 = \sin \alpha_1$ a $p_2 = \sin \alpha_2$.

Řešení: Na nakloněné rovině znázorněné úsečkou AC působí na těleso hmotnosti m_1 síla F_1, která má podle vztahu (1) velikost $F_1 = p_1m_1g$ a je orientována podle obrázku směrem vlevo dolů. Na druhé těleso hmotnosti m_2 působí síla $F_2 = p_2m_2g$ orientovaná vpravo dolů. Jsou-li obě tělesa spojena lanem vedeným přes kladku, bude pohyb soustavy obou těles orientován ve směru síly větší. Úlohu lze řešit dvojím způsobem.

1. Předpokládejme, že $F_1 > F_2$. Pak se soustava pohybuje směrem, kterým působí síla F_1. Při pohybu působí na soustavu síla $F_1 - F_2$, která sou-

stavě uděluje zrychlení a, takže platí $(p_1 m_1 - p_2 m_2)g = (m_1 + m_2)\, a$, odkud vypočítáme

$$a = \frac{p_1 m_1 - p_2 m_2}{m_1 + m_2} g . \tag{3}$$

Lano spojující obě tělesa je na celé délce napínáno silou F, takže pohyb tělesa hmotnosti m_1 je působen silou $F_1 - F$, která udělí tělesu hmotnosti m_1 zrychlení a. Platí tedy rovnice $F_1 - F = m_1 a$, takže

$$F = p_1 m_1 g - m_1 \frac{p_1 m_1 - p_2 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{m_1 m_2 g(p_1 + p_2)}{m_1 + m_2} . \tag{4}$$

2. Při druhém způsobu řešení budeme uvažovat pohyb každého tělesa samostatně. Předpokládáme také, že $F_1 > F_2$.

Na těleso hmotnosti m_1 působí při pohybu síla $F_1 - F$, která má stejnou orientaci jako zrychlení, se kterým se těleso o hmotě m_1 pohybuje; proto platí rovnice

$$p_1 m_1 g - F = m_1 a .$$

Volíme-li směr síly F_1 kladný, pak působí při pohybu druhého tělesa síla $F - F_2$, která uděluje tělesu o hmotnosti m_2 také zrychlení a. Proto platí

$$F - p_2 m_2 g = m_2 a .$$

Jestliže z jedné z posledních dvou rovnic vypočítáme F a dosadíme do druhé, vychází nová rovnice $g(p_1 m_1 - p_2 m_2) = a(m_1 + m_2)$, takže

$$a = \frac{p_1 m_1 - p_2 m_2}{m_1 + m_2} g ,$$

což je vztah (3). Z druhé rovnice vychází po dosazení za a a po úpravě vztah

$$F = \frac{m_1 m_2 g\,(p_1 + p_2)}{m_1 + m_2},$$

což je vztah (4).

Jestliže průřez nakloněných rovin a vodorovné roviny je rovnoramenný trojúhelník, pak $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ a $p_1 = p_2$. V tomto případě je podle vztahu (3) a (4)

$$a = \frac{p_1\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\,g\,, \quad F = \frac{2\,m_1 m_2 p_1}{m_1 + m_2}\,g\,. \qquad (5)$$

$$a = \frac{0{,}5\,(0{,}3 - 0{,}2)\,.\,10}{0{,}3 + 0{,}2}\ \mathrm{kg\,kg^{-1}\,m\,s^{-2}} = 1\ \mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

$$F = \frac{2\,.\,0{,}3\,.\,0{,}2\,.\,0{,}5\,.\,10}{0{,}3 + 0{,}2}\ \mathrm{kg^2\ kg^{-1}\,m\,s^{-2}} = 1{,}2\ \mathrm{N}.$$

a) Velikost zrychlení je určena prvním z výrazů (5). Tento výraz byl odvozen za předpokladu, že se soustava pohybuje směrem síly F_1. Protože pro podmínku $m_1 > m_2$, danou textem úlohy, je $a > 0$, pohybuje se soustava směrem síly F_1. Hodnota zrychlení je 1 m s^{-2}.

b) Lano je napínáno tažnou silou 1,2 N, určenou obecně druhým ze vztahů (5).

c) Je-li $m_1 = m_2 = 0{,}4$ kg a $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 45°$, je $p_1 = 0{,}5$ a $p_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Potom lze výraz (3) upravit na

$$a = \frac{p_1 - p_2}{2} g . \tag{6}$$

Protože $p_2 > p_1$, je $a < 0$. Předpokládali jsme však, že kladnou orientaci má vektor síly F_1. Proto má zrychlení a a také směr pohybu soustavy stejnou orientaci jako síla F_2.

Vztah (4) pro sílu F lze upravit na tvar

$$F = \frac{m_2 g (p_1 + p_2)}{2} . \tag{7}$$

Zrychlení soustavy a tažná síla lana mají pro dané hodnoty podle vztahů (6) a (7) velikosti

$$a = \frac{1 - \sqrt{2}}{4} . 10 \text{ m s}^{-2} = - 1{,}035 \text{ m s}^{-2} ,$$

$$F = \frac{0{,}4 . 10 (1 + \sqrt{2})}{4} \text{ kg m s}^{-2} = 2{,}4 \text{ N}.$$

Zrychlení soustavy a velikost tažné síly napínající lano jsou obecně vyjádřeny vztahy (6) a (7); v uvažovaném případě má zrychlení hodnotu 1,035 m s^{-2}, tažná síla napínající lano 2,4 N.

8. Dvě hvězdy, které tvoří společně dvojhvězdu, se pohybují ve velké vzdálenosti od jiných těles o velikých hmotnostech navzájem relativně po kružnicích.

Jaké jsou jejich dráhy vzhledem k ostatním hvězdám, jejichž vlastní pohyby neuvažujeme,

a) jsou-li hmotnosti obou hvězd stejně veliké;

b) je-li hmotnost jedné z nich dvakrát větší než hmotnost druhé;

c) je-li hmotnost jedné hvězdy značně veliká ve srovnání s hmotností druhé hvězdy?

d) Určete poměr rozměrů drah a dráhových rychlostí v úlohách a), b), c).

Sestrojte k úlohám a), b), c) náčrtky.

Dvě tělesa, která na sebe navzájem působí gravitačními silami, obíhají kolem společného těžiště.

Označení veličin: Hmotnost první hvězdy je m_1, hmotnost druhé m_2; poloměry kruhových drah jsou r_1 u první, r_2 u druhé hvězdy. Dráhové rychlosti označíme v_1 u první, v_2 u druhé hvězdy; zrychlení první hvězdy je a_1, druhé a_2.

Řešení: Dvě hvězdy, které na sebe působí navzájem stejnými gravitačními silami, obíhají kolem společného těžiště, nepůsobí-li na ně gravitačními silami jiná tělesa o velkých hmotnostech. Je-li dráha každé z těchto hvězd kruhová vzhledem k druhé z nich, jsou obě hvězdy od sebe stále stejně vzdáleny. Proto obíhají kolem společného těžiště po kruhových dráhách se stejnými oběžnými dobami $T_1 = T_2 = T$. Společné těžiště obou hvězd je vůči stálicím v klidu. Poloměr kruhové dráhy první z hvězd označíme r_1, druhé r_2.

První hvězda působí gravitační silou F na druhou a uděluje jí dostředivé zrychlení a_2. Druhá hvězda působí na první stejně velikou silou a uděluje jí zrychlení a_1. Protože

$$a_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} r_1 \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r_2,$$

platí vztah

$$F = \frac{4\pi^2}{T^2} m_1 r_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} m_2 r_2,$$

z něhož vychází

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (1)$$

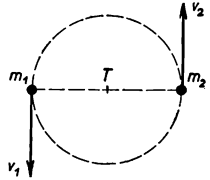
Pro rychlosti rovnoměrných pohybů po kružnici u uvažovaných hvězd vychází

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T} \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{2\pi r_2}{T},$$

takže

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (2)$$

a) Je-li $m_1 = m_2$, je podle vztahu (2) také $r_1 = r_2$ a $v_1 = v_2$. Obě hvězdy obíhají kolem společného těžiště stejnou rychlostí po téže kružnici a jsou od sebe odchýleny

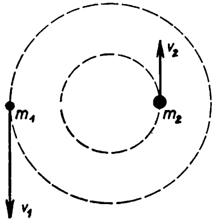


Obr. 55 a

o 180° (obr. 55a). Těžiště je vůči stálicím v klidu.

b) Je-li $m_2 = 2\,m_1$, pak je podle vztahu (2) $r_1 = 2\,r_2$ a $v_1 = 2\,v_2$.

Hvězda o menší hmotnosti obíhá kolem společného těžiště obou hvězd dvojnásobnou rychlostí než hvězda větší hmotnosti a po kruhové dráze o poloměru dvakrát větším, než je poloměr dráhy první hvězdy. Obě hvězdy jsou také na opačných stranách od společného těžiště, které je vůči stálicím v klidu (obr. 55b).

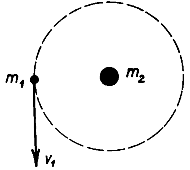


Obr. 55 b

c) Je-li $m_2 \gg m_1$, pak je $r_1 \gg r_2$ a $v_1 \gg v_2$ ($r_2 \to 0$, $v_2 \to 0$). Poloměr dráhy hvězdy větší hmotnosti i její rychlost jsou vzhledem k poloměru kruhové dráhy a vzhledem k rychlosti hvězdy o menší hmotnosti zanedbatelně malé.

Střed hvězdy větší hmotnosti splývá se

společným těžištěm obou hvězd a je vzhledem ke stálicím v klidu. Hvězda malé hmotnosti obíhá kolem druhé hvězdy po kruhové dráze (obr. 55c).



Obr. 55 c

9. Určete tuhost pružiny a závislost její potenciální energie na prodloužení.

Potřeby: Pružina s ukazovatelem, dřevěné měřítko s milimetrovou stupnicí, stojany na upevnění pružiny a měřítka, milimetrový papír.

Návod: Pružina prodloužená o délku s je napjata silou F, která je přímo úměrná prodloužení s pružiny, takže platí

$$F = k\,s\,, \tag{1}$$

kde k je konstanta pro danou pružinu charakteristická a nazývá se tuhost pružiny.

Síla napínající pružinu koná po dráze s práci A, která se projeví jako přírůstek potenciální energie napjaté pružiny. Velikost této práce nemůžeme počítat podle vzorce $A = F\,s$, označíme-li písmenem F sílu, kterou je napjata pružina při prodloužení o délku s. Podle vztahu (1) se totiž během napínání měnila velikost napínající síly od nejmenší hodnoty $F_0 = 0$ (při nenapjaté pružině) až po největší hodnotu F (při prodloužení pružiny o délku s).

Práci A můžeme však vypočítat, předpokládáme-li, že po celé délce s působila na pružinu jistá průměrná konstantní síla F_p, která způsobila stejné prodloužení pružiny jako skutečně působící síla. Protože velikost síly, která napíná pružinu, roste rovnoměrně s prodloužením pružiny, je velikost průměrné síly rovna aritmetickému průměru sil působících na počátku a na konci dráhy s. Proto je potenciální energie napjaté pružiny $W_p = A = F_p s = \frac{1}{2} F s$, a dosadíme-li za F ze vztahu (1), je

$$W_p = \tfrac{1}{2} k s^2 . \tag{2}$$

Otázky: 1. Jaký fyzikální význam má tuhost pružiny?
2. Co je jednotkou tuhosti pružiny?
3. Vyjádřete větou závislost velikosti potenciální energie napjaté pružiny na prodloužení pružiny.

Odpovědi na otázky: 1. Tuhost pružiny je podle vztahu (1) určena výrazem $k = \dfrac{F}{s}$. Z něho je patrno, že tuhost pružiny je číselně rovna síle, která udržuje pružinu napjatou při jejím prodloužení nebo zkrácení o délkovou jednotku.

2. Jednotkou tuhosti pružiny v soustavě SI je $[k] = \mathrm{N\,m^{-1}}$, v soustavě kilopondové $[k] = \mathrm{kp\,m^{-1}}$. Při proměřování dané pružiny budeme užívat jednotek $[k] = \mathrm{p\,cm^{-1}}$.

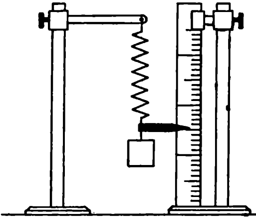
3. Potenciální energie napjaté pružiny prodlou-

žené o délku s je podle vztahu $W_p = A = \frac{1}{2} F s$ rovna práci, kterou vykoná proměnná síla napínající pružinu při prodloužení nebo stlačení pružiny o délku s. V uvedeném vztahu značí F velikost této proměnné síly v okamžiku, kdy je pružina prodloužena nebo zkrácena o délku s.

Podle vztahu (2) je potenciální energie napjaté pružiny přímo úměrná dvojmoci délky s, o kterou byla pružina při deformování tahem nebo tlakem prodloužena nebo zkrácena. Konstantou úměrnosti je polovina tuhosti pružiny.

Při proměřování dané pružiny budeme potenciální energii měřit v jednotkách $[W_p] = \text{p cm} = 10^{-5}\,\text{kp m}$.

Měření: 1. Na háček stojanu zavěsíme pružinu s ukazovatelem (obr. 56). Aby se pružina narovnala, zavěsíme na její spodní konec lehké závaží s háčkem. Závaží necháme na pružině během měření trvale



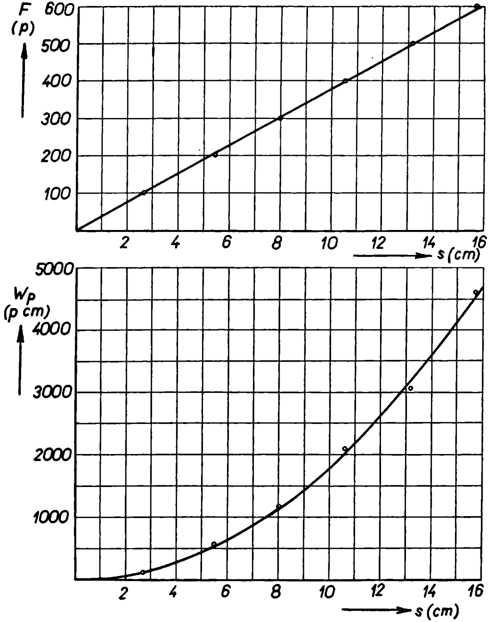
Obr. 56

připevněné a s jeho tíhou nepočítáme. Zjistíme údaj, který ukazuje ukazovatel na vertikálně postaveném měřítku, a zapíšeme ho na příslušné místo v třetím sloupci tabulky.

2. Napínáme pružinu postupně závažími 100 p, 200 p, 300 p . . . Při každém zatížení pružiny zjistíme údaj ukazovatele na stupnici měřítka a zapíšeme ho do třetího sloupce tabulky k příslušné síle pružnosti.

3. Po zavěšení posledního závaží ubíráme postupně závaží po 100 p a údaje ukazovatele na měřítku při klesajícím zatížení zaznamenáme do čtvrtého sloupce tabulky k příslušným silám pružnosti. Údaj ukazovatele při největším užitém zatížení zapíšeme do třetího i čtvrtého sloupce tabulky.

Měření č.	Síla F [p]	Údaj ukazovatele [cm]		Střední hodnota obou údajů [cm]	Prodloužení s [cm]	$k = \frac{F}{s}$ [p cm^{-1}]	W_p [p cm]
		při rostoucím zatížení	při klesajícím zatížení				
1	0	31,2	31,2	31,2	0	0	0
2	100	33,8	34,0	33,9	2,7	37,0	135
3	200	36,6	36,5	36,55	5,35	37,4	535
4	300	39,2	39,1	39,15	7,95	37,7	1 190
5	400	41,8	41,8	41,8	10,6	37,9	2 120
6	500	44,4	44,5	44,45	13,25	37,7	3 310
7	600	47,0	47,0	47,0	15,8	37,9	4 740
		Střední tuhost pružiny				37,6	



F
(p)
600
500
400
300
200
100
2
4
6
8
10
12
14
16
s (cm)
5000
Wp
(p cm)
4000
3000
2000
1000
2
4
6
8
10
12
14
16
s (cm)

Obr. 57 a, b

4. Z naměřených hodnot ve sloupci druhém, třetím a čtvrtém vypočítáme střední hodnoty obou údajů ukazovatele na stupnici, prodloužení pružiny, hodnotu podílu $\frac{F}{s}$ a velikost potenciální energie W_p napjaté pružiny. Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabulky.

5. Za tuhost pružiny pokládáme aritmetický průměr všech hodnot k získaných z měření a zaznamenaných v sedmém sloupci tabulky. Tento průměr má velikost $k = 37{,}6$ p cm^{-1}.

6. Aritmetický průměr poměru $k = \frac{F}{s}$ je 37,6 p cm^{-1}. Největší odchylku 0,6 p cm^{-1} od tohoto průměru má hodnota získaná druhým měřením. Tato největší odchylka má vzhledem k aritmetickému průměru relativní velikost $\frac{0{,}6}{37{,}6} \cdot 100\,\% < 2\,\%$.

Dá se tedy soudit, že podíl $\frac{F}{s}$ má konstantní hodnotu.

7. Sestrojíme na milimetrový papír graf závislosti síly F na prodloužení s pružiny a graf závislosti potenciální energie W_p na prodloužení s pružiny (obr. 57a, b).

Druhé kolo soutěže

1. Kolona vojenských vozidel o délce l se pohybuje rychlostí v_1. Od čela kolony k poslednímu vozidlu projela spojka průměrnou rychlostí v_2 a zpět rychlostí v_3. Jakou dobu k tomu potřebovala a jakou dráhu spojka projela?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $l = 2$ km, $v_1 = 30$ km h^{-1},

a) $v_2 = 50$ km h^{-1}, $v_3 = 60$ km h^{-1};

b) $v_3 = v_2 = 2\,v_1$.

Označení veličin: Spojka ujela první úsek dráhy od čela kolony k poslednímu vozidlu za čas t_1 a druhý úsek, zpět k čelu kolony, za čas t_2. Oba úseky projela za dobu $t = t_1 + t_2$. V soustavě SI mají dané veličiny hodnoty $l = 2 \,.\, 10^3$ m, $v_1 = \frac{25}{3}$ m s^{-1}, $v_2 = \frac{125}{9}$ m s^{-1}, $v_3 = \frac{50}{3}$ m s^{-1}.

Řešení: Na prvním úseku dráhy má spojka relativní rychlost vzhledem ke koloně $v_1 + v_2$, na druhém úseku $v_3 - v_1$. Platí tedy

$$t_1 = \frac{l}{v_1 + v_2}, \quad t_2 = \frac{l}{v_3 - v_1}$$

a

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} + \frac{l}{v_3 - v_1} = \frac{v_2 + v_3}{(v_1 + v_2)(v_3 - v_1)}\, l\,. \tag{1}$$

Při jízdě od čela kolony k poslednímu vozidlu ujela spojka vzdálenost $s_1 = v_2 t_1$, od posledního vozidla k čelu kolony dráhu $s_2 = v_3 t_2$. Projela tedy celkovou dráhu

$$s = s_1 + s_2 = \frac{l v_2}{v_1 + v_2} + \frac{l v_3}{v_3 - v_1} =$$

$$= \frac{2v_2v_3 - v_1v_2 + v_1v_3}{(v_1 + v_2)(v_3 - v_1)} l \,. \qquad (2)$$

Ze vztahu (1) vyplývá, že musí být $v_3 > v_1$, má-li mít úloha řešení.

Jiný způsob řešení: Při jízdě od čela kolony k poslednímu vozidlu ujede spojka za dobu t_1 dráhu $s_1 = l - v_1t_1$ rychlostí v_2. Platí tedy rovnice $v_2t_1 = = l - v_1t_1$, ze které vypočítáme

$$t_1 = \frac{l}{v_1 + v_2},$$

což souhlasí se vztahem (1). Dráhu s_2 od posledního vozidla k čelu kolony vykoná spojka rychlostí v_3 za čas t_2, takže $s_2 = l + v_1t_2 = v_3t_2$. Odtud určíme

$$t_2 = \frac{l}{v_3 - v_1}$$

jako ve vztahu (2).

Dráha, kterou spojka projela, je určena vztahem (2) a doba k tomu potřebná vztahem (1).

a) Pro hodnoty dané v úloze a) vychází

$$t = 2 \,.\, 10^3 \, \frac{3 \,.\, (125 + 150)}{(75 + 125)(50 - 25)} \,.$$

$$\cdot \mathrm{m\ m\ s^{-1}\ m^{-1}\ s\ m^{-1}\ s} = 330\ \mathrm{s},$$

$$s = 2 \,.\, 10^3 \, \frac{2 \,.\, 125 \,.\, 50 - 25 \,.\, 125 + 3 \,.\, 25 \,.\, 50}{(125 + 75)(50 - 25)}$$

$$\mathrm{m\ m\ s^{-1}\ m^{-1}\ s} = 5\,250\ \mathrm{m}.$$

Spojka projela vzdálenost od čela pohybující se kolony k poslednímu vozidlu a zpět za 5 minut 30 sekund a ujela při tom dráhu 5,25 km.

b) Dosadíme-li za v_2 a v_3 do vztahů (1) a (2) hodnoty $v_2 = 2\,v_1$ a $v_3 = 2\,v_1$, dostaneme

$$t = \frac{4l}{3v_1} = \frac{8\,000}{25}\,\text{m}\,\text{m}^{-1}\text{s} = 320\,\text{s}.$$

$$s = l\,\frac{8v_1^2 - 2\,v_1^2 + 2v_1^2}{3v_1^2} = \frac{8l}{3} =$$

$$= \frac{16\,000}{3}\,\text{m}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}^2 = 5\,333\,\frac{1}{3}\,\text{m}.$$

K projetí dráhy od čela pohybující se kolony k poslednímu jejímu vozidlu a zpět potřebovala spojka čas 5 minut 20 sekund a ujela celkovou dráhu $5\frac{1}{3}$ km.

2. Na loďce nacházející se na klidné vodní hladině stojí člověk, který má u sebe dvě tělesa stejné hmotnosti. Tělesa jedno po druhém hodí ven z loďky ve vodorovném směru, rovnoběžně se směrem podélné osy loďky rychlostí v vzhledem k loďce.

a) Určete rychlost loďky po druhém hodu, je-li hmotnost loďky s člověkem m a hmotnost jednoho tělesa $m'(m' < m)$.

b) Dokažte, že kinetická energie loďky a člověka je po druhém hodu více než čtyřnásobně větší než po prvním hodu.

Označení veličin: Rychlost těles vyhazovaných z loďky označíme v, rychlost loďky po vyhození prvního tělesa v_1, rychlost loďky po vyhození druhého tělesa v_2. Loďka má po vyhození prvního tělesa kinetickou energii W_1, po vyhození druhého tělesa W_2.

Řešení: a) Úlohu budeme řešit užitím zákona zachování hybnosti. Při vyhození prvního tělesa platí $m'v = v_1 (m + m')$, takže

$$v_1 = \frac{m'v}{m + m'}; \tag{1}$$

při vyhození druhého tělesa platí $m'v = m(v_2 - v_1)$, odkud určíme

$$v_2 = \frac{mv_1 + m'v}{m} = v_1 + \frac{m'v}{m} = \frac{m'v}{m + m'} + \frac{m'v}{m} =$$

$$= m'v \frac{2m + m'}{m(m + m')}. \tag{2}$$

Rychlost loďky po vyhození druhého tělesa je určena výrazem (2).

b) Výraz (2) můžeme podle (1) upravit na tvar

$$v_2 = \frac{2m + m'}{m} v_1.$$

Proto je

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2m + m'}{m}.$$

Protože kinetická energie pohybující se loďky je přímo úměrná druhé mocnině její rychlosti, platí

$$\sqrt{\frac{W_2}{W_1}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2m + m'}{m} = 2 + \frac{m'}{m} > 2.$$

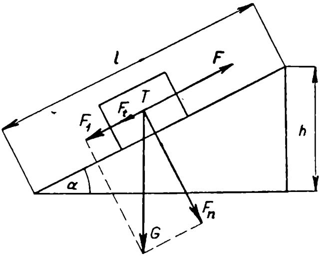
Umocníme-li nerovnost $\sqrt{\frac{W_2}{W_1}} > 2$ dvěma,
vychází $\frac{W_2}{W_1} > 4$, takže

$$W_2 > 4\,W_1\,,$$

což se mělo dokázat.

3. Nakloněná rovina jako zvedací stroj má délku l a proměnnou výšku h. Její účinnost závisí na výšce h. Stanovte tuto závislost a dokažte, že účinnost nakloněné roviny se zvětšuje se vzrůstající výškou. Součinitel smykového tření je f.

Označení veličin: Pohybovou složku tíhové síly tělesa zvedaného po nakloněné rovině označíme F_1, kolmou tlakovou sílu tělesa na nakloněnou rovinu F_n (obr. 58). Třecí síla má hodnotu F_t. Uži-



Obr. 58

tečnou práci vykonanou nakloněnou rovinou budeme značit A_1, práci vykonanou vnější silou A, vnější sílu F a účinnost nakloněné roviny η. Tíhové zrychlení $g = 10$ m s^{-2}, hmotnost zvedaného tělesa je m. Předpokládáme, že se zvedané těleso pohybuje po nakloněné rovině rovnoměrně.

Řešení: Má-li se těleso zvedat po nakloněné rovině rovnoměrným pohybem, musí vnější síla F být v rovnováze s pohybovou složkou F_1 tíhy tělesa a s třecí silou $F_t = f\,F_n$. Síly F_1 a F_t jsou souhlasně rovnoběžné. Síla F má tedy velikost

$$F = F_1 + F_t = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha =$$

$$= mg\left(\frac{h}{l} + f\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}\right). \qquad (1)$$

Tato síla vykoná při zvedání tělesa po celé délce nakloněné roviny práci

$$A = F\,l = m\,g\,(h + f\,\sqrt{l^2 - h^2}). \qquad (2)$$

Práce vynaložená na překonání třecí síly je neužitečná. Nakloněná rovina koná užitečnou práci jen tím, že zvedá břemeno do výšky h. Tuto užitečnou práci koná síla $F_1 = m\,g\sin\alpha = m\,g\,\frac{h}{l}$ po dráze l, takže nakloněná rovina vykoná práci

$$A_1 = F_1\,l = m\,g\,\frac{h}{l}\,l = m\,g\,h, \qquad (3)$$

jak bylo možno odvodit také přímo ze vztahu $A_1 = G\,h = m\,g\,h$.

Účinnost nakloněné roviny je určena poměrem

$$\eta = \frac{A_1}{A} = \frac{mgh}{mg\,(h + f\sqrt{l^2 - h^2})} = \frac{h}{h + f\sqrt{l^2 - h^2}}. \tag{4}$$

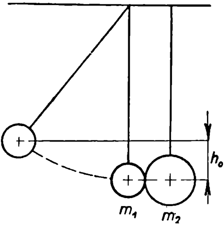
Vztah (4) upravíme na tvar

$$\eta = \frac{1}{1 + f\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - 1}}.$$

Zvětšuje-li se h, pak se výraz $\frac{l^2}{h^2}$ zmenšuje, zmenšuje se tedy i hodnota jmenovatele zlomku na pravé straně posledního výrazu. Proto účinnost nakloněné roviny roste, jestliže se zvětšuje výška nakloněné roviny.

Závislost účinnosti nakloněné roviny na její výšce vyjadřuje vztah (4).

4. Dvě dokonale pružné koule o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšeny na svislých nitích tak, že



Obr. 59

vzdálenosti středů koulí od bodů závěsů jsou stejné a že se koule právě dotýkají (obr. 59). Kouli hmotnosti m_1 vychýlíme do výšky h_0 a pak ji uvolníme.

a) Určete, do jaké maximální výšky vystoupí každá z koulí po rázu, zanedbáme-li odpor vzduchu a hmotnost nití.

b) Jaký je směr rychlostí obou koulí po rázu, jestliže

α) $m_1 < m_2$,

β) $m_1 \ll m_2 \, (m_1 \to 0)$,

γ) $m_1 = m_2$,

δ) $m_1 > m_2$?

Označení veličin: Kouli hmotnosti m_1 budeme označovat jako kouli první, kouli o hmotnosti m_2 jako kouli druhou. Rychlost první koule před rázem je v_1, po rázu w_1; druhá koule má po rázu rychlost w_2. První koule vystoupí po rázu do výšky h_1, druhá do výšky h_2. Kladně orientujeme směr rychlosti první koule před rázem. Tíhové zrychlení označíme g.

Řešení: Ráz dvou dokonale pružných koulí rozdělíme na dvě fáze. V první fázi působí na sebe obě koule vzájemně silami, deformují se a vyrovnávají si své rychlosti. V okamžiku, kdy dosáhnou stejné rychlosti v, přestanou na sebe působit silami a dále se již nedeformují. Hybnost obou koulí na počátku rázu je stejná jako při ukončení stlačování, což lze vyjádřit rovnicí $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$, takže

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \,. \qquad (1)$$

Po ukončení první fáze, stlačování, začnou obě koule nabývat původního tvaru (vzpružování). Přitom na sebe působí vzájemně silami, a proto se jejich rychlosti začnou různit, takže se při dokončení vzpružování od sebe odrazí. Během vzpružování se elastická energie, kterou obě koule získaly při deformaci, mění beze zbytku v energii kinetickou. Protože vzpružování probíhá u každé koule stejně jako u ní probíhalo stlačování, je změna hybnosti u každé koule během druhé fáze rázu stejná jako v průběhu první fáze. Platí tedy pro změnu hybnosti první koule během rázu rovnice $m_1 (v - v_1) = m_1 (w_1 - v)$, z níž vychází

$$w_1 = 2v - v_1 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} . \tag{2}$$

Obdobně platí pro druhou kouli rovnice $m_2 v = m_2 (w_2 - v)$, takže

$$w_2 = 2v = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} . \tag{3}$$

Vztahy (2) a (3) lze odvodit ještě jinak:

Kinetická energie první koule před rázem se při deformování obou koulí mění částečně v energii elastickou, při vzpružování se však tato elastická energie mění beze zbytku v kinetickou energii obou koulí. Podle zákona zachování energie platí

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 w_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 w_2^2 .$$

Protože izolovaná soustava obou koulí má stejnou hybnost na konci rázu jako na jeho počátku, platí také rovnice

$$m_1 v_1 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \,.$$

Obě rovnice tvoří soustavu rovnic o dvou neznámých, jež můžeme upravit na tvar

$$m_2 w_2^2 = m_1 (v_1^2 - w_1^2) = m_1 (v_1 - w_1)(v_1 + w_1), \quad (4a)$$

$$m_2 w_2 = m_1 (v_1 - w_1) \,. \quad (4b)$$

Za předpokladu, že $w_2 \neq 0$, můžeme dosadit z rovnice (4b) za $m_1 (v_1 - w_1)$ hodnotu $m_2 w_2$ do rovnice (4a). Tak získáme rovnici

$$v_1 + w_1 = w_2 \,. \quad (4c)$$

Řešením rovnic (4b) a (4c) dojdeme ke vztahům (2) a (3).

Soustavu rovnic (4a) a (4b) lze také řešit tak, že vypočítáme z rovnice (4b)

$$w_2 = \frac{m_1 (v_1 - w_1)}{m_2} \quad (4d)$$

a dosadíme tuto hodnotu do rovnice (4a). Po úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$(m_1 + m_2)\, w_1^2 - 2\, m_1 v_1 w_1 + v_1^2 (m_1 - m_2) = 0 \,,$$

jejíž kořeny jsou

$$w_1' = v_1 \quad \text{a} \quad w_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \,.$$

Po dosazení za w_1 do rovnice (4d) vypočítáme

$$w_2' = 0 \quad \text{a} \quad w_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \,.$$

První dvojice kořenů není fyzikálně možná, neboť je nemožné, aby vektor rychlosti první koule nezměnil při rázu svou orientaci, jestliže by druhá koule zůstala po rázu v klidu. Hodnoty w_1 a w_2 jsou shodné s hodnotami (2) a (3).

Výšky h_1 a h_2 určíme ze zákona zachování mechanické energie. Kinetická energie každé koule v okamžiku ukončení rázu se rovná její potenciální energii tíhové v okamžiku, kdy koule dosáhne po odrazu příslušné maximální výšky h_1 nebo h_2. Proto platí pro první kouli rovnice $\frac{1}{2} m_1 w_1^2 = m_1 g h_1$, takže

$$h_1 = \frac{w_1^2}{2g} = \frac{v_1^2 (m_1 - m_2)^2}{2g (m_1 + m_2)^2}$$

a obdobně

$$h_2 = \frac{w_2^2}{2g} = \frac{2m_1^2 v_1^2}{g(m_1 + m_2)^2} \,. \tag{5}$$

Protože pro stav před rázem platí

$$h_0 = \frac{v_1^2}{2g}, \text{ je } v_1 = \sqrt{2h_0 g},$$

takže

$$h_1 = \frac{h_0 (m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad \text{a} \quad h_2 = \frac{4m_1^2 h_0}{(m_1 + m_2)^2} \,. \tag{6}$$

Maximální výšky, kterých mohou koule po rázu dosáhnout, jsou určeny výrazy (6).

b) Orientaci rychlostí obou koulí po rázu určíme ze vztahů (2) a (3).

α) Je-li $m_1 < m_2$, je $w_1 < 0$ a $w_2 > 0$. Narazí-li tedy koule o menší hmotnosti na klidnou kouli o větší hmotnosti, mění se po rázu velikost a orientace vektoru narážející koule, klidná koule o větší hmotnosti se uvede do pohybu směrem, který měla před rázem rychlost koule o menší hmotnosti.

β) Je-li $m_1 \ll m_2$ ($m_1 \to 0$), je $w_1 < 0$ ($w_1 \to -v_1$) a $w_2 \to 0$. Narazí-li na klidnou kouli o veliké hmotnosti koule o hmotnosti zanedbatelně malé vzhledem k hmotnosti koule klidné, odrazí se koule malé hmotnosti a její rychlost změní svou orientaci. Druhá koule zůstává v klidu.

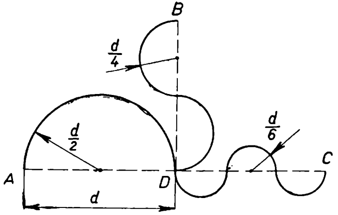
γ) Platí-li $m_1 = m_2$, pak $w_1 = 0$ a $w_2 = v_1$. Mají-li obě koule stejnou hmotnost, pak po rázu přejde pohybující se koule do klidu a klidná koule se pohybuje po rázu stejně velikou rychlostí a stejným směrem jako se před rázem pohybovala koule, která na ni narazila.

δ) Je-li $m_1 > m_2$, pak $w_1 > 0$ a $w_2 > 0$. Má-li narážející koule větší hmotnost než koule klidná, pohybují se obě koule po rázu směrem, kterým se před rázem pohybovala koule o větší hmotnosti.

14. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE D

První kolo soutěže

1. Na hladkém ledě rozsáhlého rybníka byla určena tři stanoviště A, B, C pro tři bruslaře a cíl D (obr. 60). Cíl D půlí spojnici stanovišť A a C, spoj-



Obr. 60

nice stanoviště B s cílem D je kolmá na spojnici AC. Přitom $AD = BD = CD = 100$ m. Dráha předepsaná pro bruslaře ve stanovišti A je půlkružnice nad úsečkou AD, dráha pro bruslaře ve stanovišti B je složena ze dvou stejných půlkružnic nad úsečkou BD (půlkružnice mají poloměr $\frac{BD}{4}$ a jsou na různých stranách úsečky BD), dráha pro bruslaře ve stanovišti C je složena ze tří stejných půlkružnic nad spojnicí CD (půlkružnice mají poloměry $\frac{CD}{6}$ a jsou střídavě na jedné a druhé straně spojnice CD). Bruslař ze stanoviště A pojede stálou rychlostí 5,0 m/s.

Jakou stálou rychlostí musí projet svou dráhu bruslař ze stanoviště B, aby dosáhl cíle o 2,0 s později než bruslař ze stanoviště A? Jakou stálou rychlostí musí projet svou dráhu bruslař ze stanoviště C, aby dostihl cíle o 4,0 s později než bruslař ze stanoviště A?

Všichni bruslaři vyjedou ze svých stanovišť současně.

Označení veličin: Dráhu z A do D označíme s_1, z B do D s_2, z C do D s_3; vzdálenost $AD = BD = CD = d = 100$ m. Pak $s_1 = \frac{\pi d}{2}$, $s_2 = 2\frac{\pi d}{4}$, $s_3 = 3\frac{\pi d}{6}$. Je tedy $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{\pi d}{2} = 157$ m. Rychlost prvního bruslaře je $v_1 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. První bruslař dosáhne cíle za čas t_1, druhý za čas $t_2 = t_1 + t$, třetí za čas $t_3 = t_1 + 2\,t$, kde $t = 2$ s.

Řešení: První bruslař ujede dráhu s_1 za dobu

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\pi d}{2v_1} = \frac{50\pi}{5}\text{s} = 31{,}4 \text{ s},$$

druhý za dobu

$$t_2 = \frac{\pi d}{2v_1} + t = \frac{\pi d + 2v_1 t}{2v_1},$$

třetí za dobu

$$t_3 = t_1 + 2\,t = \frac{\pi d + 4v_1 t}{2v_1}.$$

Druhý bruslař se tedy bude pohybovat rychlostí

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{\pi d}{2t_2} = \frac{\pi d}{2(t_1 + t)} = \frac{\pi d v_1}{\pi d + 2v_1 t} =$$

$$= \frac{157}{33{,}4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a třetí rychlostí

$$v = \frac{s_3}{t_3} = \frac{\pi d}{2t_3} = \frac{\pi d v_1}{\pi d + 4v_1 t} = \frac{157}{35{,}4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4{,}44 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Druhý bruslař se pohybuje stálou rychlostí 4,7 m/s, třetí rychlostí 4,44 m/s. Obecně jsou tyto rychlosti určeny výrazy (1) a (2).

2. Nákladní auto s nákladem o celkové tíze 2 500 kp se pohybuje rovnoměrným pohybem po přímé cestě, která na každých 100 m délky stoupá o 14 m.

Vypočítejte výkon auta, pohybuje-li se rychlostí $v = 18$ km/h. K tření nepřihlížíme.

Označení veličin a dané hodnoty: Tíhu automobilu s nákladem označíme $G = 2\,500$ kp. Cesta stoupá na délce $s = 100$ m o výšku $h = 14$ m. Rychlost auta $v = \frac{18\,000}{3\,600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Práci automobilem vykonanou označíme A, jeho výkon P.

Řešení: Automobil vykoná rovnoměrným pohybem dráhu s rychlostí v za čas $t = \frac{s}{v}$. Jeho výkon je

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Ghv}{s} = \frac{2\,500 \,.\, 14 \,.\, 5}{100} \frac{\text{kp m m}}{\text{sm}} =$$

$$= 1\,750 \frac{\text{kp m}}{\text{s}} = 23\frac{1}{3}\ \text{k}.$$

Výkon automobilu je $23\frac{1}{3}$ k.

3. Krychli z lipového dřeva o tíze 10 kp zvedneme nejprve ve vzduchu do výše $h = 0{,}75$ m. Podruhé ji úplně ponořenou pod hladinu rybníka vtlačíme do hloubky o $h = 0{,}75$ m větší. Měrná tíha lipového dřeva je $\gamma = 450$ kp/m^3.

Která z obou prací na uvedených dráhách je větší a kolikrát je větší? O jakou hodnotu se obě práce liší?

Označení veličin: Krychle je ve vodě nadlehčována silou F' a je vtlačována ve vodě do hloubky h. Ve vzduchu je zvedána do stejně veliké výšky h. Měrná tíha vody je $\gamma_1 = 1\,000\ \frac{\text{kp}}{\text{m}^3}$. Práci vykonanou při zvedání krychle ve vzduchu označíme A, práci při jejím vtlačování do vody A'.

Řešení: Velikost síly F' vypočítáme podle Archimédova zákona. Protože objem krychle je $V = \frac{G}{\gamma}$, je ve vodě nadlehčována silou $F' = V\gamma_1 = \frac{G\gamma_1}{\gamma}$. Při ponoření krychle do hloubky h ve vodě vykoná vnější síla práci A'. Protože $F' > G$, je $A' = -(G - F') \,.\, h = -\left(G - G\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) h = -G \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} h = 10 \frac{1\,000 - 450}{450} \frac{3}{4} \text{ kp m} = \frac{550}{45}\frac{3}{4} \text{kp m} = \frac{55}{6}$ kp m.

Práce vykonaná při vyzvednutí krychle ve vzduchu do výšky h je $A = G\,h = 10 \,.\, 0{,}75$ kp m $= 7{,}5$ kp m.

Rozdíl $A' - A = \dfrac{Gh}{\gamma}(-\gamma + \gamma_1 - \gamma) = \dfrac{Gh}{\gamma}(\gamma_1 - 2\gamma)$.

Po dosazení daných hodnot

$$A' - A = \frac{10 \,.\, 0{,}75(1\,000 - 900)}{450} \text{ kp m} = \frac{5}{3} \text{ kp m}.$$

Podíl $\dfrac{A'}{A} = -\dfrac{Gh(\gamma - \gamma_1)}{\gamma} \cdot \dfrac{1}{Gh} = \dfrac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}$.

Po dosazení daných hodnot

$$\frac{A'}{A} = \frac{550}{450} = \frac{11}{9}.$$

Práce potřebná k ponoření krychle ve vodě je rovna $\dfrac{11}{9}$ práce potřebné k jejímu vyzdvižení ve vzduchu do stejné výšky jako je hloubka, do které byla ponořena. Rozdíl obou prací je $\dfrac{5}{3}$ kp m.

Obecně:

$$A' - A = \frac{Gh}{\gamma}(\gamma_1 - 2\,\gamma), \quad \frac{A'}{A} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}.$$

4. a) Na misku rovnoramenných vah položíme nádobu s vodou a dřevěný špalíček; na druhé misce je vyvážíme.

Poruší se rovnováha, dáme-li špalík do vody v nádobě?

b) Na miskách rovnoramenných vah jsou dvě stejné nádoby naplněné až po okraj vodou. V jedné z nich plove dřevěný špalík. Je na vahách rovnováha?

c) Na misku rovnoramenných vah položíme nádobu s vodou a na druhé misce ji vyvážíme. Poruší se rovnováha, jestliže ponoříme do vody prst tak, že se nádoby nedotýkáme?

d) Na misku vah postavíme nádobu s vodou a na závěs misky upevníme nit se závažím zavěšeným tak, že závaží je nad povrchem vody v nádobě; na druhé misce vyvážíme.

Poruší se rovnováha, jestliže snížíme závaží na niti tak, aby bylo ponořeno do vody a nedotýkalo se stěn ani dna nádoby?

Vysvětlete a ověřte výsledky pokusem.

Vahadlo rovnoramenných vah je rovnoramenná páka. Jestliže na rovnoramenné páce působí na obou koncích ramen souhlasným směrem stejně veliké rovnoběžné síly, je na páce rovnováha.

a) **Označení veličin:** Na jedné misce vah jsou umístěny nádoba s vodou o celkové tíze G_1 a špalík o tíze G_2, na druhé misce je závaží tíhy G.

Řešení: Leží-li špalík na misce rovnoramenných vah mimo nádobu s vodou, je na vahách rovnováha, jestliže $G = G_1 + G_2$. Ponoříme-li špalík do nádoby s vodou, je podle Archimédova zákona nadlehčován vztlakovou silou F, takže působí prostřednictvím vody v nádobě na misku vah tlakovou silou $G_2 - F$. Podle zákona o rovnosti akce a reakce působí však špalík plující na vodě na povrch vody stejně velikou opačně orientovanou silou velikosti F, takže nádoba s vodou tlačí na misku vah silou $G_1 + F$. Celková tlaková síla působící na misku vah je proto $(G_2 - F) + (G_1 + F) = G_1 + G_2 = G$.

Plove-li špalík na vodě, zůstává zachována podmínka pro rovnováhu na vahách. Rovnováha se tedy neporuší.

b) **Označení veličin:** Na jedné misce vah je postavena nádoba zcela naplněná vodou o celkové tíze G, na druhé misce je nádoba s vodou, v níž plove dřevěný špalík tíhy G_2. Voda v ní sahá až po okraj nádoby. Tíhu této druhé nádoby s vodou v ní obsaženou označíme G_1.

Řešení: Podle zákona o plování těles na kapalině se ponoří plovoucí těleso do kapaliny tak hluboko, že tíha vytlačené kapaliny se rovná tíze plovoucího tělesa. Plovoucí špalík vytlačí ze zcela naplněné nádoby množství vody o tíze G_2. Proto je $G_1 = G - G_2$. Nádoba s vodou a s plovoucím špalíkem má tedy celkovou tíhu $G_1 + G_2 = G - G_2 + G_2 = G$ stejnou jako nádoba zcela naplněná vodou, umístěná na druhé misce vah. Proto je na vahách rovnováha.

c) **Označení veličin:** Na jedné misce stojí nádoba o celkové tíze G_1, na druhé misce je závaží tíhy $G = G_1$, neboť váhy jsou v rovnováze. Prst ponořený do vody je podle Archimédova zákona vytlačován z vody silou F.

Řešení: Pokud prst není ponořen do vody, nepůsobí na misku vah žádnou tlakovou silou. Ponoříme-li ho do vody, tlačí na vodu v nádobě podle zákona o rovnosti akce a reakce takovou silou F, jakou je z vody vytlačován. Nádoba s vodou působí tedy na misku vah celkovou tlakovou silou $G_1 + F$, která je větší než tíha G závaží na druhé misce.

Rovnováha se poruší, ponoříme-li prst do nádoby s vodou. Klesne to rameno vah, na kterém je zavěšena miska zatížená nádobou s vodou.

d) **Označení veličin:** Na jedné misce vah stojí nádoba s vodou o celkové tíze G_1 a nad ní se nachází závaží tíhy G_2, upevněné nití na závěsu misky. Závaží na druhé misce má tíhu G.

Řešení: Na vahách je rovnováha, jestliže $G = G_1 + G_2$. Snížíme-li závaží tíhy G_2 tak, že se ponoří do vody, pak je toto závaží nadlehčováno podle Archimédova zákona silou F, takže působí na rameno vahadla silou $G_2 - F$. Podle zákona o rovnosti akce a reakce působí však závaží ponořené do vody na vodu stejně velikou silou F, jakou je nadlehčováno, takže nádoba s vodou tlačí na misku vah silou $G_1 + F$. Celková síla působící na vahadlo na jeho konci má velikost $G_2 - F + G_1 + F = G_1 + G_2 = G$. Protože je splněna rovnost $G_1 + G_2 = G$, neporuší se rovnováha na vahách, jestliže závaží tíhy G_2 snížíme tak, že se ponoří do kapaliny.

5. Na pozorovatelně v blízkosti děla bylo zjištěno, že dělová střela dopadla na zem za 15,0 s po záblesku u hlavně. Zadunění střely při dopadu bylo na pozorovatelně slyšet 36 s po záblesku.

Určete vzdálenost místa dopadu střely od pozorovatelny a průměrnou rychlost střely ve vodorovném směru. Rychlost zvuku je $c = 340$ m/s.

Označení veličin: Střela dopadla na zem ve vzdálenosti d od místa výstřelu. Složka rychlosti střely ve vodorovném směru měla velikost v. Mezi výstřelem a dopadem střely na zem uplynula doba $t_1 = 15$ s. Zadunění střely po jejím dopadu na zem bylo na pozorovatelně slyšet za dobu t_2 po záblesku u hlavně. Zanedbáváme velmi krátký časový interval od okamžiku, kdy střela na zem skutečně dopadla, k okamžiku, kdy tento dopad byl na pozorovatelně v blízkosti děla zjištěn.

Řešení: Střela urazila dráhu d rychlostí v za dobu

$$t_1 = \frac{d}{v}. \tag{1}$$

Zvuk urazí stejně dlouhou dráhu od místa dopadu střely k pozorovatelně za dobu $t_2 - t_1 = \frac{d}{c}$. Z této rovnice vypočítáme

$$d = c\,(t_2 - t_1). \tag{2}$$

Dosadíme za d z této rovnice do rovnice (1) a dostaneme vztah

$$v = \frac{c\,(t_2 - t_1)}{t_1}\,. \qquad (3)$$

Ze vztahů (2) a (3) určíme

$$d = 340\,(36 - 15)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{s} = 7\,140\ \mathrm{m},$$

$$v = \frac{340\,(36 - 15)}{15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}} = 476\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Střela dopadla ve vzdálenosti 7,140 km od pozorovatelny a měla ve vodorovném směru rychlost 476 m/s. Obecně jsou tyto veličiny určeny vztahy (2) a (3).

6. Kolik tepla se musí dodat 5,0 kg ledu teploty − 4 °C, aby se proměnil ve vodu 10,0 °C teplou? Měrné teplo ledu je $0{,}50\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\ deg}}$, měrné teplo vody $1{,}0\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\ deg}}$ a skupenské teplo tání ledu $80\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg}}$.

Označení veličin a dané hodnoty: Hmotnost ledu je $m = 5$ kg, jeho počáteční teplota $t_1 = -4$ °C. Teplota tání ledu je $t_0 = 0$ °C, výsledná teplota vody je $t_2 = 10$ °C. Měrné teplo ledu je $c_1 = 0{,}5\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\ deg}}$, měrné teplo vody $c_2 = 1\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\ deg}}$, skupenské teplo tání ledu má hodnotu $l_t = 80\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg}}$.

Na uvažovanou přeměnu ledu na vodu se spotřebuje teplo Q.

Řešení: Na ohřátí ledu z teploty t_1 na t_0 se spotřebuje teplo $Q_1 = c_1 (t_0 - t_1)\, m$, na jeho přeměnu na vodu teploty 0 °C je zapotřebí teplo $Q_2 = l_t m$. Teplo $Q_3 = c_2 m (t_2 - t_0)$ ohřeje na teplotu t_2 vodu vzniklou táním ledu. Celkově je třeba na uvažovanou přeměnu ledu na vodu teplo

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m\,(c_1 t_0 - c_1 t_1 + l_t + c_2 t_2 - c_2 t_0)\,. \qquad (1)$$

Pro dané hodnoty vyjde

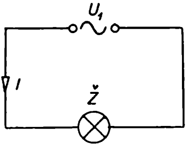
$$Q = 5\,(0{,}5\,.\,4 + 80 + 10)\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\ deg}}\,\mathrm{deg\ kg} = 460\ \mathrm{kcal}.$$

Má-li se uvažované množství ledu změnit na vodu a ohřát na danou teplotu, je nutno dodat mu teplo 460 kcal. Obecně je toto teplo určeno výrazem (1).

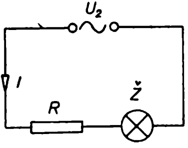
7. Žárovka na napětí 120 V svítila s plným výkonem při průchodu proudu 0,50 A.

Jak veliký odpor jí musíme předřadit při zapojení na síť 220 V, aby svítila plným výkonem?

Označení veličin a dané hodnoty: Svítí-li žárovka na napětí $U_1 = 120$ V plným výkonem, protéká obvodem proud $I = 0{,}5$ A (obr. 61a). Při napětí $U_2 = 220$ V svítí žárovka s plným výkonem, jestliže obvodem prochází stejně veliký proud I. Proto jí musíme předřadit určitý odpor R (obr. 61b).



Obr. 61 a



Obr. 61 b

Řešení: Má-li žárovkou procházet proud I, musí být na jejích svorkách napětí U_1. Protože předřazený odpor je zapojen v obvodu s žárovkou sériově, musí být na jeho svorkách napětí $U_2 - U_1$. Odporem R protéká stejně veliký proud jako žárovkou. Proto je podle Ohmova zákona

$$R = \frac{U_2 - U_1}{I}. \qquad (1)$$

Po dosazení daných hodnot vyjde

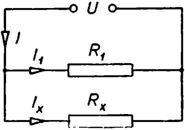
$$R = \frac{220 - 120}{0{,}5} \frac{\text{V}}{\text{A}} = 200\ \Omega.$$

Velikost předřazeného odporu je 200 Ω; je určena výrazem (1).

8. K odporu $R_1 = 36\ \Omega$ byl připojen neznámý odpor R_x takový, že jejich výsledný odpor $R = 12\ \Omega$. Celkový proud po zapojení byl $I = 5{,}0$ A.

Nakreslete schéma zapojení, určete odpor R_x, napětí na obou odporech a proudy, které jednotlivými odpory procházejí.

Označení veličin: Napětí zdroje je U, napětí na odporu R_1 označíme U_1, U_x na odporu R_x. Odporem R_1 protéká proud I_1, odporem R_x proud I_x. Protože celkový odpor obvodu $R < R_1$, jsou odpory R_1 a R_x zařazeny v paralelních větvích. Schéma obvodu je naznačeno na obrázku 62.



Obr. 62

Řešení: Protože odpory R_1 a R_x jsou zapojeny v obvodu paralelně, je celkový odpor paralelního zapojení těchto dvou odporů určen rovnicí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x}, \text{ takže } \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$$

a

$$R_x = \frac{RR_1}{R_1 - R}. \qquad (1)$$

Napětí zdroje U vypočítáme podle Ohmova zákona $U = R\,I$. Při paralelním zapojení dvou odporů do obvodu je napětí na obou odporech stejné a rovná se napětí zdroje, není-li v obvodu zařazen žádný jiný odpor. Proto platí

$$U_1 = U_x = U = R\,I. \qquad (2)$$

Větví s odporem R_1 protéká podle Ohmova zákona proud $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{R}{R_1} I$, větví s odporem R_x proud

$$I_x = \frac{U_x}{R_x} = \frac{RI}{R_x} = \frac{R_1 - R}{R_1} I . \qquad (3)$$

Dosadíme-li do výrazů (1), (2), (3) dané hodnoty, vyjde

$$R_x = \frac{RR_1}{R_1 - R} = \frac{36 \,.\, 12}{36 - 12} \, \Omega = 18 \, \Omega ,$$

$$U = U_1 = U_x = RI = 12 \,.\, 5 \text{ V} = 60 \text{ V} ,$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{60 \text{ V}}{36 \, \Omega} = \frac{5}{3} \text{ A} ,$$

$$I_x = \frac{U}{R_x} = \frac{60 \text{ V}}{18 \, \Omega} = \frac{10}{3} \text{ A}.$$

Odpor R_x je určen vztahem (1), napětí U, U_1 a U_x vztahem (2), proudy v jednotlivých větvích vztahy (3). Z těchto vztahů určíme po dosazení daných hodnot

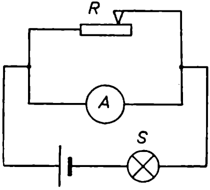
$R_x = 18 \, \Omega$, $U = U_1 = U_x = 60$ V, $I_1 = \frac{5}{3}$ A, $I_x = \frac{10}{3}$ A.

Jiný způsob řešení: Protože odpory R_1 a R_x jsou v poměru $R_1 : R_x = 36 : 18 = 2 : 1$, je poměr $I_1 : I_x = 1 : 2$ a $I_x = 2 \, I_1$. Protože při paralelním zařazení dvou větví platí $I_1 + I_x = I$, je $I_1 + 2 \, I_1 =$

$= I$, takže $I_1 = \frac{I}{3} = \frac{5}{3}$ A. Odporem R_x protéká proud $I_x = I - I_1 = I - \frac{I}{3} = \frac{10}{3}$ A.

9. Na obrázcích 63a, 63b a 63c jsou schematicky nakresleny tři elektrické obvody. Popište je a vysvětlete, jak se změní proud nebo napětí zaznamenané měřicím přístrojem, jestliže se zvětší odpor té části reostatu, která je zařazena do obvodu.

Zapojení podle obr. 63a: Ke zdroji stejnosměrného napětí je připojen obvod, do kterého jsou sériově zařazeny spotřebič S o neproměnném od-



Obr. 63 a

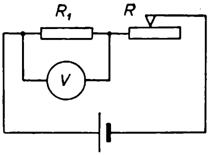
poru a paralelní rozvětvení do dvou větví. V jedné větvi je zařazen ampérmetr A o neproměnném odporu R_A, do druhé je zařazen reostat, jehož odpor R můžeme měnit.

Obvodem prochází proud I, který je dělí. Část I_R prochází odporem R a část I_A ampérmetrem. Podle Kirchhoffova zákona je $I = I_R + I_A$.

Odpor R' paralelního rozvětvení obvodu je určen vztahem $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_A}$. Zvětší-li se odpor R reostatu, zmenší se $\frac{1}{R}$, proto se zmenší i $\frac{1}{R'}$ a R' tedy vzroste. Protože napětí na paralelním rozvětvení je přímo úměrné odporu R', vzroste napětí na paralelním rozvětvení, jestliže se zvětší odpor R. Při zvětšeném napětí protéká však podle Ohmova zákona větví s ampérmetrem větší proud, neboť odpor ampérmetru se nezměnil.

Ampérmetr ukáže zvětšení proudu.

Zapojení podle obr. 63b: Ke zdroji stejnosměrného napětí je připojen jednoduchý obvod, ve kterém jsou zařazeny sériově ampérmetr A a reostat R. Obvodem prochází proud.

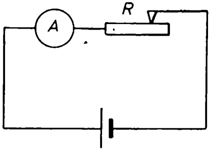


Obr. 63 b

Zvětšíme-li odpor reostatu, zvětšíme tím odpor celého obvodu, neboť celkový odpor dvou sériově zařazených spotřebičů se rovná součtu jejich odporů. Protože napětí zdroje se nemění, prochází podle Ohmova zákona obvodem při zvětšení odporu R menší proud.

Ampérmetr ukáže zmenšení proudu.

Zapojení podle obr. 63c: Ke zdroji stejnosměrného napětí je připojen obvod, ve kterém jsou sériově zařazeny dva reostaty, jeden o neproměnném odporu R_1 a druhý, jehož odpor R můžeme měnit. Ke svorkám reostatu R_1 je paralelní větví připojen voltmetr V, který měří napětí na svorkách reostatu o odporu R_1.



Obr. 63 c

Součet napětí U_1 na svorkách odporu R_1 a U_2 na svorkách odporu R je rovno napětí U zdroje. Platí tedy $U = U_1 + U_2$.

Zvětšuje-li se odpor R, vzroste napětí U_2 na svorkách reostatu o odporu R, napětí zdroje se však nezmění. Proto se zmenší napětí U_1 na odporu R_1.

Voltmetr ukáže zmenšení napětí.

Druhé kolo soutěže

1. a) Průměrná měrná tíha lidského těla je 1,10 kp/dm³. Jakou silou je nadlehčován člověk hmotnosti 77 kg, když se celý ponoří do vody?

b) Jakou silou je nadlehčován ocelový předmět hmotnosti 77 kg, je-li úplně ponořen do vody? Měrná tíha oceli je 7,7 kp/dm³.

c) Ukažte, že síly, kterými je ve vodě nadlehčováno lidské tělo a ocelový předmět o stejných hmotnostech, jsou v obráceném poměru jejich měrných tíhových sil.

Označení veličin a dané hodnoty: Průměrná měrná tíha lidského těla je $\gamma_1 = 1{,}1 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, oceli $\gamma_2 = 7{,}7 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$, vody $\gamma = 1 \frac{\text{kp}}{\text{dm}^3}$. Má-li člověk hmotnost $m_1 = 77$ kg, je jeho tíha $G_1 = 77$ kp, ocelový předmět má tíhu $G_2 = G_1$, neboť má stejnou hmotnost jako člověk. Objem lidského těla označíme V_1, objem ocelového předmětu V_2. Člověk je ve vodě nadlehčován silou F_1, je-li celý ponořen ve vodě. Za stejných podmínek je ocelový předmět nadlehčován silou F_2.

Řešení: a) Podle Archimédova zákona je člověk

objemu V_1 nadlehčován ve vodě silou $F_1 = V_1\gamma =$
$= \frac{G_1}{\gamma_1} . \gamma = \frac{77 . 1}{1{,}1}$ kp $= 70$ kp.

Člověk hmotnosti 77 kg je ve vodě nadlehčován silou 70 kp, je-li celý ponořen do vody.

b) Obdobně jako v a) zjistíme, že zcela ponořený ocelový předmět hmotnosti $m_2 = m_1 = 77$ kg je ve vodě nadlehčován silou

$$F_2 = \frac{G_2}{\gamma_2} . \gamma = \frac{77 . 1}{7{,}7} = 10 \text{ kp}.$$

Ocelový předmět hmotnosti 77 kg je ve vodě nadlehčován silou 10 kp, jestliže je celý ponořen ve vodě.

c) Poměr sil, kterými jsou člověk a ocelový předmět stejné hmotnosti nadlehčováni ve vodě, jsou-li v ní úplně ponořeni, je

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1\gamma}{\gamma_1} \cdot \frac{\gamma_2}{G_1\gamma} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} .$$

Tím je dokázáno, že síly, kterými je ve vodě nadlehčováno lidské tělo a ocelový předmět stejné hmotnosti jako lidské tělo, mají velikosti, jež jsou v obráceném poměru k velikostem měrných tíhových sil obou těles. Tento poznatek platí obecně pro kterákoli dvě tělesa o stejných hmotnostech.

Ověření:

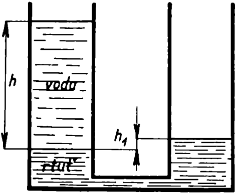
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{70}{10} = 7, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{7,7}{1,1} = 7\,.$$

2. Do skleněné trubice tvaru U jsme nalili rtuť.

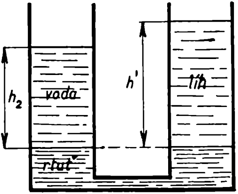
a) Jak vysoký sloupec vody musíme přilít do jednoho ramena trubice, aby rtuť byla ve druhém ramenu o 2 cm výše než v prvním?

b) Do jednoho ramena jsme přilili sloupec vody 20 cm vysoký. Jak vysoký sloupec lihu měrné tíhy 0,8 p/cm^3 musíme přilít do druhého ramena, aby povrch rtuti byl v obou ramenech ve stejné výši?

Označení veličin a dané hodnoty: V jednom ramenu (obr. 64a) vystoupí rtuť o $h_1 = 0,2$ dm výše než v druhém, je-li v druhém ramenu nalita voda do výše h nad povrch rtuti. Sloupec vody vysoký $h_2 = 2$ dm (obr. 64b) se udrží ve spojených nádobách v rovnováze sloupcem lihu vysokým h'.



Obr. 64 a



Obr. 64 b

Měrná tíha vody je $\gamma = 1{,}0$ kp/dm^3, rtuti $\gamma_1 =$ $= 13{,}6$ kp/dm^3, lihu $\gamma_2 = 0{,}8$ kp/dm^3. Tlaky, jimiž kapaliny působí na povrch rtuti v ramenech trubice, budeme značit p.

Mají-li se udržet povrchy rtuti v obou ramenech trubice ve stejné výši, musí působit přilité kapaliny v obou ramenech na povrch rtuti stejnými tlaky.

Řešení: a) Sloupec rtuti vysoký h_1 působí na rozhraní mezi vodou a rtutí tlakem $p_1 = h_1\gamma_1$, sloupec vody výšky h tlakem $p = h\,\gamma$. Z podmínky $p = p_1$ vychází

$$h\,\gamma = h_1\gamma_1, \quad \text{takže} \quad h = \frac{h_1\gamma_1}{\gamma} \qquad (1)$$

a po dosazení daných hodnot

$$h = \frac{0{,}2\,.\,13{,}6}{1}\ \text{dm} = 2{,}72\ \text{dm}.$$

Do jednoho ramena trubice musíme přilít sloupec vody vysoký 27,2 cm, má-li v druhém ramenu vystoupit rtuť do výšky 2 cm. Obecně je hledaná výška určena vztahem (1).

b) Sloupec vody vysoký $h_2 = 2$ dm tlačí na rozhraní mezi rtutí a vodou tlakem $p_2 = h_2\gamma$, sloupec lihu tlakem $p' = h'\gamma_2$. Z podmínky $p_2 = p'$ vychází $h'\gamma_2 = h_2\gamma$, takže $h' = \frac{h_2\gamma}{\gamma_2}$; po dosazení daných hodnot vyjde $h' = \frac{2 \cdot 1}{0,8}$ dm $= 2,5$ dm.

Do druhého ramena trubice musíme přilít líh do výšky 25 cm, mají-li být povrchy rtuti v obou ramenech ve stejné výši.

3. Automobil Octavia ujel vzdálenost 100 km za 1,5 hod. Účinnost motoru byla 30 %. Za tuto dobu spotřeboval 8 l benzínu o výhřevnosti $H \doteq$ $= 10\,800$ kcal/kg. Měrná tíha benzínu je 0,7 p/cm³. Vypočítejte a) průměrnou tažnou sílu motoru,
b) průměrný výkon motoru.

Označení veličin a dané hodnoty: Automobil ujel vzdálenost $s = 100\,000$ m za dobu $t = 1,5$ hod. $=$ $= 5\,400$ s. Účinnost motoru je $\eta = 30\ \% = 0,3$. Měrná tíha benzínu je $\gamma = 0,7$ kp/dm³. Na dráze s se spotřebovalo $V = 8$ dm³ benzínu, jehož tíha je $G = V\gamma = 8 \cdot 0,7$ kp $= 5,6$ kp a hmotnost $m =$ $= 5,6$ kg.

Řešení: Spálením benzínu hmotnosti m se uvolnilo teplo $Q' = Hm = 5,6 \cdot 10\,800$ kcal $= 60\,480$ kcal, z něhož se využilo množství $Q = \eta Q' =$ $= \eta Hm = 18\,144$ kcal k vykonání práce A.

Protože 1 kcal $= 427$ kp m, odpovídá teplo Q práci $A = 427\, Q \frac{\text{kp m}}{\text{kcal}}$, takže motor automobilu vykonal na dráze s práci

$$A = 427\, Q \frac{\text{kp m}}{\text{kcal}} = 427 \eta\, H\, m \frac{\text{kp m}}{\text{kcal}} =$$

$$= 427 \,.\, 18\,144 \text{ kp m} = 7\,747\,488 \text{ kp m}.$$

a) Protože $A = F \,.\, s$, kde F značí průměrnou tažnou sílu motoru, působil motor automobilu po dráze s průměrnou silou

$$F = \frac{A}{s} = \frac{427\, \eta H m}{s} \frac{\text{kp m}}{\text{kcal}} = \frac{7\,747\,488}{100\,000} \text{kp} =$$

$$= 77{,}5 \text{ kp}\,.$$

Motor automobilu působil po dráze s průměrnou tažnou silou 77,5 kp.

b) Výkon motoru se vypočítá jako podíl vykonané práce a doby potřebné k jejímu vykonání ze vztahu

$$P = \frac{A}{t}\,.$$

Z něho vyjde

$$P = \frac{A}{t} = \frac{427\, \eta\, H\, m}{t} \frac{\text{kp m}}{\text{kcal}} = \frac{7\,747\,488}{5\,400} \frac{\text{kp m}}{\text{s}} \doteq$$

$$\doteq 1\,435 \frac{\text{kp m}}{\text{s}} \doteq 19 \text{ k}.$$

Motor automobilu pracoval po dráze s průměrným výkonem 19 koní.

4. a) Dvě žárovky jsou paralelně připojeny ke zdroji napětí. Načrtněte takový obvod s přepínačem, aby se vypnutím jedné žárovky rozsvítila druhá.

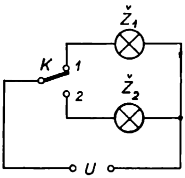
b) Tři žárovky jsou paralelně připojeny ke zdroji napětí. Načrtněte takový obvod s dvěma vypínači, z nichž jeden rozsvěcí dvě žárovky a druhý jednu.

c) Osvětlení chodby je ovládáno dvěma přepínači na koncích chodby tak, že na jednom konci je možno žárovku rozsvítit a na druhém zhasnout nebo naopak. Načrtněte takový obvod.

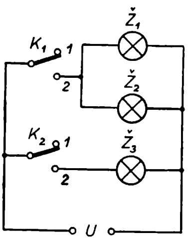
Ke každé úloze napište krátké vysvětlení.

Řešení: a) V poloze přepínače K, načrtnuté na obr. 65a, je do obvodu zařazena žárovka $Ž_1$ a svítí. Přemístíme-li páčku přepínače do polohy 2, vypne se žárovka $Ž_1$ a rozsvítí se žárovka $Ž_3$. Jedna ze žárovek vždy svítí.

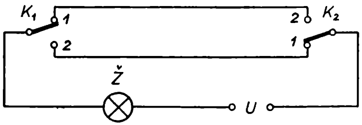
b) V poloze vypínačů, načrtnuté na obr. 65b, není do obvodu zařazena žádná žárovka. Přemístíme-li páčku vypínače K_2 do polohy 2, rozsvítí se žárovka $Ž_3$, žárovky $Ž_1$ a $Ž_2$ nesvítí. Přemístěním



Obr. 65 a



Obr. 65 b



Obr. 65 c

páčky vypínače K_1 do polohy 2 rozsvítíme žárovky $Ž_1$ a $Ž_2$.

Při naznačeném zařazení žárovek do obvodu můžeme svítit buď jen žárovkou $Ž_3$ (páčka K_1 v poloze 1, páčka K_2 v poloze 2), nebo současně žárovkami $Ž_1$ a $Ž_2$ (páčka K_1 v poloze 2, páčka K_2 v poloze 1), nebo všemi žárovkami (páčky K_1 i K_2 v polohách 2). Jsou-li páčky obou vypínačů v poloze 1, nesvítí žádná žárovka.

c) Jsou-li páčky obou přepínačů v polohách 1 nebo v polohách 2, žárovka nesvítí, je-li jedna z nich v poloze 1 a druhá v poloze 2, žárovka svítí.

V poloze načrtnuté na obrázku 65c žárovka nesvítí. Lze ji rozsvítit přemístěním páčky jednoho z přepínačů do polohy 2. Zhasne se pak buď přemístěním páčky téhož přepínače zpět do polohy 1, nebo přemístěním páčky druhého přepínače do polohy 2.

Jsou-li páčky obou přepínačů v polohách 2, žárovka také nesvítí. Lze ji rozsvítit přemístěním páčky kteréhokoli z přepínačů do polohy 1. Zhasnout ji pak lze přemístěním páčky téhož přepínače do polohy 2 nebo přemístěním páčky druhého přepínače do polohy 1.

OBSAH

Edice: Pomocné knihy pro žáky

JAN TESAŘ

ŠESTÝ ROČNÍK FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDY

Obrázky rýsoval inž. Jan Ibl
Vydání 1. — Praha 1966 — Počet stran 328
Odpovědná redaktorka: Jiřina Civínová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technický redaktor: Václav Náprstek
Z písma Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1 — AA 9,73 — VA 10,14 — D-03*60088 — Náklad 3 150 výtisků — Tematická skupina a podskupina 03/5
Cena brožovaného výtisku Kčs 9,00 — G
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 65—0—28

15—125—66 Kčs 9,00 — G

Pro samostatné studium z oboru fyziky doporučujeme žákům středních všeobecně vzdělávacích a středních odborných škol několik publikací, které vydalo Státní pedagogické nakladatelství:

Dr. Miroslav Laitoch, dr. Marta Chytilová
První ročník Fyzikální olympiády
(cena brožovaného výtisku Kčs 2,25)

Jaroslav Pospíšil, Vladimír Rudolf
Druhý ročník Fyzikální olympiády
(cena brožovaného výtisku Kčs 2,75)

Vladimír Rudolf, Jan Tesař
Třetí ročník Fyzikální olympiády
(cena brožovaného výtisku Kčs 5,—)

Jan Tesař, Zbyněk Kubíček a Marie Čechová
Čtvrtý ročník Fyzikální olympiády
(cena brožovaného výtisku Kčs 5,—)

Jan Tesař
Pátý ročník Fyzikální olympiády
(cena brožovaného výtisku Kčs 6,—)

Dr. Antonín Bělař
Dynamické zákony Newtonovy
(cena brožovaného výtisku Kčs 2,50)

Dr. Emanuel Klier
Polovodiče
(cena brožovaného výtisku Kčs 1,60)

SPN

65-0-28

15—125—66
03/5 Kčs 9,00 - G