



III. ROČNÍK

FYZIKÁLNÍ

OLYMPIÁDY

1963

**Státní
pedagogické
nakladatelství
Praha**

Obr. 1



**Třetí
ročník
Fyzikální
olympiády**

**Zpráva o soutěži,
konané
ve školním roce
1961-62**

Zpracovali doc. Vladimír Rudolf a Jan Tesař
Recenzovali Jaroslav Pospíšil a Evžen Říman, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1963

1. Úvod	7
2. Složení ÚVFO ve školním roce 1961/62.	9
3. Předsedové KVFO ve školním roce 1961/62	10
4. Průběh soutěže FO ve školním roce 1961/62	11
5. Výsledky jednotlivých kol soutěže	18
6. Závěry k III. ročníku Fyzikální olympiády	29
7. Studijní texty pro první kolo soutěže	32
8. Úlohy prvního kola soutěže a jejich řešení.	57
9. Úlohy druhého kola soutěže a jejich řešení	135
10. Úlohy třetího kola soutěže v kategorii A a jejich řešení	174
11. Úlohy prvního kola soutěže kategorie D.	189

Obsah

I. Úvod

Fyzikální olympiáda (FO) je celostátní soutěž, jejímž účelem je vzbudit u žáků zvýšený zájem o studium fyziky, vést žáky k samostatné práci ve fyzice, a tím zvyšovat úroveň vyučování v tomto předmětu.

Ve školním roce 1961/62 probíhal třetí ročník FO. Soutěže se zúčastnili převážně žáci středních všeobecně vzdělávacích škol; účast žáků z výběrových škol odborných byla podstatně menší.

Soutěž se řídila organizačním řádem, který vydalo ministerstvo školství a kultury (MŠK) společně pro Matematickou olympiádu (MO) a Fyzikální olympiádu. Nové společné směrnice byly uveřejněny ve Věstníku MŠK, sešit 29—30 ze dne 31. října 1959.

Pořadatelé FO podle uvedeného organizačního řádu jsou MŠK spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků (JČMF) a Československým svazem mládeže (ČSM).

Soutěž organizoval a řídil ústřední výbor Fyzikální olympiády (ÚVFO) spolu s krajskými výbory Fyzikální olympiády (KVFO). Složení ÚVFO je uvedeno na str. 9 a 10 a jmenný seznam předsedů KVFO je na str. 10 a 11.

O úspěšný průběh soutěže se zasloužili kromě členů ÚVFO a členů jednotlivých KVFO též mnozí učitelé fyziky a referenti FO na školách, kteří soutěž organizovali a řídili, podíleli se na opravách úloh, opatrovali pomůcky a potřeby pro experimentální práce apod., dále pak četní ředitelé škol a krajští inspektoři, kteří soutěž propagovali mezi žactvem.

Jednota československých matematiků a fyziků spolu s ústředním výborem FO děkuje touto cestou všem, kteří se iniciativně a obětavě zúčastnili na přípravách a vedení soutěže. Zvláště pak děkuje těm soudruhům z ÚVFO a z jednotlivých KVFO, kteří se dobrovolně a obětavě bez nároků na odměnu podíleli na vypracování úloh a vzorových řešení, na opravování řešených úloh, na přípravě experimentálních souprav pro laboratorní práce a na dozoru při druhém a třetím kole. Jsou to zejména soudruzi:

prof. dr. B. Havelka, prof. dr. R. Košťál, J. Pospíšil, V. Rudolf, dr. B. Vlach, dr. M. Chytilová, J. Tesař, dr. L. Thern, F. Fišer, J. Sušanka, dr. J. Feifer, K. Hofman, Z. Ungerman, F. Živný, dr. I. Náter, E. Sokol, D. Košťálová, F. Šurán, J. Konrád, J. Chrapan, E. Říman, J. Pitner, J. Mikulecký, V. Technik, doc. dr. Tichý, J. Honner, M. Horák, J. Krásný, L. Hájek, J. Stránský, A. Kala, dr. F. Smutný, dr. M. Bajer, S. Frohlich, F. Kuba, Z. Kubíček, F. Ledabyl, O. Tomeš, J. Veverka, Z. Kašpárková, K. Kepřt, dr. L. Dvořák, V. Janků, M. Ihnát, S. Ondrejka, I. Turek, F. Baraník, I. Baník a další.

Dále dlužno zvlášť ocenit obětavou práci prof. dr. Rostislava Košťála při přípravě třetího kola FO, jež se konalo v Brně, a poděkovat mu za bezvadnou organizaci této akce. Při té příležitosti ÚVFO děkuje rektorátu Vysokého učení technického v Brně a děkanátu stavební fakulty VUT, že umožnili provést v budově stavební fakulty v Barvičově ulici jednak slavnostní zahájení třetího kola ve fakultní aule, jednak první část třetího kola (řešení teoretických úloh) ve čtyřech posluchárnách, propůjčených k tomuto účelu. Dík ÚVFO patří dále též veliteli Vojenské akademie Antonína Zápotockého (VAAZ) za propůjčení laboratorních místností a experimentálního zařízení v budově VAAZ pro provedení experimentální úlohy třetí kola. O vzorné vybavení dvaceti pracovišť přístroji a pomůckami pro experimentální práci se velmi zasloužil odborný instruktor katedry

fyziky VAAZ s. Juříček, který mimoto konal spolu s asistenty VAAZ dozor při provádění této práce.

Uvedenou činnost četných spolupracovníků v průběhu FO dlužno hodnotit nejen po stránce pouze pracovní, ale i jako významnou práci politickovýchovnou.

Na organizační činnosti se dále podílel ÚV JČMF, kde nutno zvláště vyzvednout práci ústředního inspektora Miloše Jelínka, jakožto jednatele ÚV JČMF a pracovníka MŠK, a pak účast krajských výborů JČMF. Nelze opomenout ani důležitou organizační práci soudružek ze sekretariátu ÚV JČMF R. Valouchové a J. Matyášové, které obstarávaly rozesílání letáků, pozvánek na zasedání ÚVFO apod.

Spolupráce s ČSM byla poměrně slabá, jen v Jihomoravském kraji je nutno zdůraznit velkou podporu ČSM v propagaci FO, hlavně zásluhou zástupce ČSM v KVFO inž. B. Vybírala.

ÚVFO oceňuje též spolupráci s redakcí časopisu Matematicko-fyzikální rozhledy a děkuje za pečlivé a včasné otištění textů úloh pro první kolo soutěže, studijních textů a pokynů k soutěži, jakož i propagačních článků.

2. Složení ústředního výboru Fyzikální olympiády ve školním roce 1961/62

Podle organizačního řádu jmenuje členy ústředního výboru Fyzikální olympiády ministerstvo školství a kultury na návrh ÚV JČMF.

Sídlo ÚVFO je Praha 1 — Malá Strana, Maltézské nám. 1 (v místnostech sekretariátu JČMF) a Olomouc, Fierlingerova 10 (v budově přírodovědecké fakulty Palackého university, katedra fyziky).

Ve školním roce 1961/62 měl ÚVFO toto složení:

Předseda: *RNDr. et DrSc. Bedřich Havelka*, profesor přírodovědecké fakulty Palackého university v Olomouci.

Místopředseda: *RNDr. Marta Chytilová*, vědecká pracovnice
Výzkumného ústavu pedagogického v Praze.

Jednatel: *Jaroslav Pospíšil*, odborný asistent přírodovědecké
fakulty Palackého university.

Referent pro tisk: *Vladimír Rudolf*, docent přírodovědecké
fakulty Palackého university v Olomouci.

Další členové (v abecedním pořadí):

Hana Fischová, instruktorka oddělení studující mládeže
ÚV ČSM v Praze;

Miloš Jelinek, ústřední inspektor MŠK v Praze;

RNDr. Emil Kašpar, profesor matematicko-fyzikální fakulty
Karlovy university v Praze;

RNDr. Rostislav Košťál, profesor Vysokého učení technic-
kého v Brně;

Zbyněk Kubíček, učitel pedagogického institutu v Olomouci;

RNDr. František Lehar, učitel SŠP v Praze 2, Vinohrad-
ská 38;

Evžen Říman, CSc. odborný asistent Českého vysokého
učení technického v Praze;

Jan Tesař, učitel SVVŠ v Praze 5, Na Zatlane 11;

RNDr. Ladislav Thern, docent Vysoké školy lesnické a dře-
vařské ve Zvolenu;

RNDr. Bohumil Vlach, odborný asistent přírodovědecké
fakulty University J. E. Purkyně v Brně.

Do širšího výboru ÚVFO patří dále všichni předsedové
KVFO; jejich jmenný seznam následuje (čl. 3).

3. Předsedové krajských výborů Fyzikální olympiády ve školním roce 1961/62

Fyzikální olympiáda byla v jednotlivých krajích organizo-
vána a řízena krajskými výbory Fyzikální olympiády (KVFO).
Jejich předsedu a členy jmenoval odbor školství a kultury
rady KNV na návrh příslušné pobočky JČMF.

Ve školním roce 1961/62 byli předsedy KVFO v jednotli-
vých krajích:

KNV Praha — *Evžen Říman, CSc.*, odborný asistent Českého vysokého učení technického v Praze.

Pro kraj

Středočeský — *František Fišer*, učitel SVVŠ v Českém Brodě;

Severočeský — *Josef Sušanka*, učitel SVVŠ v Teplicích;

Západočeský — *RNDr. Jaroslav Feifer*, docent Vysoké školy strojní a elektrotechnické v Plzni;

Jihočeský — *Konrád Hofman*, odborný asistent pedagogického institutu v Českých Budějovicích;

Východočeský — *Zdeněk Ungerman*, učitel SVVŠ v Hradci Králové;

Severomoravský — *František Živný*, ředitel SVVŠ v Novém Bohumíně;

Jihomoravský — *RNDr. Rostislav Košťál*, profesor Vysokého učení technického v Brně;

Západoslovenský — *RNDr. Ivan Náter*, odborný asistent katedry fyziky SVŠT v Bratislavě;

Středoslovenský — *RNDr. Ladislav Thern*, docent Vysoké školy lesnické a dřevařské ve Zvolenu;

Východoslovenský — *Emil Sokol*, odborný asistent pedagogického institutu v Košicích.

4. Průběh soutěže FO ve školním roce 1961/62

Soutěž FO proběhla podle organizačního řádu ve třech kategoriích:

v kategorii A soutěžili žáci III. ročníků středních všeobecně vzdělávacích škol a III. a IV. ročníků středních odborných škol; v kategorii B soutěžili žáci II. ročníků a v kategorii C žáci I. ročníků všech středních výběrových škol.

Účast v kategorii pro vyšší třídu mohl povolit žáku z nižší třídy vyučující učitel po dohodě s referentem pro FO na škole.

Soutěž v kategorii B a C proběhla ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

Mimo uvedenou celostátní soutěž v kategoriích A, B, C byla zavedena na zkoušku ještě soutěž v kategorii D pro žáky 9. ročníku ZDŠ, a to v kraji Jihomoravském a Východočeském.

A. PRVNÍ KOLO SOUTĚŽE

První kolo FO bylo organizováno na školách a mělo skončit 17. února 1962, bylo však prodlouženo do 3. března 1962 vzhledem k mimořádnému prodloužení pololetních prázdnin.

V prvním kole bylo úkolem soutěžících řešit 9 úloh a prostudovat samostatně dané fyzikální téma. Řešení úloh se klasifikovalo podle tříčlenné stupnice známkami *výborně* — *dobře* — *nevychovuje*.

Za úspěšného řešitele byl považován ten žák, který úspěšně (tj. s klasifikací 1. nebo 2. stupně) rozřešil aspoň 6 úloh a prostudoval příslušné fyzikální téma. Přitom experimentální úlohu, která byla v každé kategorii uvedena jako devátá úloha, musel řešit každý soutěžící. Řešení prvních tří úloh odevzdali žáci svému učiteli fyziky do 30. listopadu 1961, dalších tří úloh do 6. ledna 1962 a posledních tří úloh do 3. března 1962.

Podrobné pokyny pro soutěžící a učitele byly uvedeny v Rozhledech matematicko-fyzikálních, roč. 40, čís. 1. V témž čísle byly uveřejněny i úlohy pro první kolo III. ročníku FO; v dalších číslech 2, 3 a 4 byla otištěna fyzikální témata k prostudování.

Kromě toho byl vydán ve Státním pedagogickém nakladatelství leták s titulem „III. ročník Fyzikální olympiády“. V tomto letáku byly úvodem podány informace o organizaci soutěže a pokyny pro soutěžící a byly v něm uvedeny texty úloh pro první kolo všech tří kategorií a fyzikální témata určená k prostudování, rovněž pro všechny tři kategorie. Leták byl vytištěn v nákladu 5000 výtisků, jež byly posílány na jednotlivé KVFO; KVFO je dále rozeslaly na střední školy všeobecně vzdělávací i odborné.

Úlohy pro první kolo připravili: v kategorii A *Zdeněk Ungerman* (za spolupráce členů KVFO Východočeského kraje), v kategorii B *RNDr. Ladislav Thern* (s členy KVFO Středoslovenského kraje), v kategorii C *František Živný* a *Ján Chrapan* za spolupráce *RNDr. Marty Chytilové* a *Jana Tesaře*. Definitivní výběr úloh a konečná úprava znění jejich textu byly provedeny na zasedání ÚVFO dne 31. května 1961 ve spolupráci s dalšími členy ÚVFO.

Na textech témat k prostudování pro všechny tři kategorie spolupracovali s autorem *prof. RNDr. Rostislavem Košťálem* členové Jihomoravského KVFO *Dagmar Košťálová* (A, B, C), *František Šuráň* (C) a *RNDr. Bohumil Vlach* (A, B). Svými připomínkami k úpravě textů přispěli členové téhož KVFO *Josef Konrád* (A, B, C), *František Šuráň* (A, B), *RNDr. Bohumil Vlach* (C) a členové ÚVFO *prof. RNDr. Bedřich Havelka* (A), *RNDr. Marta Chytilová* (A, B, C), *Vladimír Rudolf* (A, B, C) a *Jan Tesař* (A, B, C).

Leták zpracovali *Jaroslav Pospíšil* a *Vladimír Rudolf*.

Učitelé fyziky na školách vybrali v uvedených termínech od soutěžících žáků řešení úloh a opravili je spolu s referentem pro FO na škole. Z úspěšných řešitelů vybral referent pro FO v dohodě s ředitelem školy a předmětovou komisí pro fyziku žáky, které doporučili k účasti na druhém kole soutěže. Z návrhů došlých ze škol vybraly jednotlivé KVFO nejlepší žáky k účasti na druhém kole.

Počet soutěžících žáků v jednotlivých kategoriích je pro všechny kraje uveden dále v tabulce 1 na str. 18.

B. DRUHÉ KOLO SOUTĚŽE

Druhé kolo soutěže FO bylo jakožto krajské kolo organizováno v jednotlivých krajích.

Úlohy druhého kola soutěže (tři teoretické a jednu experimentální) navrhli: v kategorii A *Konrád Hofman* (za spolupráce členů KVFO Jihočeského kraje), v kategorii B *Emil Sokol* (se členy KVFO Východoslovenského kraje) a v katego-

rii C RNDr. *Jaroslav Feifer* (se členy KVFO Západočeského kraje). Na zasedání ÚVFO dne 10. ledna 1962 v Praze byly úlohy upraveny a schváleny v konečném znění. Texty úloh byly též přeloženy do maďarštiny, aby se soutěže mohli zúčastnit i žáci z maďarských škol v ČSSR. Překlad provedla *dr. Marie Kunzlová* z katedry fyziky stavební fakulty ČVUT v Praze.

V lednu 1962 byl rozeslán na jednotlivé KVFO leták s podrobnými pokyny pro organizování druhého kola soutěže. Texty úloh pro druhé kolo byly v polovině března 1962 rozeslány v zalepených obálkách na jednotlivé KVFO. Experimentální úlohy byly ve zvláštních obálkách, neboť soutěžící je vypracovávali první den, kdežto řešení teoretických úloh se konalo až příštího dne.

Druhé kolo soutěže FO proběhlo ve všech krajích ve dnech 31. března a 1. dubna 1962. Konalo se zpravidla v krajském městě; v některých krajích se konalo pro každou kategorii jinde. Tak např. v Severočeském kraji se účastníci sešli v Liberci (pro kategorii A), v Ústí nad Labem (B) a v Chomutově (C); ve Východočeském kraji v Hradci Králové (A, B) a v Pardubicích (C); v Severomoravském kraji v Ostravě (A), v Olomouci (B) a v Opavě (C); ve Středo-slovenskem kraji v Žilině (A, B) a v Banské Bystrici (C).

V sobotu 31. 3. odpoledne provedli soutěžící experimentální úlohu; v neděli 1. 4. dopoledne řešili teoretické úlohy. Jedna z úloh kontrolovala, zda žáci prostudovali zadané fyzikální téma; v kategorii A a C se dala kontrola úlohou teoretickou, v kategorii B úlohou experimentální.

Řešení úloh opravili členové KVFO. Za úspěšné řešitele byli prohlášeni ti účastníci, kteří ze zadaných čtyř úloh vyřešili úspěšně (tj. s klasifikací 1. a 2. stupně) alespoň dvě úlohy.

Vítězové ze všech kategorií dostali od svých KVFO pochvalná uznání a mimoto knižní a věcné ceny podle možností jednotlivých KVFO.

V Praze byly odměny předány vítězům při závěrečné

slavnosti, kterou uspořádal KVFO v Obecním domě hl. města Prahy; po slavnosti byly žákům promítnuty filmy s technickými náměty.

V Severočeském kraji byly odměny odevzdány vítězům na slavnostním shromáždění, konaném na oslavu stoletého trvání JČMF.

V Severomoravském kraji byli po dohodě s předsedou KVMO a KNV v Ostravě odměněni věcnými cenami v úhrnné částce 1 100,— Kčs pouze účastníci kategorie A. Pro 15 úspěšných řešitelů kategorie B a C byl jako odměna uspořádán ve dnech 2. až 7. července 1962 ve Valašském Meziříčí rekreační tábor, spojený s instruktáží o některých partiích matematiky a fyziky. KVMO a KVFO očekávají, že se tím zkvalitní příprava žáků na další ročníky MO a FO.

V kraji Jihomoravském byly stejně jako loni uspořádány vyhlídkové lety nad Brnem, spojené s uvedením účastníků do stavu beztlíže.

Přehled o počtu soutěžících v druhém kole FO je uveden v tabulce 2 na str. 20.

Pro kategorie B a C bylo druhé kolo závěrečné. Z úspěšných řešitelů v kategorii A navrhli KVFO nejlepší žáky k účasti na třetím kole, které je kolem celostátním. Na poradě ÚVFO dne 12. dubna 1962 v Praze bylo podle organizačního řádu soutěže z navržených žáků vybráno 80 nejlepších řešitelů (76 hochů a 4 dívky) do třetího kola.

C. TŘETÍ KOLO SOUTĚŽE

Třetí kolo soutěže FO se konalo v Brně ve dnech 28. až 30. dubna 1962. Jeho přípravou a organizací byl pověřen KVFO Jihomoravského kraje. Na schůzi ÚVFO (12. dubna 1962) byl navržen program třetího kola a byl vypracován konečný návrh finančního rozpočtu pro toto kolo, a to částkou 15 000 Kčs. Ministerstvo školství a kultury schválilo tento návrh v plné výši.

Úlohy pro třetí kolo (tři teoretické a jednu experimentální) připravili členové KVFO Středočeského kraje a v definitivním znění je schválil ÚVFO.

Průběh třetího kola FO byl tento:

Den před zahájením třetího kola (tj. 27. dubna 1962) promluvil v rozhlase (v relaci Hlas Jihomoravského kraje) předseda KVFO prof. RNDr. Rostislav Košťál o významu Fyzikální olympiády a o dosavadním průběhu III. ročníku FO.

V sobotu dne 28. dubna 1962 odpoledne se sjeli účastníci soutěže v Brně a dostavili se v plném počtu (tj. 80 účastníků) do budovy stavební fakulty VUT v Barvičově ulici. Tam byla v 15,30 hod. zahájena slavnostní beseda ve fakultní aule. Kromě několika členů ÚVFO a soutěžících se besedy zúčastnili dále tito pozvaní hosté: zástupce VAAZ generál Oldřich Štangl, zástupce OŠK KNV krajská inspektorka s. Doležalová, zástupce ÚV ČSM a KV ČSM s. Svoboda a místopředseda pobočky JČMF v Brně prof. RNDr. Vašíček.

Beseda byla zahájena Smetanovým sborem Věno, které předneslo brněnské pěvecké sdružení „Foerster“. Potom předseda KVFO prof. dr. R. Košťál uvítal jménem ÚVFO přítomné hosty a účastníky soutěže a pronesl slavnostní projev, v němž seznámil přítomné s dosavadní historií FO od jejího založení. — Následoval projev předsedy ÚVFO prof. dr. Bedřicha Havelky, který promluvil o významu FO a ukázal, jak je pro žáky důležité cvičit se v řešení fyzikálních problémů pomocí jak teoretických, tak i experimentálních úkolů, mají-li být uvedeni do odborné fyzikální práce. Závěrem objasnil zásadní směry, kterými se dnes ubírá fyzikální bádání (cbr. 1 na str. 2). Závěrem pozdravil přítomné zástupce ÚV ČSM.

Po slavnostní části proběhla obsáhlá diskuse, v níž soutěžící žáci přednesli své připomínky k organizaci a průběhu soutěže a podali některé návrhy na její zkvalitnění.

Po ukončení besedy se odebrali soutěžící do posluchárny katedry fyziky pevné fáze na přírodovědecké fakultě University J. E. Purkyně, kde jim jednatel KVFO odb. as. Josef Konrád předvedl několik zajímavých fyzikálních pokusů.

Příštího dne (29. dubna 1962) dopoledne v době od 8 do 12 hodin se konala první část soutěže, při níž soutěžící, rozdělení do čtyř místností, řešili tři teoretické úlohy za dozoru členů ÚVFO a KVFO. Odpoledne shlédli účastníci na autokarové projížďce městem pamětihodnosti Brna a jeho okolí. Večer byli přítomni v Janáčkově opeře představení baletu Kara Karajeva „Cesta hromu“.

Dalšího dne (30. dubna 1962) dopoledne od 7 hodin proběhla v budově VAAZ druhá část soutěže, při níž soutěžící měli za úkol provést experimentální úlohu. Účastníci byli opět rozdělení na čtyři skupiny, které pak postupně v intervalech po půldruhé hodině prováděly experimentální úlohu. Dozor měli asistenti VAAZ a někteří členové ÚVFO.

Odpoledne se účastníci soutěže rozjeli do svých domovů.

Třetí kolo soutěže FO v Brně proběhlo zcela hladce, neboť bylo organizačně po všech stránkách dokonale připraveno. Jak už bylo dříve řečeno, bylo to hlavně zásluhou předsedy KVFO Jihomoravského kraje prof. RNDr. Rostislava Košťála, který velmi obětavě učinil vše pro bezvadný průběh třetího kola.

Řešení úloh třetího kola opravili členové ÚVFO. Každou úlohu opravili a nezávisle na sobě oklasifikovali dva členové, kteří se pak dohodli na společné známce. První úlohu opravil J. Tesař a dr. M. Chytilová (Praha), druhou úlohu V. Rudolf a Z. Kubíček (Olomouc), třetí úlohu dr. I. Náter a Červeně (Bratislava), čtvrtou úlohu (experimentální) dr. B. Vlach a dr. L. Dvořák (Brno).

Podle směrnic FO se úspěšným řešitelem stal každý žák, který vyřešil s klasifikací aspoň „dobře“ dvě ze čtyř soutěžních úloh.

Pořadí úspěšných řešitelů třetího kola, jak je na své schůzi 31. května 1962 sestavil užší ÚVFO, je uvedeno na str. 26 a dalších.

Zprávy o průběhu třetího kola byly uveřejněny v denním tisku (Rudé právo, Rovnost, Lidová demokracie, Mladá fronta) a v Učitelských novinách.

5. Výsledky jednotlivých kol soutěže

A. SOUTĚŽ 1. KOLA

Přehled o počtu soutěžících v prvním kole soutěže podle krajů v kategoriích A, B, C podává tabulka 1.

Tabulka 1

Vysvětlivky: S — počet soutěžících, Ú — počet úspěšných řešitelů.

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	102	64	58	25	123	40	283	129
Středočeský	15	6	28	4	61	13	104	23
Severočeský	47	32	9	6	79	30	135	68
Západočeský	30	14	28	7	72	14	130	35
Jihočeský	30	20	4	4	33	30	67	54
Východočeský	115	53	83	20	270	64	468	137
Severomoravský	55	35	13	10	86	35	154	80
Jihomoravský	154	58	129	37	203	61	486	156
Západoslovenský	79	37	56	21	106	22	241	80
Středoslovenský	31	15	19	9	50	22	100	46
Východoslovenský	34	31	9	6	29	26	72	63
Celkem	692	365	436	149	1 112	357	2 240	871

Soutěžící v prvním kole FO byli v kategorii A z 208 škol, v kategorii B ze 177 škol, v kategorii C z 246 škol. Celkem byli soutěžící z 305 škol (z toho bylo 247 SVVŠ a 58 SPŠ).

Z celkového počtu soutěžících v prvním kole bylo dívek v kategorii A 131 (18,9 %), v kategorii B 77 (17,6 %), v kategorii C 262 (23,6 %). V průměru se tedy prvního kola zúčastnilo asi 21 % dívek.

Úspěšných řešitelů v prvním kole bylo v kategorii A 52,7 %, v kategorii B 34,2 %, v kategorii C 32,1 %.

Přitom bylo z celkového počtu hochů v každé kategorii úspěšných v kategorii A 55,3 %, v kategorii B 34 %, v kategorii C 31,3 %, z celkového počtu dívek v jednotlivých kategoriích bylo úspěšných v kategorii A 42 %, v kategorii B 35 %, v kategorii C 34,7 %.

V průběhu prvního kola opravili učitelé fyziky a referenti pro FO na školách celkem 10 055 úloh. Z nich bylo klasifikováno jako výborné 4 333 (tj. 43,1 %), dobré 3 958 (tj. 39,4 %), nevyhovující 1 764 (17,5 %).

B. SOUTĚŽ 2. KOLA

Přehled o počtu soutěžících v druhém kole FO podle krajů v kategoriích A, B, C podává tabulka 2. Z tabulky je patrné, že do druhého kola se dostalo 31,5 % z celkového počtu soutěžících v prvním kole.

Soutěžící v druhém kole FO byli v kategorii A ze 118 škol, v kategorii B ze 63 škol, v kategorii C ze 103 škol. Celkem byli soutěžící ze 184 škol (z toho bylo 154 SVVŠ a 30 SPŠ). Z celkového počtu soutěžících ve druhém kole bylo dívek v kategorii A 39 (12,8 %), v kategorii B 29 (21,5 %), v kategorii C 62 (23,2 %).

Úspěšných řešitelů ve druhém kole bylo v kategorii A 52,5 %, v kategorii B 55,6 %, v kategorii C 44,6 %.

Přitom bylo z celkového počtu hochů v každé kategorii úspěšných v kategorii A 54,1 %, v kategorii B 62,3 %, v kategorii C 49,8 %; z celkového počtu dívek v jednotlivých

kategoriích bylo úspěšných v kategorii A 41 %, v kategorii B 31 %, v kategorii C 27,4 %.

Tabulka 2

Vysvětlivky: S — počet soutěžících, Ú — počet úspěšných řešitelů.

Kraj	Kategorie A		Kategorie B		Kategorie C		Celkem	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	44	38	18	18	21	17	83	73
Středočeský	5	3	4	3	9	1	18	7
Severočeský	24	13	5	2	26	8	55	23
Západočeský	12	3	7	3	13	3	32	9
Jihočeský	16	8	3	2	9	8	28	18
Východočeský	39	24	17	12	51	18	107	54
Severomoravský	35	15	9	3	28	19	72	37
Jihomoravský	58	19	31	15	55	21	144	55
Západoslovenský	37	15	21	6	19	9	77	30
Středoslovenský	9	5	15	6	22	1	46	12
Východoslovenský	26	17	5	5	14	14	45	36
Celkem	305	160	135	75	267	119	707	354

V druhém kole opravili členové KVFO celkem 2 838 úloh. Z nich bylo klasifikováno jako výborné 532 (tj. 18,7 %), dobré 659 (23,2 %), nevyhovující 1 647 (58,1 %).

V dalším uvádíme jmenný seznam nejlepších deseti řešitelů ze všech tří kategorií. Přitom v kategorii A jsou tučným písmem vytištěna jména těch účastníků, kteří postoupili do třetího kola. (V Praze a v krajích Východočeském a Jihomoravském postoupilo do třetího kola více než 10 řešitelů.)

Pořadí (prvních deseti) úspěšných řešitelů druhého kola v kategoriích A, B, C podle krajů.

(U všeobecně vzdělávacích škol značku SVVŠ neuvádíme.)

Praha

A: Ondřej Martinec, Praha 9, Lidových milicí; Karel Vavruška, Praha 4, Křesomyslova; Karel Veselý, Praha 6, Žukovova; Josef Daneš, Praha 9, Lidových milicí; Jaroslav Ježek, Praha 4, Křesomyslova; Pavel Rehák, SPŠJT Praha 2, Ječná; Stanislav Pejcha, Praha 5, Na Zatlance; Jiří Durdil, Praha 8, U libeňského gymnasia; Zdeněk Malina, Praha 9, Lidových milicí; Stanislav Erben, Praha 10, Přípotoční; Martin Rajniš, Praha 4, Školní; Helena Nováková, Praha 5, Žvahov; Jaromír Berák, Praha 5, Na Zatlance; Jan Orna, Praha 5, Na Zatlance.

B: Pavel Exner, SPŠJT, Praha 2, Ječná; Václav Drchal, Praha 7, Dimitrovovo nám.; Luděk Kučera, SPŠJT Praha 2, Ječná; Václav Slavík, Praha 7, Dimitrovovo nám.; Zdeněk Voráček, Praha 4, Budějovická; Zdeněk Ambrož, Praha 7, Dimitrovovo nám.; Jaroslav Kocbach, Praha 7, Dimitrovovo nám.; František Dubský, Praha 5, Žvahov; Jaroslav Šprongl, Praha 8, U libeňského gymnasia;

C: Václav Benda, Praha 7, Dimitrovovo nám.; Jaroslav Šírek, SPŠS Praha 8, Cyrilometodějské nám.; Ivan Hirsch, Praha 8, Kollárova; Eva Kostohryzová, Praha 7, Dimitrovovo nám.; Petr Kroha, SPŠE Praha 2, Ječná; Pavel Pícek, Praha 6, Žukovova; Vladimír Sechovský, SPŠS Praha 8, Cyrilometodějské nám.; Bohdan Šmilauer, Praha 6, Pionýrů; Aleš Horký, Praha 6, Žukovova.

Kraj Středočeský

A: Zdeněk Mašek, Říčany; Jiří Hocek, Benešov; Milan Merkl, Benešov; Vlastimil Polák, Říčany;

B: Ivan Gregora, Slaný; Jitka Eyseltová, Slaný; Jindřich Procházka, Čelákovice; Jindřich Marek, Beroun;

C: Pavel Černík, SPŠ Kladno.

Kraj Severočeský

A: Jiří Čmelík, Liberec; Petr Starý, Ústí n. L., Jateční; Jaroslav Svoboda, Roudnice n. L.; Karel Šimek, Ústí n. L.; Ctibor Thorovský, Ústí n. L., Jateční; Zdeňka

Kubínová, Liberec; **Bohumil Weber**, Ústí n. L., Jateční; **Josef Pospíšil**, Ústí n. L., Jateční; **Miroslav Eliáš**, Česká Kamenice; **Vladimír Bulena**, Teplice;

B: Karel Kužel, Ústí n. L., Na skřivánku; František Benda, SPŠS Nový Bor; Milan Josovič, Ústí n. L., Na skřivánku; Milan Vlach, Ústí n. L., Na skřivánku; Bohuslav Kaplan, Ústí n. L., Na skřivánku;

C: Tomislav Kořínek, SPŠ Chomutov; Jan Kouřimský, Ústí n. L., Na skřivánku; Jan Drbohlav, Děčín; Jan Kanis, SPŠ Chomutov; Luboš Jágr, Liberec; Zdeněk Křístek, Liberec; Ivona Kroulová, Ústí n. L., Jateční; Jiří Brož, Liberec; Alois Holas, Liberec; J. Vaněčková, Kadaň.

Kraj Západočeský

A: Jindřich Hašek, Plasy; Jiří Málek, Ostrov n. Ohří; Josef Žáček, Cheb.

B: Jaroslav Kadlec, Karlovy Vary; František Šíp, Cheb; Josef Trneček, Ostrov n. Ohří.

C: Břetislav Verner, Rokycany; Jaroslav Plas, Ostrov n. Ohří; Petr Fencel, Plzeň, nám. Odborářů.

Kraj Jihočeský

A: Ludvík Parma, Tábor; Karel Tržil, Kamenice n. Lipou; Ivan Mach, Dačice; Josef Kotyza, Kamenice n. Lipou; Jiří Zavadil, Pelhřimov; Jaromír Voneš, České Budějovice; Vít Novák, Pelhřimov; Jan Hruza, České Budějovice.

B: Jaroslav Plucar, Dačice; Jan Hes, Dačice.

C: Jaroslav Kubeš, České Budějovice; Ludvík Karl, České Budějovice; Helena Chyšková, Strakonice; Bohumil Macek, Strakonice; František Chromý, Strakonice; Bohumil Čefelín, Strakonice; Josef Oharek, České Budějovice; Eduard Milíčka, Strakonice.

Kraj Východočeský

A: Svatopluk Fučík, Hradec Králové; Olga Schierová, Hradec Králové; Ivan Cupal, Česká Třebová; Jaroslav

Přidal, Hradec Králové; **Karel Petr**, Broumov; **Ladislav Ledinský**, Úpice; **Ivan Netuka**, Hradec Králové; **Radomír Souček**, Broumov; **Karel Kapoun**, Česká Třebová; **Bohumil Tryzna**, Broumov; **Jiří Nejezchleba**, Broumov; **Milan Kupec**, Hradec Králové; **Vítězslav Benda**, Dvůr Králové; **Pavel Kudrnovský**, Dvůr Králové; **Josef Suchánek**, Dobruška; **Helena Procházková**, Hradec Králové.

B: **Zdeněk Jirák**, Hradec Králové; **Karel Sandler**, Česká Třebová; **Jiří Horáček**, Nová Paka; **Jiří Matoulek**, Nová Paka; **Miloš Vais**, SPŠ papír. Hostinné; **Miloš Havel**, Nová Paka; **Pavla Literová**, Semily; **Jitka Zedková**, Hradec Králové; **Milena Prchalová**, Vysoké Mýto; **Václav Semerád**, Přelouč.

C: **Jan Laštovka**, Pardubice; **Miroslav Havel**, Pardubice; **Vladimír Skalický**, Hradec Králové; **Ivan Václavík**, Hradec Králové; **Stanislav Přeučil**, Hradec Králové; **Robert Čihal**, Hradec Králové; **Rudolf Vrabec**, Hradec Králové; **Zdeněk Mížera**, Turnov; **Jiří Mašek**, Semily; **Radomír Opatřil**, Moravská Třebová.

Kraj Severomoravský

A: **Miroslav Šmuk**, Ostrava 5; **Leopold Vrána**, Nový Jičín; **Petr Durman**, Lipník n. B.; **Jaroslav Josífk**, Opava; **Ivan Nádvorník**, Olomouc, tř. Jiřího z Poděbrad; **Petr Janeček**, Olomouc-Hejčín; **Ivo Zapletal**, Přerov; **Otakar Pachman**, Opava; **Miroslav Gajdáček**, Český Těšín; **Stanislav Pěček**, Litovel.

B: **Milan Nádvorník**, SPŠCh Přerov; **Miloslav Rýdl**, Lipník n. B.; **Richard Lednický**, Nový Bohumín.

C: **Pavel Zapletal**, Přerov; **Jan Slaměník**, Havířov; **Jaromír Směja**, Opava; **Bedřich Babička**, Olomouc-Staré Hodolany; **Libuše Ženčáková**, Olomouc, tř. Jiřího z Poděbrad; **Karel Kudela**, Opava; **Josef Štolcar**, Přerov; **Jiří Hlisenkovský**, Nový Bohumín; **Petr Jánoš**, Ostrava 1; **Bohuslav Žďárský**, Ostrava 1.

Kraj Jiřomoravský

A: **Lubor Kořtál**, Brno, Křenová; **Jaroslav Brychta** SPŠ Brno, Leninova; **Ivo Burian**, Prostějov, Kollárova; **Jan Česnek**, Brno, Královo Pole; **Václav Černý**, Moravské Budějovice; **Josef Podbrdský**, Brno, Koněvova; **Jaroslav Diviš**, Znojmo; **Milan Plaček**, Kroměříř; **Karel Vyoral**, Gottwaldov; **Dalibor Peňáz**, Slavkov; **Jan Hloušek**, Brno, Koněvova.

B: **Lubomír Vašek**, Gottwaldov; **Miroslav Holý**, SPŠE Brno, Leninova; **Jan Vrbík**, Vyškov; **Igor Pokorný**, Brno, Elgartova; **Drahomíra Šimková**, Znojmo; **Jiří Večeřa**, Brno, Koněvova; **Petr Hanzálek**, Znojmo; **Ivan Berka**, Prostějov; **František Hloušek**, Brno, Elgartova; **Jiří Dobrovolný**, Brno, Elgartova.

C: **Luděk Frank**, Brno, Lerchova; **Petr Chvátal**, Hodonín; **Pavel Bureš**, Brno, Křenová; **Mojmír Opichal**, SPŠCh Brno; **Jan Keith**, SPŠ stav., Brno; **Vladimír Palička**, Prostějov; **Milan Pospíšil**, Gottwaldov; **Stanislav Tuček**, SPŠE Brno; **Ladislav Nečas**, SPŠE Brno; **Miloslav Ovčár**, Gottwaldov.

Kraj Západoslovenský

A: **Peter Hatala**, Bratislava, Novohradská; **Pavol Voda**, Bratislava, Palisády; **Juraj Horný**, Bratislava, Palisády; **Jozef Vojtko**, Skalica na Slov.; **Pavol Tarábek**, Bratislava, Metodova; **Marek Kučera**, Trnava; **Marián Veselý**, Bratislava, ul. ČA; **Anna Šmidová**, Holíč; **Ján Végh**, SVŠ slov., Galanta; **Peter Lesyk**, Bratislava, Novohradská.

B: **Vladimír Pohanka**, Bratislava, Novohradská; **Otto Kopál**, Partizánske; **Vojtech Mucha**, Bratislava, ul. ČA; **Anna Pišútová**, Bratislava, Vazovova; **Peter Prešnajder**, Sereď; **Ivan Katriak**, Bratislava, Novohradská;

C: **Júlia Zvalová**, Bratislava, Metodova; **Viktor Cigánek**, Malacky; **Eva Mateová**, Bratislava, ul. ČA; **Jaroslav Franek**, Bratislava, Dubová; **Milan Materák**, Bratislava, Metodova; **Branislav Mesík**, Trnava; **Peter Molnár**, Bratislava, ul. ČA;

Adriana Žilinková, Bratislava, ul. ČA; Árpád Tilajcsik, SVŠ slov., Dunajská Streda.

Kraj Středoslovenský

A: Marián Mešina, Prievidza; Ján Štefánik, Hnúšťa; Marian Tomin, SPŠ Handlová; Iľan Ursíny, Brezno; Vladimír Litvay, Zvolen;

B: Milan Hrdina, Žilina; Igor Jamnický, Banská Bystrica; Peter Mihálik, Žilina; Pavel Petrovič, Hnúšťa; Antónia Jurkuláková, SPŠ Ružomberok; Július Kmeť, Banská Bystrica;

C: Vladimír Uhrínčať, SPŠ Ružomberok.

Kraj Východoslovenský

A: Tomáš Glatz, II. SVŠ Košice; Alexander Haščák, Trebišov; Peter Koperdan, I. SVŠ Košice; Josef Raďák, Prešov; Ladislav Ferenczi, I. SVŠ Košice; Roman Frič, I. SVŠ Košice; Gabriel Reiss, I. SVŠ Košice; Jozef Fiamčík, PŠSE Košice; Igor Liberko, PŠSE Košice; Pavol Trenkler, Trebišov;

B: Ladislav Forgáš, Prešov; Milan Tkáčik, Prešov; Ján Gont, Prešov; Ľudovít Horňanský, Prešov; Štefan Filka, II. SVŠ Košice;

C: Štefan Bartko, PŠSE Košice; Pavol Fabian, Prešov; Anton Krčil, Prešov; Štefan Kundek, Trebišov; Ivan Sochor, Trebišov; Štefan Nagy, PŠSE Košice; Bartolomej Veber, PŠSE Košice; Jozef Choma, PŠSE Košice; Ján Puzder, PŠSE Košice; Eva Slavkovská, Prešov.

C. SOUTĚŽ 3. KOLA

Z celkového počtu 160 úspěšných řešitelů v druhém kole v kategorii A vybral ÚVFO podle návrhů krajských výborů FO ve shodě s organizačním řádem 80 nejlepších řešitelů (z toho 4 dívky), které pozval k účasti na třetím kole soutěže.

Počet vybraných účastníků podle jednotlivých krajů je v tabulce 3, kde je také uvedeno jejich umístění.

Tabulka 3

Kraj	Účastníci			
	Celkový počet	Vítězové (1–20)	Další úspěšní (21–50)	Neúspěšní (51–80)
Praha	14	5	6	3
Středočeský	3	—	1	2
Severočeský	10	1	2	7
Západočeský	1	—	1	—
Jihočeský	4	—	2	2
Východočeský	16	3	5	8
Severomoravský	10	3	4	3
Jihomoravský	11	3	5	3
Západoslovenský	7	2	3	2
Středoslovenský	3	2	1	—
Východoslovenský	1	1	—	—
Celkem	80	20	30	30
V procentech	100 %	25 %	37,5 %	37,5 %

Z pozvaných 80ti žáků bylo 77 z SVVŠ a 3 z SPŠ.

Ze 4 dívek (po jedné z Prahy a ze Severočeského kraje, dvě z Východočeského kraje) se jedna umístila mezi vítězi (z kraje Východočeského), jedna mezi dalšími úspěšnými (z Prahy) a dvě byly neúspěšné.

Prvních 20 řešitelů (mezi nimi jedna dívka) bylo prohlášeno podle organizačního řádu vítězi III. ročníku Fyzikální olympiády.

Vítězové třetího ročníku FO

1. Lubor Košťál SVVŠ Brno, Křenová 36
2. Marián Mešina SVŠ Prievidza
3. Karel Veselý SVVŠ Praha 6, Žukovova 33¹

- | | |
|----------------------|--|
| 4. Ivo Burian | SVVŠ Prostějov, Kollárova 3 |
| 5. Jaroslav Josífk | SVVŠ Opava, Komenského 5 |
| 6. Olga Schierová | SVVŠ Hradec Králové |
| 7. Petr Durman | SVVŠ Lipník nad Bečvou |
| 8. Pavel Rehák | SPŠ jaderné techniky Praha 2,
Ječná 30 |
| 9. Tomáš Glatz | SVŠ Košice, Šrobárova 46 |
| 10. Svatopluk Fučík | SVVŠ Hradec Králové |
| 11. Jiří Durdil | SVVŠ Praha 8 - Libeň, U libeň-
ského gymnasia 3 |
| 12. Marian Tomin | SPŠ Handlová |
| 13. Ivan Netuka | SVVŠ Hradec Králové |
| 14. Pavol Voda | SVŠ Bratislava, Palisády 20/b |
| 15. Jaromír Berák | SVVŠ Praha 5 - Smíchov, Na Za-
tlance 2 |
| 16. Miroslav Šmuk | SVVŠ Ostrava 5 - Hladnov |
| 17. Josef Daneš | SVVŠ Praha 9 - Vysočany, nám.
Lidových milicí 700 |
| 18. Marián Veselý | SVŠ Bratislava, ul. Čs. armády 16 |
| 19. Petr Starý | SVVŠ Ústí nad Labem, Jateční 22 |
| 20. Jaroslav Brychta | SPŠ elektrotechn., Brno, Leninova
40 |

Vítězové byli ze 17 SVVŠ a ze 3 SPŠ.

Každý z vítězů dostal čestný diplom, podepsaný ministrem školství a kultury dr. Františkem Kahudou a předsedou ústředního výboru FO profesorem dr. Bedřichem Havelkou. Mimoto jim byly přiděleny peněžité částky na nákup studijní odborné literatury, které byly odstupňovány od 250 Kčs do 1 000 Kčs. Celková částka za odměny činila 12 000 Kčs.

Další úspěšní řešitelé (s pořadovým číslem 21—50) jsou ti:

21. Jaroslav Přidal, Hradec Králové; 22. Václav Černý, Moravské Budějovice; 23. Josef Podbrdský, Brno, Koněvova; 24. Jiří Čmelík, Liberec; 25. Jaroslav Ježek, Praha 4,

Křesomyslova; 26. Ladislav Ledinský, Úpice; 27. Ivan Cupal, Česká Třebová; 28. Ján Štefánik, Hnúšťa; 29. Helena Nováková, Praha 5, Hlubočepy; 30. Leopold Vrána, Nový Jičín; 31. Jaroslav Diviš, Znojmo; 32. Zdeněk Malina, Praha 9, Vysočany; 33. Jozef Vojtko, Skalica; 34. Ondřej Martinec, Praha 9, Vysočany; 35. Petr Janeček, Olomouc, Hejčín; 36. Pavel Tarábek, Bratislava, Metodova; 37. Milan Plaček, Kroměříž; 38. Jan Orna, Praha 5, Na Zatlance; 39. Vítězslav Benda, Dvůr Králové n. Labem; 40. Peter Hatala, Bratislava, Novohradská; 41. Ludvík Parma, Tábor; 42. Stanislav Pěček, Litovel; 43. Jan Hloušek, Brno, Konevova; 44. Milan Merkl, Benešov; 45. Ivan Mach, Dačice; 46. Jaroslav Svoboda, Roudnice n. Labem; 47. Jindřich Hašek, Plasy; 48. Otakar Pachman, Opava; 49. Karel Vavruška, Praha 4, Křesomyslova; 50. Karel Kapoun, Česká Třebová.

Na závěr zařazujeme ještě tabulku 4, v níž je uvedena klasifikace úloh třetího kola. Číslo značí počet známek 1., 2. a 3. stupně.

Tabulka 4

Známka	vý- borně	dobře	nevy- hovuje	prů- měrná známka	téma z oboru
1. příklad	9	25	46	2,46	z mechaniky
2. příklad	3	28	49	2,57	z optiky
3. příklad	10	17	53	2,54	z elektřiny
4. příklad	31	35	14	1,79	exp. práce z elektřiny
Celkem	53	105	162	2,34	

Z tabulky je patrné, že neúspěšnější byli řešitelé v experimentální práci, kdežto největší obtíže jim činila úloha z geometrické optiky; četní žáci tuto úlohu vůbec neřešili a připsali jen poznámku, že příslušné učivo ve škole neprobírali. Lze to vysvětlit tím, že učivo z geometrické optiky se má podle osnov a časového plánu probírat na závěr ke konci školního roku, kdy na některých školách pro různá zdržení nezbude na probrání čas a látka se proto probere velmi rychle, a tím nekvalitně.

6. Závěry k III. ročníku Fyzikální olympiády

Abychom mohli zhodnotit účast žáků na III. ročníku FO a úroveň jejich vědomostí ve fyzice, porovnejme celkový počet řešitelů a počet řešitelů úspěšných ve všech třech dosud proběhnutých ročnících FO.

Tabulka 5

**Počet soutěžících (S) a počet úspěšných řešitelů (Ú)
v prvních třech ročnících FO**

Ročník	1. kolo			2. kolo			3. kolo		
	S	Ú	Ú v %	S	Ú	Ú v %	S	Ú	Ú v %
I.	3 203	1 081	34	956	539	56	80	27	34
II.	1 939	698	36	636	396	61	71	56	79
III.	2 240	871	39	707	354	50	80	50	63

Z tabulky 5 vyplývá, že po značném poklesu účasti v II. ročníku FO (pokles postihl všechny tři kategorie A, B i C) nastalo nyní určité zlepšení, i když počet soutěžících

ve III. ročníku nedosahuje ještě počtu z I. ročníku FO. Posuzujeme-li úroveň soutěžících podle počtu úspěšných řešitelů (event. v procentech z celkového počtu soutěžících), shledáváme, že v prvním kole má úroveň tendenci neustále stoupající, kdežto v druhém a v třetím kole nastal po vzrůstu v II. ročníku zase jistý pokles.

Jako potěšitelnou skutečnost lze uvést, že se řadě KVFO podařilo zainteresovat školy v kraji do FO v širší míře než loni. Po té stránce lze tedy III. ročník považovat za zdařilý.

Ve zprávách z několika krajů se ukazuje, že provádění experimentálních prací je spojeno často se značnými potížemi. V prvním kole je provedení experimentální úlohy nezbytnou podmínkou, aby se žák mohl zúčastnit druhého kola; je-li úloha materiálově příliš náročná, nemůže řada řešitelů prvního kola, kteří jinak jsou v teoretických úlohách úspěšní, postoupit do druhého kola. Tak např. bylo obtížné opatřit dostatečný počet stopek, jindy zase obstarání ledu naráželo na potíže apod.

Jako nedostatky, které se každoročně opakují, bývá uváděno formální řešení úloh, malá praxe v numerickém počítání, slabá znalost jednotek soustavy MKSA aj. Také se stále ještě objevuje snaha po opisování; v jednom případě bylo nutno osm žáků diskvalifikovat pro opisování (kolektivní práci na nepravém místě), kdy dokonce někteří škrtli svůj správný výsledek a nahradili ho přejatým výsledkem chybným.

Jak už bylo dříve řečeno (str. 12), byla zavedena na zkoušku též soutěž *v kategorii D* pro žáky 9. ročníku ZDŠ. Soutěž uspořádaly KVFO ve dvou krajích, Jihomoravském a Východočeském, a to hlavně zásluhou svých předsedů. V prvním kole byly soutěžní úlohy v obou krajích společné; texty těchto úloh jsou uvedeny na konci brožury na str. 189 na ukázkou druhu a obtížnosti příkladů. V druhém kole byly úlohy v obou krajích odlišné, proto je neuvádíme.

V kraji Jihomoravském se zúčastnilo soutěže všech 14 okresů. Výsledky jsou celkem dobré, avšak ukazuje se, že

jen poměrně malý počet zúčastněných žáků v 9. ročníku má potřebný logický úsudek, jaký vyžaduje řešení fyzikálních úloh. Zpráva KVFO kraje Východočeského uvádí, že také zde jsou výsledky poměrně dobré. Z 11 okresů se prvního kola zúčastnilo celkem 8 okresů, druhého kola (okresního) 6 okresů s průměrným počtem asi 35 soutěžících. Okresní metodikové se o soutěži v kategorii D vyjadřovali vesměs kladně a navrhli zavést ji celostátně.

Závěrem ještě porovnejme výsledky, jakých dosahují ti žáci, kteří se zúčastní obou olympiád, matematické i fyzikální. Často se mluví o tom, že dvě soutěže na škole značně zatěžují studenty školy. Je však zajímavé, že nejlepší žáci v těchto předmětech se zúčastňují často obou olympiád a mnozí z nich dosahují pěkných úspěchů v obou soutěžích. Je to patrné z tabulky 6, v níž jsou porovnány výsledky z třetích kol MO a FO (v III. ročníku FO). Např. z prvního řádku tabulky vyplývá, že 9 žáků je současně mezi vítězi v MO i FO. Podobně z druhého řádku je patrné, že 5 vítězů MO je zároveň úspěšných v FO atd.

Tabulka 6

Vítězové		Úspěšní		Neúspěšní		Počet řešitelů
MO	FO	MO	FO	MO	FO	
+	+					9
+			+			5
	+	+				1
		+	+			—
+					+	—
	+			+		2
		+			+	—
			+	+		6
				+	+	2

Pozn. Poněvadž v tabulce nejsou uvedeni ti žáci, kteří se zúčastnili třetího kola jen v jedné soutěži, není součet v posledním sloupci tabulky roven 80 (tj. počtu účastníků třetího kola III. ročníku FO).

7. Studijní texty pro první kolo soutěže

KATEGORIE A

Zákony Kirchhoffovy a jejich důsledky

(Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků.)

a)

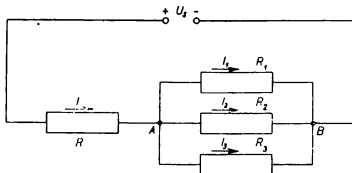
Při odvozování Kirchhoffových zákonů pro rozvětvené obvody vyjdeme z analogického případu u kapaliny. Prochází-li potrubím ustálený proud kapaliny, musí každým průřezem — i různě velkým — protéci ve stejných dobách stejné množství kapaliny. Proto také, když se potrubí rozvětví, musí být množství kapaliny proteklé všemi větvemi potrubí totéž jako množství kapaliny proteklé v téže době nerozvětveným potrubím. Kdyby totiž protékalo průřezem bližším k začátku trvale větší množství než průřezem vzdálenějším, musela by se kapalina někde v potrubí hromadit, kdyby protékalo blíže k počátku menší množství a dále větší, musel by někde v potrubí vzniknout prázdný prostor.

Obdobně je tomu u elektrického proudu. Vodičem připojeným k elektrickému zdroji konstantního napětí musí procházet ve všech místech stejně velký proud. Jestliže se vodič rozvětvuje, pak bod, v němž se stýkají aspoň tři vodiče, nazýváme uzel. V uzlu se proudy spojují nebo rozdělují. Analogicky k rozvětvenému proudu kapaliny vyplývá

pro elektrický proud I , že musí být v nerozvětvené části roven součtu proudů ve všech větvích (obr. 2); musí tedy platit

$$I = \Sigma I_k, \quad (1)$$

kde I je proud v části nerozvětvené a I_k proud jdoucí k -tou větví. Součet se vztahuje na všechny větve. Kdyby



Obr. 2

nebyl splněn tento vztah, tj. kdyby např. přitékající proud byl větší než součet proudů odtékajících, musel by se v uzlu hromadit kladný náboj, v opačném případě by se v něm hromadil náboj záporný. Tím by se měnil stále potenciál uzlů a nenastal by ustálený stav, což odporuje skutečnosti.

Označíme-li proudy vstupující do uzlu kladně, proudy z uzlu vystupující záporně, pak můžeme říci, že součet proudů v každém uzlu se zřetelem ke směru proudu je roven nule; tedy

$$\Sigma I_j = 0, \quad (2)$$

kde I_j značí jednotlivé proudy vcházející do uzlu nebo z něho vycházející s příslušným znaménkem. Tento poznatek nazýváme *první zákon Kirchhoffův*.

Všimneme si nyní případu, když se proud rozdělí na tři větve (obr. 2). Označme odpory v jednotlivých větvích R_1 , R_2 a R_3 . Bod, ve kterém se vodič větví, má určitý potenciál V_1 , bod, ve kterém se vodiče spojují, má jiný potenciál

V_2 . Pak musí pro napětí $U = V_1 - V_2$ mezi těmito body platit podle Ohmova zákona

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3, \quad (3)$$

tzn.

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_2 I_2 &= 0, & R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0, \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3')$$

Co vyjadřují tyto rovnice? Každý člen vyjadřuje napětí podle zákona Ohmova — nebo jak říkáme Ohmovo napětí. Tyto rovnice dostaneme též tak, že si vybereme uzavřený obvod — v prvním případě z prvé a druhé větve, v druhém případě z prvé a třetí větve a v třetím případě z druhé a třetí větve — a proběhneme jej libovolně zvoleným směrem — v prvním případě ve směru proudu I_1 , a tedy proti směru proudu I_2 , v druhém případě ve směru proudu I_1 , a tedy proti směru proudu I_3 a v třetím případě ve směru proudu I_2 , a tedy proti směru proudu I_3 . Pak součet Ohmových napětí s přihlédnutím ke směru proudu je roven nule, což vyjadřují rovnice (3'). Zvolíme-li směry oběhu opačně, dostaneme tytéž rovnice (3'). Jsou to však obvody, v nichž není elektrický zdroj.

Podle Ohmova zákona rovná se svorkové napětí zdroje součtu napětí na všech jednotlivých vodičích zařazených sériově do obvodu. Poněvadž napětí na všech paralelních větvích je stejné, lze psát, že součet napětí na vodiči o odporu R a napětí na kterékoli větvi (obr. 2) musí být roven svorkovému napětí U_s ; tedy

$$\begin{aligned} RI + R_1 I_1 &= U_s, & RI + R_2 I_2 &= U_s, \\ RI + R_3 I_3 &= U_s \end{aligned} \quad (4)$$

Proto dřívější poznatek pro obvod bez zdroje lze upravit (užitím poznatku o sčítání elektromotorických sil při spojení zdrojů za sebou) pro obvod se zdroji takto: V uzavřeném obvodu je součet Ohmových napětí na vnějších odporech, s přihlédnutím ke směru proudu, roven součtu svorkových napětí v obvodu zapjatých se zřetelem na polaritu zdroje. Tento poznatek nazýváme *druhý zákon Kirchhoffův*.

Přihlížíme-li k vnitřním odporům zdrojů, počítáme místo se svorkovými napětími s elektromotorickými silami (ems) zdrojů a s Ohmovými napětími i na vnitřních odporech zdrojů.

Z obrázku 2 a rovnic (4) je vidět, že Ohmovo napětí počítáme kladně, když zvolený směr proudu bude souhlasit se směrem našeho oběhu v uzavřeném obvodu. V opačném případě počítáme Ohmovo napětí záporně. Z obrázku je dále vidět, že svorkové napětí (příp. ems) bereme kladně, když zdroj je ve větvi zapojen tak, že se od záporného pólu dostáváme vnitřním odporem zdroje ke kladnému pólu ve směru oběhu; v opačném případě bereme svorkové napětí záporně.

Když chceme řešit spojení složitějšího obvodu (např. určit v daném spojení velikosti elektrických proudů), vyznačíme si nejdříve směry proudů v jednotlivých větvích. Směry proudů můžeme zvolit libovolně v každé větvi. Vyjde-li řešením napsaných rovnic proud v některé větvi záporný, znamená to, že jde touto větví opačným směrem, než jsme zvolili. Pak můžeme napsat pro každý uzel první Kirchhoffův zákon. Tyto rovnice nebudou na sobě nezávislé (např. v obr. 2 máme dva uzly, A , B , a rovnice pro proudy jsou v nich totožné). Pak si zvolíme ve spojení určitý obvod a zvolíme směr, kterým jej proběhneme. Napíšeme, že součet Ohmových napětí se rovná součtu zapjatých svorkových napětí (příp. ems, když přihlížíme i k vnitřním odporům). Pak rovnice řešíme.

b)

Ze vztahu (3') plyne pro n větví

$$I_1 : I_2 : I_3 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} : \dots : \frac{1}{R_n} = \\ = G_1 : G_2 : G_3 : \dots : G_n,$$

kde I_k je proud, R_k odpor a G_k vodivost k -té větve. Tento vztah říká, že se proudy v jednotlivých větvích rozdělí

v nepřímém poměru k jejich odporům čili v přímém poměru k jejich vodivostem.

Když chceme odpor n větví nahradit jediným odporem R , kterým by procházel stejný proud jako všemi větvemi dohromady, pak pro proudy $I_k = \frac{U}{R_k}$ ve větvích (podle vztahu (3)) a pro výsledný proud $I = \frac{U}{R}$ plyne ze vztahu (1)

$$\frac{U}{R} = \sum \frac{U}{R_k} \quad \text{čili} \quad UG = \sum UG_k;$$

z toho

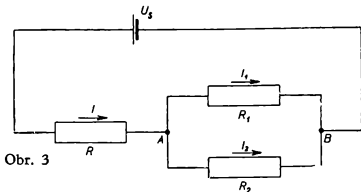
$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k} \quad \text{čili} \quad G = \sum G_k,$$

kde G je výsledná vodivost. Tento výsledek znamená, že při spojení odporů vedle sebe se součet převrácených hodnot odporů rovná převrácené hodnotě výsledného odporu čili výsledná vodivost se rovná součtu vodivostí jednotlivých větví.

Nyní vyřešíme několik příkladů. Prvé dva příklady se zabývají výpočtem proudů, druhé dva výpočtem odporů a pátý odvozením vztahů pro elektromotorickou sílu měřenou kompenzační metodou.

Příklad 1.

Vypočtete proudy I , I_1 , I_2 ve spojení vyznačeném na obr. 3. Přitom je dáno:



Obr. 3

$$R = 1\,000\ \Omega, R_1 = 50,0\ \Omega, \\ R_2 = 150,0\ \Omega \text{ a } U_s = 2,00\ \text{V}.$$

Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel *A*

$$I = I_1 + I_2 \quad (6)$$

(pro druhý uzel *B* plyne táž rovnice). Podle druhého Kirchhoffova zákona platí pro obvod tvořený odporem R_1 a odporem R_2

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0, \quad (7)$$

pro obvod tvořený odporem R a odporem R_1

$$RI + R_1 I_1 = U_s. \quad (8)$$

Pro obvod tvořený odporem R a odporem R_2 dostáváme rovnici

$$RI + R_2 I_2 = U_s,$$

která však již plyne z rovnic (7) a (8).

Ze (7) plyne

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} I_1, \quad (9)$$

pak z (6)

$$I = I_1 + \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} I_1 \quad (10)$$

a dosazením do (8) dostáváme

$$\left(R \frac{R_1 + R_2}{R_2} + R_1 \right) I_1 = U_s,$$

$$I_1 = \frac{U_s R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2};$$

z (9) plyne

$$I_2 = \frac{U_s R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}$$

a z (10)

$$I = \frac{U_s(R_1 + R_2)}{RR_1 + RR_2 + R_1R_2}.$$

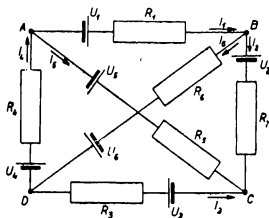
Po dosazení vychází

$$I_1 = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ A}, \quad I_2 = 0,48 \cdot 10^{-3} \text{ A}, \quad I = 1,93 \cdot 10^{-3} \text{ A},$$

Příklad 2.

Vypočítejte proudy v jednotlivých větvích sítě vyznačené na obr. 4. Je dáno:

$$\begin{array}{lll} R_1 = 1,00 \, \Omega, & R_2 = 2,00 \, \Omega & R_3 = 3,00 \, \Omega, \\ R_4 = 4,00 \, \Omega, & R_5 = 5,00 \, \Omega, & R_6 = 6,00 \, \Omega, \\ U_1 = 4,00 \text{ V}, & U_2 = 8,00 \text{ V}, & U_3 = 12,00 \text{ V}, \\ U_4 = 16,00 \text{ V}, & U_5 = 20,00 \text{ V}, & U_6 = 24,00 \text{ V}. \end{array}$$



Obr. 4

V každé větvi zvolíme libovolně směr proudu a potom v každém vybraném uzavřeném obvodu zvolíme libovolně směr oběhu. Ohmovo napětí počítáme kladně, když směr oběhu souhlasí se zvoleným směrem proudu, záporně v opačném případě. Elektromotorickou sílu zdroje počítáme kladně směrem od záporného pólu vnitřním odporem ke kladnému pólu, záporně v opačném případě.

Z obrázku je vidět, že jde o určení šesti proudů I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 a I_6 , proto potřebujeme šest na sobě nezávislých rovnic. Rovnice získáme vyjádřením 1. zákona Kirchhoffova pro vybrané uzly a 2. zákona Kirchhoffova pro vybrané obvody. Rovnice musí být na sobě nezávislé.

Pro uzly platí:

pro uzel A

$$-I_1 + I_4 - I_5 = 0,$$

pro uzel B

$$I_1 - I_2 - I_6 = 0,$$

pro uzel C

$$I_2 + I_3 + I_5 = 0,$$

pro uzel D vychází již z dřívějších rovnic i přímo

$$-I_3 - I_4 + I_6 = 0.$$

Z 2. Kirchhoffova zákona plyne

pro obvod ABC:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_5 I_5 = U_1 - U_2 - U_5,$$

pro obvod ABD:

$$R_1 I_1 + R_6 I_6 + R_4 I_4 = U_1 + U_6 + U_4,$$

pro obvod BCD:

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_6 I_6 = -U_2 + U_3 - U_6.$$

Vztahy pro další obvody není třeba psát, poněvadž už máme 6 rovnic na sobě nezávislých; z nich lze určit všechny proudy I_k . Vychází

$$I_1 = 1,26 \text{ A}, \quad I_2 = -2,26 \text{ A}, \quad I_3 = -1,89 \text{ A},$$

$$I_4 = 5,41 \text{ A}, \quad I_5 = 4,15 \text{ A}, \quad I_6 = 3,52 \text{ A}.$$

Příklad 3.

Vypočítejte výsledný odpor sítě, jejíž schéma je v obr. 5; přitom $R = 5,00 \, \Omega$, $r = 60,0 \, \Omega$ a $\varrho = 20,0 \, \Omega$.

Nejdříve nahradíme odpory mezi body C a D jediným odporem R_1 (obr. 6); platí

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R + \varrho},$$

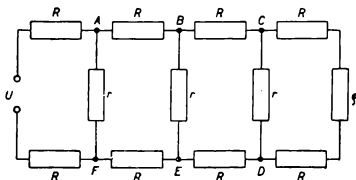
a tedy v našem případě

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{60} \Omega^{-1} + \frac{1}{30} \Omega^{-1}, R_1 = 20,0 \Omega.$$

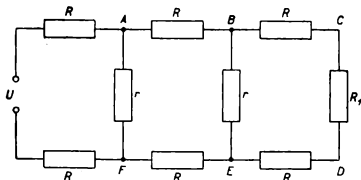
Nyní nahradíme odpory mezi body B a E , které se skládají z větvi r a $2R + R_1$, odporem R_2 (schéma by bylo obdobné)

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R + R_1}.$$

Protože v našem případě $R_1 = r$, je $R_2 = 20,0 \Omega$.



Obr. 5



Obr. 6

Nyní nahradíme odpory mezi body A a F ; skládají se z větvi o odporu r a $2R + R_2$; proto

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2R + R_2}.$$

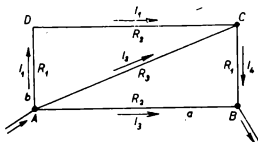
Poněvadž v našem případě $R_2 = \varrho$, je opět $R_3 = 20,0 \, \Omega$. Je tedy ke zdroji připojen odpor

$$R_4 = 2R + R_3 = 10,0 \, \Omega + 20,0 \, \Omega = 30,0 \, \Omega.$$

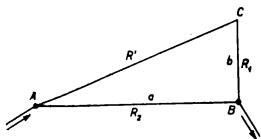
Výsledný odpor sítě je tedy $30,0 \, \Omega$.

Příklad 4.

Určete odpor vodiče z homogenního materiálu tvaru obdélníku o stranách a , b s úhlopříčkou AC , do něhož vstupuje proud v bodě A a vystupuje v bodě B (obr. 7).



Obr. 7



Obr. 8

Označme nejdříve odpory a proudy. Protilehlé strany mají též odpor. Odpor stran AD a DC a odpor úhlopříčky nahradíme odporem R' (obr. 8); pro něj platí

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3};$$

z toho

$$R' = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Pro výsledný odpor R pak platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R' + R_1} + \frac{1}{R_2};$$

z toho

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_2(R' + R_1)}{R' + R_1 + R_2} = \frac{R_2 \left(\frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_1 \right)}{\frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_1 + R_2} = \\ &= \frac{R_2(2R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1^2 + R_1 R_2)}{2R_1 R_3 + 2R_2 R_3 + R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Poněvadž } R_1 = \varrho \frac{b}{S}, R_2 = \varrho \frac{a}{S}, R_3 = \varrho \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{S} = \varrho \frac{c}{S},$$

kde ϱ je měrný odpor a S průřez vodiče, dostáváme pro výsledný odpor

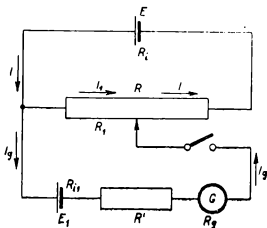
$$\begin{aligned} R &= \frac{\varrho}{S} \cdot \frac{a(b^2 + ab + ac + 2bc)}{a^2 + b^2 + 2ba + 2ac + 2bc} = \\ &= \frac{\varrho}{S} \cdot \frac{a(b^2 + ab + ac + 2bc)}{(a + b + 2c)(a + b)}. \end{aligned}$$

Příklad 5.

Odvoďte vztah pro určení elektromotorické síly článku kompenzační metodou.

Elektromotorickou sílu článku měříme obvykle tak, že k jeho pólům prostě připojíme voltmetr. Každým voltmetrem (kromě elektrostatického voltmetru, o kterém zde neuvažujeme) však prochází (třeba jen nepatrný) proud. Proto se elektromotorická síla rozdělí na vnější odpor a

vnitřní odpor a voltmetrem nenaměříme elektromotorickou sílu článku, nýbrž jen svorkové napětí. Když je vnitřní odpor článku malý vzhledem k odporu voltmetru, je rozdíl mezi naměřeným svorkovým napětím a elektromotorickou silou nepatrný, a proto k němu v laboratorní praxi obvykle nepřihlížíme. Někdy je však třeba naměřit přesně elektromotorickou sílu. Máme k tomu několik metod. Popíšeme si tzv. metodu kompenzační neboli vyrovnávací.



Obr. 9

Kompenzační metoda patří mezi tzv. nulové metody. Užijeme při ní pomocného článku o ems E (větší než je měřená ems E_1), normálního Westonova článku, odporu R a galvanometru G s předřazeným odporem R' (obr. 9). Myšlenka metody spočívá v tom, že pomocným napětím E vykompenzujeme napětí v obvodu měřeného napětí E_1 tak, že obvodem nebude procházet proud (proto nulová metoda).

Do obvodu pomocného článku o ems E zapojíme odpor R . Na něm lze najít dva body, které mají potenciální rozdíl rovný ems E_1 ; označme odpor mezi těmito body R_1 . Jestliže k těmto bodům připojíme paralelně měřený článek tak, že k místu nejvyššího potenciálu je připojen kladný pól článku,

nemůže touto připojenou větví procházet proud. Označíme-li vnitřní odpor článku o ems E písmenem R_1 , jde odporem R_1 — pokud není připojen paralelní obvod — proud

$I = \frac{E}{R + R_1}$. Pak na odporu R_1 je napětí

$$E_1 = \frac{E}{R + R_1} \cdot R_1. \quad (11)$$

Jestliže při tomto odporu R_1 neprochází obvodem s galvanometrem proud, pak je napětí na R_1 rovno ems měřeného článku. Podle vztahu (11) však nelze ještě určit ems E_1 , poněvadž neznáme E a R_1 . Proto provedeme druhé měření, při němž místo článku o ems E_1 použijeme normálního Westonova článku, jehož ems při 20°C je $1,018\,64$ V. Mění-li se teplota, mění se jeho ems podle vztahu

$$E_n = [1,018\,64 - 0,000\,040\,6(t - 20) - 0,000\,000\,95 \cdot (t - 20)^2 + 0,000\,000\,01(t - 20)^3] \text{ V.}$$

Proto lze pro teplotu, při níž měříme, určit přesně ems Westonova článku.

Jestliže nyní místo měřeného článku o ems E_1 zapojíme Westonův článek o ems E_n , nebude galvanometrem procházet proud při odvětvení z jiného odporu R_2 . Proto bude platit:

$$E_n = \frac{E}{R + R_1} \cdot R_2. \quad (12)$$

Vydělením rovnic (11) a (12) dostaneme:

$$E_1 = E_n \frac{R_1}{R_2}. \quad (13)$$

Podle vztahu (13) určíme pak ems E_1 jen z E_n a naměřených odporů R_1 a R_2 .

Aby před nalezením správného odporu R_1 , popř. R_2 , neprocházel galvanometrem silný proud, příp. se silný proud

neodebíral z Westonova článku, předřadí se galvanometru velký odpor R' , který se pak po přibližném vyrovnání vypne.

Vztah (11) pro výpočet ems kompenzační metodou můžeme určit též užitím Kirchhoffových zákonů.

Podle 1. zákona Kirchhoffova platí:

$$I = I_1 + I_g. \quad (14)$$

Podle 2. zákona Kirchhoffova platí:

$$E = R_1 I_1 + (R - R_1) I + R_i I, \quad (15)$$

$$E_1 = R_1 I_1 - (R_g + R' + R_{i1}) I_g, \quad (16)$$

kde R_g je odpor galvanometru, R' předřazený odpor galvanometru a R_{i1} vnitřní odpor měřeného článku. Do rovnice (15) dosadíme za I z rovnice (14):

$$E = R_1 I_1 + (R - R_1 + R_i) (I_1 + I_g),$$

$$E = (R + R_i) I_1 + (R - R_1 + R_i) I_g. \quad (17)$$

Vyloučíme nyní I_1 z rovnic (17) a (16) a dostaneme:

$$I_1 = \frac{E - (R - R_1 + R_i) I_g}{R + R_i},$$

$$E_1 = R_1 \frac{E - (R - R_1 + R_i) I_g}{R + R_i} - (R_g + R' + R_{i1}) I_g.$$

Jestliže zvolíme R_1 tak, aby bylo $I_g = 0$, pak dostáváme:

$$E_1 = R_1 \frac{E}{R + R_i}, \text{ jak dává vztah (11).}$$

Další poučení o Kirchhoffových zákonech lze najít v článku E. Římana, CSc., v Matematicko-fyzikálních rozhledech, roč. 39 (1960–61), čís. 9, str. 425.

KATEGORIE B

Měření kalorimetrem

(Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků.)

V první části článku pojednáme o základních veličinách kalorimetrických a o tepelné kapacitě kalorimetru, v druhé části o určování měrného tepla pevných látek a v třetí části o určování skupenského tepla tání.

a) Základní veličiny kalorimetrické a tepelná kapacita kalorimetru

Teplo je druh energie. Proto jednotkou pro teplo je jednotka pro energii, tedy v soustavě MKSA joule (J). Místo této jednotky používá se v praxi ještě jednotka kilokalorie (kcal), jejíž souvislost s joulem je dána vztahem

$$1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J}.$$

Měrné teplo (c) je množství tepla, kterého je třeba k zvýšení teploty 1 kg látky o 1 °C; závisí poněkud na teplotě. Každá látka má obecně jiné měrné teplo, takže měrné teplo je charakteristickou veličinou dané látky. Aby se teplota látky hmoty m zvýšila o Δt , musíme jí dodat teplo:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

a tedy

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}. \quad (1)$$

Jednotku měrného tepla dostaneme, když do vztahu (1) dosadíme jednotky uvedených veličin; tedy jednotkou měrného tepla je $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$. Toto měrné teplo by měla látka, jejíž 1 kg by se ohřál teplem 1 J o 1 °C. Když užijeme jako jednotky pro teplo kcal, pak je jednotka měrného tepla $\text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$. Toto je měrné teplo vody. Měrná tepla jsou uvedena v Matematicko-fyzikálních tabulkách.

Látka může být ve fázi (skupenství) pevné, kapalné nebo plynné. Pro přeměnu z jedné fáze do druhé je třeba dodat nebo ubrat látce teplo. Množství tepla, které je třeba dodat (ubrat) 1 kg látky při teplotě tání (tuhnutí) k přechodu z jedné fáze do druhé se nazývá *skupenské teplo tání (tuhnutí)*.

Jednotkou pro skupenské teplo je tedy $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ a v praxi $\text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1}$.

K určení měrného tepla i skupenského tepla používáme kalorimetru. Je to kovová nádoba od okolí tepelně izolovaná, opatřená míchačkou a teploměrem. Jako kalorimetru lze použít též Dewarovy nádoby. Jsou-li látky dané do kalorimetru dokonale od okolí izolovány a chemicky na sebe nepůsobí, ustálí se jejich teplota a teplota kalorimetru na určité hodnotě. Teplejší látky vydají teplo a chladnější látky přijmou teplo. Teplo chladnějšími látkami přijaté musí být rovno teplu vydanému teplejšími látkami. Vložíme-li do kalorimetru s kapalinou teplejší látku, zahřeje se od ní netoliko kapalina, nýbrž i kalorimetr s míchačkou a s teploměrem, a musíme k této skutečnosti přihlídnout. Proto zavádíme pojem tepelné kapacity (K) kalorimetru. Je to množství tepla, které potřebuje kalorimetr s míchačkou i teploměrem k zahřátí o 1°C . Zvýší-li se dodaným teplem teplota látky i kalorimetru o Δt , přijal kalorimetr teplo:

$$Q' = K \cdot \Delta t.$$

Tepelnou kapacitu kalorimetru můžeme vypočítat podle její definice ze známých hmot a měrných tepel kalorimetru s příslušenstvím nebo určit měřením. U Dewarových nádob musíme ji vždy určovat měřením.

1. Z definice určíme tepelnou kapacitu takto: Označme měrné teplo kalorimetrické nádoby c' , míchačky c'' a jejich hmoty m' a m'' . Pak teplo potřebné k zahřátí kalorimetru a míchačky o 1°C je:

$$K_1 = m' \cdot c' + m'' \cdot c''.$$

Tepelná kapacita teploměru je velmi malá proti tepelné

kapacitě kalorimetrické nádoby s míchačkou. Proto ji někdy zanedbáváme. Přihlédneme k ní jen při přesnějších měřeních. Pro její výpočet uvážíme toto: Teploměr je ze skla a rtuti. Měrné teplo skla je $0,19 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$ a měrné teplo rtuti $0,033 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$. Určíme teplo, které potřebuje k zahřátí o 1°C 1 cm^3 skla, tj. $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3}$ skla, a 1 cm^3 rtuti, tj. $13,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3}$ rtuti. Pro 1 cm^3 skla vychází $0,475 \cdot 10^{-3} \text{ kcal} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{deg}^{-1}$ a pro 1 cm^3 rtuti $0,449 \cdot 10^{-3} \text{ kcal} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{deg}^{-1}$. Poněvadž obě hodnoty jsou přibližně stejné, bereme tepelnou kapacitu teploměru vztahenou na 1 cm^3 $0,46 \cdot 10^{-3} \text{ kcal} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{deg}^{-1}$. Je-li V objem ponořené části teploměru (určíme jej kalibrovanou nádobou), je tepelná kapacita kalorimetru s příslušenstvím

$$K = m' \cdot c' + m'' \cdot c'' + 0,46 \cdot 10^{-3} \cdot V. \quad (2)$$

Poněvadž ve vztahu (2) je číselný koeficient, musí být přesně stanoveno, v jakých jednotkách musí být uvedené veličiny měřeny: m' a m'' v kg, V v cm^3 , c' a c'' v $\text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$. Kalorimetr a míchačka bývají obvykle zhotoveny z mosazi, jejíž $c' = c'' = 0,093 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$.

2. Měřením určujeme tepelnou kapacitu kalorimetru takto: Do kalorimetru dáme odvážené množství vody m_1 a po vyrovnání její teploty s teplotou kalorimetru změříme její teplotu t_1 . Potom přidáme do kalorimetru množství m_2 vody o teplotě t_2 a po vyrovnání teplot změříme výslednou teplotu t . Pak z kalorimetrické rovnice

$$m_1 \cdot c \cdot (t - t_1) + K \cdot (t - t_1) = m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t)$$

vychází

$$K = m_2 \cdot c \cdot \frac{t_2 - t}{t - t_1} - m_1 \cdot c,$$

kde c je měrné teplo vody ($c = 1,00 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$).

b) *Určování měrného tepla pevných látek*

Měrné teplo pevných látek určujeme takto: Do kalorimetru o tepelné kapacitě K dáme kapalinu, v níž se zkoumaná látka nerozpouští, s níž chemicky nereaguje a jejíž měrné

teplo c_1 známe; její hmotu označme m_1 a teplotu t_1 . Pak do kapaliny vložíme těleso, jehož měrné teplo určujeme, zahřáté na vhodnou teplotu; jeho hmotu označme m_2 , měrné teplo c_2 a teplotu t_2 . Když se výsledná teplota ustálí na hodnotě t , odevzdala vložená látka teplo $m_2 \cdot c_2 \cdot (t_2 - t)$, které přijala jednak kapalina — $m_1 \cdot c_1 \cdot (t - t_1)$, jednak kalorimetr — $K \cdot (t - t_1)$; proto platí kalorimetrická rovnice

$$m_1 c_1 (t - t_1) + K(t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t).$$

Odtud

$$c_2 = \frac{(m_1 c_1 + K) \cdot (t - t_1)}{m_2 (t_2 - t)}.$$

Těleso, jehož měrné teplo určujeme, zahřejeme v lázni na teplotu t_2 (blízko 100°C). Potom těleso přeneseme do kalorimetru. Přenášení musíme provést velmi rychle, aby se jeho teplota nezměnila. Přitom musíme dát pozor, abychom do kalorimetru nepřenesli i kapalinu z lázně.

c) Určování skupenského tepla tání

Budeme určovat skupenské teplo tání l látky, jejíž teplotu tání t_0 , měrné teplo v pevném skupenství c_2 a měrné teplo v kapalném skupenství c_3 známe.

Do kalorimetru o tepelné kapacitě K dáme nejprve kapalinu, v níž se zkoumaná látka nerozpouští, s níž chemicky nereaguje a jejíž měrné teplo známe (obvykle vodu); její hmotu označme m_1 , měrné teplo c_1 a teplotu t_1 . Teplota t_1 musí být dostatečně vyšší než teplota tání t_0 zkoumané látky. Pak do kapaliny vhodíme kousek zkoumané látky v pevném skupenství, teploty t_2 ; hmotu m_2 zkoumané látky určíme dodatečně z přírůstku hmoty kalorimetru s kapalinou. Pevná látka se nejdříve zahřeje na teplotu tání t_0 , pak se její skupenství změní v kapalně téže teploty; nyní se teploty obou kapalin vyrovnají a ustálí na výsledné teplotě t . Teplo potřebné k přeměně skupenství a k ohřátí pevné látky a vzniklé kapaliny se odebere kapalině, kterou jsme dali do kalorimetru, a kalorimetru s příslušenstvím.

K zahřátí látky hmoty m_2 o měrném teple c_2 z teploty t_2 na teplotu t_0 je zapotřebí $m_2 \cdot c_2 \cdot (t_0 - t_2)$ tepla. Na proměnu skupenství této látky je zapotřebí $m_2 \cdot l$ tepla. Na zahřátí kapaliny o hmotě m_2 a měrném teple c_3 z teploty t_0 na teplotu t je pak zapotřebí $m_2 \cdot c_3 \cdot (t - t_0)$ tepla. Toto teplo se odebere jednak kapalině v kalorimetru — $m_1 \cdot c_1 \cdot (t_1 - t)$, jednak kalorimetru s příslušenstvím — $K \cdot (t_1 - t)$. Proto platí rovnice

$$m_1 c_1 (t_1 - t) + K(t_1 - t) = m_2 c_2 (t_0 - t_2) + m_2 l + m_2 c_3 (t - t_0)$$

a z ní pak určíme neznámé skupenské teplo tání l .

Pohyb jednoduché soustavy těles spojených vláknem

KATEGORIE C

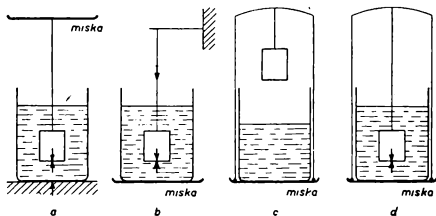
(Zpracoval prof. dr. Rostislav Košťál s kolektivem spolupracovníků.)

Působí-li síla na tuhé těleso, které se může pohybovat, udílí mu zrychlení. Chceme-li zjistit, jak se těleso pohybuje, určíme nejdříve všechny síly na těleso působící. Tyto síly se dají obecně nahradit výslednicí a výsledným otáčivým momentem. Všimněme si jen případu, kdy výsledný moment je roven nule.

Je třeba vždy dobře uvážit, která síla působí na dané těleso, abychom ji nezaměnili s její reakcí. Ukážeme si to na následujících příkladech.

Podle Archimédova zákona je těleso nadlehčováno v kapalině silou, která se rovná váze vytlačené kapaliny. Proto na těleso ponořené v kapalině působí dvě síly: váha tělesa směrem dolů a vztlaková síla kapaliny na těleso směrem vzhůru. Zavěsíme-li těleso na misku vah a po vyvážení je ponoříme úplně do nádoby s vodou, která je na pevné podložce pod vahami (obr. 10a), rovnováha se poruší — miska s tělesem bude nadlehčena. Zde jsme si všimli síly, kterou působí kapalina na těleso.

Jestliže si budeme všimnout sil, které působí na kapalinu (k nádobě nepřihlížíme), pak směrem dolů působí váha kapaliny a kromě toho tlaková síla, kterou působí těleso na kapalinu, jako reakce tlakové síly, kterou působí kapalina na těleso. Vyvážíme-li tedy nádobu s vodou, a pak do ní ponoříme těleso, které je zavěšeno na stojánku mimo váhy (obr. 10b), miska s kapalinou klesne.



Obr. 10

Jestliže na vahách vyvážíme nádobku s vodou a nad ní zavěšeným tělesem (obr. 10c), pak při ponoření tělesa do kapaliny (obr. 10d) se rovnováha na vahách neporuší.

Ve všech případech působila tlaková síla kapaliny na těleso a tlaková síla tělesa na kapalinu. Obě síly jsou stejně velké — rovnají se váze kapaliny vytlačené tělesem — ale opačného směru. V prvním případě se tlaková síla tělesa na kapalinu zruší pevností podložky pod nádobou a zbývá tlaková síla kapaliny na těleso směrem vzhůru. Proto je miska s tělesem nadlehčována. V druhém případě se zruší tlaková síla kapaliny na těleso upevněním závěsného bodu a zbývá tlaková síla tělesa na kapalinu směrem dolů. Proto miska s kapalinou klesne. V třetím případě se nemůže ani prvá ani druhá síla zrušit pevností podložky (kapalina i těleso

jsou na vahách), obě síly se přenášejí (závěsem a dnem nádoby) na misku v opačných směrech, a proto se jejich účinky na misku zruší a rovnováha se neporuší.

Aby těleso upevněné na vlákně neproměnné délky konalo rovnoměrný pohyb po kružnici ve vodorovné rovině, musí je vlákno táhnout silou, která míří do středu kružnice, tzv. silou dostředivou. Těleso zase napíná vlákno silou stejně velikou, ale opačného směru, které říkáme síla odstředivá. V prvním případě jde o sílu, kterou bod upevnění působí prostřednictvím vlákna na těleso, ve druhém případě jde o sílu, kterou těleso působí prostřednictvím vlákna na bod upevnění.

Výsledná síla se podle 2. pohybového zákona rovná součtinu setrvačné hmoty tělesa nebo setrvačných hmot soustavy těles, na niž síla působí, a zrychlení. Proto sečteme setrvačné hmoty soustavy pohybujících se těles, a pak ze známé setrvačné hmoty a známé síly vypočítáme zrychlení pohybu.

V dalším si všimneme pohybu těles spojených vláknem a určíme, jaké je zrychlení jednotlivých těles a jakou silou je při pohybu vlákno napjato. Pro zjednodušení úvah předpokládáme, že při pohybu nevzniká tření, že vlákno je dokonale ohebné, neproměnné délky a že jeho hmota je zanedbatelně malá vzhledem k hmotám těles. Omezíme se jen na takové soustavy, v nichž všechna tělesa se pohybují se stejným zrychlením. V těchto případech vystačíme s následujícím způsobem řešení.

Jestliže těleso hmoty m visí na vlákně a závěsný bod je v klidu, táhne těleso závěsný bod prostřednictvím vlákna silou $F_1 = mg$ směrem dolů; závěsný bod působí na těleso prostřednictvím vlákna reakcí stejně velkou směrem vzhůru. Protože obě síly jsou v jedné přímce a opačného směru, napínají jen vlákno a těleso — které bylo v klidu — v klidu zůstává.

Jestliže je těleso taženo vláknem směrem vzhůru se zrychlením a , musí na ně působit směrem vzhůru kromě reakce

vlákna ještě další síla $F_1 = ma$, která mu uděluje žádané zrychlení. Proto na těleso působí směrem vzhůru síla:

$$F_2 = m(g + a). \quad (1)$$

Tato síla působí na těleso prostřednictvím vlákna, a tedy podle principu akce a reakce je síla, kterou těleso napíná vlákno, stejně velká, ale směřuje dolů.

Pohybuje-li se závěsný bod rovnoměrně — ať již směrem tíhového zrychlení, nebo opačným směrem — pak tělesu o hmotě m se neuděluje žádné zrychlení, a vlákno je tedy napínáno zase jen silou $F_1 = mg$.

Jestliže se závěsný bod pohybuje směrem zrychlení g , avšak se zrychlením $a \neq g$, pak z celkové síly $F_1 = mg$, působící na těleso směrem dolů, složka $F_3 = ma$ způsobuje pohyb a zbývající složka

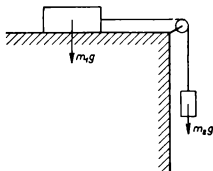
$$F_4 = mg - ma = m(g - a) \quad (2)$$

napíná vlákno.

Když síla působící na těleso je způsobována váhou jiného tělesa, pak jeho tlaková síla na uvažované těleso odpovídá dříve uvedené tažné síle.

Příklad 1.

Těleso o hmotě m_1 je uváděno do pohybu po vodorovné rovině tělesem o hmotě m_2 , které je k němu připojeno vláknem vedeným přes kladku (obr. 11). Vypočtete zrychlení soustavy těles a sílu napínající vlákno.



Obr. 11

Síla způsobující pohyb je $F = m_2 g$. Hmoty uváděná do pohybu skládá se z hmoty m_1 a hmoty m_2 , které se pohybují se stejným zrychlením a (k otáčivému pohybu kladky nepřehlídíme). Proto podle 2. pohybového zákona platí:

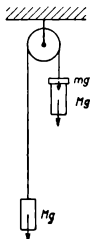
$$m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

a z toho

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Na vlákno působí těleso o hmotě m_2 , které se pohybuje se zrychlením a směrem tíhového zrychlení; proto je vlákno napjato jen silou

$$F_1 = m_2(g - a) = m_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) g = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$



Obr. 12

Příklad 2.

Na koncích vlákna vedeného přes pevnou kladku jsou zavěšena stejná tělesa o hmotě M a na jednom z nich leží ještě přívažek o hmotě m (obr. 12). Určete zrychlení pohybu, tlakovou sílu přívažku na hmotu M , sílu napínající vlákno a tlakovou sílu na osu kladky.

Silou způsobující pohyb je váha přivažku mg ; hmota uvedená do pohybu je $2M + m$. (K otáčivému pohybu kladky nepřihlížíme). Proto platí:

$$mg = (2M + m)a$$

a z toho

$$a = \frac{m}{2M + m}g.$$

Poněvadž přivažek by se sám pohyboval se zrychlením g a poněvadž podložka se pohybuje jen se zrychlením a , působí přivažek o hmotě m na závaží o hmotě M směrem dolů silou

$$F_1 = m(g - a) = m\left(1 - \frac{m}{2M + m}\right)g = \frac{2mM}{2M + m}g.$$

Poněvadž se soustava těles pohybuje směrem, jímž působí síla $Mg + mg$, je na pravé straně podle (2) vlákno napjato silou souvisící jen s rozdílem zrychlení, kterého by tělesa nabyla při volném pádu, a zrychlení, kterého skutečně nabývají, tedy silou:

$$\begin{aligned} F_2 &= (M + m)(g - a) = (M + m)\left(1 - \frac{m}{2M + m}\right)g = \\ &= \frac{2M(M + m)}{2M + m}g. \end{aligned}$$

Na levé straně nese vlákno jen hmotu M která by v klidu napínala vlákno silou Mg . Toto těleso se však pohybuje směrem opačným ke zrychlení g , a to se zrychlením a . Proto podle (1) je síla, která napíná vlákno,

$$F_3 = M(g + a) = M\left(1 + \frac{m}{2M + m}\right)g = \frac{2M(M + m)}{2M + m}g.$$

Vlákno je tedy na obou stranách napínáno stejnou silou, což je samozřejmé.

Poněvadž F_2 a F_3 jsou síly stejně velké, rovnoběžné, stejného směru a působí ve stejných vzdálenostech od osy kladky, působí jejich výslednice v ose kladky a rovná se součtu obou sil. Proto osa kladky podléhá síle:

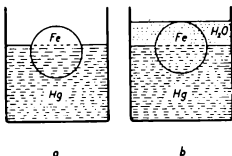
$$F_4 = F_2 + F_3 = 2F_2 = \frac{4M(M+m)}{2M+m} g .$$

8. Úlohy prvního kola soutěže a jejich řešení

KATEGORIE A

1. Ocelová koule plove na rtuti. O kolik procent svého objemu se vynoří ze rtuti, nalijeme-li na ni tolik vody, aby byla celá ponořená?

Označení veličin a dané hodnoty: hustota železa $\rho = 7\,860\text{ kg/m}^3$; hustota rtuti $\rho_1 = 13\,550\text{ kg/m}^3$; hustota vody $\rho_2 = 1\,000\text{ kg/m}^3$; objem koule je V ; objem části koule ponořené do rtuti před nalitím vody je V_1 , po nalití vody V_2 ; tíhové zrychlení je g . (Obr. 13a, b.)



Obr. 13

Řešení: Podle Archimédova zákona a zákona o plování těles je váha plovoucího tělesa rovna váze kapaliny tělesem vytlačené. Před nalitím vody vytlačí těleso množství rtuti

objemu V_1 , po nalití vody množství rtuti objemu V_2 a množství vody objemu $V - V_2$. Proto platí v prvním případě $V\rho g = V_1\rho_1 g$, v druhém případě $V\rho g = V_2\rho_1 g + (V - V_2)\rho_2 g$. Z těchto rovnic vychází

$$V_1 = \frac{\rho}{\rho_1} V \quad \text{a} \quad (1)$$

$$V_2(\rho_1 - \rho_2) = V(\rho - \rho_2), \quad \text{tedy} \quad V_2 = V \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (2)$$

Po nalití vody na rtuť se ze rtuti vynoří část tělesa objemu $V_1 - V_2$. Dosadíme-li za V_1 a V_2 hodnoty z rovnic (1) a (2), dostaneme

$$V_1 - V_2 = V \left(\frac{\rho}{\rho_1} - \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \right) = V \frac{\rho_2 (\rho_1 - \rho)}{\rho_1 (\rho_1 - \rho_2)}.$$

Poměr části tělesa vynořivšího se ze rtuti po nalití vody k objemu celého tělesa je

$$p' = \frac{V_1 - V_2}{V} = \frac{\rho_2 (\rho_1 - \rho)}{\rho_1 (\rho_1 - \rho_2)}.$$

Označíme-li písmenem p v procentech tu část objemu ocelové koule, která se po nalití vody vynoří ze rtuti, je

$$p = p' \cdot 100 \% = 100 \frac{\rho_2 (\rho_1 - \rho)}{\rho_1 (\rho_1 - \rho_2)} \%.$$

Numericky:

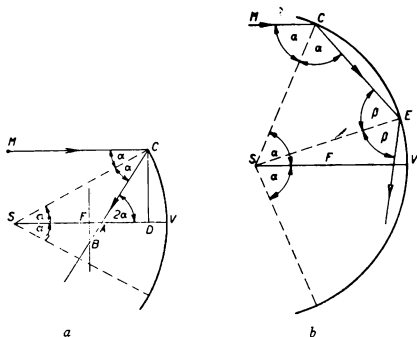
$$p = 100 \cdot \frac{(13\,500 - 7\,860)}{13\,550 \cdot 12\,550} \%,$$

$$p \doteq 3,35 \%.$$

Nalijeme-li na rtuť, ve které plove ocelová koule, tolik vody, aby se celá koule ponořila, vynoří se ze rtuti přibližně 3,35 % objemu koule.

2. Kulové zrcadlo o poloměru $r = SV$ má středový úhel 2α ; F je ohnisko zrcadla (obr. 14a). Krajní paprsek rovno-

běžný s optickou osou se odráží od bodu A . Úsečka AF se jmenuje podélná aberace, FB příčná aberace. Vypočítejte AF a FB pomocí r a úhlu α . Dále určete, kdy jsou obě uvedené vady rovny nule.



Obr. 14

Řešení: Přímka SC protíná dvě rovnoběžky MC a SV . Úhly $\sphericalangle MCS$ a $\sphericalangle VSC$ jsou střídavé, a proto shodné. Úhel dopadu $\sphericalangle MCS$ má tedy velikost α . Podle zákona o odrazu světelného paprsku je úhel dopadu roven úhlu odrazu a odražený paprsek leží v dopadové rovině. Dopadovou kolmicí je SC . Úhel $\sphericalangle SCA$ je tudíž roven $\sphericalangle MCS$ a platí $\sphericalangle SCA = \alpha$. Trojúhelník $\triangle CSA$ má shodné úhly velikosti α při vrcholech S a C a je tedy rovnoramenný. Úhel $\sphericalangle CAV$ je vnějším úhlem v tomto trojúhelníku a je roven součtu protilehlých vnitřních úhlů; proto

$$\sphericalangle CAV = 2\alpha. \quad (1)$$

V pravouhlém trojúhelníku $\triangle SCD$, jehož přeponou je $SC = r$, lze vypočítat obě odvěsny:

$$CD = SC \cdot \sin \alpha = r \sin \alpha, \quad (2)$$

$$SD = SC \cdot \cos \alpha = r \cos \alpha. \quad (3)$$

V pravouhlém trojúhelníku CAD je odvěsna $AD = CD \cdot \cotg 2\alpha$ a dosadíme-li za CD z rovnice (2), je $AD = r \cdot$

$$\sin \alpha \cotg 2\alpha = r \sin \alpha \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Po další úpravě získáme vztah

$$AD = \frac{r \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (4)$$

Protože ohnisko kulového zrcadla má od středu křivosti i od vrcholu zrcadla stejnou vzdálenost, je

$$FV = SF = \frac{r}{2}. \quad (5)$$

Z obrázku je patrné, že podélná aberace $FA = SD - SF - AD$.

Dosadíme-li do této rovnice za SD , SF a AD hodnoty ze vztahů (3), (5) a (4), vyjde pro podélnou aberaci hodnota

$$FA = r \cos \alpha - \frac{r}{2} - \frac{r \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} FA &= r \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \\ &= r \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} = \end{aligned}$$

$$= r \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

$$FA = r \frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (6)$$

Příčná aberace je odvěsnou pravoúhlého $\triangle BAF$, jehož úhel při vrcholu A je 2α , neboť úhly $\sphericalangle SAB$ a $\sphericalangle VAC$ jsou vrcholové. Proto platí

$$FB = FA \operatorname{tg} 2\alpha = r \frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = r \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\cos 2\alpha}. \quad (7)$$

Podélná aberace má hodnotu $FA = \frac{r(1 - \cos \alpha)}{2 \cos \alpha}$, příčná aberace $FB = \frac{r \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\cos 2\alpha}$.

Diskuse: Uvažujeme-li podle obrázku jen kulové zrcadlo duté, může nabývat úhel α hodnot pouze v intervalu $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$. Velikost podélné aberace je rovna nule podle vztahu (6) tehdy, jestliže $\cos \alpha = 1$, tj. pro úhel $\alpha = 0^\circ$. Pro všechny ostatní úhly v uvedeném intervalu je $FA > 0$, neboť $\cos \alpha$ nabývá pro tyto úhly jen hodnot v mezích $0 < \cos \alpha < 1$, takže čitatel i jmenovatel zlomku ve výrazu (6) je kladný. Proto leží bod A na polopřímce FV .

Roste-li úhel α , pak se hodnota $\cos \alpha$ zmenšuje, a proto roste čitatel a zmenšuje se jmenovatel zlomku ve výrazu (6). Jestliže tedy úhel α roste, podélná aberace FA se zvětšuje. Nemůže však růst nade všechny meze. Kdyby totiž dosáhla větší hodnoty než $\frac{r}{2}$, došlo by na zrcadle k vícenásobnému odrazu paprsku MC (obr. 14b). Proto musí platit $r \frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \leq \frac{r}{2}$. Z této nerovnosti plyne vztah $\cos \alpha \geq \frac{1}{2}$.

Úhel α může nabývat hodnot jen v intervalu

$$0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ. \quad (8)$$

Při úhlu $\alpha_1 = 0^\circ$ má podélná aberace hodnotu rovnou nule, při úhlu 60° má hodnotu rovnou ohniskové vzdálenosti zrcadla.

Nemá smysl uvažovat velikost příčné aberace při úhlu $\alpha_2 = 45^\circ$, neboť ve výrazu (7) má pro tento úhel jmenovatel hodnotu rovnou nule. V tomto případě platí $\angle ASC = \angle SCM = \angle ACS = 45^\circ$. Proto je $\angle SAC = 90^\circ$ a bod A splyne s bodem D . Odražený paprsek CA je pak rovnoběžný s ohniskovou rovinou zrcadla a neprotíná ji.

Vyloučíme-li případ $\alpha_2 = 45^\circ$, nenabývá jmenovatel zlomku ve výrazu (7) pro žádný úhel v intervalu (8) hodnoty rovné nule. Čitatel má hodnotu rovnou nule v případech $\sin \alpha = 0$ a $\cos \alpha = 1$. Z obou těchto rovnic vyplývá pro úhel α hodnota 0° .

Příčná i podélná aberace jsou rovny nule jen pro nulové paprsky.

3. Otevřená nádoba se zahřeje na teplotu 727°C . Kolik procent hmoty vzduchu zůstane v nádobě ve srovnání s množstvím m_0 , které tam bylo při 0°C ? Roztažnost nádoby zanedbáváme.

Označení veličin a dané hodnoty: Původní teplota vzduchu před zahřátím v absolutní teplotní škále byla $T_0 = 273^\circ\text{K}$; po zahřátí je $T = 1000^\circ\text{K}$. Hledaný poměr označme písmenem x' , v procentech písmenem x .

Řešení: K řešení můžeme užít stavové rovnice ideálního plynu

a) ve tvaru

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = R, \quad (1)$$

kde p , V značí tlak a objem jednoho kilomolu vzduchu při teplotě T a p_0 , V_0 tlak a objem téhož množství vzduchu při teplotě T_0 , R je univerzální plynová konstanta stejná pro všechny plyny. Protože kilomol plynu je tolik kilogramů plynu, kolik činí jeho molekulová hmotnost μ , má konstanta pro jeden kilogram plynu hodnotu $\frac{R}{\mu}$ a pro hmotu m_0

plynu hodnotu $\frac{Rm_0}{\mu}$. Můžeme tedy pro hmotu m_0 ideálního

plynu psát stavovou rovnici ve tvaru

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{R m_0}{\mu} \text{ a po úpravě } p_0 V_0 = \frac{R}{\mu} m_0 T_0. \quad (2)$$

Tato rovnice platí před ohřátím nádoby. Po ohřátí nádoby a plynu na teplotu T bude platit obdobný vztah

$$pV = \frac{R}{\mu} mT, \quad (3)$$

kde m značí hmotu vzduchu, který zůstal v nádobě po ohřátí. Část vzduchu totiž při ohřívání unikla z nádoby. Proto je $m < m_0$. Protože nádoba je otevřená, udržuje se tlak plynu stálý, a proto $p = p_0$. Zanedbáme-li roztažnost nádoby, je také $V = V_0$. Jsou tedy levé strany rovnic (2) a (3) stejné, a proto platí

$$\frac{R}{\mu} mT = \frac{R}{\mu} m_0 T_0.$$

Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$\frac{m}{m_0} = \frac{T_0}{T}.$$

Avšak výraz $\frac{m}{m_0}$ je právě hledaný poměr x' , takže $x' = \frac{m}{m_0}$.

Po úpravě:

$$x' = \frac{T_0}{T} = \frac{273 \text{ } ^\circ\text{K}}{1\,000 \text{ } ^\circ\text{K}} = 0,273, \quad x = 27,3 \text{ } \%.$$

b) Protože tlak vzduchu v nádobě zůstává před ohřátím i po něm stejný, můžeme pokládat děj, který při ohřívání v plynu probíhá, za děj izobarický; pak platí jednodušší rovnice

$$\frac{V'}{T} = \frac{V_0}{T_0}, \quad (4)$$

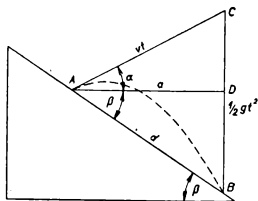
ve které V' značí objem, který by mělo původní množství m_0

vzduchu po ohřátí z teploty T_0 na teplotu T při konstantním tlaku. Protože plyn při ohřívání za konstantního tlaku svůj objem zvětšuje, je $V' > V_0$. Hustotu tohoto ohřátého vzduchu označíme ρ . Protože objem nádoby se při ohřívání nemění, musí z ní uniknout objemové množství vzduchu $V' - V_0$, a proto je hmota m' plynu zbylého v nádobě menší než m_0 .

Hledaný poměr $x' = \frac{m'}{m_0}$. Avšak $m' = V_0 \rho$ a $m_0 = V' \rho$. Proto je

$$x' = \frac{V_0 \rho}{V' \rho} = \frac{V_0}{V'}.$$

Z rovnice (4) však plyne $\frac{V_0}{V'} = \frac{T_0}{T}$, takže pro x' vychází stejná hodnota $x' = \frac{T_0}{T}$ jako při řešení způsobem a).



Obr. 15

V otevřené nádobě, která při ohřívání nemění svůj objem, zůstane po zahřátí z teploty 0°C na teplotu 727°C 27,3 % původní hmoty vzduchu.

4. Z bodu A nakloněné roviny (úhel sklonu β) je vrženo těleso rychlostí v pod výškovým úhlem α v rovině nákresné (obr. 15). Určete

a) vzdálenost d místa dopadu B od bodu A (měřeno po nakloněné rovině);

b) pro jaký úhel α bude tato vzdálenost největší?

Označme dobu, po kterou trvá pohyb tělesa (doba vrhu), písmenem t a tíhové zrychlení g .

Řešení: a) Podle zákona o nezávislosti pohybů má těleso, které koná současně dva nebo více pohybů, takovou polohu, jako kdyby konalo všechny tyto pohyby po sobě v libovolném pořádku. Proto nalezneme bod B takto:

Představíme si, že by se těleso pohybovalo nejprve jen setrvačností, tedy přímočarým rovnoměrným pohybem, rychlostí v ve směru, ve kterém bylo vrženo. Za dobu t by vykonalo dráhu

$$s_1 = AC = vt. \quad (1)$$

Po vykonání tohoto pohybu by padalo působením zemské přitažlivosti z bodu C volným pádem. Za dobu t by vykonalo dráhu

$$CB = s_2 = \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$

Bod B musí ležet na nakloněné rovině (podle principu o nezávislosti pohybů).

Z obrázku je patrné, že

$$AD = a = AC \cos \alpha = vt \cos \alpha, \quad (3)$$

$$CD = AC \sin \alpha = vt \sin \alpha; \quad DB = AD \operatorname{tg} \beta = vt \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Pro svislou dráhu tělesa obdržíme z předcházejících rovnic a ze vztahu (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt^2 = CB &= CD + DB = vt \sin \alpha + vt \cos \alpha \operatorname{tg} \beta = \\ &= vt \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta) = vt \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) = \\ &= vt \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

Po další úpravě vyjde rovnice

$$\frac{1}{2}gt^2 = vt \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta},$$

která je pro neznámou t kvadratickou rovnicí. Upravíme ji na tvar

$$t \left[\frac{1}{2}gt - v \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \right] = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$t = 0 \text{ a } t = \frac{2v \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta}. \quad (4)$$

První kořen odpovídá poloze bodu A a druhý, který odpovídá bodu B , je dobou vrhu.

Vzdálenost d určíme z pravoúhlého $\triangle ABD$. V něm platí:

$$d = AB = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{vt \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Dosadíme-li za t hodnotu ze vztahu (4), vyjde

$$d = \frac{2v^2 \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}{g \cos^2 \beta}. \quad (5)$$

b) Protože v, g, β jsou konstanty, je velikost d závislá jen na velikosti proměnného úhlu α . Největší bude tehdy, když součin $\cos \alpha \sin(\alpha + \beta)$ bude mít největší hodnotu. Abychom tento případ vyšetřili, upravme uvedený součin podle vzorce $\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2}$.

Dosaďme v něm

$$\frac{\gamma - \delta}{2} = \alpha \quad (6)$$

a

$$\frac{\gamma + \delta}{2} = \alpha + \beta. \quad (7)$$

Sečtením rovnic (6) a (7) dostaneme $\gamma = 2\alpha + \beta$, jejich odečtením $\delta = \beta$. Pak vyjde $2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha = \sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta$.

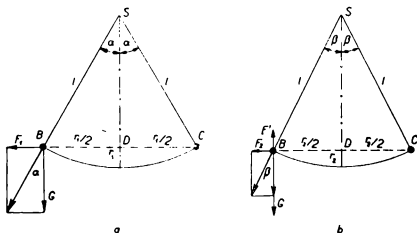
Podle rovnice (8) bude mít $\cos \alpha \sin(\alpha + \beta)$ největší hodnotu tehdy, bude-li mít největší hodnotu výraz $\sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta$. Protože β je konstantní, je tato podmínka splněna tehdy, když má největší hodnotu $\sin(2\alpha + \beta)$. Funkce $\sin x$ má maximální hodnotu rovnu 1 pro úhel $x = 90^\circ$. Vzdálenost místa dopadu od bodu A je tedy největší, jestliže $2\alpha + \beta = 90^\circ$, tj. $\alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2} = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Těleso vržené z bodu A , nacházejícího se na nakloněné rovině o sklonu β , rychlostí v pod výškovým úhlem α dopadne na nakloněnou rovinu v bodě B , který je vzdálen od bodu A o délku $d = \frac{2v^2 \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}{g \cos^2 \beta}$.

Tato vzdálenost je nejdelší, jestliže $\alpha = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Diskuse: Úloha má fyzikální význam jen tehdy, jestliže platí $0^\circ < \alpha < 180^\circ - \beta$.

5. Dvě kuličky stejného poloměru a stejné váhy G jsou



Obr. 16

zavěšeny v bodě S na nitích tak, že se vzájemně dotýkají. Předá-li se této soustavě náboj $4 \cdot 10^{-7}$ C, vzdálí se kuličky od sebe tak, že nitě svírají úhel $2\alpha = 60^\circ$. Jsou-li kuličky ponořeny v petroleji ($\epsilon_r = 2$), úhel nití se zmenší na $2\beta = 54^\circ$. Určete hustotu materiálu kuliček. Hustota petroleje je $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$ a vzdálenost l bodu závěsu od těžiště každé kuličky je 0,2 m. Řešte nejprve obecně (obr. 16a, 16b).

Označení veličin a dané hodnoty: Vzdálenost odpuzených kuliček je ve vzduchu r_1 , v petroleji r_2 ; permitivita vakua je ϵ_0 , relativní permitivity vzduchu a petroleje jsou $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 2$; náboj každé kuličky je $Q = 2 \cdot 10^{-7}$ C, objem kuličky je V ; tíhové zrychlení je g , hledaná hustota materiálu je x .

Řešení: Ve vzduchu působí na každou kuličku dvě síly: ve vodorovném směru odpudivá síla, která má podle Coulombova zákona velikost $F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{Q^2}{r_1^2}$, a ve směru svislém váha kuličky $G = Vxg$. Nit se napne ve směru výslednice těchto sil a pro její odchylku od svislého směru platí podle obrázku $\text{tg } \alpha = \frac{F_1}{G}$. Odtud $G = \frac{F_1}{\text{tg } \alpha}$. Dosadí-li za G , bude

$$x = \frac{F_1 \cotg \alpha}{Vg} \quad (1)$$

Také v petroleji je každá kulička odpuzována ve vodorovném směru silou, která má velikost $F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{Q^2}{r_2^2}$.

Ve svislém směru je však kulička nadlehčována podle Archimédova zákona silou F' , která se rovná váze petroleje kuličkou vytlačeného. Proto působí v petroleji na kuličku ve svislém směru síla $G - F'$, která má velikost $G - F' = Vg(x - \rho)$. Jsou-li tedy kuličky ponořeny do petroleje, platí pro odchylku nití od svislého směru vztah $\text{tg } \beta =$

$$= \frac{F_2}{G - F'} = \frac{F_2}{Vg(x - \varrho)} .$$
 Odtud vypočítáme objem kuličky $V = \frac{F_2 \cotg \beta}{g(x - \varrho)}$. Dosadíme-li tuto hodnotu za V do vztahu (1), dostaneme rovnici $x = \frac{F_1 \cotg \alpha}{gV} =$

$$= \frac{F_1 \cotg \alpha g (x - \varrho)}{F_2 g \cotg \beta}$$
 a z ní po úpravě $x(F_1 \cotg \alpha - F_2 \cotg \beta) = \varrho F_1 \cotg \alpha$, tedy

$$x = \varrho \frac{F_1 \cotg \alpha}{F_1 \cotg \alpha - F_2 \cotg \beta} .$$

Po dosazení za F_1 a F_2 dostaneme

$$x = \varrho \frac{\frac{Q^2 \cotg \alpha}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 r_1^2}}{\frac{Q^2 \cotg \alpha}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 r_1^2} - \frac{Q^2 \cotg \beta}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_2 r_2^2}} .$$

Krátíme výrazem $\frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0}$:

$$x = \varrho \frac{\frac{\cotg \alpha}{r_1^2 \varepsilon_1}}{\frac{\cotg \alpha}{r_1^2 \varepsilon_1} - \frac{\cotg \beta}{r_2^2 \varepsilon_2}} ; \text{ po úpravě}$$

$$x = \varrho \frac{\varepsilon_2 r_2^2 \cotg \alpha}{\varepsilon_2 r_2^2 \cotg \alpha - \varepsilon_1 r_1^2 \cotg \beta} .$$

Pro vzdálenost kuliček ve vzduchu a v petroleji vycházejí podle obrázku hodnoty $r_1 = 2l \sin \alpha$ a $r_2 = 2l \sin \beta$. Po dosazení těchto hodnot do výrazu pro x dostaneme:

$$x = \varrho \cdot \frac{4l^2 \sin^2 \beta \cotg \alpha \cdot \varepsilon_2}{4l^2 \varepsilon_2 \sin^2 \beta \cotg \alpha - 4l^2 \varepsilon_1 \sin^2 \alpha \cotg \beta} .$$

Rozšíříme-li zlomek výrazem

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{4l^2},$$

vyjde nám pro x hodnota

$$x = \varrho \frac{\varepsilon_2 \sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta}{\varepsilon_2 \sin^2 \beta \operatorname{tg} \beta - \varepsilon_1 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}.$$

Protože všechna čísla ve zlomku jsou bezrozměrná, má x stejný rozměr jako ϱ , tedy kg m^{-3} .

Numericky:

$$x = 800 \frac{2 \cdot 0,454 \cdot 0^2 \cdot 0,509 \cdot 5}{2 \cdot 0,454 \cdot 0^2 - 0,5^2 \cdot 0,577 \cdot 4} \text{ kg m}^{-3},$$

$$x \doteq 2\,560 \text{ kg m}^{-3}.$$

Hustota materiálu kuliček je přibližně $2\,560 \text{ kg m}^{-3}$.

6. Šest článků akumulátoru, z nichž každý má EMS $E = 2 \text{ V}$ a vnitřní odpor $r = 0,04 \, \Omega$, je spojeno sériově po třech ve dvě skupiny spojené paralelně. Do obvodu je zapojena žárovka o odporu $R_z = 11 \, \Omega$ pomocí ocelového vodiče o délce $l = 470 \text{ cm}$ a o průřezu $S = 0,5 \text{ mm}^2$. Určete množství tepla, které vznikne za $t = 1$ minuta: a) v celém obvodu; b) v žárovce; c) v ocelovém vodiči; d) v baterii; e) v jednom článku akumulátoru. (Měrný odpor oceli $\varrho = 0,1 \, \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$. Obr. 17.)

Označme odpor ocelového vodiče R_2 .

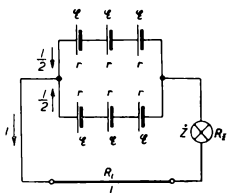
Řešení: Při řešení úlohy užijeme Joulova-Lencova zákona ve tvaru $Q = 0,24 \cdot 10^{-3} RI^2 t$ [kcal].

Celkový proud procházející obvodem označíme I .

Podle Kirchhoffova zákona prochází každou skupinou tří akumulátorů proud $\frac{I}{2}$. Každá skupina tří akumulátorů má vnitřní odpor $3r$. Poněvadž obě skupiny jsou spojeny paralelně, platí pro celkový odpor R_b baterie $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{3r} +$

$+\frac{1}{3r} = \frac{2}{3r}$, takže odpor baterie $R_b = 1,5 r = 0,06 \Omega$.

Odpor ocelového vodiče $R_1 = \rho \frac{l}{S} = 0,1 \frac{4,7 \text{ mm}^2 \Omega \text{m}}{0,5 \text{ m} \cdot \text{mm}^2} = 0,94 \Omega$.



Obr. 17

Celkový vnější odpor $R_e = R_1 + R_z = 0,94 \Omega + 11 \Omega = 11,94 \Omega$.

Součet vnějšího i vnitřního odporu je $R = R_e + R_b = 0,06 \Omega + 11,94 \Omega = 12 \Omega$.

Elektromotorická síla baterie je $3E$. Podle Ohmova zákona má proud procházející obvodem hodnotu $I = \frac{3E}{R} =$

$$= \frac{3E}{1,5 r + R_z + R_1} = \frac{6 \text{ V}}{12 \Omega} = 0,5 \text{ A}.$$

a) Teplo vzniklé v celém obvodu:

$$Q = RI^2t = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ VAs} = 180 \text{ J} = 43,2 \cdot 10^{-3} \text{ kcal}.$$

b) Teplo vzniklé v žárovce:

$$Q_z = R_z I^2 t = 11 \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ VAs} = 165 \text{ J} = 39,6 \cdot 10^{-3} \text{ kcal}.$$

c) Teplo vzniklé v drátě:

$$Q_1 = R_e I^2 t = 0,94 \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ VAs} = 14,1 \text{ J} = 3,384 \cdot 10^{-3} \text{ kcal.}$$

d) Teplo vzniklé v baterii:

$$Q_b = R_b I^2 t = 0,06 \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 \text{ VAs} = 0,9 \text{ J} = 0,216 \cdot 10^{-3} \text{ kcal.}$$

e) Teplo vzniklé v jednom článku:

$$Q_a = r \frac{I^2}{4} t = 0,04 \cdot \frac{1}{16} \cdot 60 \text{ VAs} = 0,15 \text{ J} = 0,036 \cdot 10^{-3} \text{ kcal.}$$

Kontrola výpočtu: 1. Teplo vzniklé v baterii musí být šestinásobek tepla vzniklého v jednom akumulátoru.

2. Celkové vzniklé teplo se musí rovnat součtu tepel vzniklých v baterii, ve vodiči a v žárovce.

Oba vztahy jsou splněny.

7. Do obvodu utvořeného z měděného vedení o průřezu $S_1 = 3 \text{ mm}^2$ je zapojena olověná pojistka s průřezem drátu $S_2 = 1 \text{ mm}^2$. O kolik se zvýší teplota měděného drátu při přepálení pojistky? Předpokládáme, že děj trvá tak krátkou dobu, že všechno teplo se využije na zahřátí obvodu. Počáteční teplota pojistky je $\vartheta_0 = 17^\circ \text{C}$. Potřebné konstanty vezměte z tabulek.

V tabulkách jsou uvedeny hodnoty měrného odporu při teplotě $\vartheta = 18^\circ \text{C}$. Měrný odpor olova při této teplotě je $\varrho = 0,21 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$, teplotní odporový součinitel $\alpha = 0,0042 \text{ deg}^{-1}$. Označíme-li teplotu tání olova $\vartheta_2 = 327^\circ \text{C}$, je teplotní odporový součinitel při této teplotě $\varrho' = \varrho (1 + \alpha \Delta \vartheta)$, kde $\Delta \vartheta = \vartheta_2 - \vartheta$, takže $\varrho' = 0,21 (1 + 0,0042 \cdot 309) \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1} = 0,483 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$. Protože měrný odpor je lineární funkcí teploty, má průměrný měrný odpor olova v teplotním intervalu $18^\circ \text{C} - 327^\circ \text{C}$ hodnotu $\varrho_2 = 0,35 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$. Při ohřátí olova na teplotu 327°C stoupne teplota měděného drátu jen málo, protože měděný drát klade elektrickému proudu velmi malý odpor. Proto můžeme počítat pro měrný odpor mědi s hodnotou uvedenou v tabulkách.

Konstanty měděného drátu: Délka je l_1 ; hustota $\delta_1 = 8,93 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$; měrný odpor $\varrho_1 = 0,017 \text{ } \Omega \text{ mm}^2\text{m}^{-1}$; měrné teplo $c_1 = 0,095 \text{ kcal kg}^{-1}\text{deg}^{-1}$; konečná teplota je ϑ_1 .

Konstanty olověné pojistky: Délka je l_2 ; hustota $\delta_2 = 11,34 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$; měrný odpor $\varrho_2 = 0,35 \text{ } \Omega \text{ mm}^2\text{m}^{-1}$; měrné teplo $c_2 = 0,030 \text{ kcal kg}^{-1}\text{deg}^{-1}$; skupenské teplo tání $\sigma_2 = 6 \text{ kcal kg}^{-1}$, teplota tání $\vartheta_2 = 327 \text{ }^\circ\text{C}$.

Řešení: Proud I , tekoucí po dobu t měděným drátem i olověnou pojistkou, které jsou sériově zapojeny, dodá podle Joulova-Lencova zákona měděnému drátu teplo $Q_1 = 0,24 \cdot 10^{-3} R_1 I^2 t \text{ kcal/J}$, olověnému drátu teplo $Q_2 = 0,24 \cdot 10^{-3} R_2 I^2 t \text{ kcal/J}$.

R_1 značí odpor měděného drátu, R_2 odpor olověného drátu.

Měděný drát spotřebuje na zahřátí na konečnou teplotu množství tepla $Q_1' = m_1 c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_0)$, olověná pojistka na ohřátí a roztavení teplo $Q_2' = m_2 c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + m_2 \sigma_2$. Za předpokladu, že se žádné teplo nevyzáří do okolí, platí podle zákona o zachování tepelné energie $Q_1' = Q_1$ a $Q_2' = Q_2$, takže dostaneme rovnice:

$$0,24 \cdot 10^{-3} R_1 I^2 t \text{ kcal/J} = m_1 c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

$$0,24 \cdot 10^{-3} R_2 I^2 t \text{ kcal/J} = m_2 c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + m_2 \sigma_2.$$

Písmeny m_1 a m_2 jsou označeny hmoty měděného drátu a olověné pojistky.

Dělením těchto dvou rovnic dojdeme ke vztahu

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1 c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{m_2 c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + m_2 \sigma_2}. \quad (1)$$

Dosadíme-li do rovnice (1) za $R_1 = \frac{l_1}{S_1} \varrho_1$, za $R_2 = \frac{l_2}{S_2} \varrho_2$, přejde rovnice (1) v rovnici

$$\frac{\frac{l_1}{S_1} \varrho_1}{\frac{l_2}{S_2} \varrho_2} = \frac{m_1 c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{m_2 c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + m_2 \sigma_2}.$$

Tuto rovnici upravíme a dosadíme do ní za $m_1 = S_1 l_1 \delta_1$, za $m_2 = S_2 l_2 \delta_2$.

Dostaneme:

$$\frac{\varrho_1 l_1 S_2}{\varrho_2 l_2 S_1} = \frac{S_1 l_1 \delta_1 c_1 (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{S_2 l_2 \delta_2 [c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + \sigma_2]}.$$

Odtud

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \frac{\varrho_1 S_2^2 \delta_2 [c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + \sigma_2]}{\varrho_2 S_1^2 \delta_1 c_1}. \quad (2)$$

Rozměrová zkouška: Poněvadž součin $\varrho_1 S_2^2 \delta_2$ má stejné rozměry jako součin $\varrho_2 S_1^2 \delta_1$, jsou rozměry zlomku v předcházející rovnici takové, jako rozměry zlomku

$$\frac{c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_0) + \sigma_2}{c_1}, \text{ tj. } \frac{\text{kcal kg}^{-1}}{\text{kcal kg}^{-1} \text{deg}^{-1}} = \text{deg}.$$

Numericky:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = \frac{0,017 \cdot 1 \cdot 11,34 \cdot 10^3 (0,030 \cdot 310 + 6)}{0,35 \cdot 9 \cdot 8,93 \cdot 0,095 \cdot 10^3} \text{ deg},$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = 1,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Teplota měděného drátu se zvýší při přepálení olověné pojistky o hodnotu vyjádřenou obecně výrazem (2), numericky o 1,1 °C.

8. Pružný míček se odráží od pevné vodorovné roviny tak, že nabude p procent výšky, ze které spadl. Určete:

a) číslo p , jestliže míček byl spuštěn z výšky h a doba jeho pohybu až do úplného zastavení na vodorovné rovině byla t ;

b) rychlost, kterou musí být míček mrštěn, aby se odrazil do původní výšky h .

Odpor prostředí zanedbáváme.

Řešení: a) Míček padá nejprve z výšky h volným pádem a dopadne na pevnou vodorovnou rovinu rychlostí v' za dobu t' . Rychlost v' vypočítáme ze zákona dráhy volného

pádu $h = \frac{1}{2} g t'^2$, kde g značí tíhové zrychlení.

Odtud

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (1)$$

$$v' = \sqrt{2gh}. \quad (1a)$$

Po odrazu od vodorovné roviny vystoupí míček jen do výšky h_1 . Stoupá s počáteční rychlostí v_1 a koná pohyb rovnoměrně zpožděný (svislý vrh vzhůru), jehož okamžitá rychlost a dráha jsou určeny rovnicemi $v = v_1 - gt$, $s =$

$= v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$, kde t značí proměnlivou dobu pohybu. Doba stoupání t_1' vypočítáme z rovnic $v_1 - g t_1' = 0$ (neboť v nejvyšším místě se míček na okamžik zastaví) a $h_1 = v_1 t_1' - \frac{1}{2} g t_1'^2$, do níž dosadíme z předcházející rovnice za v_1

hodnotu $v_1 = g t_1'$; tak dostaneme pro t_1' vztah $h_1 = \frac{1}{2} g t_1'^2$,

takže $t_1' = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$.

Doba pádu t_1'' z výšky h_1 je podle upraveného vztahu (1)

$t_1'' = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = t_1'$. Doba pádu tělesa z výšky h_1 je stejně dlouhá, jako byla doba výstupu do této výšky.

Celková doba, kterou potřebuje míček, aby po odrazu od vodorovné roviny vystoupil do výšky h_1 a dopadl zpět na rovinu, je tedy rovna

$$t_1 = 2 \sqrt{\frac{2h_1}{g}}. \quad (2)$$

Po dopadu na vodorovnou rovinu se míček znovu odráží, vystoupí do výšky h_2 , padá a znovu se odráží. Tento děj se stále opakuje. Po k -tém odrazu vystoupí míček do výšky h_k a celková doba výstupu do této výšky a opětného dopadu

na rovinu je podle upraveného vztahu (2)

$$t_k = 2 \sqrt{\frac{2h_k}{g}}. \quad (2a)$$

V tomto vzorci nabývá k postupně hodnot $k = 1, 2, 3, 4, \dots$. Po každém odrazu vystoupí míček jen do p % původní výšky. Proto je

$$h_k = \frac{ph_{k-1}}{100}. \quad (3)$$

Označíme-li

$$\frac{p}{100} = q^2, \text{ tj. } p = 100 q^2, \quad (3a)$$

je

$$h_k = q^2 h_{k-1}. \quad (3b)$$

Celková doba t pohybu míčku od okamžiku, kdy byl spuštěn z výšky h , až do jeho úplného zastavení, je $t = t' + t_1 + t_2 + \dots$.

Po dosazení za t' a za t_k ze vztahů (1) a (2a) je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2 \left(\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} + \sqrt{\frac{2h_3}{g}} + \dots \right).$$

Po dosazení podle (3b) je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} (q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots),$$

neboť $h_0 = h$. Součet v závorce je nekonečná geometrická řada. Poněvadž je $p < 100$ je $q = \sqrt{\frac{p}{100}} < 1$, jde o konvergentní řadu. Její součet $q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q}{1-q}$; proto

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2q}{1-q} \right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1+q}{1-q}.$$

Z této rovnice určíme neznámé q :

$$t - tq = \sqrt{\frac{2h}{g}} + q \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

takže

$$q = \frac{t - \sqrt{\frac{2h}{g}}}{t + \sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$

Podle vztahu (3a) má p hodnotu

$$p = \left(\frac{t - \sqrt{\frac{2h}{g}}}{t + \sqrt{\frac{2h}{g}}} \right)^2 \cdot 100 \% . \quad (4)$$

Jestliže pružný míček, spuštěný z výšky h volným pádem, se úplně zastaví za dobu t , odrazí se od pevné vodorovné roviny tak, že nabude po každém odrazu p procent, určených vztahem (4), z výšky, ze které spadl.

b) Kdyby míček dopadl na vodorovnou rovinu z výšky h volným pádem, měl by při dopadu podle (1a) rychlost v' , odrazil by se však jen do výšky h_1 menší než h . Má-li se odrazit do výšky h , musí dopadnout na desku určitou rychlostí $v_0 > v'$. Proto je nutno ho mrštit z výšky h svisle dolů rychlostí v tak, aby $v' + v = v_0$. Za těchto podmínek platí při dopadu na vodorovnou rovinu rovnice $v_0 = v + gt_0$

a $h = vt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2$, v nichž t_0 značí dobu, za kterou dopadne míček na rovinu. Z první z těchto rovnic vyjádříme t_0 : $t_0 = \frac{v_0 - v}{g}$. Tento výraz dosadíme do druhé rovnice.

Dostaneme

$$h = \frac{v_0 v - v^2}{g} + \frac{1}{2} \frac{(v_0 - v)^2}{g}$$

a po dalších úpravách

$$v_0^2 = v^2 + 2gh. \quad (5)$$

Kdyby míček měl dosáhnout téže rychlosti v_0 volným pádem, musil by padat z výšky $h_0 > h$. Podle vztahu (3) je $h_0 = \frac{100h}{p}$.

Pro rychlost v_0 při volném pádu z této výšky platí podle upraveného vztahu (1a) $v_0 = \sqrt{2h_0g}$, tedy $v_0 = \sqrt{2g \cdot \frac{100h}{p}} = \frac{10}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{2gh}$.

Dosadíme-li tuto hodnotu do (5), dostaneme rovnici $\frac{100 \cdot 2hg}{p} = v^2 + 2hg$, ze které určíme v :

$$v^2 = 2hg \cdot \frac{100 - p}{p} \text{ a dále } v = \sqrt{2hg \cdot \frac{100 - p}{p}}. \quad (6)$$

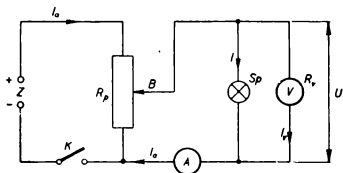
Aby se míček odrazil od vodorovné roviny do původní výšky h , musí být mrštěn svisle dolů rychlostí v určenou výrazem (6).

9. Zjistěte charakteristiku dvou různých žárovek. Charakteristika vodiče je křivka závislosti proudu na napětí, tj. závislosti $I = f(U)$. Nakreslete schéma zapojení, kterého použijete ke změření charakteristiky. Měření sestavte do tabulek a sestrojte graf.

Literatura: Z. Horák, Praktická fyzika, SNTL, Praha 1958.

Potřeby a jejich označení: Z je zdroj stejnosměrného napětí 150 V (obr. 18); K je spínač; R_p značí potenciometr o odporu R_p s běžcem B ; S_p je žárovka s kovovým vláknem (Osram 60 W, 120 V), popř. uhlíková žárovka (120 V, výkon neudán); A je ampérmetr, V je voltmetr o odporu R_v ; přívodní dráty s banánky.

Označení veličin: Napětí na svorkách spotřebiče je U , proud procházející spotřebičem je I , proud voltmetrem $I_v = \frac{U}{R_v}$, proud ampérmetrem I_a .



Obr. 18

Řešení: Kdyby odpor R spotřebiče byl konstantní, platilo by podle Ohmova zákona $I = \frac{1}{R} \cdot U$, tj. velikost proudu by byla přímo úměrná velikosti napětí. Koeficientem úměrnosti je $\frac{1}{R}$. Charakteristika by byla přímka procházející počátkem. Protože se vodič proudem zahřívá a odpor je závislý na teplotě, je závislost složitější.

Měřili jsme závislost I na U pro žárovku kovovou, a pak pro žárovku uhlíkovou. Při měření jsme použili zapojení podle schématu (obr. 18). Potenciometrem R_p jsme měnili napětí U (po 10 V) a zaznamenávali údaje voltmetru a ampérmetru.

Voltmetr V o odporu $R_v = 2\,600\ \Omega$ (podle sdělení učitele) byl zapojen paralelně ke spotřebiči Sp a udával napětí U na jeho svorkách. Ampérmetr A , zapojený sériově, udával celkový proud I_a ze zdroje vycházející. Podle Kirchhoffova zákona o uzlech platí

$$I_a = I + I_v, \quad (1)$$

kde I je proud jdoucí spotřebičem.

$$I_v = \frac{U}{R_v} \quad (2)$$

je proud jdoucí voltmetrem.

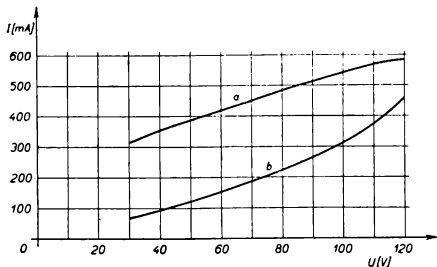
Postup měření: 1. Sestavili jsme obvod podle schématu, ale spínač K nechali otevřený. Překontrolovali jsme spoje. Spotřebičem byla žárovka s vláknem kovovým.

2. Běžec B potenciometru R_p jsme nastavili na nulu; po uzavření spínače K neukazoval ampérmetr žádný proud.

3. Posunuli jsme běžec potenciometru, aby ampérmetr zaznamenal malý proud I_a ; voltmetr ukázal napětí $U = 30$ V. Poznamenali jsme zjištěné hodnoty U , I_a do tabulky I , sloupec první a druhý.

4. Posunuli jsme běžce dále, aby napětí vzrostlo o 10 V, a zapsali pokaždé k sobě patřící hodnoty U , I_a ; tak jsme postupovali až do nejvýše přípustného zatížení žárovky 120 V.

Potom jsme odpojili spínačem zdroj, vyměnili jsme žárovku za druhou s vláknem uhlíkovým a provedli jsme znovu



Obr. 19

celé měření podle bodů (1 až 4), přičemž jsme zapisovali změřené hodnoty do tabulky II.

5. Vypočetli jsme hodnoty proudu I_v pomocí vztahu (2) a zapsali je do třetího sloupce obou tabulek.

6. Podle vztahu (1) jsme zjistili proud jdoucí spotřebičem a výsledek zapsali do sloupce čtvrtého.

7. Na vodorovnou osu jsme nanášeli napětí U , na svislou osu příslušný proud I podle tabulek I a II. Každá dvojice hodnot se tím znázornila jako bod. Pak jsme vedli spojitou křivku tak, aby se co nejlépe přimykala k sestrojeným bodům. Tak jsme obdrželi charakteristiku žárovky s vláknem kovovým (a) a s vláknem uhlíkovým (b) - obr. 19.

Tabulka I. (Kovová žárovka)

Tabulka II. (Uhlíková žárovka)

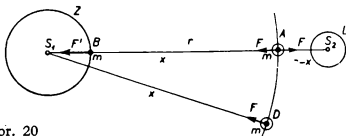
Napětí U (údaj volt- metru (V))	Proud			Napětí U (V)	Proud		
	ampér- metrem I_a (mA)	voltmetrem $I_v = U/R_v$ (mA)	žárovkou $I = I_a - I_v$ (mA)		I_a (mA)	I_v (mA)	I (mA)
30	325	12	313	30	80	11	69
40	375	15	360	40	105	15	90
50	405	19	386	50	140	19	121
60	440	23	417	60	175	23	152
70	475	27	448	70	210	27	183
80	515	31	484	80	255	31	224
90	545	35	510	90	300	35	265
100	575	38	537	100	350	38	312
110	610	42	568	110	415	42	373
120	630	46	584	120	505	46	459

KATEGORIE B

1. Vzdialenosť stredu Zeme od stredu Mesiaca je r . Hmota Zeme je p -krát väčšia ako je hmota Mesiaca. Zistite, kde na spojnici stredov Zeme a Mesiaca sú priťažlivé sily Zeme

a Mesiaca v rovnováhe a udajte polohu tohoto miesta vzdialenosťou x od stredu Zeme. Za aký čas a akou rýchlosťou by obletela družica našu Zem po kruhovej dráhe s polomerom x , ak by Mesiac neexistoval. Riešte najprv obecné, potom použite číselné hodnoty:

$r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$, $p = 81,5$; $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, kde R je polomer Zeme a g je ťažko é zrýchlenie na povrchu Zeme. (Obr. 20.)



Obr. 20

Označenie veličín a ich hodnoty: Hmot. Mesiaca je M ; hmota telesa je m ; hmota Zeme je pM ; Zem, Mesiac a družica sú označené Z , L , D .

Riešenie: Hľadané miesto A leží na spojnici stredu Zeme so stredom Mesiaca a má od stredu Zeme vzdialenosť x , od stredu Mesiaca vzdialenosť $r-x$. Gravitačné sily F a F_1 , ktorými pôsobia Zem a Mesiac na teleso hmoty m , majú podľa Newtonovho gravitačného zákona veľkosť

$$F = k \frac{pMm}{x^2} \quad \text{a} \quad F_1 = k \frac{Mm}{(r-x)^2}.$$

Konštanta k je Newtonova gravitačná konštanta. Ak majú byť tieto sily v rovnováhe, musia sa sebe rovnať. Preto

platí
$$\frac{p}{x^2} = \frac{1}{(r-x)^2}.$$

Po odmocnení vychádza

$$\frac{\sqrt{p}}{x} = \left| \frac{1}{r-x} \right|.$$

Pretože teleso leží vnútri úsečky spájajúcej stred Zeme so stredom Mesiaca, vyhovuje len kladná hodnota $r - x$; preto je

$$\left| \frac{1}{r - x} \right| = \frac{1}{r - x},$$

a teda

$$\frac{\sqrt{p}}{x} = \frac{1}{r - x}.$$

Koreň tejto rovnice je

$$x = \frac{r \sqrt{p}}{1 + \sqrt{p}}. \quad (1)$$

Numericky:

$$x = \frac{3,84 \cdot 10^8 \sqrt{81,5}}{1 + \sqrt{81,5}} \text{ m} = 3,457 \cdot 10^8 \text{ m} = 3,457 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Príťažlivé sily Zeme a Mesiaca sú na spojnici ich stredov v rovnováhe v mieste A , vzdialenom od stredu Zeme o dĺžku x vyjadrenú obecnou vzťahom (1); numericky je $x = 3,457 \cdot 10^5 \text{ km}$.

Keby neexistoval Mesiak, pôsobila by Zem na hmotu m v mieste A silou $F = k \frac{pMm}{x^2}$ a silou $F' = k \frac{pMm}{R^2}$, keby sa táto hmota nachádzala na zemskom povrchu. Sila, ktorou priťahuje Zem hmotu nachádzajúcu sa na jej povrchu, je však váha telesa $G = mg$. Preto je $F' = G$ a $\frac{kpM}{R^2} = g$ je ťarchové zrýchlenie na zemskom povrchu, $\frac{kpM}{x^2} = g_x$ gravitačné zrýchlenie vo vzdialenosti x od stredu Zeme.

$$\text{Z pomeru } \frac{g_x}{g} = \frac{R^2}{x^2} \text{ plynie } g_x = g \frac{R^2}{x^2}. \quad (2)$$

Keby neexistoval Mesiac a keby družica Zeme hmoty m opisovala okolo Zeme rovnomerným pohybom kruhovú dráhu o polomere x konštantnou rýchlosťou v , pôsobila by tento pohyb gravitačná sila $F_x = mg_x$, ktorá by bola pre družicu silou dostredivou. Podľa vzorca, pre veľkosť dostredivej sily by platilo $\frac{mv^2}{x} = mg_x$, takže $g_x = \frac{v^2}{x}$. Ak

dosadíme za g_x z rovnice (2), je $v = R \sqrt{\frac{g}{x}}$ (3) a po dosadení za x zo vzťahu (1) je

$$v = R \sqrt{g \cdot \frac{1 + \sqrt{p}}{r \sqrt{p}}} = R \sqrt{g \cdot \frac{p + \sqrt{p}}{rp}}. \quad (4)$$

Numericky:

Zo vzťahu (3) $v = 6,37 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{9,81}{3,457 \cdot 10^8}} \text{ m} \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{ms}^2}}$, a odiaľ pomocou logaritmov $v = 1,073 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

Obežná doba T družice sa vypočíta ako pomer dĺžky kružnice o polomere x a jej obvodovej rýchlosti v . Je teda

$$T = \frac{2\pi x}{v} \quad (5)$$

a po dosadení z (1) a (4)

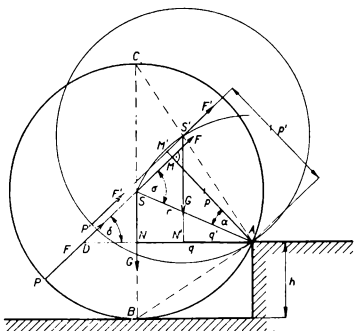
$$\begin{aligned} T &= 2\pi \frac{r\sqrt{p}}{1 + \sqrt{p}} \cdot \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{r\sqrt{p}}{g(1 + \sqrt{p})}} = \\ &= \frac{2\pi r}{R(1 + \sqrt{p})} \cdot \sqrt{\frac{rp\sqrt{p}}{g(1 + \sqrt{p})}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Numericky plyní zo vzťahu (5)

$$T = 2\pi \frac{3,457 \cdot 10^8}{1,073 \cdot 10^3} \cdot \frac{\text{ms}}{\text{m}} = 2,025 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Keby neexistoval Mesiac, obehla by družica Zem vo vzdialenosti x danej vzťahom (1) rýchlosťou v danou vzťahom (4) za dobu T danú vzťahom (6); numericky $x = 3,457 \cdot 10^8 \text{ m}$, $v = 1,073 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, $T = 2,025 \cdot 10^6 \text{ s}$.

2. Plný oceľový valec (kruhový a priamy) má priemer $d = 2r = 0,5 \text{ m}$ a dĺžku $l = 1,26 \text{ m}$. Máme ho dostať z vodorovnej roviny, po ktorej sa môže valiť na inú o $h \leq \frac{d}{2}$ vyššie ležiacu vodorovnú rovinu cez hranu jednostupňového schodu tak, aby určitá povrchová priamka valca splývala s hranou schodu počas celej manipulácie a sila, ktorou pri tom pôsobíme, bola vždy v priamke pretínajúcej geometrickú os valca a bola na ňu kolmá. (Obr. 21.)



Obr. 21

V akom smere máme tlačiť (prípadne ťahať) valec, aby sila, ktorou počiatočne pôsobíme, bola a) rovná váhe valca, b) najmenšia možná?

Aká je veľkosť sily v prípade b)? Mení sa sila počas procesu dvíhania, keď A) zachováваме jej pôvodný smer, B) v každej polohe valca má najmenšiu možnú veľkosť? (Opíšte a odôvodnite.) Aká práca sa vykoná pri prevádzaní úlohy v prípadoch A) a B)?

Udajte príklady z vlastnej skúsenosti, kedy išlo v podstate o konanie, ktoré je predmetom tejto úlohy.

Nech výška schodu $h = 0,15$ m. Neudané, ale pre výpočet potrebné číselné hodnoty materiálových a iných konštánt nájdite vo vhodných tabuľkách. Pri počítaní nech sú už od začiatku všetky numerické hodnoty veličín vyjadrené v jednotkách sústavy MKSA.

Označenie veličín a dané hodnoty:

Hustota ocele $\rho = 7\,850 \text{ kgm}^{-3}$; ťarchové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$; váha valca je G ; bod A označuje vrchnú hranu schodu, S os valca v pôvodnej polohe, S' po jeho zdvihnutí; B a C označujú najnižšiu a najvyššiu povrchovú priamku valca v pôvodnej polohe.

Riešenie za predpokladu, že $h \leq \frac{d}{2}$, ktorý je pre dané veličiny splnený: Ak tlačíme valec ležiaci na nižšie ležiacej vodorovnej rovine v mieste P silou F , ktorá sviera s polomerom AS uhol σ , má moment M_1 sily F vzhľadom k hrane A veľkosť $M_1 = F \cdot AM$, kde M je päta kolmice spustenej z bodu A na vektorovú priamku sily F . Je teda $AM = p$ ramenom sily F . Ak označuje α uhol, ktorý sviera polomer $SA = r$ s AM , platí v pravouhlom $\triangle SAM$ rovnica $p = r \cdot \sin \sigma = r \cos \alpha$. Po dosadení do vzorca pre M_1 dostaneme:

$$M_1 = Fr \sin \sigma = Fr \cos \alpha. \quad (1)$$

Moment M_2 váhy G valca, ktorá pôsobí v bode S , je $M_2 = G \cdot AN$, kde bod N je päta kolmice spustenej z bodu A na vektorovú priamku váhy. Preto je $q = AN$ ramenom sily G a

$$M_2 = Gq. \quad (2)$$

$\triangle BAC$ je podľa Thaletovej vety pravouhlý a $AN = q$ je jeho výška. Podľa Euklidovej vety je

$$q = \sqrt{BN \cdot NC} = h(2r - h);$$

ak dosadíme za q do (2), vyjde

$$M_2 = G\sqrt{h(2r - h)}. \quad (2a)$$

Podmienku pre rovnováhu určíme z momentového zákona $M_1 + M_2 = 0$, takže podľa (1) a (2a) platí:

$$Fr \sin \sigma = Fr \cos \alpha = G\sqrt{h(2r - h)}, \quad (3)$$

pretože moment sily F má znamienko záporné a moment sily G znamienko kladné.

a) Nebudeme uvažovať prípad, že sila $F = G$ pôsobí po vektorovej priamke BS , lebo potom by nesplývala stále tá istá povrchová priamka valca s hranou A schodu. Ak sa má veľkosť sily F rovnať veľkosti váhy G , musí platiť podľa (3):

$$Gr \sin \sigma = G\sqrt{h(2r - h)} \text{ a } \sin \sigma = \sqrt{\frac{h(2r - h)}{r}}; \quad (4)$$

numericky:

$$\sin \sigma = \frac{\sqrt{0,15 \cdot 0,35}}{0,25} \cdot \frac{\sqrt{m \cdot m}}{m},$$

pomocou logaritmov určíme $\sigma = 66^\circ 27'$.

Veľkosť uhlu σ môžeme určiť aj inak. Ak má byť $F = G$, potom z momentovej vety plynie i rovnosť ramien $q = p$. Potom by však bol pravouhlý trojuholník ANS podobný $\triangle AMS$ podľa vety ssu a uhol $\sphericalangle ASN = \sigma$, $\sphericalangle SAN = \alpha$.

Z $\triangle SAN$ vychádza $\cos \sigma = \frac{SN}{AS} = \frac{r - h}{r}$, číselne

$$\cos \sigma = \sin \alpha = \frac{0,25 - 0,15}{0,25} \cdot \frac{m}{m} = 0,4.$$

Odtiaľ vychádza pre σ hodnota $\sigma = 66^\circ 27'$ a $\alpha = 23^\circ 33'$.

Vektorová priamka sily F pretína priamku AN v bode D ; tak vznikne pravouhlý $\triangle ADM$, ktorého uhol pri vrchole A je 2α . Preto je uhol $\triangle MDA = \delta = 90^\circ - 2\alpha = 42^\circ 54'$.

Ak sa má valec prevaliť okolo hrany schodu pôsobením sily rovnnej váhe telesa, musíme pôsobiť silou F po vektorovej priamke PS , ktorá sviera s vodorovnou rovinou uhol $42^\circ 54'$.

b) Z rovnice (3) vyjadríme $F = \frac{G\sqrt{h(2r-h)}}{r \cos \alpha}$. Výraz $\frac{G\sqrt{h(2r-h)}}{r}$ je konštantný. Preto závisí veľkosť sily F iba na veľkosti uhlu α . Aby sila F bola najmenšia, musí mať $\cos \alpha$ najväčšiu hodnotu, tj. $\cos \alpha = 1$, a teda $\alpha = 0^\circ$. Táto minimálna sila má hodnotu $F_1 = \frac{G\sqrt{h(2r-h)}}{r}$. Po úprave dostaneme $F_1 = \frac{\pi r^2 \log \sqrt{h(2r-h)}}{r} = \pi r \log \sqrt{h(2r-h)}$.

Rozmery výrazu na pravej strane rovnice sú:

$$[\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{kgm}^{-3} \cdot \text{ms}^{-2} \sqrt{\text{m} \cdot \text{m}}] = \text{kgms}^{-2} = \text{N}.$$

$$\text{Numericky: } F_1 = 3,14 \cdot 0,25 \cdot 1,26 \cdot 7\,850 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{0,15 \cdot 0,35} \text{ N}.$$

Pomocou logaritmov určíme $F_1 = 1,746 \cdot 10^4 \text{ N}$.

V prípade b) má sila veľkosť $1,746 \cdot 10^4 \text{ N}$.

A) V pôvodnej polohe valca vychádza z momentovej vety, ak berieme do úvahy absolútne hodnoty momentov,

$$F = \frac{Gq}{p}. \quad (5)$$

Ak zdvíhame valec tak, že zachováваме stále pôvodný smer sily, premiestuje sa tak, že jeho pozdĺžna os S prejde do polohy S' a ramená síl F a G zmenia svoju veľkosť na hod-

noty

$$p' = AM' > p \quad (6a)$$

$$q' = AN' < q. \quad (6b)$$

Váha G svoju veľkosť nemení; preto sa mení veľkosť sily podľa vzťahu (5) na hodnotu $F' = G \frac{q'}{p'}$. Zlomok na pravej strane upravíme takto

$$F' = G \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{q'}{q} \cdot \frac{p}{p'}.$$

Podľa vzťahov (6a) a (6b) je $\frac{q'}{q} < 1$ a tak isto $\frac{p}{p'} < 1$, takže $F' < G \cdot \frac{q}{p}$, čiže $F' < F$.

Ak zdviháme valec tak, že zachováваме stále pôvodný smer dvíhajúcej sily, tak sa sila potrebná k dvíhaniu stále znižuje. Ak sa zdvihne valec tak, že jeho pozdĺžna os bude určovať s hranou schodu zvislú rovinu, stane sa $q' = 0$ a sila potrebná k dvíhaniu valca klesne na nulu.

B) Ak má mať sila F'' v každej polohe pri dvíhaní valca najmenšiu možnú veľkosť, potom podľa výsledku odst. b) je $\alpha = 0^\circ$, teda $\sigma = 90^\circ$. Dvíhajúca sila F'' musí byť teda stále kolmá k polomeru AS . Rameno p'' sily je potom trvale rovné polomeru r podstavy valca, rameno q'' sa znižuje.

Veľkosť sily $F'' = G \cdot \frac{q''}{p''} = G \frac{q''}{r}$. Pretože G a r sú konštanty a q'' sa počas dvíhania valca znižuje, znižuje sa aj veľkosť sily F'' a klesne na nulu v okamžiku, keď pozdĺžna os valca bude s hranou schodu určovať zvislú rovinu.

C) Práca A vynaložená na dvíhanie valca sa prejaví ako prírastok potenciálnej energie valca. Pretože sa valec zdvihne o výšku h , zväčší sa jeho potenciálna energia o

$$\Delta W = Gh = \pi r^2 l g h.$$

Rozmery výrazu na pravej strane rovnice sú

$$[\text{m}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{kgm}^{-3} \cdot \text{ms}^{-2} \cdot \text{m}] = [\text{kgms}^{-2} \cdot \text{m}] = \text{Nm} = \text{J}.$$

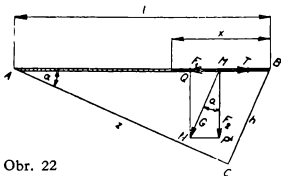
Podľa zákona o premene práce na mechanickú energiu platí, ak zanedbáme straty pri prekonávaní všetkých druhov odporov, $A = \Delta W$. Je teda

$$A = \pi r^2 \log h = 3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 1,26 \cdot 7\,850 \cdot 9,81 \cdot 0,15 \text{ J}. \quad (7)$$

Logaritmiccky určíme $A = 2\,857 \text{ J}$.

Ak premiestnime valec z nižšie položennej vodorovnej roviny o výšku h na rovinu vyššie položenú, vykonáme prácu určenú vzťahom (7), numericky $2\,857 \text{ J}$, nech ho dvíhame akýmkoľvek spôsobom.

3. Naklonená rovina o dĺžke l má dve časti: horná je pokrytá kovom a dolná drevom (dubom). Povrchy sú suché. Vo vertikálnom reze s najväčším spádom pripadá na vodorovne meranú vzdialenosť $z = 9,20 \text{ m}$ stúpanie $h = 4,09 \text{ m}$. Prepona príslušného pravouhlého trojuholníka je práve dĺžka l . Keď u horného okraja hornej časti položíme kľudne (bez počiatočného nárazu) na naklonenú rovinu kváder (napr. o rozmeroch 2, 3 a 4 cm), nastane pohyb. Prečo nastane a aký je to pohyb? Pri akom pomere dĺžok jednotlivých častí možno dosiahnuť, že sa kváder samočinne zastaví práve na konci dráhy l ? Aký čas je potrebný na vykonanie celej tejto dráhy? Aká bola najväčšia rýchlosť počas celého pohybu? Pre koeficienty vlečného trenia nájdeme v literatúre: kombinácia kov-kov $f_1 = 0,20$, kombinácia kov-dub $f_2 = 0,60$. (Obr. 22.)



Obr. 22

Označenie veličín a dané hodnoty:

Hmota kvádra je m , váha je G , ťarchové zrýchlenie je $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, uhol naklonenej roviny je α , dráha kvádra po kove je x , po dreve $l - x$, doba pohybu kvádra po kove je t_1 , po dreve t_2 , celková doba pohybu je t ; trenie po kove je T_1 , po dreve T_2 , zložka váhy pohybová je F_1 a tlaková F_2 .

Riešenie: Rozmery kvádra pokladáme za zanedbateľne malé oproti rozmerom naklonenej roviny. Môžeme potom za dráhu kvádra považovať celú dĺžku naklonenej roviny.

Na kváder nachádzajúci sa na naklonenej rovine pôsobí zemská príťažlivosť silou $G = mg$, ktorá je znázornená úsečkou MN . Pretože naklonená rovina zabráňuje voľnému pádu kvádra, rozkladá sa G na dve zložky, pohybovú F_1 , znázornenú úsečkou MQ , a tlakovú F_2 , zobrazenú úsečkou MP . V pravouhlom trojuholníku $\triangle MNP$ je uhol $\sphericalangle PMN = \sphericalangle CAB = \alpha$. Sila F_1 má veľkosť $F_1 = G \sin \alpha$ a $F_2 = G \cos \alpha$.

Ak sa uvedie kváder do pohybu, pôsobí proti sile F_1 sila trenia $T = f \cdot F_2 = fG \cos \alpha$, kde f je súčiniteľ trenia. Kváder sa tedy pohybuje pôsobením sily $F_1 - T = G \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)$. Podľa Pythagorovej vety je $l = \sqrt{z^2 + h^2}$; ďalej je $\sin \alpha = \frac{h}{l} = \frac{h}{\sqrt{z^2 + h^2}}$ a $\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}}$. Sila $F_1 - T = \frac{G}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot (h - fz)$. Vo výraze

na pravej strane sa vyskytujú len konštanty, a preto je veľkosť sily $F_1 - T$ stála a má za následok pohyb rovnomerne zrýchlený, ak $h - fz > 0$, a pohyb rovnomerne spomalený, ak je $h - fz < 0$. Pretože $G = mg$ a veľkosť sily je definovaná ako súčin hmoty m , na ktorú sila pôsobí, a zrýchlenia a ,

ktoré tej hmote udeľuje, je $F_1 - T = \frac{mg}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot (h - fz) =$

= ma , takže zrýchlenie

$$a = \frac{g}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot (h - fz) . \quad (1)$$

Kváder sa pohybuje najprv po kovovej časti roviny so zrýchlením

$$a_1 = \frac{g}{\sqrt{z^2 + h^2}} (h - f_1 z) , \quad (1a)$$

prejde za čas t_1 dráhu

$$x = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad (2a)$$

a dosiahne na nej rýchlosti $v_1 = a_1 t_1$, takže

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} . \quad (3a)$$

Po dosadení hodnoty a_1 do týchto rovníc vyjde

$$x = \frac{g}{\sqrt{z^2 + h^2}} (h - f_1 z) \cdot t_1^2 , \quad (2b)$$

$$v_1 = \frac{g}{\sqrt{z^2 + h^2}} (h_1 - f_1 z) \cdot t_1 . \quad (3b)$$

Číselná hodnota

$$h - f_1 z = 4,09 \text{ m} - 0,2 \cdot 9,20 \text{ m} = 2,25 \text{ m}, \quad (4a)$$

teda je kladná, preto ide o pohyb rovnomerne zrýchlený.

Akonáhle príde kváder na dubovú podložku, zmení sa jeho zrýchlenie na hodnotu a_2 , ktorá je podľa upraveného vzorca (1)

$$a_2 = \frac{g}{\sqrt{z^2 + h^2}} (h - f_2 z) . \quad (1b)$$

Číselná hodnota

$$h - f_2 z = 4,09 \text{ m} - 0,6 \cdot 9,2 \text{ m} = -1,43 \text{ m} \quad (4b)$$

je teda záporná. Pohyb kvádra po dubovej podložke je rovnomerne spomalený s počiatočnou rýchlosťou v_1 . Tento

pohyb koná kváder po dobu t_2 na dráhe $l - x$. Pre premenlivú rýchlosť počas pohybu platí $v = v_1 + a_2 t$, pretože $a_2 < 0$; t označuje premenlivý čas. Pre dráhu $l - x$ platí:

$$l - x = -\frac{1}{2} a_2 t_2^2; \quad (2c)$$

po dosadení za a_2 z rovnice (1b) je

$$l - x = -\frac{g}{2\sqrt{z^2 + h^2}} (h - f_2 z) \cdot t_2^2. \quad (2d)$$

Ak sa má teleso samočinne zastaviť na konci dráhy, musí platiť $v_1 + a_2 t_2 = 0$, takže

$$t_2 = -\frac{v_1}{a_2}. \quad (3c)$$

Delením rovnice (3a) rovnicou (3c) dostaneme

$$\frac{t_1}{t_2} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Po vydelení rovnice (2a) rovnicou (2c) vyjde

$$\frac{x}{l - x} = -\frac{a_1 t_1^2}{a_2 t_2^2} = -\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Po dosadení z rovníc (1a) a (1b) vyjde

$$\frac{x}{l - x} = -\frac{h - f_2 z}{h - f_1 z} = \frac{f_2 z - h}{h - f_1 z}. \quad (5)$$

Číselne podľa (4a) a (4b):

$$\frac{x}{l - x} = \frac{1,43 \text{ m}}{2,25 \text{ m}} = 0,636.$$

Ak sa zastaví teleso samočinne práve na konci dráhy l , je pomer dĺžek kovovej a dubovej časti naklonenej roviny 143 : 225.

Z rovnice (5) je možno určiť dĺžku x . Po úprave obdržíme $x(h - f_1 z) = l(f_2 z - h) - x(f_2 z - h)$ a po ďalších úpravách

$$x = l \frac{f_2 z - h}{z(f_2 - f_1)} = \frac{f_2 z - h}{z(f_2 - f_1)} \cdot \sqrt{z^2 + h^2}. \quad (6)$$

Z rovnice (2a) vychádza

$$t_1^2 = \frac{2x}{a_1}$$

a po dosadení za x z rovnice (6) a za a_1 z rovnice (1a) bude:

$$t_1^2 = \frac{2\sqrt{z^2 + h^2}(f_2 z - h)\sqrt{z^2 + h^2}}{z(f_2 - f_1)g(h - f_1 z)},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(z^2 + h^2)(f_2 z - h)}{g z(f_2 - f_1)(h - f_1 z)}}.$$

Hodnotu t_2 určíme z rovnice (2c):

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(x - l)}{a_2}};$$

po dosadení za x , l , a_2 dostaneme po úpravách

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(z^2 + h^2)(h - f_1 z)}{g z(f_2 - f_1)(f_2 z - h)}}.$$

Na vykonanie celkovej dráhy je treba čas

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2(z^2 + h^2)}{g z(f_2 - f_1)}} \cdot \left(\sqrt{\frac{f_2 z - h}{h - f_1 z}} + \sqrt{\frac{h - f_1 z}{f_2 z - h}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2(z^2 + h^2)}{g z(f_2 - f_1)}} \cdot \frac{f_2 z - h + h - f_1 z}{\sqrt{(h - f_1 z) \cdot (f_2 z - h)}};$$

$$t = \sqrt{\frac{2(z^2 + h^2)z(f_2 - f_1)}{g(h - f_1 z)(f_2 z - h)}}. \quad (7)$$

Číselne: Dosadíme za $(h - f_1 z)$ a $(f_2 z - h)$ z rovníc (4a) a (4b) a za ďalšie veličiny. Potom

$$t = \sqrt{\frac{2(84,64 + 16,7281) \cdot 9,2 \cdot 0,4}{9,81 \cdot 1,43 \cdot 2,25}} \sqrt{\frac{\text{m}^2 \cdot \text{m}}{\text{ms}^{-2} \cdot \text{m} \cdot \text{m}}};$$

logaritmiccky určíme $t = 4,86$ s.

Na vykonanie celkovej dráhy je treba čas t určený vzťahom (7), číselne $t = 4,9$ s. Najväčšiu rýchlosť nadobudne teleso v okamžiku, kedy prechádza z podložky kovovej na dubovú. Túto rýchlosť sme označili v_1 . Má podľa vzťahu (3b) veľkosť

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-g}{\sqrt{z^2 + h^2}} (h - f_1 z) t_1 = \\ &= \frac{g}{\sqrt{z^2 + h^2}} (h - f_1 z) \cdot \sqrt{\frac{2(z^2 + h^2)(f_2 z - h)}{g z (f_2 - f_1)(h - f_1 z)}}, \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2g(h - f_1 z)(f_2 z - h)}{z(f_2 - f_1)}}. \end{aligned} \quad (8)$$

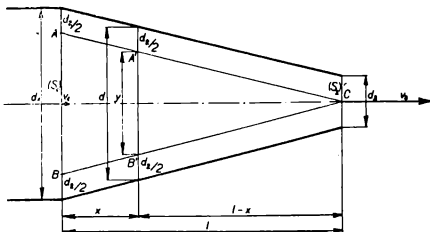
Číselne:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 2,25 \cdot 1,43}{9,2 \cdot 0,4}} \cdot \sqrt{\frac{\text{ms}^{-2} \cdot \text{m} \cdot \text{m}}{\text{m}}}.$$

Logaritmicke vypočítame $v_1 = 4,14$ m/s.

Najväčšia rýchlosť počas celého pohybu je určená vzťahom (8), číselne $v_1 = 4,14$ m/s.

4. Na hadici požárnej stříkačky je nasazen kovový nástavec dĺžky $l = 800$ mm (obr. 23). Průměr kruhového otvoru se



Obr. 23

podél nástavce zúží z $d_1 = 75$ mm na $d_2 = 20$ mm. Stříkačka dává za 5 minut $3,3$ m³ vody. Jakou rychlostí proudí voda krajními průřezy nástavce ve vodorovném směru? S jakým přetlakem p vzhledem k atmosférickému tlaku proudí voda z hadice do nástavce? Vyjádřete p v technických atmosférách. Ve vhodném měřítku znázorněte graficky průběh rychlosti proudění a přetlaku vody podél nástavce. Graf narýsujte na milimetrový papír.

Označení veličin a dané hodnoty: Stříkačka dává za dobu $t = 300$ s vody $V = 3,3$ m³. Délka nástavce je $l = 0,8$ m; širší část nástavce má průměr $d_1 = 7,5 \cdot 10^{-2}$ m a průřez S_1 , užší část má průměr $d_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ m a průřez S_2 . V širším průřezu je rychlost proudění vody v_1 a tlak vody p_1 , v užším průřezu analogicky v_2 a p_2 . Barometrický tlak je b , hledaný přetlak je tedy

$$p = p_1 - p_2 = p_1 - b.$$

Hustota vody je $\rho = 1\,000$ kg/m³.

Řešení: Protéká-li průřezem S kapalina rychlostí v , protече jí za dobu t objemové množství $V = Svt$, takže $v = \frac{V}{S \cdot t}$; dosadíme-li za $S = \frac{\pi d^2}{4}$, je

$$v = \frac{4V}{\pi d^2 t}. \quad (1)$$

Platí tedy:

$$v_1 = \frac{4V}{\pi d_1^2 t} = \frac{4 \cdot 3,3}{\pi 56,25 \cdot 10^{-4} \cdot 300} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2 \text{s}} = 2,48 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \frac{4V}{\pi d_2^2 t} = \frac{4 \cdot 3,3}{\pi 4 \cdot 10^{-4} \cdot 300} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2 \text{s}} = 35 \text{ m/s}.$$

Podle Bernoulliho rovnice platí pro energii 1 m³ vody v průřezu S_1 a S_2 rovnice:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2;$$

z ní určíme přetlak p :

$$p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} (\varrho_2 v_2^2 - \varrho_1 v_1^2). \quad (2)$$

Vzhledem k nepatrné stlačitelnosti kapalin lze změny objemu i hustoty vody prakticky zanedbat, takže $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Rovnice (2) pak bude mít tvar

$$p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho (v_2^2 - v_1^2). \quad (3)$$

Tlak v úzkém průřezu trubice je však roven barometrickému tlaku b , takže $p_2 = b$, a rovnice (3) přejde v rovnici

$$p = p_1 - b = \frac{1}{2} \varrho (v_2^2 - v_1^2). \quad (4)$$

Numericky:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \varrho (v_2 + v_1) \cdot (v_2 - v_1) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1\,000 \cdot 37,48 \cdot 32,52 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \\ &= 6,094 \cdot 10^5 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = 6,094 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

Protože $1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$, je $\text{N} = \frac{1}{9,81} \text{ kp}$, takže

$$\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{1}{9,81} \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = \frac{1}{9,81} \cdot 10^{-4} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{9,81} \cdot 10^{-4} \text{ at}$$

(technických atmosfér).

Proto

$$p = \frac{60,94}{9,81} \text{ at} = 6,215 \text{ at}.$$

Abychom dostali v obecném vzorci (4) pro p jen hodnoty

dané v úloze, dosadíme za v_1 a v_2 ze vzorce (1):

$$p = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{16 V^2}{\pi^2 d_2^4 t^2} - \frac{16 V^2}{\pi^2 d_1^4 t^2} \right), p = \frac{8 \rho V^2}{\pi^2 t^2} \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4} \right). \quad (5)$$

Voda proudí z hadice do nástavce přetlakem vyjádřeným obecně výrazem (5), číselně 6,21 at.

Sestrojení grafu: máme sestavit do jednoho obrázku grafy závislosti rychlosti v a přetlaku p na proměnné vzdálenosti x libovolného průřezu nástavce od jeho širšího konce.

Sestavíme nejprve tabulku, do které zaznamenejme hodnoty x (mm), v (m/s) a p (kp/cm²), odpovídající průměrům

$$d = 75, 70, 60, 50, 40, 30, 20 \text{ mm}. \quad (6)$$

Tyto hodnoty určíme takto:

a) Za předpokladu, že nástavec se rovnoměrně zužuje, má průřez ve vzdálenosti x od širšího konce průměr $d = y + d_2$, takže $y = d - d_2$. Úsečka AB (obr. 23) má délku $d_1 - d_2$. Z podobnosti $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ plyne:

$$\frac{l - x}{l} = \frac{y}{d_1 - d_2},$$

odtud

$$l - x = \frac{y}{d_1 - d_2} l = \frac{d - d_2}{d_1 - d_2} l;$$

z toho

$$x = l - \frac{d - d_2}{d_1 - d_2} l = \frac{d_1 - d}{d_1 - d_2} l;$$

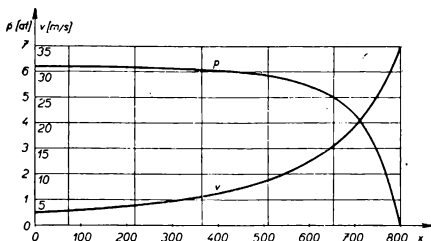
dosadíme d_1, d_2, l i d v mm.

Obdržíme:

$$x = \frac{800}{55} (d_1 - d) = \frac{160}{11} (75 - d).$$

Hodnoty x pro d uvedené v (6) jsou sestaveny v tabulce na str. 100; nanášíme je na osu x tak, že 1 cm skutečné délky nástavce znázorníme v grafu délkou 1 mm (obr. 24).

b) Hodnoty v určíme ze vztahu (1): $v = \frac{4V}{\pi t} \cdot \frac{1}{d^2}$, do něhož dosazujeme za d hodnoty podle (6), ovšem v metrech.



Obr. 24

Pak

$$v = \frac{4V}{\pi t} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{4 \cdot 3,3}{3,14 \cdot 300} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{4,4}{314} \cdot \frac{1}{d^2} \text{ m/s}.$$

Takto vypočítané hodnoty jsou sestaveny v tabulce; nanášíme je na osu y tak, že rychlost 10 m/s znázorníme úsečkou dlouhou 2 cm.

c) Hodnoty přetlaku p počítáme ze vztahu (5), který upravíme tak, aby přetlak vyšel v $\text{kp/cm}^2 = \text{at}$.

Ve vztahu (5) je rozměr přetlaku

$$[p] = \frac{\text{kgm}^{-3} \cdot \text{m}^6}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^4} = \frac{\text{kgm}^{-1}}{\text{s}^2} = \frac{\text{kgms}^{-2}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Bude tedy

$$p = \frac{8QV^2}{\pi^2 t^2} \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_4^4} \right) \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

kde d_2 a d dosazujeme v metrech.

Numericky:

$$p = \frac{8 \cdot 1\,000 \cdot 3,3^2}{3,14^2 \cdot 300^2} \left(\frac{1}{0,02^4} - \frac{1}{d^2} \right) = 0,098\,075 \cdot \left(\frac{10^8}{2^4} - \frac{10^8}{d^2} \right),$$

kde za d dosazujeme postupně 7,5; 7, 6, 5, 4, 3, 2.

Abychom p vyjádřili v at, užijeme vztahu již dříve odvozeného:

$$\frac{N}{m^2} = \frac{1}{9,81} \cdot 10^{-4} \text{ at.}$$

Pak bude

$$p = \frac{0,098\,075 \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}}{9,81} \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{d^4} \right) = 99,97 \cdot \frac{d^4 - 16}{16d^4} =$$

$$= 6,25 \cdot \frac{d^4 - 16}{d^4}, \text{ kde } d = 7,5; 7, 6, 5, 4, 3, 2.$$

Hodnoty p jsou uvedeny v tabulce. Do grafu je nanášíme na osu y tak, že přetlak 1 at zobrazíme úsečkou 1 cm (obr. 24).

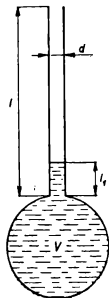
Tabulka

d (mm)	75	70	60	50	40	30	20
x (mm)	0	72,7	218,1	363,5	509,0	654,5	800
v (m/s)	2,5	2,9	3,9	5,6	8,8	15,6	35,0
p (at)	6,21	6,20	6,17	6,09	5,86	5,01	0

5. K sklenenej banke o objeme $V = 1,000 \text{ cm}^3$ je pritavená kapilára o priemere $d = 0,43 \text{ mm}$ a o dĺžke $l = 20 \text{ cm}$.

Banka a časť kapiláry v dĺžke $l_1 = 30$ mm je vyplnená pri teplote $t_1 = 15$ °C a) ortuťou, b) vodou. (Obr. 25.)

a) Pri akej teplote jednotlivých kvapalín bude nimi vyplnená celá kapilára? Rozťažnosť skla zanedbajte. Posúďte podmienky.



Obr. 25

b) Navrhните vhodný objem banky pre kapiláru o dĺžke 30 cm, aby sme pri naplnení ortuťou získali teplomer v rozsahu -15 °C až 150 °C. (Stupnica nech sa začína aj končí 2 cm ďaleko od koncov kapiláry).

Označenie veličín a dané hodnoty: Koefficienty objemovej rozťažnosti ortuti a vody sú $\beta_1 = 0,181 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$, $\beta_2 = 0,180 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$, objem kvapaliny pri teplote $t_0 = 0$ °C je V_0 , pri teplote t_1 je V_1 .

Riešenie: A. Objem kvapaliny pri teplote t , pri ktorej kvapalina vyplní celú kapiláru, je rovný súčtu objemu banky a objemu kapiláry, ak zanedbáme rozťažnosť banky a kapi-

lary. Tento objem sa rovná

$$V_t = V + \frac{\pi d^2}{4} l, \quad (1)$$

a obdobne objem kvapaliny pri teplote t_1 je

$$V_1 = V + \frac{\pi d^2}{4} l_1. \quad (2)$$

Podľa zákona vyjadrujúceho závislosť objemu kvapaliny na teplote, je

$$V_t = V_0(1 + \beta t) \quad \text{a} \quad V_1 = V_0(1 + \beta t_1), \quad (3)$$

Delením týchto rovníc získame vzťah

$$\frac{V_t}{V_1} = \frac{1 + \beta t}{1 + \beta t_1},$$

odkiaľ vypočítame t :

$$1 + \beta t = \frac{V_t + V\beta t_1}{V_1}, \quad t = \frac{V_t - V_1 + V\beta t_1}{V_1\beta};$$

po dosadení z rovníc (1) a (2), po rozšírení zlomku a ďalších úpravách je

$$t = \frac{\pi d^2(l - l_1) + \beta t_1(4V + \pi d^2 l)}{(4V + \pi d^2 l_1)\beta}. \quad (4)$$

a) Pre ortuť označíme hľadanú teplotu t' :

$$t' = \frac{\pi \cdot 0,043^2 \cdot 17 + 0,181 \cdot 10^{-3} \cdot 15 (4 + \pi \cdot 0,043^2 \cdot 20)}{(4 + \pi \cdot 0,043^2 \cdot 3) \cdot 0,181 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^3 \text{ deg}^{-1}}.$$

$$t' = \frac{0,098\,702 + 0,011\,175}{0,000\,723\,15} \text{ } ^\circ\text{C} \doteq 151 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

b) Pre vodu označíme hľadanú teplotu t'' :

$$t'' = \frac{0,098\,702 + 0,18 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 4,116\,12}{0,000\,723\,15} \text{ } ^\circ\text{C} \doteq 152 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Celá kapilára sa naplní kvapalinou pri teplote t , ktorá je obecné daná vzťahom (4). U ortuti je $t = 151\text{ }^{\circ}\text{C}$, vodou sa celá kapilára nevyplní, lebo voda vrie za normálneho tlaku pri teplote $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ a nemôže sa v kvapalnom stave zahriať na $152\text{ }^{\circ}\text{C}$.

B. Označme teraz $t_2 = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $t_3 = -15\text{ }^{\circ}\text{C}$, V_2 a V_3 objemy ortuti pri týchto teplotách; $l_2 = 28\text{ cm}$ a $l_3 = 2\text{ cm}$ sú časti kapiláry, vyplnené ortuťou pri teplotách t_2 a t_3 .

Podľa upravených rovníc (1) a (2) platí:

$$V_2 = V + \frac{\pi d^2}{4} l_2, \quad V_3 = V + \frac{\pi d^2}{4} l_3,$$

a súčasne podľa (3)

$$V_2 = V_0 (1 + \beta_1 t_2) \quad \text{a} \quad V_3 = V_0 (1 + \beta_1 t_3).$$

Pomer

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{4V + \pi d^2 l_3}{4V + \pi d^2 l_2},$$

súčasne

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{1 + \beta_1 t_3}{1 + \beta_1 t_2},$$

takže

$$\frac{1 + \beta_1 t_3}{1 + \beta_1 t_2} = \frac{4V + \pi d^2 l_3}{4V + \pi d^2 l_2}.$$

Z tejto rovnice určíme ekvivalentnými úpravami V :

$$4V(1 + \beta_1 t_3) + \pi d^2 l_2(1 + \beta_1 t_3) = 4V(1 + \beta_1 t_2) + \pi d^2 l_3(1 + \beta_1 t_2).$$

Odtiaľ

$$V = \frac{\pi d^2 [(l_2 - l_3) + \beta_1 (l_2 t_3 - l_3 t_2)]}{4\beta_1 (t_2 - t_3)}. \quad (5)$$

Numericky:

$$V = \frac{\pi \cdot 0,043^2 \cdot [26 + 0,181 \cdot 10^{-3}(-420 - 300)]}{4 \cdot 0,181 \cdot 10^{-3} \cdot 165} \cdot \frac{\text{cm}^2 \cdot \text{cm}}{\text{deg}^{-1} \cdot \text{deg}},$$

$$V = \frac{0,005\,806 \cdot 25,869\,68}{0,66 \cdot 0,181} \text{ cm}^3.$$

Logaritmicky vypočítáme $V = 1,27 \text{ cm}^3$.

Aby boli splnené všetky podmienky udané v časti B) danej úlohy, má mať obe banky objem určený vzťahom (5); numericky $1,27 \text{ cm}^3$.

6. Ocelová obruč byla naražena na kolo železničního vozu při teplotě $t_1 = 300^\circ\text{C}$. Vypočtete namáhání obruče v tahu při teplotě $t_2 = 20^\circ\text{C}$, při průřezu S obruče 20 cm^2 . Modul pružnosti oceli v tahu je $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$, koeficient délkové roztažnosti oceli $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$. Řešte nejprve obecně, pak numericky.

Označení veličin a dané hodnoty: Délka obruče při teplotě $t_0 = 0^\circ\text{C}$ je l_0 , při teplotě t_1 a t_2 je l_1 a l_2 .

Řešení: Má-li obruč při teplotě 0°C délku l_0 , má při teplotě t_1 délku $l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$ a při teplotě t_2 délku $l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$. Dělením těchto rovnic dostaneme:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2},$$

takže

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Obruč se tedy zkrátí o

$$\Delta l = l_1 - l_2 = l_1 \left(1 - \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \right) = l_1 \alpha \frac{t_1 - t_2}{1 + \alpha t_1}. \quad (1)$$

Podle Hookova zákona platí

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_1}{S}, \quad (2)$$

kde F značí namáhání obruče.

Z rovnic (1) a (2) vychází

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_1}{S} = l_1 \alpha \frac{t_1 - t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Odtud určíme namáhání F obruče:

$$F = ES\alpha \frac{t_1 - t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Numericky:

$$\begin{aligned} F &= \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 280}{1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 300} \frac{\text{kpcm}^2 \text{deg}}{\text{cm}^2 \text{deg}} = \\ &= \frac{12 \cdot 2,1 \cdot 20 \cdot 280}{1 + 36 \cdot 10^{-4}} \text{kp}, \end{aligned}$$

$$F = 140\,614 \text{ kp}.$$

Obruč je namáhána silou $F = ES\alpha \frac{t_1 - t_2}{1 + \alpha t_1}$, číselně silou 140 614 kp.

7. Sklenená nádoba je při teplotě $t = 10^\circ\text{C}$ úplně naplněná ortuťou a mají spolu hmotu M_1 . Po zohriatí na $t_1 = 30^\circ\text{C}$ má ortuť s nádobou hmotu M_2 , ktorá je o $M = 0,0625 \text{ kg}$ menšia ako M_1 .

- Aký je objem nádoby při teplotě 0°C , ak súčiniteľ objemovej rozťažnosti skla je $\alpha = 0,000\,024\,55 \text{ deg}^{-1}$, ortuti je $\beta = 0,000\,180\,18 \text{ deg}^{-1}$, a hustota ortuti při 0°C je $\rho_0 = 13,598 \text{ gcm}^{-3}$?
- Aké hmoty ortuti vyplnia celú nádobu při teplotě t a t_1 ?

Označenie veličín a dané hodnoty:

Hmota nádoby je m , jej objemy pri teplotách t a t_1 sú V a V_1 , hustota ortuti pri teplote t je ϱ , pri teplote t_1 je ϱ_1 , objem nádoby pri teplote $t_0 = 0^\circ\text{C}$ je V_0 .

Riešenie:

a) Pretože ortuť vyplňuje pri teplotách t a t_1 celú nádobu, sú objemy ortuti pri týchto teplotách také isté ako objemy nádoby. Podľa zákona o objemovej rozťažnosti pevných látok platí:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad (1)$$

a obdobne

$$V_1 = V_0(1 + \alpha t_1).$$

Pretože pri teplote t je hmota ortuti $M_1 - m$ a objem V , má ortuť pri tejto teplote hustotu

$$\varrho = \frac{M_1 - m}{V} = \frac{M_1 - m}{V_0(1 + \alpha t)}. \quad (2)$$

Pri teplote t_1 má tedy ortuť hustotu

$$\varrho_1 = \frac{M_2 - m}{V_0(1 + \alpha t_1)}. \quad (3)$$

Hodnoty ϱ a ϱ' , môžeme však vypočítať ešte inak. Množstvo ortuti, ktoré pri teplote t vyplňa celú nádobku a má objem V , malo by pri teplote $t_0 = 0^\circ\text{C}$ objem V'_0 .

Preto je

$$V = V'_0(1 + \beta t). \quad (4)$$

Ak dosadíme za V podľa vzťahu (2), získame rovnicu

$$\frac{M_1 - m}{\varrho} = \frac{M_1 - m}{\varrho_0}(1 + \beta t),$$

lebo

$$V = \frac{M_1 - m}{\varrho}$$

a obdobne

$$V_0' = \frac{M_1 - m}{\varrho_0}.$$

Odtiaľ vypočítame

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t} \quad (5)$$

a obdobne

$$\varrho_1 = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t_1}. \quad (6)$$

Z rovníc (2) a (5) plynie:

$$\frac{\varrho_0}{1 + \beta t} = \frac{M_1 - m}{V_0(1 + \alpha t)}$$

a z rovníc (5) a (6)

$$\frac{\varrho_0}{1 + \beta t_1} = \frac{M_2 - m}{V_0(1 + \alpha t_1)}.$$

Z prvej z týchto rovníc vyjadríme

$$M_1 = \frac{\varrho_0 V_0 (1 + \alpha t)}{1 + \beta t} + m,$$

z druhej

$$M_2 = \frac{\varrho_0 V_0 (1 + \alpha t_1)}{1 + \beta t_1} + m.$$

Ak odčítame druhú rovnicu od prvej, je

$$M_1 - M_2 = M = \varrho_0 V_0 \left(\frac{1 + \alpha t}{1 + \beta t} - \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \beta t_1} \right),$$

takže

$$\begin{aligned} M &= \varrho_0 V_0 \frac{1 + \alpha t + \beta t_1 + \alpha \beta t t_1 - 1 - \alpha t_1 - \beta t - \alpha \beta t t_1}{(1 + \beta t) \cdot (1 + \beta t_1)} = \\ &= \varrho_0 V_0 \frac{\alpha(t - t_1) + \beta(t_1 - t)}{(1 + \beta t)(1 + \beta t_1)}. \end{aligned}$$

Z tejto rovnice určíme V_0 :

$$V_0 = \frac{M}{\rho_0} \cdot \frac{(1 + \beta t)(1 + \beta t_1)}{(t_1 - t)(\beta - \alpha)} . \quad (7)$$

Numericky:

$$V_0 = \frac{0,062\,5 \cdot 1,001\,801\,8 \cdot 1,005\,405\,4}{1,359\,8 \cdot 0,003\,112\,6 \cdot 10^4} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{kgm}^{-3}\text{deg} \cdot \text{deg}^{-1}} .$$

Logaritmicky $V_0 = 1,491 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Objem nádoby pri 0°C je daný obecné výrazom (7), numericky 1,491 litrov.

b) Podľa rovnice (4) by malo množstvo ortuti, ktoré vyplňa pri teplote t celú nádobu, pri teplote 0°C objem

$$V'_0 = \frac{V}{1 + \beta t} .$$

Za V dosadíme z rovnice (1).

Potom je $V'_0 = V_0 \frac{1 + \alpha t}{1 + \beta t}$ a po dosadení za V_0 z rovnice

(7) je $V'_0 = \frac{M}{\rho_0} \cdot \frac{(1 + \beta t_1) \cdot (1 + \alpha t)}{(t_1 - t)(\beta - \alpha)}$. Odtiaľ vypočítame $V'_0 \rho_0$. Výraz $V'_0 \rho_0$ udáva hmotu takého množstva ortuti, ktoré vyplní pri ohriatí na teplotu t celú nádobu. Je teda $V'_0 \rho_0 = M_1 - m = m_1$.

Preto

$$m_1 = M \frac{(1 + \beta t_1)(1 + \alpha t)}{(t_1 - t)(\beta - \alpha)} . \quad (8)$$

Ak sa ohreje toto množstvo ortuti z teploty t na teplotu t_1 , vytečie z nádoby množstvo ortuti o hmotu M , takže v nádobke zostane $m_2 = m_1 - M$ ortuti.

Hodnota m_2 je

$$m_2 = M \left[\frac{(1 + \beta t_1)(1 + \alpha t)}{(t_1 - t)(\beta - \alpha)} - 1 \right] . \quad (9)$$

Numericky:

$$m_1 = \frac{0,062\ 5 \cdot 1,005\ 405\ 4 \cdot 1,000\ 245\ 5}{20 \cdot 0,000\ 155\ 63} \text{ kg}.$$

Logaritmickey určíme

$$m_1 \doteq 20,105 \text{ kg} \text{ a } m_2 \doteq 20,042 \text{ kg}.$$

Pri teplotách t a t_1 naplní sa celá nádobka ortuťou o hmote m a m_1 , ktoré sú určené vzťahmi (8) a (9); numericky je $m_1 = 20,105 \text{ kg}$ a $m_2 = 20,042 \text{ kg}$.

8. Kúsok medi o teplote $\tau = 100^\circ\text{C}$ sa ponorí do $m_1 = 200 \text{ g}$ vody v kalorimetri o tepelnej kapacite $K = 0,015 \text{ kcal/deg}$; pôvodná teplota vody a kalorimetra je $t_1 = 15^\circ\text{C}$, konečná teplota je $t_2 = 17,5^\circ\text{C}$. Opakujeme pokus tak, že nahradíme vodu inou kvapalinou rovnakej hmoty a počiatočnej teploty $t_1' = 16,5^\circ\text{C}$; výsledná teplota je potom $t_2' = 19,0^\circ\text{C}$. Určite merné teplo kvapaliny.

Označenie veličín a dané hodnoty:

Merné teplo vody $c_1 = 1 \text{ kcal/kg} \cdot \text{deg}$; hmota kvapaliny $m_2 = m_1 = 0,2 \text{ kg}$; merné teplo kvapaliny je c_2 , merné teplo medi je c , hmota medi je m .

Riešenie: Ak ponoríme teleso hmoty m (o mernom teple c a teplote τ) do chladnejšej kvapaliny hmoty m_1 (o mernom teple c_1 a teplote $t_1 < \tau$), odovzdá teleso kvapaline časť tepla $Q_1 = c m (\tau - t_2)$ a ochladí sa na teplotu t_2 . Týmto teplom sa ohreje kalorimeter o tepelnej kapacite K a kvapalina hmoty m_1 z teploty t_1 na teplotu t_2 .

Kvapalina prijme od pevného telesa teplo $Q_2 = c_1 m_1 (t_2 - t_1)$ a kalorimeter teplo $Q_3 = K (t_2 - t_1)$. Podľa zákona o zachovaní a prechode tepelnej energie platí, za predpokladu, že žiadne teplo sa nevyžiarí do okolia a že teleso sa v kvapaline nerozpúšťa ani s ňou nereaguje, rovnica $Q_1 = Q_2 + Q_3$. Po dosadení:

$$c \cdot m (\tau - t_2) = K(t_2 - t_1) + c_1 \cdot m_1(t_2 - t_1). \quad (1)$$

Pre prvý pokus platí rovnica (1), pre druhý upravená rovnica (1):

$$c \cdot m(\tau - t'_2) = K(t'_2 - t'_1) + c_2 m_2(t'_2 - t'_1).$$

Pretože $m_1 = m_2$ platí po vydelení týchto rovníc

$$\frac{\tau - t_2}{\tau - t'_2} = \frac{(t_2 - t_1) \cdot (K + m_1 c_1)}{(t'_2 - t'_1) \cdot (K + m_1 c_2)}.$$

Ekvivalentnými úpravami určíme z tejto rovnice c_2 :

$$K + m_1 c_2 = \frac{(t_2 - t_1) \cdot (K + m_1 c_1) \cdot (\tau - t'_2)}{(t'_2 - t'_1) \cdot (\tau - t_2)},$$

$$c_2 = \frac{(K + m_1 c_1) \cdot (t_2 - t_1) \cdot (\tau - t'_2)}{m_1(t'_2 - t'_1) \cdot (\tau - t_2)} - \frac{K}{m_1}. \quad (2)$$

Numericky:

$$c_2 = \frac{(0,015 + 0,2) \cdot 2,5 \cdot 5,81 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ deg deg}}{0,2 \cdot 2,5 \cdot 82,5 \text{ kg deg deg}} - \frac{0,015 \text{ kcal}}{0,2 \text{ kg deg}},$$

$$c_2 = \frac{0,125 \cdot 202,5 \text{ kcal}}{0,5 \cdot 82,5 \text{ kg deg}} - \frac{0,15 \text{ kcal}}{2 \text{ kg deg}} = 0,98 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}}.$$

Merné teplo kvapaliny je určené vzťahom (2), číselne má hodnotu $0,98 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}}$.

9. Určite merné teplo telieska neznámeho zloženia, prizerajúc na tepelnú kapacitu kalorimetru. K dispozícii máte: kalorimeter, merané teliesko, teplomer, váhy, destilovanú vodu, zdroj tepla (varič), kádinky.

Ak máme určiť merné teplo c telieska hmoty m , ohrejeme ho v kúpeli na teplotu t_3 . Vložíme ho do kvapaliny, s ktorou chemicky nereaguje, hmoty m' , o teplote $t' < t_3$, ktorej merné teplo c_1 poznáme. Obvykle je touto kvapalinou destilovaná voda. Aby sa zabránilo stratám tepla do okolia,

musíme premiestiť teliesko z kúpeľa veľmi rýchlo do kalorimetra. Kalorimeter je nádoba od okolia izolovaná, aby do nej nemohlo teplo z okolia vnikáť ani z nej do okolia unikať. Aby sa dosiahlo rovnakej teploty v celom objeme kvapaliny, je kalorimeter opatrený miešačkou. Na meranie teploty je v ňom umiestený teplomer graduovaný po $0,1^{\circ}\text{C}$, alebo po $0,2^{\circ}\text{C}$. Teplo Q_3 , unikajúce z telieska, ohrieva nielen kvapalinu v kalorimetri, ale aj kalorimetrickú nádobku, miešačku a teplomer. Preto zavádzame pojem tepelnej kapacity K kalorimetra: Kalorimeter potrebuje k svojmu ohriatiu toľkokrát viac tepla, koľkokrát je väčší rozdiel medzi jeho konečnou a počiatočnou teplotou. Platí teda vzťah

$$Q' = K\Delta t. \quad (1)$$

Konštanta úmernosti K sa nazýva tepelná kapacita kalorimetra. Jej rozmer je $\frac{\text{kcal}}{\text{deg}}$.

Ak máme určiť merné teplo telieska, musíme určiť najprv tepelnú kapacitu kalorimetra. Určíme ju takto:

1. Vážením zistíme hmotu M_1 kalorimetra s miešačkou a teplomerom.

2. Do kalorimetra nalejeme určité množstvo m_1 destilovanej vody, ktorej merné teplo označíme c_1 . Hmotu kalorimetra s vodou je M_2 , takže $m_1 = M_2 - M_1$. Po premiešaní a ustálení teploty nameriame teplotu vody t_1 .

3. Prilejeme do kalorimetra ešte ďalšie množstvo m_2 destilovanej vody zahriatej na teplotu $t_2 > t_1$. Hmotu kalorimetra s vodou sa tým zvýši na M_3 , takže $m_2 = M_3 - M_2$.

4. Po premiešaní a ustálení teploty odčítame na teplomeri výslednú teplotu vody t . V kalorimetri sa mieša teplejšia voda so studenejšou a z teplejšej vody prechádza teplo $Q_2 = c_1 m_2 (t_2 - t) = c_1 (M_3 - M_2) \cdot (t_2 - t)$ jednak na kalorimeter, ktorý prijme podľa upraveného vzťahu (1) teplo $Q' = K(t - t_1)$, jednak na kvapalinu hmoty $m_1 = M_2 - M_1$, ktorá získa teplo $Q_1 = (M_2 - M_1)c_1 \cdot (t - t_1)$. Z kalorimetrickej rovnice plynie: $c_1(M_3 - M_2) \cdot (t_2 - t) =$

$= K(t - t_1) + c_1(M_2 - M_1) \cdot (t - t_1)$. Z tejto rovnice určíme

$$K = c_1(M_3 - M_2) \frac{t_2 - t}{t - t_1} - c_1(M_2 - M_1). \quad (2)$$

Meraním boli zistené tieto hodnoty: $M_1 = 0,3142 \text{ kg}$; $M_2 = 0,3838 \text{ kg}$; $M_3 = 0,4541 \text{ kg}$; $t_1 = 16,3^\circ\text{C}$; $t_2 = 25,2^\circ\text{C}$; $t = 19,4^\circ\text{C}$; $c_1 = 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}}$, pretože bolo použité destilovanej vody.

Po dosadení do rovnice (2) vyjde

$$K = 0,0703 \cdot \frac{5,8}{3,1} \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{deg}} \cdot \text{kg} - 0,0696 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}} \cdot \text{kg}.$$

Hodnota prvého výrazu na pravej strane rovnice sa zistí logaritmicke a pre K vyjde hodnota

$$K = 0,0619 \text{ kcal deg}^{-1}. \quad (3)$$

Určenie merného tepla telieska:

Vážením určíme hmotu telieska $m = 0,2527 \text{ kg}$ a ohrejeme ho v kúpeli vody, uvedenej do varu, na teplotu $t_3 = 100^\circ\text{C}$. V kúpeli vriacej vody necháme teliesko po určitú dobu, aby sa celé prehrialo na rovnakú teplotu. Potom ho premiestime do kalorimetra, ktorý obsahuje ešte z predchádzajúceho merania (tepelnej kapacity) množstvo $m_3 = M_3 - M_1 = 0,1399 \text{ kg}$ vody, ktorej teplota trochu poklesla na hodnotu $t' = 19,1^\circ\text{C}$. Z telieska prechádza teplo na vodu a kalorimeter; teplota vody i kalorimetra stúpa, teplota telieska klesá a pri stálom miešaní sa ustáli na hodnote $\tau = 27,4^\circ\text{C}$. Pri tomto deji stratilo vložené teliesko teplo $mc(t_3 - \tau)$. Toto teplo prijala čiastočne voda: $m_3c_1(\tau - t')$, čiastočne kalorimeter: $K(\tau - t')$.

Platí teda kalorimetrická rovnice

$$mc(t_3 - \tau) = c_1(M_3 - M_1)(\tau - t') + K(\tau - t').$$

Odtiaľ určíme

$$c = \frac{[c_1(M_3 - M_1) + K] \cdot (\tau - t')}{m(t_3 - \tau)} . \quad (4)$$

Po dosadení vyjde

$$c = \frac{(0,139\,9 + 0,061\,9) \cdot 8,3}{0,252\,7 \cdot 72,6} \frac{\text{kcal deg}^{-1} \cdot \text{deg}}{\text{kg} \cdot \text{deg}} .$$

Po sčítaní oboch čísel v zátvorke určíme logaritmicky

$$c = 0,091\,2 \frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}} .$$

Merné teplo skúmaného telieska je $c = 0,091\,2 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.

KATEGORIE C

1. Posuďte a vysvetlite, jsou-li správné závěry v úlohách:

- a) Motocyklista jede z místa A do B průměrnou rychlostí 40 km/h a vrací se z místa B do A průměrnou rychlostí 60 km/h .

Jeho celková průměrná rychlost je 50 km/h .

- b) Míč je vržen počáteční rychlostí v_0 svisle vzhůru a dosáhne za dobu t výšky h .

Bude-li vržen počáteční rychlostí $2v_0$, dosáhne za dobu $2t$ výšky $2h$.

- a) Označení veličin a dané hodnoty: Vzdálenost $AB = s$; doby potřebné k vykonání dráhy AB a BA průměrnými rychlostmi $v_1 = 40 \text{ km/h}$ a $v_2 = 60 \text{ km/h}$ jsou t_1 a t_2 ; skutečná průměrná rychlost na dráze ABA je v' , předpokládaná $v = 50 \text{ km/h}$; doba potřebná k vykonání dráhy ABA je t .

Řešení: Protože všechny uvedené rychlosti jsou průměrné, řešíme úlohu tak, jako kdyby šlo o rovnoměrné pohyby s udanými konstantními rychlostmi. Pro doby t_1 , t_2 a t

platí tedy tyto vztahy:

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2} \quad \text{a} \quad t = \frac{2s}{v'}.$$

Protože

$$t = t_1 + t_2,$$

je

$$\frac{2s}{v'} = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}.$$

Z této rovnice vypočítáme neznámou v' :

$$\frac{2s}{v'} = \frac{s(v_1 + v_2)}{v_1 v_2}, \quad v' = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Numericky:

$$v' = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{40 + 60} \frac{\left(\frac{\text{km}}{\text{hod}}\right)^2}{\frac{\text{km}}{\text{hod}}} = 48 \text{ km/hod.}$$

Poněvadž skutečná průměrná rychlost motocyklisty na dráze z A do B a zpět z B do A , tj. $v' = 48 \text{ km/hod.}$, není rovna předpokládané průměrné rychlosti $v = 50 \text{ km/hod.}$, je závěr úlohy nesprávný.

b) *Označení veličin:* Počáteční rychlost míče při vrhu svisle vzhůru je v_0 , h je dráha za čas t , skutečná výška dosažená míčem vrženým svisle vzhůru rychlostí $2v_0$ je h' , předpokládaná $2h$.

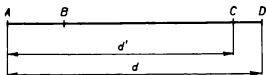
Řešení: Svislý vrh vzhůru je pohyb složený ze dvou pohybů: rovnoměrného s počáteční rychlostí v_0 směrem svisle vzhůru a volného pádu směrem svisle dolů. Podle principu o nezávislosti pohybů platí pro výšku h vztah $= v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

a pro výšku h' rovnice

$$h' = 2v_0 2t - \frac{g \cdot (2t)^2}{2} = 4v_0 t - 2gt^2 = 4 \cdot \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) = 4h.$$

Bude-li míček vržen rychlostí $2v_0$ svisle vzhůru, vystoupí za dobu $2t$ do výšky $h' = 4h$ a nikoli $2h$. Tvrzení v textu úlohy je nesprávné.

2. Motorista jede rychlostí $v_0 = 80$ km/hod. Ve vzdálenosti $d = 50$ m uvidí před sebou překážku. Dovede vůz včas zabrzdit, jestliže jeho reakce na vnější popud trvá $t_1 = 0,5$ s a při dané rychlosti může vůz zabrzdit za $t_2 = 3$ s? Řešte nejprve obecně. (Obr. 26.)



Obr. 26

Označení veličin a dané hodnoty: Rychlost motoristy

$$v_0 = 80 \text{ km/hod} = \frac{200}{9} \text{ m/s}; \text{ vzdálenost překážky } AD =$$

$= d = 50 \text{ m}$; $d' = AC$ je dráha, na které může řidič zastavit; AB , BC jsou dráhy ujeté vozem za doby t_1 a t_2 , rychlost rovnoměrně zpožděného pohybu na konci časového intervalu t označíme v .

Řešení: Délka dráhy $d' = AC$, kterou ujede vůz od okamžiku, kdy řidič spatří překážku, se skládá ze dvou částí, AB a BC . Dráhu AB ujede vůz rovnoměrným pohybem plnou rychlostí v_0 za dobu t_1 , ve které pohyb vozu nebyl ještě brzděn. Proto je

$$AB = v_0 t_1. \quad (1)$$

V místě B začne řidič brzdit a zabrzdí vůz za dobu t_2 , po kterou koná vůz pohyb rovnoměrně zpožděný, jestliže

předpokládáme, že brzdící síla je stálá. Proto platí pro pohyb po dráze BC rovnice

$$BC = v_0 t_2 - \frac{a t_2^2}{2}, \quad (2)$$

kde a značí zpždění pohybu. Rychlosti ubývá podle rovnice $v = v_0 - at$. V místě C , kde se vůz za dobu t_2 od počátku brzdění zastaví, je $v = 0$, takže z rovnice $v_0 - at_2 = 0$ vychází pro a hodnota $a = \frac{v_0}{t_2}$. Dosadíme-li tuto hodnotu za a do rovnice (2), vypočítáme

$$BC = v_0 t_2 - \frac{1}{2} v_0 t_2 = \frac{1}{2} v_0 t_2. \quad (3)$$

Sečtením rovnic (1) a (3) dostaneme

$$d' = AC = AB + BC = v_0 t_1 + \frac{1}{2} v_0 t_2 = \frac{v_0}{2} (2t_1 + t_2). \quad (4)$$

Numericky:

$$d' = \frac{100}{9} \cdot 4 \text{ m} = 44,44 \text{ m}.$$

Řidič zabrzdí vůz na dráze 44,44 m, a proto nenarazí na překážku vzdálenou 50 m.

3. Raketa je odpálena svisle vzhůru se zrychlením $a = 40 \text{ ms}^{-2}$; palivo vyhoří za $t_1 = 2$ minuty. a) Jak vysoko raketa vyletí? b) Za jak dlouho po vypálení se vrátí na zem? Řešte nejprve obecně, odpor vzduchu zanedbejte ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$).

Označení veličin a dané hodnoty: Zrychlení rakety po dobu t_1 je a' ; výška rakety a její rychlost po uplynutí doby t_1 je h_1 a v_1 ; po shoření paliva stoupá raketa po dobu t_2 a urazí za tuto dobu dráhu h_2 ; dosáhne celkové výšky h ; volný pád rakety trvá dobu t_3 ; na zem se vrátí za dobu T .

Řešení: a) Raketa koná nejprve pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením a' . Kdyby nebylo zemské přitažli-

vosti, mělo by zrychlení konstantní hodnotu a a směřovalo by svisle vzhůru. Přitažlivost zemská uděluje jí však zrychlení g ve směru svislém dolů. Podle principu o nezávislosti pohybů je výsledné zrychlení rakety $a' = a - g$ a směřuje svisle vzhůru. Za dobu t_1 dosáhne raketa výšky

$$h_1 = \frac{a't_1^2}{2} = \frac{1}{2}(a - g)t_1^2 \quad (1)$$

a konečné rychlosti

$$v_1 = (a - g)t_1. \quad (2)$$

Kdyby nebylo zemské přitažlivosti, stoupala by raketa po shoření paliva setrvačností dále rovnoměrným pohybem rychlostí v_1 a urazila by za dobu t_2 dráhu $v_1 t_2$. Vlivem zemské přitažlivosti koná zároveň volný pád, a proto urazí za dobu t_2 podle principu o nezávislosti pohybů dráhu $h_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$. Během tohoto pohybu se její rychlost zmenšuje podle zákona $v = v_1 - gt$ a za dobu t_2 se stane nulovou, takže z rovnice $v_1 - gt_2 = 0$ vychází $t_2 = \frac{v_1}{g} = \frac{(a - g)}{g} t_1$.

Dosadíme-li tuto hodnotu do výrazu pro h_2 , je

$$h_2 = \frac{v_1^2}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_1^2}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1^2}{g}.$$

Po dosazení za v_1 je

$$h_2 = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{g} = \frac{(a - g)^2 t_1^2}{2g}. \quad (3)$$

Raketa vyletí do výšky

$$h = h_1 + h_2 = \frac{1}{2}(a - g)t_1^2 \cdot \left(1 + \frac{a - g}{g}\right),$$

$$h = \frac{1}{2g}(a - g)at_1^2. \quad (4)$$

Numericky:

$$h = \frac{1}{20} 30 \cdot 40 \cdot 120^2 \text{ ms}^{-2} \text{s}^2 \doteq 8,64 \cdot 10^5 \text{ m} = 864 \text{ km}.$$

Kdyby nebylo přitažlivosti zemské, vyletěla by raketa do výšky určené obecně vztahem (4), numericky 864 km.

b) Zanedbáme-li odpor vzduchu, padá raketa k zemi volným pádem z výšky h po dobu t_3 , jejíž hodnotu určíme z rovnice $h = \frac{1}{2} g t_3^2$.

Tedy

$$t_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{t_1}{g} \sqrt{a(a-g)}. \quad (5)$$

Na zem se raketa vrátí za dobu

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_2 + t_3 = \\ &= t_1 \left(1 + \frac{a-g}{g} + \frac{\sqrt{a(a-g)}}{g} \right) = t_1 \frac{a + \sqrt{a(a-g)}}{g}. \end{aligned} \quad (6)$$

Poněvadž čítec i jmenovatel zlomku mají stejné rozměry ms^{-2} , má T rozměr jako t_1 , tj. s.

Zanedbáme-li odpor vzduchu, vrátí se raketa na zem za dobu určenou vztahem (6).

Numericky:

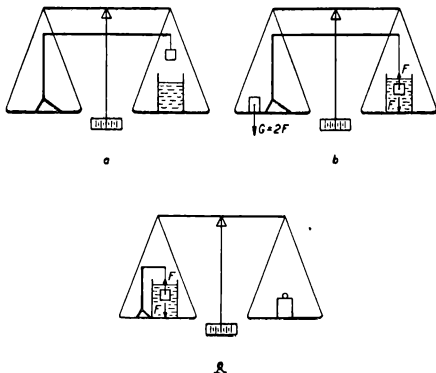
$$\begin{aligned} T &= 120 \cdot \frac{40 + \sqrt{40 \cdot 30}}{10} \text{ s} = 120 \cdot 2 (2 + \sqrt{3}) \text{ s} = \\ &= 896 \text{ s} \doteq 15 \text{ minut}. \end{aligned}$$

Raketa spadne na zem za dobu 15 minut po odpálení.

4. a) Na rovnoramenných vahách je vyvážena nádoba s vodou. Poruší se rovnováha, když do vody ponoříme prst? Vysvětlíte.

b) Na jedné misce rovnoramenných vah je stojan s dlouhým vodorovným ramenem, na jehož konci je na tenké niti zavěšen kovový válec nad druhou miskou vah. Na druhé

misce je nádoba s vodou; váhy jsou v rovnováze. Prodloužíme-li závěsnou nit tak, aby celý válec byl ponořen ve vodě, rovnováha se poruší. Vysvětlete, α) proč se rovnováha poruší, β) jakým závažím a na kterou misku položeným ji obnovíte? (Obr. 27a, b.)



Obr. 27

c) Stojan s válcem a nádobka s vodou jsou nyní umístěny na téže misce vah; na druhé misce jsou vyváženy závažím. Poruší se rovnováha, když se válec zavěšený na niti α) částečně ponoří do vody, β) postaví až na dno nádoby (a nit se uvolní)? (Obr. 27c.)

Řešení: a) Na prst ponořený do vody působí podle Archimédova zákona vztlaková síla, směřující svisle vzhůru. Podle principu rovnosti akce a reakce tlačí prst stejně velikou silou

opačného směru na kapalinu. Proto klesne ta miska vah, na které je nádoba s vodou.

b) Váleček ponořený ve vodě je podle Archimédova zákona nadlehčován vztlakovou silou, která se rovná váze F kapaliny válečkem vytlačené. Proto je tlaková síla na miskou se stojanem o F menší, než byla za rovnovážného stavu. Podle principu rovnosti akce a reakce tlačí váleček stejně velikou silou na vodu, nacházející se na druhé misce vah, takže se tlaková síla na tuto miskou o stejnou hodnotu zvětší.

α) Ponoří-li se váleček do vody, je tlaková síla na miskou se stojanem menší než tlaková síla na druhé misce o dvojnásobek váhy kapaliny válečkem vytlačené.

β) Je-li váleček ponořen ve vodě, obnoví se podle výsledku úvahy b α) rovnováha, jestliže přidáme na miskou se stojanem závaží, jehož váha je dvojnásobkem váhy kapaliny, která byla vytlačena válečkem.

$\alpha\alpha$) Jsou-li nádobka a stojan s válečkem na téže misce vah, pak se rovnováha při ponoření válečku do vody neporuší. Váleček, a tedy i miska vah, je sice nadlehčována tlakovou silou F , rovnou váze kapaliny vytlačené válečkem, avšak stejně veliká reakce zvětší o stejnou hodnotu tlak na vodu i miskou. Obě síly se ruší.

$c\beta$) Platí totéž jako v případě $\alpha\alpha$).

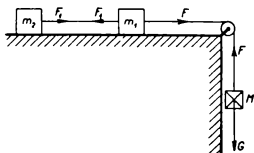
5. Na hladkém stole leží dvě krychle o hmotách m_1 , m_2 , spojené navzájem tenkým vláknem. Krychle m_1 je spojena dalším vláknem, vedeným přes kladku na okraji stolu, s volně visícím závažím o hmotě M .

Určete: a) zrychlení, se kterým se tělesa pohybují; b) sílu, kterou jsou namáhána vlákna mezi tělesy M a m_1 , m_1 a m_2 . Tření a hmoty vláken a kladky zanedbejte. Řešte nejprve obecně a pak pro $m_1 = 0,20$ kg, $m_2 = 0,30$ kg, $M = 0,10$ kg, $g = 10$ m/s². (Obr. 28.)

Označení veličin a dané hodnoty: Zrychlení pohybu těles je a ; vlákno připojené k závaží a ke krychli hmoty m_1 je napínáno silou F , vlákno připojené k oběma krychlím silou F_1 .

Řešení: Na závaží hmoty M působí přitažlivost zemská silou $G = Mg$ svisle dolů a napjaté vlákno silou F opačným směrem. Podle zákona o skládání sil, působících na téže vektorové přímce, má celková síla, působící pohyb hmoty M svisle dolů, velikost $Mg - F$. Tato síla uděluje hmotě M zrychlení a , takže platí

$$Mg - F = Ma . \quad (1)$$



Obr. 28

Pohyb obou krychlí po vodorovné rovině působí síla napínající vlákno mezi hmotami M a m_1 . Je to síla F . Obě krychle se pohybují se stejným zrychlením jako těleso hmoty M . Podle zákona síly je

$$F = (m_1 + m_2) a . \quad (2)$$

Dosadíme-li za F z rovnice (2) do (1), dostaneme

$$Mg - (m_1 + m_2) a = Ma .$$

Kořenem této rovnice je

$$a = \frac{Mg}{m_1 + m_2 + M} . \quad (3)$$

Numericky:

$$a = \frac{1}{0,2 + 0,3 + 0,1} \frac{\text{kg} \cdot \text{ms}^{-2}}{\text{kg}} = \frac{5}{3} \text{ms}^{-2} = 1,67 \text{ms}^{-2} .$$

b) Dosadíme-li do rovnice (1) za a hodnotu ze vztahu (3), můžeme vypočítat sílu F , napínající vlákno mezi hmotami M a m_1 . Vyjde

$$F = M(g - a) = Mg \left(1 - \frac{M}{M + m_1 + m_2} \right). \quad (4)$$

Numericky:

$$F = 0,1 \cdot \frac{0,5}{0,6} \cdot 10 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2},$$

$$F = \frac{5}{6} \text{ N}.$$

Pohyb krychle hmoty m_2 je působen silou F_1 . Poněvadž se tato krychle pohybuje po stole se zrychlením a , má síla F_1 podle zákona síly hodnotu

$$F_1 = m_2 a = \frac{M m_2 g}{M + m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Numericky:

$$F_1 = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,1 + 0,2 + 0,3} \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = \frac{1}{2} \text{ N}.$$

Zanedbáme-li tření, hmoty vláken a kladky i odpor prostředí, pohybují se všechna tělesa se zrychlením a , určeným vztahem (3); vlákno mezi hmotami M a m_1 je napínáno silou F , určenou vztahem (4), vlákno mezi hmotami m_1 a m_2 silou F_1 , jejíž velikost udává vzorec (5). Číselně je $a = 1,67 \text{ ms}^{-2}$, $F = 0,83 \text{ N}$, $F_1 = 0,5 \text{ N}$.

6. Brzdicí síla brzd automobilu se rovná poloviční váze vozu. Určete, na jak dlouhé dráze s se automobil zabrzdí, je-li jeho počáteční rychlost v . Sestrojte tabulku a graf závislosti dráhy s na rychlosti v automobilu. Postupujte při tom po 10 km/hod až do rychlosti 120 km/hod ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Graf narýsujte na milimetrový papír.

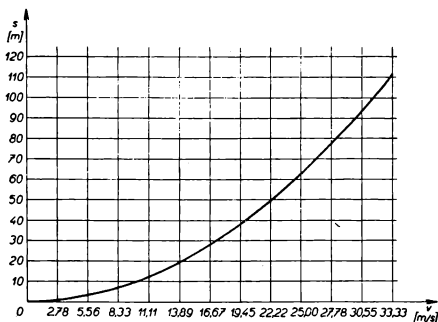
Označení veličin a dané hodnoty: Hmotu vozu je m ; brzdicí síla brzd je F .

Řešení: Kinetická energie automobilu na počátku brzdění je $W = \frac{1}{2}mv^2$. Brzdicí síla F je polovinou váhy vozu, takže $F = \frac{1}{2}mg$. Tato síla vykoná po dráze s práci $A = Fs = \frac{1}{2}mgs$. Podle zákona o přeměně energie v práci se změní celá kinetická energie, kterou měl vůz v okamžiku, kdy začal být brzděn, v práci, kterou vykonala brzdicí síla od počátku brzdění až do zastavení vozu. Platí tedy rovnice

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgs,$$

ze které určíme

$$s = \frac{v^2}{g} \quad (1)$$



Obr. 29

Sestrojení grafu: Za nezávisle proměnnou zvolíme rychlost v , za závisle proměnnou s . Graf sestrojíme tak, že volíme za v hodnoty (v km/h) v 0, 10, 20, 30, ... 120. (2)

Vypočítáme k nim příslušné hodnoty pro rychlost v (v m/s) a pro ně určíme odpovídající hodnoty veličiny s (v m). Všechny tyto hodnoty zaznamenáme v tabulce. Potom

sestrojíme graf (obr. 29). Rychlost $\frac{25}{9}$ m/s = 2,78 m/s zobrazíme úsečkou dlouhou 1 cm a dráhu 10 m také úsečkou dlouhou 1 cm.

v	$\frac{\text{km}}{\text{h}}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
v	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	0	2,78	5,56	8,33	11,11	13,89	16,67	19,45	22,22	25,00	27,78	30,55	33,33
s	m	0	0,77	3,08	6,94	12,34	19,29	27,77	37,81	49,38	62,50	77,16	93,36	111,11

7. Kulička o hmotě m 20 g je vržena svisle dolů z výšky $h_1 = 70$ cm nad deskou stolu počáteční rychlostí $v_0 = 2,0$ m/s.

a) Do jaké výšky by vyskočila po odrazu, kdyby kulička i deska stolu byly dokonale pružné?

b) Ve skutečnosti se kulička odrazila do výšky $h_2 = 40$ cm nad deskou stolu. Určete úbytek hybnosti a mechanické energie kuličky při nárazu. Vysvětlete tento úbytek podle zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie. Řešte nejprve obecně, odpor vzduchu zanedbejte ($g = 10$ m/s²).

Označení veličin a dané hodnoty: hmota kuličky $m = 0,02$ kg; výška kuličky nad deskou stolu je $h_1 = 0,7$ m; rychlost kuličky při dopadu je v_1 ; po odrazu od dokonale pružné desky by odskočila do výšky h ; ve skutečnosti se odrazí do výšky $h_2 = 0,4$ m; hybnost kuličky při dopadu je p_1 ; při odrazu p_2 ; tíhové zrychlení $g = 10$ m/s².

Řešení: a) Kulička má v bodě A , ze kterého je vržena svisle dolů rychlostí v_0 , potenciální energii mgh_1 a kinetickou energii $\frac{1}{2}mv_0^2$, takže její celková energie má v okamžiku, kdy se kulička začíná pohybovat, velikost

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_1. \quad (1)$$

V okamžiku, kdy kulička dopadá na desku stolu, změní se celá tato energie na energii kinetickou. Zanedbáme-li odpor prostředí a jsou-li kulička i deska dokonale pružné, nedojde při odrazu ke ztrátě energie. Kulička se odráží a stoupá. Její kinetická energie se při stoupání mění v potenciální a v okamžiku, kdy její rychlost klesne na nulu, dosáhne kulička největší výšky h . Energie W , kterou měla kulička na počátku pohybu, se změní v potenciální energii $W' = mgh$.

Podle zákona o zachování energie platí $mgh = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_0^2$, takže

$$h = \frac{v_0^2 + 2gh_1}{2g}. \quad (2)$$

Numericky:

$$h = \frac{4 + 20 \cdot 0,7}{20} \frac{\text{m}^2\text{s}^{-2}}{\text{ms}^{-2}} = 0,9 \text{ m}.$$

Dokonale pružná kulička, která by byla vržena svisle dolů rychlostí 2 m/s z výšky $0,7 \text{ m}$, by se odrazila od dokonale pružné desky do výšky $0,9 \text{ m}$.

b) Protože se kulička odrazila jen do výšky $h_2 < h$, není ani deska ani kulička dokonale pružná. Podle zákona o zachování hybnosti je celková hybnost soustavy dvou nebo více těles, které na sebe navzájem působí silami, stále stejná, nepůsobí-li na soustavu žádná vnější síla. Před rázem má

však hybnost jen kulička, po rázu kulička i pružná deska, která se při rázu deformovala impulsem síly. Proto je hybnost kuličky před rázem větší než po rázu. Kulička získala volným pádem při dopadu na desku rychlost v_1 , jejíž hodnota se vypočítá ze zákona o zachování energie. Poněvadž kulička má ve výšce h_1 potenciální energii mgh_1 , získala by při dopadu na desku rychlostí v_1 kinetickou energii $\frac{1}{2}mv_1^2$. Z rovnice

$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ se vypočítá $v_1 = \sqrt{2h_1g}$. Je tedy celková rychlost kuličky při dopadu $v_0 + v_1 = v_0 + \sqrt{2h_1g}$ a její hybnost $p_1 = m(v_0 + \sqrt{2h_1g})$. Po rázu má kulička skutečnou rychlost v_2 menší než před rázem; její velikost je $v_2 = \sqrt{2gh_2}$, neboť se kulička odrazí jen do výšky h_2 . Je tedy hybnost kuličky po rázu $p_2 = m\sqrt{2gh_2}$. Úbytek hybnosti

$$\Delta p = p_1 - p_2 = m[v_0 + \sqrt{2g}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})]. \quad (3)$$

Numericky:

$$\Delta p = 0,02[2 + 20(\sqrt{0,7} - \sqrt{0,4})] \frac{\text{kgm}}{\text{s}},$$

$$\Delta p = 0,02 \cdot 2,91 \text{ kgm/s} = 0,0582 \text{ kgm/s}.$$

Úbytek hybnosti při rázu kuličky je dán vzorcem (3). Jeho číselná hodnota je 0,0582 kgm/s. Úbytek hybnosti se projeví jako impuls síly, který způsobí deformaci desky a kuličky.

Kulička má při dopadu na desku podle zákona o zachování energie stejně velkou kinetickou energii jako měla v místě A celkovou energii. Pro tuto energii platí vztah (1). Po odrazu má energii $\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2$. Úbytek energie při rázu je

$$\Delta W = W - mgh_2 = \frac{1}{2}m[v_0^2 + 2g \cdot (h_1 - h_2)]. \quad (4)$$

Numericky:

$$\Delta W = 0,01 (4 + 20 \cdot 0,3) \text{ kgm}^2\text{s}^{-2} = 0,1 \text{ J}.$$

Úbytek energie při rázu kuličky je určen vztahem (4), číselnou hodnotu má 0,1 J. Je způsoben tím, že část energie se spotřebuje na deformační práci, část se změní v teplo, jímž se při rázu ohřeje kulička i deska.

8. Kosmická loď Východ s prvním astronautem J. A. Gagarinem obletěla Zemi za 89,1 min.; na své oběžné dráze měla největší vzdálenost od povrchu Země (apogeum) 327 km, nejmenší (perigeum) 175 km. Její hmota byla 4 725 kg.

a) Jak se mění na oběžné dráze kinetická a potenciální energie lodi vzhledem k Zemi? Vysvětlete podle zákona zachování mechanické energie.

b) Předpokládejme, že místo skutečného pohybu koná loď rovnoměrný pohyb po kruhové dráze o poloměru rovném aritmetickému průměru největší a nejmenší vzdálenosti lodi od středu Země. Určete rychlost pohybu, kinetickou energii lodi vzhledem k Zemi, dostředivé zrychlení v jednotkách tíhového zrychlení g .

c) Jakou přitažlivou silou by v tomto případě působila Země na loď? Porovnejte s váhou lodi na povrchu Země.

d) Sestrojte ve vhodném měřítku průřez Země a kruhovou dráhu lodi. Jaký by byl poloměr dráhy Měsíce ve zvoleném měřítku? (Potřebné číselné hodnoty vyhledejte v Matematicko-fyzikálních tabulkách.)

Označení veličin a dané hodnoty: Oběžná doba kosmické lodi je $T = 5\,346 \text{ s}$, hmota kosmické lodi $m = 4\,725 \text{ kg}$; apogeum je $r_1 = 3,27 \cdot 10^5 \text{ m}$, perigeum $r_2 = 1,75 \cdot 10^5 \text{ m}$ od povrchu Země; poloměr kruhového pohybu lodi r , rychlost lodi je v , poloměr Země $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Řešení: a) Vzdalujeme-li těleso od zemského povrchu, konáme práci. Tím získává těleso na potenciální energii. Proto je potenciální energie každého tělesa, tedy i kosmické

lodi, větší, nachází-li se dále od Země. Největší potenciální energii má tedy kosmická loď v apogeu, nejmenší v perigeu. Jestliže těleso během svého pohybu nepřijímá ze svého okolí žádnou energii ani jiným tělesům žádnou energii nepředává, je jeho úhrnná mechanická energie W stálá. Tato podmínka je u kosmické lodi splněna. Proto je součet kinetické energie W_k kosmické lodi a její potenciální energie W_p (počítáno vzhledem ke středu Země) stálý a roven W , takže platí $W = W_p + W_k$. V apogeu je potenciální energie kosmické lodi největší, proto je kinetická energie nejmenší. V perigeu je tomu naopak.

b) Kdyby konala kosmická loď pohyb po kruhové dráze o poloměru rovném aritmetickému průměru její největší a nejmenší vzdálenosti od středu Země, měla by v každém místě své dráhy stejnou potenciální energii, a proto by i její kinetická energie byla konstantní. Ze vzorce $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ vyplývá, že by se kosmická loď pohybovala ve všech místech své dráhy rychlostí stálé velikosti. Poloměr kruhové dráhy lodi by byl $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + R$, délka dráhy při jednom oběhu by měla hodnotu $2\pi r$, a proto by se rychlost lodi rovnala $v = \frac{2\pi r}{T}$ za předpokladu, že by se oběžná doba po této kruhové dráze rovnala oběžné době po její skutečné dráze. Úpravou předcházející rovnice získáme pro v hodnotu

$$v = \frac{\pi(2R + r_1 + r_2)}{T}. \quad (1)$$

Numericky:

$$v = \frac{\pi(2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 + 3,27 \cdot 10^5 + 1,75 \cdot 10^5)}{5\,346} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v = 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{127,4 + 3,27 + 1,75}{5\,346} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7\,777 \frac{\text{m}}{\text{s}} \doteq 7,78 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Kinetická energie má po úpravě vzorce $W = \frac{1}{2} m v^2$ hodnotu

$$W = \frac{1}{2} m \frac{\pi^2}{T^2} (2R + r_1 + r_2)^2. \quad (2)$$

Numericky:

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot 4\,725 \cdot 7\,777^2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}.$$

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot 4\,725 \cdot 6,048\,2 \cdot 10^7 \text{ J} \doteq 1,428\,9 \cdot 10^{11} \text{ J}.$$

Dostředivé zrychlení je

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{2\pi^2 (2R + r_1 + r_2)^2}{T^2 (2R + r_1 + r_2)} = \frac{2\pi^2}{T^2} (2R + r_1 + r_2).$$

Poměr

$$\frac{a}{g} = \frac{2\pi^2}{gT^2} (2R + r_1 + r_2), \text{ takže } a = \frac{2\pi^2}{gT^2} (2R + r_1 + r_2) \cdot g. \quad (3)$$

Numericky se nejvýhodněji vypočítá poměr $\frac{a}{g} = \frac{v^2}{rg}$, takže

$$a = \frac{v^2}{rg} g.$$

Numericky:

$$a = \frac{2 \cdot 6,048\,2 \cdot 10^7}{1,324\,2 \cdot 10^8} g = 0,92 g.$$

Kdyby se kosmická loď Východ pohybovala rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru rovném aritmetickému průměru její největší a nejmenší vzdálenosti od středu Země a kdyby její oběžná doba po této kruhové dráze byla stejná jako oběžná doba po její skutečné dráze, pak by měly rychlost, kinetická energie a dostředivé zrychlení hodnoty

vyjádřené obecně vztahy (1), (2), (3), numericky $v \doteq 7,78 \frac{\text{km}}{\text{s}}$,
 $W_k \doteq 1,4289 \cdot 10^{11} \text{ J}$, $a \doteq 0,92 \text{ g}$.

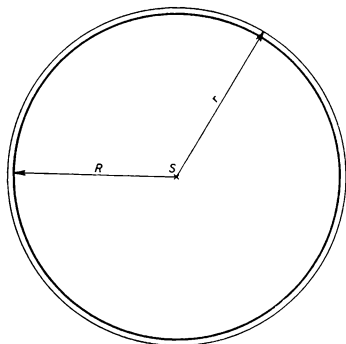
c) Země by v případě b) přitahovala kosmickou loď silou

$$F = ma = \frac{2\pi^2 m}{T^2} (2R + r_1 + r_2).$$

Numericky:

$$F = 4\,725 \cdot 0,93 \cdot 10 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = 4,394 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

d) Jestliže zobrazíme 1 000 km délkou 1 cm, zobrazí se poloměr zemský úsečkou dlouhou 6,4 cm, poloměr kruhové dráhy kosmické lodi úsečkou 6,6 cm. Střední vzdálenost Měsíce od Země je 384 403 km. Poloměr dráhy Měsíce by byl ve zvoleném měřítku zobrazen úsečkou $\varrho = 3,84 \text{ m}$. (Obr. 30.)



Obr. 30

9. Určete tíhové zrychlení g z měření na nakloněné rovině.
Návod:

a) Sledujte pohyb kuličky po hladké nakloněné rovině asi $d = 180$ cm dlouhé při vhodné výšce h (např. 5 cm). K měření si opatřte kuličku z kuličkového ložiska o hmotě menší než 30 g. Změřte stopkami dobu pohybu kuličky po dráze např. 10 cm, 40 cm, 90 cm, 160 cm při stálé výšce nakloněné roviny. Pro každé měření vypočítejte zrychlení pohybu a . Z této hodnoty a z rozměrů nakloněné roviny vypočítejte tíhové zrychlení $g = \frac{d}{h}a$. Měření sestavte do vhodné tabulky.

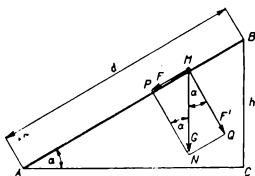
b) Opakujte měření pro jinou výšku h nakloněné roviny. Určete g opět z aritmetického průměru hodnot a .

c) Určete g jako aritmetický průměr obou výsledků.

Popište přesně zařízení pokusu a postup měření.

K řešení si prostudujte úlohu 3 z knihy Laboratorní práce II (SPN, Praha 1956), str. 62–66.

Potřeby: Nakloněná rovina 2 m dlouhá se žlábkem, malá kulička z kuličkového ložiska, stopky graduované po 0,02 s, zarážka.



Obr. 31

Výklad: Nachází-li se na hladké nakloněné rovině (obr. 31) výšky h a délky d kulička, jejíž tření při pohybu po nakloněné rovině je velmi malé, působí na ni zemská gravitace silou

$G = mg$, kde g je tíhové zrychlení a m je hmota kuličky. Tato síla je váha tělesa, která se dynamicky projevuje volným pádem. Volnému pádu brání pevnost nakloněné roviny.

a)

t'_k [s]	průměr t_k [s]	s_k [m]	a_k [ms ⁻²]
0,92 0,86 0,95 0,90 0,94	0,914	0,1	0,239
1,79 1,84 1,82 1,82 1,81	1,82	0,4	0,242
2,74 2,70 2,72 2,70 2,71	2,71	0,9	0,245
3,64 3,60 3,63 3,62 3,60	3,62	1,6	5 0,244
Aritmetický průměr: $a = 0,2425 \text{ ms}^{-2}$			
Hodnota g podle (3) je $g_1 = 9,7 \text{ ms}^{-2}$			

Váha se proto rozkládá na dvě složky. Jedna z nich, F' , působí tlak na nakloněnou rovinu, druhá, F , je k F' kolmá. Složka F' je kolmá k nakloněné rovině, složka F je s ní

b)

t'_k [s]	průměr t_k [s]	s_k [m]	a_k [ms ⁻²]
0,64 0,64 0,62 0,64 0,63	0,634	0,1	0,497
1,28 1,26 1,28 1,29 1,26	1,274	0,4	0,492
1,93 1,91 1,93 1,92 1,92	1,922	0,9	0,487
2,55 2,57 2,55 2,55 2,54	2,554	1,6	0,490
Aritmetický průměr: $a = 0,4915 \text{ ms}^{-2}$			
Hodnota g podle (3) je $g_2 = 9,83 \text{ ms}^{-2}$			

rovnoběžná a působí pohyb. Protože pravoúhlé trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle NMP$ mají shodné úhly při vrcholech A a N (úhly s rameny navzájem kolmými, stejného smyslu), jsou podobné podle věty *uu*. Proto platí $\frac{MP}{MN} = \frac{BC}{AB}$, čili $\frac{F}{G} = \frac{h}{d}$. Dosadíme-li $F = ma$ a $G = mg$, určíme zrychlení a pohybu po nakloněné rovině:

$$a = \frac{h}{d} \cdot g. \quad (1)$$

Protože se na pravé straně této rovnice vyskytují jen konstanty, má a stálou hodnotu a pohyb kuličky je rovnoměrně zrychlený.

Zrychlení a můžeme pokusem změřit. Necháme-li kuličku padat z libovolného bodu M , vykoná za dobu t_k dráhu $s_k = MA = \frac{1}{2} at_k^2$. Změříme-li s a t_k , lze z předcházející rovnice vypočítat:

$$a = \frac{2s_k}{t_k^2}. \quad (2)$$

Postup měření: K určení tíhového zrychlení uijeme nakloněné roviny dlouhé $d = 2$ m a výšku h volíme a) $h = 0,05$ m. Stopkami změříme doby pohybu kuličky po drahách $s_1 = 0,1$ m, $s_2 = 0,4$ m, $s_3 = 0,9$ m, $s_4 = 1,6$ m. Pro každou z těchto drah měříme dobu pohybu kuličky pětkrát; za dobu t_k , odpovídající dráze s_k , považujeme aritmetický průměr všech pěti měření. Pro každou dvojici hodnot s_k a t_k vypočítáme podle vztahu (1) příslušné zrychlení a_k . Naměřené a vypočítané hodnoty zapíšeme do tabulky a). Za zrychlení a považujeme aritmetický průměr hodnot a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

Z takto nalezené hodnoty pro a vypočítáme hodnotu g ze vztahu (1).

$$\text{Vyjde} \quad g_1 = \frac{da}{h}. \quad (3)$$

b) Opakujeme měření pro výšku $h = 0,1$ m. Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky b) a určíme g_2 opět z aritmetického průměru hodnot a .

c) Naměřená hodnota g je aritmetický průměr obou výsledků: $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) = 9,765 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Měřením vyšla přibližná hodnota $g \doteq 9,765 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

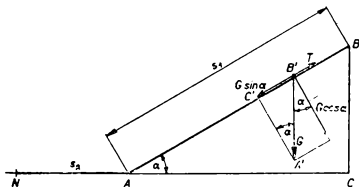
9. Úlohy druhého kola soutěže a jejich řešení

KATEGORIE A

1. Sane sa spúšťajú zo svahu v sklone $\alpha = 30^\circ$ za 4 s. Akú dlhú dráhu s_2 ujdú sane ešte na rovine a ako dlho sa budú pohybovať na rovine do úplného zastavenia, ak súčiniteľ trenia pritom je $k = 0,1$? Vypočítajte najprv obecné a potom číselne.

Označenie veličn a dané hodnoty:

Uhol naklonenej roviny $\alpha = 30^\circ$, sane sa pohybujú po naklonenejrovine po dobu $t_1 = 4\text{s}$; dráha saní na vodorovnej



Obr. 32

rovine je s_2 , doba pohybu saní po vodorovnej rovine až do zastavenia je t_2 , ťarchové zrýchlenie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, hmota saní je m , váha saní je $G = mg$, súčiniteľ trenia $k = 0,1$; zrýchlenie na naklonenej rovine je a_1 , na vodorovnej rovine a_2 , rýchlosť saní pri prechode na vodorovnú rovinu je v_1 . (Obr. 32.)

Riešenie: Na sane nachádzajúce sa na naklonenej rovine pôsobí zvisle dolu príťažlivosť zemská silou $G = mg$, ktorá sa kineticky prejavuje voľným pádom. Voľnému pádu saní bráni naklonená rovina. Váha saní sa rozkladá na dve zložky. Jedna zložka, F_1 , spôsobuje pohyb po naklonenej rovine, je s ňou teda rovnobežná a má veľkosť

$$F_1 = G \sin \alpha = mg \sin \alpha . \quad (1)$$

Proti zložke F_1 pôsobí v opačnom zmysle pozdĺž naklonenej roviny sila trenia T_1 . Príčinou trenia je tlaková sila kolmá k dĺžke naklonenej roviny. Je to druhá zložka $F_2 = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$ váhy saní. Trenie je tejto zložke podľa zákona trenia priamo úmerné, takže

$$T_1 = k mg \cos \alpha . \quad (2)$$

Podľa princípu o nezávislosti vektorov spôsobuje pohyb po naklonenej rovine sila $F = ma_1$, ktorá je podľa vzťahov (1) a (2) $F = F_1 - T_1 = mg \sin \alpha - k mg \cos \alpha$. Získavame teda pre výpočet a_1 rovnicu $ma_1 = mg \sin \alpha - k mg \cos \alpha$, z ktorej určíme $a_1 = g \sin \alpha - k g \cos \alpha$. Pretože všetky hodnoty na pravej strane tejto rovnice sú konštanty, má a_1 hodnotu stálu a pohyb saní po naklonenej rovine je rovnomerne zrýchlený. Pretože pohyb saní po naklonenej rovine trvá dobu t_1 , je rýchlosť saní pri prechode na vodorovnú rovinu podľa zákona rýchlosti rovnomerne zrýchleného pohybu

$$v_1 = a_1 t_1 = g (\sin \alpha - k \cos \alpha) t_1 . \quad (3)$$

Pri pohybe po vodorovnej rovine pôsobí vo smere pohybu sila trenia T_2 , ktorého príčinou je v tomto prípade váha saní. Sila trenia T_2 má konštantnú veľkosť $k G = k mg$.

Sila pôsobiaca pri pohybe na vodorovnú rovinu je $F_2 = -T_2$ pretože má opačný zmysel než pohyb. Preto je $F_2 = -T_2 = -kmg$ a zrýchlenie pohybu saní po vodorovnej rovine je $a_2 = -kg$, teda záporné s konštantnou hodnotou.

Pohyb saní po vodorovnej rovine je rovnomerne spomalený. Z obecného vzorca pro rýchlosť rovnomerne spomaleného pohybu $v = v_1 + a_1 t$ určíme dobu pohybu saní po vodorovnej rovine. V okamžiku, keď sa sane zastavia, je rýchlosť tohoto pohybu nulová, preto platí

$$v_1 + a_2 t_2 = 0;$$

teda

$$t_2 = -\frac{v_1}{a_2} = \frac{\sin \alpha - k \cos \alpha}{k} t_1. \quad (4)$$

Dráha saní na vodorovnej rovine je

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_1 t_2,$$

teda

$$s_2 = -\frac{1}{2} k \frac{(\sin \alpha - k \cos \alpha)^2}{k^2} g t_1^2 + \frac{g (\sin \alpha - k \cos \alpha)^2 t_1^2}{k},$$

$$s_2 = \frac{g}{2k} (\sin \alpha - k \cos \alpha)^2 t_1^2. \quad (5)$$

Numericky:

$$\begin{aligned} \sin \alpha - k \cos \alpha &= \sin 30^\circ - 0,1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} - \frac{0,1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 0,173 \, 2). \end{aligned}$$

$$\sin \alpha - k \cos \alpha = 0,413 \, 4;$$

$$t_2 = \frac{0,413 \, 4}{0,1} \cdot 4 \, \text{s} \doteq 16,5 \, \text{s};$$

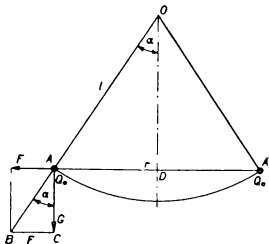
$$s_2 = \frac{1}{2} \frac{9,81}{0,1} \cdot 0,413 \, 4^2 \cdot 16 \, \text{ms}^{-2} \cdot \text{s}^2 \doteq 134,5 \, \text{m}.$$

Sane sa budú pohybovať po vodorovnej rovine až zastavenia po dobu t_2 danú obecné vzťahom (4), numeric $t_2 \doteq 16,5$ s, a ujdú po nej dráhu s_2 určenú obecné vzťahom (5), číselne $s_2 \doteq 134,5$ m.

2. Dvě stejné vodivé kuličky jsou zavěšeny na nevodivých velmi dlouhých vláknech délky l ; vlákna jsou zavěšena v jednom bodě. Mají-li kuličky stejný elektrický náboj Q je vzdálenost jejich středů r_0 .

a) Jaká bude vzdálenost r středů kuliček, bude-li každé náboj Q ;

b) vypočítejte r , je-li $Q = 8Q_0$. (Předpoklad $r_0 \ll l$; $r \ll$ Obr. 33.



Obr. 33

Označení veličin: mají-li kuličky náboj Q_0 , působí na síla F_0 , mají-li náboj Q , působí síla F ; poloviční úhly které svírají vlákna, jsou α_0 při vzdálenosti kuliček r_0 , α i vzdálenosti r ; permitivita prostředí je ϵ ; hmota kuličky m , tíhové zrychlení je g ; váha kuličky je $G = mg$.

Řešení: Obrázek naznačuje situaci, má-li každá kulička náboj Q . Úhly při vrcholech pravoúhlých trojúhelníků $\triangle OAD$ a $\triangle ABC$ jsou souhlasné, a proto jsou shodí

Protože

$$r \ll l, \text{ je } \operatorname{tg} \alpha \doteq \sin \alpha. \quad (1)$$

a) Na kuličku v místě A působí dvě síly, váha kuličky $G = mg$ směrem svislým dolů, a ve vodorovném směru síla F , kterou působí složené elektrické pole obou kuliček. Podle Coulombova zákona je

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2)$$

Z pravoúhlého $\triangle ODA$ určíme $\sin \alpha = \frac{r}{2l}$ a z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle ACB$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} = \frac{F}{mg}.$$

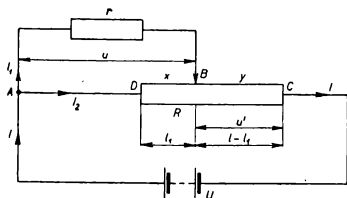
Podle vztahu (1) je $\frac{r}{2l} = \frac{F}{mg}$. Jsou-li kuličky nabitý nábojem Q_0 , platí obdobná rovnice $\frac{r_0}{2l} = \frac{F_0}{mg}$. Dělením obou rovnic dojdeme ke vztahu $\frac{r}{r_0} = \frac{F}{F_0}$ a po dosazení podle rovnice (2)

$$\frac{r}{r_0} = \frac{Q^2 r_0^2}{r^2 Q_0^2}; \text{ odtud } r = r_0 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{Q_0^2}}. \quad (3)$$

b) Jestliže $Q = 8Q_0$, pak platí podle (3) $r' = r_0 \sqrt[3]{\frac{64Q_0^2}{Q_0^2}} = 4r_0$.

Mají-li dvě stejné vodivé kuličky, zavěšené v jednom bodě na velmi dlouhých nevodivých vláknech a nabité nábojem Q_0 , vzdálenost r_0 , pak mají vzdálenost $r = r_0 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{Q_0^2}}$, jsou-li nabitý nábojem Q . Jestliže $Q = 8Q_0$, mají vzdálenost $r' = 4r_0$.

3. Posuvný reostat o odporu R je zapojen jako potenciometr na konstantní napětí U . Paralelně k části reostatu o odporu x je zapojen spotřebič odporu r . (Obr. 34.)



Obr. 34

a) Stanovte hodnotu nerozvětveného proudu I .

b) Stanovte hodnotu napětí u na odporu r .

c) Jak velký je odpor x , je-li $u = \frac{U}{2}$, a jaký je v tomto

případě proud I ?

d) Je možno za odpor r použít spotřebič (110 V, 242 W), je-li posuvný reostat R (150 Ω , 2,5 A) zapojen na konstantní napětí $U = 220$ V?

Označení veličin: Odpor smyčky mezi uzly A, B je R' ; odpor části BC reostatu je y ; úbytek napětí v části AB je u , a to ve větvi ArB i AxB ; v části obvodu BC je úbytek napětí u' ; odporem r protéká proud I_1 , odporem x proud I_2 .

Řešení: proud I , procházející obvodem připojeným na konstantní napětí U , se v bodech A, B větví. Podle Ohmova zákona protéká větví ArB proud $I_1 = \frac{u}{r}$, větví AxB proud

$I_2 = \frac{u}{x}$ a smyčkou AB proud

$$I = \frac{u}{R'}. \quad (1)$$

Podle Kirchhoffova zákona je

$$I = I_1 + I_2, \quad (2)$$

tedy

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{x} = \frac{r+x}{rx}, \text{ takže } R' = \frac{rx}{r+x}. \quad (3)$$

Předpokládáme-li, že odporový drát reostatu je z homogenního materiálu, a má na všech místech stejný průměr, pak je odpor kterékoli části reostatu podle obecného zákona

$R = \rho \cdot \frac{l}{s}$ přímo úměrný délce odporového drátu na ni

navinutého. Předpokládáme-li dále, že odporový drát reostatu je navinut na válci z izolačního materiálu stejně hustě, pak na délku reostatu $l = DC$ připadá odpor R , na jednot-

kou délku odpor $\frac{R}{l}$, na délku $l_1 = DB$ odpor $x = \frac{R}{l} \cdot l_1$

a na délku $BC = l - l_1$ odpor

$$y = \frac{R}{l} \cdot (l - l_1) = R - x. \quad (4)$$

a) Smyčka $ArBxA$ o odporu R' a část BC potenciometru o odporu y jsou spojeny sériově. Proto jimi protéká stejný proud I , takže podle Ohmova zákona platí $u = R' \cdot I$, $u' = y \cdot I$. Jestliže zanedbáme odpor přívodních drátů, pak úbytek napětí na dvou nebo více sériově zapojených spotřebičích je roven součtu úbytků napětí na jednotlivých spotřebičích. Proto je v našem případě

$$U = u + u' = I(R' + y) \quad \text{a} \quad I = \frac{U}{R' + y}.$$

Do tohoto výrazu dosadíme za R' a y ze vztahů (3) a (4)

a pravou stranu upravíme:

$$I = \frac{U}{\frac{rx}{r+x} + R - x} = \frac{r+x}{rx + Rr - rx + Rx - x^2} U =$$

$$= \frac{r+x}{R(r+x) - x^2} \cdot U.$$

Hodnota nerozvětveného proudu je

$$I = \frac{r+x}{R(r+x) - x^2} \cdot U. \quad (5)$$

b) Napětí u na odporu r má podle Ohmova zákona hodnotu $u = R'I$. Podle vztahů (3) a (5) je

$$u = \frac{rx}{r+x} \cdot \frac{r+x}{R(r+x) - x^2} \cdot U = \frac{rx}{R(r+x) - x^2} U. \quad (6)$$

c) Z podmínky $u = \frac{U}{2}$ plyne po použití vztahu (6) pro neznámý odpor x rovnice

$$\frac{rx}{R(r+x) - x^2} = \frac{1}{2}.$$

Z této rovnice vypočítáme x :

$$2rx = Rr + Rx - x^2$$

$$x^2 + (2r - R)x - Rr = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(R - 2r) \pm \sqrt{4r^2 + R^2 - 4Rr + 4Rr}}{2}$$

$$x_1 = \frac{(R - 2r) + \sqrt{4r^2 + R^2}}{2};$$

$$x_2 = \frac{(R - 2r) - \sqrt{4r^2 + R^2}}{2}.$$

Fyzikální význam odporu mohou mít jen takové hodnoty x_1 a x_2 , které jsou vyjádřeny reálnými a nezápornými čísly. Proto musíme provést diskusi obou kořenů.

Reálné hodnoty mají oba kořeny pro všechna r a R , neboť diskriminant rovnice je kladný.

Kořen x_2 je nutně záporný, jestliže $R - 2r \leq 0$. Nezápornou hodnotu by měl jen tehdy, kdyby $R - 2r \geq \sqrt{4r^2 + R^2}$. Protože obě strany nerovnosti jsou kladné, dostaneme po umocnění ekvivalentní nerovnost $R^2 + 4r^2 - 4rR \geq 4r^2 + R^2$, což je nerovnost nesprávná, neboť $r > 0$ a $R > 0$. Proto není možné, aby $R - 2r \geq \sqrt{4r^2 + R^2}$. Kořen x_2 nemá fyzikální význam odporu pro žádné hodnoty R a r .

Kořen x_1 má kladnou hodnotu vždy, jestliže $R - 2r \geq 0$; je-li $R - 2r < 0$, pak tehdy, když $|R - 2r| < \sqrt{R^2 + 4r^2}$. Poněvadž však $|R - 2r| = 2r - R$, přejde předcházející nerovnost v novou $2r - R < \sqrt{R^2 + 4r^2}$. Protože obě strany nerovnosti jsou kladná čísla, dojdeme po umocnění k nerovnosti $4r^2 + R^2 - 4rR < R^2 + 4r^2$, což je nerovnost správná pro všechna $R > 0$ a $r > 0$. Proto je správná i nerovnost $|R - 2r| < \sqrt{R^2 + 4r^2}$. Kořen x_1 má fyzikální význam odporu pro všechna R a r , jestliže je vyhověno podmínce $u = \frac{U}{2}$.

V případě c) má odpor x hodnotu

$$x_1 = \frac{R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{2}. \quad (7)$$

Velikost proudu I určíme v tomto případě nejnázve ze vztahu (1), ve kterém dosadíme za R' hodnotu ze vztahu (3), takže

$$I = \frac{u}{rx} = \frac{r+x}{rx} u.$$

Dosadíme-li za $u = \frac{U}{2}$ a za x hodnotu $r + x$ z rovnice (7), dostaneme

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{U}{2} \cdot \frac{r + \frac{R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{2}}{r \frac{R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{2}} = \\
 &= \frac{U}{2} \cdot \frac{R + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{r(R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2})} = \\
 &= \frac{U}{2} \cdot \frac{(R + \sqrt{R^2 + 4r^2}) \cdot (R - \sqrt{R^2 + 4r^2} - 2r)}{r [(R - 2r)^2 - (R^2 + 4r^2)]} = \\
 &= \frac{U}{2} \cdot \frac{[R^2 - (R^2 + 4r^2)] - 2r(R + \sqrt{R^2 + 4r^2})}{r(-4Rr)} = \\
 &= \frac{U}{2} \cdot \frac{-4r^2 - 2rR - 2r \cdot \sqrt{R^2 + 4r^2}}{-4Rr^2} = \\
 &= \frac{U}{2} \cdot \frac{2r(2r + R + \sqrt{R^2 + 4r^2})}{4Rr^2} = \\
 &= \frac{R + 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{4Rr} \cdot U
 \end{aligned}$$

Je-li $u = \frac{U}{2}$, má proud velikost

$$I = \frac{R + 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{4Rr} U. \quad (8)$$

d) Má-li spotřebič při napětí $u = 110$ V příkon $P = 242$ W, je jeho odpor

$$r = \frac{u}{I_1} = \frac{u^2}{I_1 u} = \frac{u^2}{P} = \frac{12100 \text{ V}^2}{242 \text{ W}} = 50 \frac{\text{V}^2}{\text{VA}} = 50 \Omega.$$

Protože je splněna podmínka $u = \frac{U}{2}$ odst. c) této úlohy, je podle vztahu (7)

$$x = \frac{150 - 100 + \sqrt{22\,500 + 10\,000}}{2} \, \Omega =$$

$$= \frac{50 + \sqrt{32\,500}}{2} \, \Omega = 115,12 \, \Omega,$$

a podle (8) je

$$I = \frac{150 + 100 + \sqrt{32\,500}}{4 \cdot 150 \cdot 50} \cdot 220 \frac{\text{V}}{\Omega} = \frac{250 + 180,24}{1\,500} \cdot 11 \text{ A},$$

$$I = 3,15 \text{ A}.$$

Poněvadž reostatem smí procházet proud nejvýše 2,5 A a ve skutečnosti při daných podmínkách by obvodem protékal proud 3,15 A > 2,5 A, není toto zapojení možné. Části BC reostatu by procházel proud příliš veliký a poškodil by reostat.

4. Určete indukčnost L dané cívky. Cívka klade stejnosměrnému proudu ohmický odpor R , kdežto střídavému proudu klade odpor $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, zvaný impedance (ω je úhlová frekvence). Indukčnost cívky stanovte takto:

1. Nakreslete schéma zapojení. Obvod ponechte otevřený, pokud dozírající učitel zapojení neschválí.
2. Určete přímou metodou ohmický odpor R cívky. Měření proveďte desetkrát. Za velikost ohmického odporu pokládejte aritmetický průměr všech měření.
3. Obdobně určete impedanci téže cívky.
4. Ze vztahu $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ určete indukčnost L dané cívky.

Potřeby: cívka z rozkladného transformátoru (1 200 závitů) bez jádra, voltmetr a ampérmetr na stejnosměrný proud, voltmetr a ampérmetr na střídavý proud, zdroj stejnosměrného napětí, zdroj střídavého napětí, spínač, regulační reostat.

Výklad: stejnosměrnému proudu klade cívka ohmický odpor R , který je závislý jen na materiálu drátu a na jeho fyzikálním stavu (hlavně na teplotě), na délce a průřezu drátu. Změříme-li napětí U na cívce a velikost I proudu procházejícího cívkou, vypočítáme odpor podle Ohmova zákona

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Zavedeme-li do cívky střídavý proud, indukuje se v závitech cívky střídavý proud opačného směru a zmenšuje zaváděný proud; působí tedy jako odpor. Tomuto zdánlivému odporu říkáme odpor induktivní. Střídavému proudu klade tedy cívka vedle ohmického odporu ještě odpor induktivní, který se určí ze vztahu $Z_1 = L\omega$, kde L značí indukčnost cívky a ω úhlovou frekvenci. Úhlová frekvence má hodnotu $\omega = 2\pi f$, kde f značí frekvenci střídavého proudu. Síťová frekvence je $f = 50$ Hz.

Celkový odpor cívky se nazývá impedance Z a platí pro ni vztah

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}. \quad (2)$$

Změříme-li napětí U na cívce a velikost I proudu cívkou procházejícího, dá se impedance vypočítat obdobně jako R u stejnosměrného proudu ze vzorce

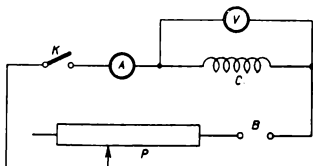
$$Z = \frac{U}{I}, \quad (3)$$

kde U a I jsou efektivní hodnoty střídavého proudu.

Určíme-li tedy podle vztahů (1) a (3) ohmický odpor a impedanci, můžeme z rovnice (2) určit indukčnost dané cívky

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}. \quad (4)$$

Postup měření: 1. Sestavíme obvod podle obr. 35. *B* značí zdroj stejnosměrného napětí, *P* regulační reostat, *K* spínač, *A* ampérmetr na stejnosměrný proud, *V* voltmetr na stejnosměrný proud, *C* cívku. Zdroj zapojíme do obvodu teprve tehdy, až bude zapojení schváleno dozírajícím učitelem.



Obr. 35

2. Reostatem *P* měníme velikost proudu a pro 10 různých velikostí proudů I_k změříme příslušná napětí U_k na cívce. Aby se velkou změnou proudu neměnila teplota, a tím odpor v závitech cívky, měníme proud jen velmi málo. Hodnoty zaznamenáme do tabulek a z naměřených hodnot vypočítáme podle vztahu (1) velikost ohmického odporu.

I_k (A)	0,552	0,545	0,541	0,532	0,530	0,511	0,510	0,499	0,489	0,478
U_k (V)	9,14	9,04	9,00	8,9	8,88	8,5	8,44	8,3	8,2	8,0
R_k (Ω)	16,558	16,587	16,636	16,729	16,735	16,634	16,550	16,650	16,768	16,736

3. Z vypočtených hodnot R_k stanovíme R jako aritmetický průměr: $R \doteq 16,66 \Omega$.

4. V sestaveném obvodu vyměníme zdroj napětí stejnosměrného proudu za zdroj proudu střídavého a ampérmetr a voltmetr na proud stejnosměrný nahradíme ampérmetrem

a voltmetrem na proud střídavý a obdobně jako v případech 1., 2., 3. stanovíme Z .

5. Do vzorce (4) dosadíme za známé hodnoty π , f a za R a Z hodnoty získané z měření.

I_k (A)	0,540	0,542	0,538	0,544	0,539	0,501	0,495	0,490	0,508	0,518
U_k (V)	11,9	11,92	11,86	11,96	11,88	11,0	10,9	10,8	11,2	11,4
Z_k (Ω)	22,037	21,992	22,045	21,985	22,041	21,956	22,020	22,041	22,047	22,008

$$Z \doteq 22,02 \Omega$$

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} = \frac{\sqrt{(Z + R) \cdot (Z - R)}}{2\pi f} = \frac{\sqrt{38,68 \cdot 5,36}}{100} \Omega s.$$

Odtud

$$L = 0,04583 \frac{Vs}{A},$$

$$L = 45,83 \text{ mH}.$$

KATEGORIE B

1. Ocelová guľa padá z výšky $h = 20$ m s počiatočnou rýchlosťou $v_0 = 4 \text{ ms}^{-1}$ a po dopade sa odrazí do výšky $h_0 = 4$ m. O koľko stupňov pri tom stúpne jej teplota, keď sa 60 % tepla vzniknutého pri náraze spotrebuje na jej ohriatie? Vypočítajte najprv obecné a potom číselne.

Označenie veličín a dané hodnoty:

Hmota guľôčky je m , ťarchové zrýchlenie je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; potenciálna energia guľôčky vo výške h je W_p , kinetická energia guľôčky pri rýchlosti v_0 je W_k , deformačná práca guľôčky pri dopade je A , teplo ekvivalentné práci A je Q , tepelný ekvivalent práce je $K = 2,39 \cdot 10^{-4} \text{ kcal/J}$, teplo

potrebné na ohriatie guľôčky je Q_1 . Teplota guľôčky sa po dopade zvýši o Δt °C; merné teplo ocele je $c = 0,1$ kcal/kg deg.

Riešenie: Guľôčka má vo výške h potenciálnu energiu $W_p = mgh$ a kinetickú energiu $W_k = \frac{1}{2}mv_0^2$, takže pohyb začína s celkovou energiou $W = W_p + W_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$. Po odraze vystúpi do výšky h_0 a tým nadobudne potenciálnu energiu mgh_0 . Rozdiel $W - mgh_0$ sa mení podľa zákona o premene a zachovaní energie na deformačnú prácu A , ak zanedbáme straty energie pri prekonávaní odporu prostredia. Platí teda rovnica:

$$A = W - mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h - h_0). \quad (1)$$

Táto práca sa mení na ekvivalentnú tepelnú energiu $Q = KA$.

Z tohoto množstva tepelnej energie pripadne na ohriatie guľe len $p = 60$ percent, takže guľa prijme teplo $Q_1 = \frac{p}{100} KA = qKA$, kde $q = \frac{p}{100}$. Toto teplo spotrebuje guľa na ohriatie o Δt °C. Teplo, ktoré spotrebuje teleso hmoty m , materiál ktorého má merné teplo c , k ohriatiu o Δt °C, má hodnotu $Q_2 = cm\Delta t$.

Z rovnosti $Q_2 = Q_1$ určíme $\Delta t = \frac{qKA}{mc}$. Ak dosadíme za A hodnotu zo vzťahu (1), potom platí

$$\Delta t = qK \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h - h_0)}{mc}, \quad (2)$$

$$\Delta t = qK \frac{v_0^2 + 2g(h - h_0)}{2c}.$$

Teplota guľôčky sa pri dopade zvýši o hodnotu Δt , ktorá je obecné vyjadrená vzťahom (2), číselne $\Delta t = 0,237^\circ\text{C}$.

2. Matematické kyvadlo o hmoty $m = 2\text{ g}$ a dĺžke $l = 20\text{ cm}$ je vychýlené do výšky $h = 18\text{ cm}$. Po vypustení z ruky niť kyvadla narazí v bode A , ktorý je vo výške $h_1 = 6\text{ cm}$, na tenkú tyč kolmú na rovinu, v ktorej sa kyvadlo pohybuje. Určite rýchlosť kyvadla v bode M_1 vo výške $z_1 = 10\text{ cm}$, silu F_1 , ktorá napína niť v bode M_1 , a silu F_2 , s akou je niť kyvadla napnutá v bode M_2 vo výške $z_2 = 12\text{ cm}$. Výpočet preveďte najprv obecné. (Obr. 36a.)

Označenie veličín a dané hodnoty: Polomer kruhového oblúku $M'M_1M_2$ je $R = h_1$; ťarchové zrýchlenie $g = 9,81\text{ ms}^{-2}$; rýchlosť guľôčky v bode M_1 je v_1 ; M_1B (obr. 36b) zobrazuje vektor váhy G guľôčky.

Riešenie: Guľôčka matematického kyvadla získa vychýlením z rovnovážnej polohy OM' do polohy OM potenciálnu energiu $W_p = mgh$ vzhľadom k vodorovnej rovine ϱ . Po uvoľnení by sa pohybovala po kruhovom oblúku o strede O a polomere $OM = OM' = l$. Keby nebola v mieste A tyč a ak zanedbáme odpor prostredia, vystúpila by podľa zákona o premene a zachovaní energie po tomto oblúku až do bodu M_0 , súmerne združeného s bodom M podľa priamky OM' , teda do výšky h nad rovinou ϱ . Tyč v mieste A zmení dráhu guľôčky po kruhovom oblúku, $M'M_0$ na dráhu po kruhovom oblúku, ktorého stredom je bod A a polomer $R = AM' = h_1$. Na tejto dráhe môže guľôčka dosiahnuť takých výšok nad rovinou ϱ , v ktorých je jej potenciálna energia menšia alebo rovnajúca sa W_p . Najvyšší bod M_2 tejto dráhy má výšku $2h_1$ nad rovinou ϱ . Má teda potenciálna energia guľôčky kyvadla v bode M_2 hodnotu $W' = 2mgh_1 < mgh$, lebo vzhľadom k daným číselným hodnotám je $2h_1 < h$. Kým energia guľôčky neklesne následkom prekonávania odporu prostredia na hodnotu menšiu než $2mgh_1$, bude sa guľôčka pohybovať po náraze nite na tyč v bode A po kružnici $k(A; h_1)$.

V polohe M_1 bude mať guľôčka potenciálnu energiu mgz_1 a kinetickú energiu $\frac{1}{2}mv_1^2$. Podľa zákona o zachovaní energie sa musí súčet týchto energií rovnať počiatočnej energii guľôčky. Pre výpočet rýchlosti v_1 guľôčky v bode M_1 získame rovnicu $\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = mgh$, z ktorej určíme

$$v_1 = \sqrt{2g(h - z_1)}. \quad (1)$$

Numericky:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,08} \text{ m/s} = 1,252 \text{ m/s}.$$

Dostredivou silou, ktorá spôsobuje v bode M_1 kruhový pohyb guľôčky kyvadla, je výslednica dvoch súhlasných stejnosemerných síl, a to sily napínajúcej niť vo smere M_1A a zložky G_1 váhy guľôčky kyvadla. V obrázku 36b sú uhly pri vrcholoch M_1 a A v pravouhlých trojuholníkoch ΔM_1CB a ΔANM_1 zhodné striedavé uhly. Oba trojuholníky sú teda podobné, a preto platí

$$\frac{G_1}{G} = \frac{AN}{AM_1} = \frac{z_1 - R}{R},$$

teda

$$G_1 = \frac{z_1 - R}{R} mg.$$

Dostredivá sila, spôsobujúca v bode M_1 pohyb guľôčky kyvadla po kruhovej dráhe, má hodnotu $\frac{mv_1^2}{R}$ a je rovná súčtu $F_1 + G_1$, takže pre výpočet veľkosti sily napínajúcej niť získame rovnicu

$$F_1 + mg \frac{z_1 - R}{R} = \frac{mv_1^2}{R}.$$

Po dosadení za v_1 a po úpravách dostaneme:

$$F_1 = \frac{m}{R} (2gh - 2gz_1 - gz_1 + gR), F_1 = \frac{mg}{R} (R + 2h - 3z_1). \quad (2)$$

Numericky:

$$F_1 = \frac{0,002 \cdot 9,81}{0,06} (0,06 + 0,36 - 0,3) \frac{\text{kg} \cdot \text{ms}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{m}},$$

$$F_1 = \frac{19,62 \cdot 0,12}{60} \text{ kgms}^{-2} = 3,924 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Silu napínajúcu niť v bode M_2 vypočítame podľa upraveného vzťahu (2):

$$F_2 = \frac{mg}{R} (R + 2h - 3z_2), \quad (3)$$

Numericky:

$$F_2 = \frac{19,62 \cdot 0,06}{60} \text{ N},$$

$$F_2 = 1,962 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

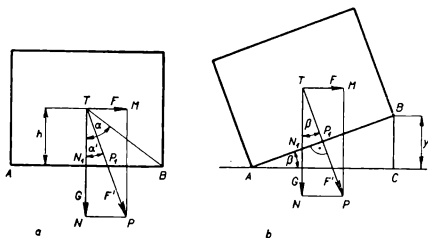
V bode M_1 sa guľôčka kyvadla pohybuje rýchlosťou určenou vzťahom (1); numericky je to 1,252 m/s. Niť je napínaná v bode nachádzajúcom sa vo výške z nad rovnovážnou polohou guľôčky, silou $F = \frac{mg}{R} \cdot (R + 2h - 3z)$.

V mieste M_1 má táto sila hodnotu $3,924 \cdot 10^{-2} \text{ N}$, v mieste M_2 veľkosť $1,962 \cdot 10^{-2} \text{ N}$.

3. Voz, ktorého hmota je $m = 10 \text{ q}$, ide po ceste so záťažkou o polomere $r = 120 \text{ m}$. Kolesá voza sú vzdialené $l = 1 \text{ m}$ a ťažisko T voza leží v prostriedku vo výške $h = 1,5 \text{ m}$ nad cestou. (Obr. 37a, b.)

a) Akou maximálnou rýchlosťou sa môže voz pohybovať, aby sa ešte neprevrátil?

b) O koľko by bolo treba vyvýšiť vonkajšiu koľaj cesty, aby pri tejto maximálnej rýchlosti bol tlak v oboch koľajách rovnaký. Výpočty preveďte najprv obecné.



Obr. 37

Označenie veličín a dané hodnoty:

Vzdialenosť kol $l = AB = 1$ m; rýchlosť voza je v ; ťarchové zrýchlenie $g = 10 \text{ ms}^{-2}$; váha voza je G ; dostredivá sila je F ; dotykové body kol s cestou sú A, B ; odchýlka vektorovej priamky sily F' od zvislého smeru je α' ; odklon roviny cesty od vodorovnej roviny je β ; zvýšenie vonkajšej koľajnice oproti vnútornej je $OB = y$.

Riešenie: a) Pri pohybe voza po ceste pôsobí v ťažisku voza výslednica $TP = F'$ dvoch síl, váhy voza $G = mg$ a odstredivej sily $F = m \frac{v^2}{r}$. Pokiaľ priesečník P_1 vektorovej priamky sily F' s rovinou cesty leží v páse cesty medzi kolami voza, má voz rovnovážnu polohu stálu. Ak sa zväčšuje rýchlosť voza, rastie odstredivá sila a tento bod P_1 sa posúva k bodu B . V prípade, keď bod P_1 s bodom B splynie, zmení sa rovnovážna poloha stála na vratkú. Rýchlosť v_0 , pri ktorej k tomuto

stavu dôjde, je maximálna dovolená rýchlosť voza. Pri väčšej rýchlosti by sa bod P_1 posunul až za bod B , prestala by rovnováha a voz by sa prevrátil. Pri rýchlosti v_0 bude vektorová priamka sily F' odchýlená od zvislého smeru o uhol α . Jeho veľkosť je určená vzťahom $\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_1 B}{N_1 T} = \frac{l}{2h}$,

ale tiež zo vzťahu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} = \frac{mv_0^2}{mrg}$. Maximálnu dovolenú rýchlosť voza vypočítame teda z rovnice

$$\frac{v_0^2}{rg} = \frac{l}{2h},$$

ktorej koreň je

$$v_0 = \sqrt{\frac{grl}{2h}}. \quad (1)$$

Numericky:

$$v_0 = \sqrt{\frac{10 \cdot 120 \cdot 1}{3}} \sqrt{\frac{\text{ms}^{-2} \cdot \text{m} \cdot \text{m}}{\text{m}}} = 20 \text{ m/s}.$$

Voz sa môže pohybovať maximálnou rýchlosťou, určenou obecnou vzťahom (1), číselne 20 m/s.

b) Podľa zákona o rozklade sily na dve rovnobežné zložky musia mať obe zložky rovnakú vzdialenosť od vektorovej priamky výslednice, ak má byť tlak na obidve koľaje rovnaký. Bod P_1 sa teda musí nachádzať v strede úsečky AB (obr. 37b). Vektorová priamka sily F' musí byť kolmá k úsečke AB . Potom sú uhly pri vrcholoch A a T pravouhlých trojuholníkov $\triangle ABC$ a $\triangle TNP$ zhodné (uhly rovnakého zmyslu s ramenami navzájom kolmými). Ak označíme veľkosť týchto uhlov β , platí vzťah $BC = AB \sin \beta = l \sin \beta$.

Z $\triangle TNP$ plynie

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F}{G} = \frac{mv_0^2}{mrg} = \frac{v_0^2}{rg}.$$

Z hodnoty $\operatorname{tg} \beta$ určíme $\sin \beta$:

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}$$

a po ďalších úpravách

$$\sin^2 \beta = \operatorname{tg}^2 \beta (1 - \sin^2 \beta),$$

teda

$$\sin^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad |\sin \beta| = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

Pretože β je uhol ostrý, je

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}.$$

Po dosadení hodnoty $\frac{v_0^2}{rg}$ za $\operatorname{tg} \beta$ dostaneme:

$$\sin \beta = \frac{v_0^2}{rg \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{rg}\right)^2}} = \frac{v_0^2}{\sqrt{r^2 g^2 + v_0^4}}.$$

Ak dosadíme zo vzťahu (1), vyjde

$$\begin{aligned} BC &= \frac{grl}{\sqrt{4h^2 r^2 g^2 + g^2 r^2 l^2}} l = \frac{l^2}{\sqrt{4h^2 + l^2}}, \\ BC &= l^2 \frac{\sqrt{4h^2 + l^2}}{4h^2 + l^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

BC je hľadaná výška, o ktorú je treba zvýšiť vonkajšiu koľaj oproti vnútornej.

Numericky:

$$BC = \frac{1 \sqrt{9 + 1}}{10} \text{ m}^3/\text{m}^2 = 0,317 \text{ m}.$$

Aby bol tlak na obidve koľajnice pri maximálnej rýchlosti

voza rovnaký, je treba zvýšiť vonkajšiu koľaj oproti vnútornej o výšku BC určenú vzťahom (2), číselne 0,32 m.

4. Určete skupenské teplo tání ledu s přihlédnutím k tepelné kapacitě kalorimetru.

Postup: a) Stanovte tepelnou kapacitu K kalorimetru měřením.

b) Určete skupenské teplo l tání ledu.

Při měření použijte znalostí ze studijního textu pro 1. kolo kategorie B. Jako kapaliny, v níž se bude led rozpouštět, použijte vodu. Původní teplotu ledu položte rovnu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Potřeby: kalorimetr, tající led, dva teploměry graduované po $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$, voda, vaříč, kádinky, váhy a závaží, sací papír.

Řešení: a) Tepelnou kapacitu kalorimetru určíme takto:

1. Zvážíme prázdný kalorimetr s míchačkou a s teploměrem. Jeho hmotu označíme M_1 .

2. Do kalorimetru nalijeme určité množství m_1 kapaliny, jejíž měrné teplo známe. Obvykle to bývá voda, jejíž měrné teplo $c_1 = 1\text{ kcal/kgdeg}$. Podle návodu užijeme vody. Hmota kalorimetru s vodou je M_2 , takže $m_1 = M_2 - M_1$. Po promíchání a ustálení teploty změříme teplotu vody a kalorimetru. Změřenou teplotu označíme t_1 .

3. Přilejeme do kalorimetru ještě další množství m_2 vody, zahřáté na teplotu $t_2 > t_1$. Hmota kalorimetru s vodou se zvětší na M_3 , takže

$$m_2 = M_3 - M_2.$$

4. Po promíchání a ustálení teploty odečteme na teploměru výslednou teplotu t kapaliny.

V kalorimetru se mísí teplejší voda s vodou studenější. Teplejší voda se ochlazuje a ztrácí teplo

$$Q_2 = c_1 m_2 (t_2 - t) = c_1 (M_3 - M_2) \cdot (t_2 - t). \quad (1)$$

Tímto teplem se ohřívá jednak studenější voda, která přejme teplo

$$Q_1 = c_1 (M_2 - M_1) \cdot (t - t_1), \quad (2)$$

jednak kalorimetr. Potřebuje-li kalorimetr na ohřátí o $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ teplo K (tepelná kapacita kalorimetru), potřebuje k ohřátí z teploty t_1 na teplotu t teplo

$$Q' = K(t - t_1). \quad (3)$$

Podle zákona o zachování tepelné energie platí kalorimetrická rovnice $Q_2 = Q_1 + Q'$, tedy

$$c_1(M_3 - M_2) \cdot (t_2 - t) = c_1(M_2 - M_1) \cdot (t - t_1) + K(t - t_1)$$

ze které vypočítáme K .

$$K = \frac{c_1(M_3 - M_2) \cdot (t_2 - t)}{t - t_1} - c_1(M_2 - M_1). \quad (4)$$

Měřením byly zjištěny tyto hodnoty: $M_1 = 0,314\ 2\text{ kg}$, $M_2 = 0,388\ 6\text{ kg}$, $M_3 = 0,464\ 0\text{ kg}$, $t_1 = 15,4\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t_2 = 30,0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $t = 20,6\text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$\text{Ze vztahu (4) vychází } K = \frac{1 \cdot 0,075\ 4 \cdot 9,4}{5,2} \text{ kcal/deg} - \\ - 0,074\ 4 \text{ kcal/deg, } K = 0,061\ 9 \text{ kcal/deg.}$$

b) Od tajícího ledu oddělíme část, asi 10 až 15 cm^3 ledu, dobře ji osušíme savým papírem a vhodíme do kalorimetru s vodou, která tam je ještě z měření a). Teplota této vody se ještě před vhozením ledu zmenšila z hodnoty $20,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ na $t' = 20,4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Led má teplotu $t_0 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$, neboť taje. Hmotu kalorimetru s jeho obsahem se zvětšila na M_4 , takže vhozený led má hmotu $m = M_4 - M_3$. Led v teplé vodě taje a voda chladne. Míchačkou promícháváme vodu tak dlouho, až se teplota ustálí na hodnotě τ . Při tomto ději ztratila voda teplo $Q_2' = c_1(M_3 - M_1) \cdot (t' - \tau)$ a kalorimetr ztratil teplo $Q = K(t' - \tau)$. Led, který měl při vhození do kalorimetru teplotu tání, roztál. Označíme-li skupenské teplo tání ledu l , pak led spotřeboval na přeměnu skupenství teplo $Q_3 = lm = l(M_4 - M_3)$, a voda vzniklá na ohřátí z teploty $t_0 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ na teplotu τ spotřebovala teplo $Q_1' = c_1(M_4 - M_3) \cdot (\tau - t_0)$. Protože mezi osušením ledu a jeho vhozením do kalorimetru uplynula tak krátká doba,

že během ní nemohl led přijmout žádné teplo z okolního vzduchu, platí kalorimetrická rovnice

$$Q_2' + Q = Q_3 + Q_1'.$$

Tedy

$$c_1 (M_3 - M_1) \cdot (t' - \tau) + K(t' - \tau) = (M_4 - M_3) \cdot l + c_1(M_4 - M_3) \cdot (\tau - t_0);$$

z této rovnice vychází

$$l = \frac{(t' - \tau)[c_1(M_3 - M_1) + K]}{M_4 - M_3} - c_1(\tau - t_0). \quad (5)$$

Měřením byly zjištěny tyto hodnoty:

$$M_4 = 0,4775 \text{ kg a } \tau = 14,4^\circ \text{C}.$$

Po dosazení do vztahu (5) obdržíme

$$l = \frac{6 \cdot (0,1498 + 0,0619) \text{ deg} \cdot \text{kcal} \cdot \text{deg}^{-1}}{0,0135 \text{ kg}} -$$

$$-14,4 \frac{\text{kcal} \cdot \text{deg}}{\text{kg} \cdot \text{deg}} = \left(\frac{6 \cdot 0,2117}{0,0135} - 14,4 \right) \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$$

$$l \doteq 79,7 \text{ kcal/kg}.$$

Měřením byla zjištěna hodnota skupenského tepla tání ledu $l \doteq 79,7 \text{ kcal/kg}$.

KATEGORIE C

1. Tři stejná závaží Z_1, Z_2, Z_3 , každé o hmotě $m = 200 \text{ g}$, jsou zavěšena na vlákně přes kladku podle obrázku obr. 38. Vzdálenost $Z_1Z_2 = 100 \text{ cm}$. Z_3 je ve stejné výši jako Z_1 . V hloubce $163,5 \text{ cm}$ pod Z_1Z_3 je deska stolu.

a) Určete zrychlení, se kterým se bude soustava pohybovat a za jakou dobu t_1 narazí závaží Z_1 na stůl?

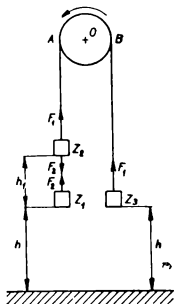
b) Jakou silou F_1 bylo při pohybu namáháno vlákno mezi Z_2Z_3 a jakou silou F_2 mezi Z_1Z_2 ; jakou silou F_3 byla namáhána osa kladky?

c) Za jakou dobu po Z_1 dopadne na stůl závaží Z_2 a jakou rychlostí dopadne?

d) Jakou silou F' bylo při tomto pohybu namáháno vlákno a jakou silou F'' osa kladky?

Tření, hmotu vlákna a kladky a odpor prostředí neuvažujeme.

Výpočty proveďte vždy nejdříve obecně a pak číselně.



Obr. 38

Označení veličin a dané hodnoty: hmoty závaží Z_1 , Z_2 , Z_3 jsou m_1 , m_2 , m_3 a platí $m_1 = m_2 = m_3 = m = 0,2$ kg; tíhové zrychlení $g = 9,81$ ms⁻²; výška závaží Z_1 a Z_2 nad deskou stolu je $h = 1,635$ m; vzdálenost závaží Z_1 a Z_2 je $h_1 = 1$ m; zrychlení soustavy je a ; závaží Z_1 dopadne na stůl za dobu t_1 , závaží Z_2 za dobu t_2 po dopadu závaží Z_1 ; rychlost, kterou dopadne na stůl závaží Z_2 je v .

Řešení: Soustava závaží Z_1 , Z_2 , Z_3 se bude působením zemské přitažlivosti pohybovat směrem svisle dolů na té straně kladky, kde jsou dvě závaží. Budeme uvažovat samo-

statně pohyb na každé straně kladky. Za kladný budeme pokládat ten směr pohybů a sil, ve kterém se příslušná část soustavy pohybuje. Podle obrázku budou mít na levé straně kladky kladný smysl síly a pohyby směřující svisle dolů, na pravé straně kladky síly a pohyby směřující nahoru. Síla napínající nit mezi závažími Z_2, Z_3 má na obou stranách kladky po celé své délce stejnou velikost. Totéž platí i o síle napínající nit mezi závažími Z_1 a Z_2 .

a) Pohyb závaží Z_1 a Z_2 na levé straně kladky působí výslednice tří sil, váhy závaží Z_1 , váhy závaží Z_2 a síly F_1 , která napíná nit mezi Z_2 a Z_3 . Všechny tyto síly mají stejný směr, první dvě mají smysl kladný, třetí záporný. Jejich výslednice má podle zákona o skládání stejnosměrných sil velikost $m_1g + m_2g - F_1$. Poněvadž tato síla je konstantní, uvede obě závaží do pohybu rovnoměrně zrychleného se zrychlením a . Proto platí pro soustavu závaží Z_1, Z_2 pohybová rovnice

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g - F_1. \quad (1)$$

Na pravé straně kladky se pohybuje závaží Z_3 se stejným zrychlením a v kladném smyslu. Tento pohyb je působen výslednicí dvou sil, váhy závaží Z_3 v záporném smyslu a síly F_1 v kladném smyslu. Pro pohyb na pravé straně soustavy platí tedy pohybová rovnice

$$m_3a = F_1 - m_3g. \quad (2)$$

V rovnicích (1) a (2) se vyskytují dvě neznámé veličiny F_1 a a , které vypočítáme řešením této soustavy rovnic. Z rovnice (2) vychází

$$F_1 = m_3(g + a) \quad (2a),$$

a po dosazení do (1) dostaneme:

$$a(m_1 + m_2) + m_3(g + a) = g(m_1 + m_2).$$

Kořenem této rovnice je

$$a = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g.$$

Poněvadž

$$m_1 = m_2 = m_3 = m, \text{ je } a = \frac{g}{3}. \quad (3)$$

Numericky.

$$a = \frac{9,81}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,27 \text{ m/s}^2.$$

Ze zákona dráhy pohybu rovnoměrně zrychleného $h = \frac{1}{2} at_1^2$ vypočítáme t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{6h}{g}} = \sqrt{\frac{6hg}{g}}. \quad (4)$$

Numericky:

$$t_1 = \sqrt{\frac{6 \cdot 1,635}{9,81}} \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{ms}^{-2}}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{9,81}{9,81}} \text{ s} = 1 \text{ s}.$$

Soustava se bude pohybovat se zrychlením $a = \frac{1}{3}g$, číselně $a = 3,27 \text{ m/s}^2$. Závaží Z_1 narazí na stůl za dobu určenou obecně vztahem (4), jež je číselně rovna 1 s.

b) Síla napínající vlákno mezi závažími Z_2 a Z_3 je určena rovnicí (2a), takže

$$F_1 = mg \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} mg. \quad (2b)$$

Numericky:

$$F_1 = \frac{4}{3} \cdot 0,2 \cdot 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}, \quad F_1 = 2,616 \text{ N}.$$

Závaží Z_1 se pohybuje se zrychlením $a = \frac{g}{3}$. Pohyb tohoto závaží působí výslednice dvou sil, váhy závaží Z_1 ve směru kladném a síly napínající nit mezi závažími Z_1 a Z_2 ve směru

záporném. Pro tento pohyb platí pohybová rovnice $m_1 a = m_1 g - F_2$. Z ní vychází

$$F_2 = m_1(g - a) = \frac{2}{3} mg. \quad (5)$$

Numericky:

$$F_2 = \frac{2}{3} \cdot 0,2 \cdot 9,81 \text{ kg m/s}^2 = 1,308 \text{ N}.$$

Při pohybu soustavy působí v bodě A kladky svisle dolů síla F_1 a v bodě B svisle dolů také síla F_1 . Podle zákona o skládání souhlasně rovnoběžných sil bude působíště jejich výslednice v ose O kladky. Tato výslednice bude působit svisle dolů a bude mít velikost

$$F_3 = 2F_1, \quad F_3 = \frac{8}{3} mg. \quad (6)$$

Numericky:

$$F_3 = 5,232 \text{ N}.$$

Při pohybu uvažovaném v odst. a) budou vlákna mezi závažími Z_2 a Z_3 , Z_1 a Z_2 a osa kladky namáhány silami určenými obecně vztahy (2b), (5) a (6); jejich číselné hodnoty jsou 2,616 N, 1,308 N a 5,232 N.

c) Po dopadu závaží Z_1 na desku stolu budou části vlákna na obou stranách kladky stejně zatíženy, a proto se bude soustava pohybovat dále rovnoměrným pohybem rychlostí, kterou získala rovnoměrně zrychleným pohybem do okamžiku, kdy závaží Z_1 dopadlo na stůl. Tato rychlost má hodnotu $v = at_1$. Dosadíme-li sem za a a t_1 z rovnic (3) a (4), dostaneme:

$$v = \frac{\sqrt{6hg}}{3}. \quad (7)$$

Numericky:

$$v = 3,27 \text{ m/s}.$$

Vzdálenost mezi závažími Z_1 a Z_2 uběhne soustava za dobu

$$t_2 = \frac{h_1}{v}.$$

Tedy

$$t_2 = \frac{3h_1}{\sqrt{6hg}} = h_1 \frac{\sqrt{6hg}}{2hg}. \quad (8)$$

Numericky:

$$t_2 = \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 1,635 \cdot 9,81}} \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{m} \cdot \text{ms}^{-2}}}, t_2 = \frac{3}{9,81} \text{ s} \doteq 0,3 \text{ s}.$$

Závaží Z_2 dopadne na stůl rychlostí určenou obecně vztahem (7) za dobu, jejíž hodnota je dána vztahem (8). Číselná hodnota této rychlosti je 3,27 m/s a k dopadu závaží Z_2 dojde za 0,3 s po dopadu závaží Z_1 .

d) Po dopadu závaží Z_1 na stůl budou obě části vlákna po obou stranách kladky namáhány stejně velikými silami $F = G = mg$, neboť zrychlení pohybující se soustavy je nulové. Působíště těchto sil jsou body A a B a obě síly směřují svisle dolů. Podle zákona o skládání souhlasně rovnoběžných sil je působíštěm výslednice těchto sil osa O kladky a velikost výslednice je $F'' = 2F' = 2mg$.

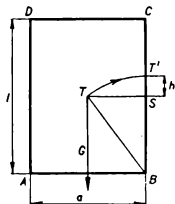
Numericky:

$$F'' = 3,924 \text{ N}.$$

Během rovnoměrného pohybu soustavy bude vlákno mezi závažími Z_2 a Z_3 namáháno silou $F' = mg = 1,962 \text{ N}$ a osa kladky silou $F'' = 2mg = 3,924 \text{ N}$.

2. Těžký cihlový blok má váhu $G = 250 \text{ kp}$. Jeho výška $l = 2 \text{ m}$, šířka $a = 1,5 \text{ m}$. Určete velikost práce A , kterou je třeba vynaložit, aby se blok převálil otočením kolem třetí hrany, jejíž délku neznáme. Výpočet proveďte nejprve obecně a pak číselně. (Obr. 39.)

Označení veličin a dané hodnoty: Váha bloku $G = mg = 250$ kp; tíhové zrychlení $g = 10$ m/s²; hmota bloku je $m = 250$ kg; T a T' jsou polohy těžiště.



Obr. 39

Řešení: Kvádr stojící na podstavě AB má rovnovážnou polohu stálou, protože svislá těžnice protíná podstavu a potenciální energie kváдру $W_1 = mg \cdot \frac{l}{2}$ je v této poloze nejmenší. Otáčíme-li kvádrem kolem hrany zobrazené bodem B , přemísťuje se těžiště kváдру z polohy T po kruhovém oblouku o středu B a poloměru

$$BT = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + l^2}. \quad (1)$$

Těžiště se při tomto pohybu zvyšuje; potenciální energie kváдру se zvětšuje a největší bude, když těžiště přejde do bodu T' . Pak nabude velikosti $W' = mg \cdot BT'$. V této poloze kváдру bude jeho svislá těžnice procházet hranou, znázorněnou na obrázku bodem B . Kvádr bude mít v této poloze rovnováhu vratkou. Aby se tedy blok převálil otočením kolem hrany B , musí se poloha jeho těžiště zvýšit o $ST' = h$. Na toto zvýšení je nutno vynaložit práci

$$A = mgh = \frac{1}{2} mg (\sqrt{a^2 + l^2} - l). \quad (1)$$

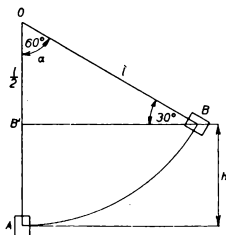
Numericky:

a) V soustavě SI: $A = \frac{250 \cdot 10}{2} (\sqrt{1,5^2 + 2^2} - 2) \text{ kg} \cdot \text{ms}^{-2} \cdot \text{m} = 1\,250 \cdot 0,5 \text{ J} = 625 \text{ J}.$

b) V soustavě technické: $A = \frac{250}{2} \cdot 0,5 \text{ kpm} = 62,5 \text{ kpm}.$

Na převalení bloku je třeba vynaložit práci určenou vztahem (1), jejíž velikost je 625 J.

3. Na pevném vlákně délky $l = 1 \text{ m}$ byla zavěšena nádoba s pískem hmoty $M = 25 \text{ kg}$. Střela hmoty $m = 20 \text{ g}$ letící vodorovně rychlostí v vnikla do nádoby, uvázla v písku a vychýlila nádobu tak, že vlákno svíralo se svislým směrem úhel $\alpha = 60^\circ$ (tzv. balistické kyvadlo). (Obr. 40.)



Obr. 40

a) Jakou rychlost v měla střela?

b) Jakou rychlostí prošla nádoba při zpětném kývavém pohybu rovnovážnou polohou?

Užijte v obou případech zákona o zachování energie. Výpočty proveďte nejprve obecně.

Označení veličin a dané hodnoty: Rychlost nádoby s pískem při průchodu rovnovážnou polohou je v' ; $AB' = h$; tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Řešení: Rovnovážná poloha nádoby s pískem je A . Střela v okamžiku, kdy narazí na nádobu s pískem, má kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2} mv^2$. Když vnikne do písku, přejme nádoba s pískem od střely část této kinetické energie a spolu se střelou se vychyluje z polohy A do polohy B s počáteční rychlostí v' po kruhovém oblouku AB se středem O a poloměrem l . Při tomto pohybu ztrácí kinetickou energii a nabývá energie potenciální. V poloze B se nádoba na okamžik zastaví, ztrácí všechnu energii kinetickou a nabude potenciální energii $W_p = (M + m)gh$.

Působením zemské přitažlivosti se vrací nádoba s pískem po oblouku BA k místu A . Přitom se mění její potenciální energie W_p v energii kinetickou; k úplné přeměně dojde v rovnovážné poloze, ve které má kinetická energie nádoby hodnotu $W'_k = \frac{1}{2} (M + m)v'^2$. Podle zákona o přeměně a zachování mechanické energie jsou energie

$$W_k = W_p = W'_k \quad (1)$$

stejně veliké, zanedbáme-li ztráty energie při překonávání odporu prostředí. Výšku h vypočítáme z pravoúhlého $\triangle OBB'$, jehož úhly při vrcholech O a B mají velikost 60° a 30° . Proto je $\triangle OBB'$ polovinou rovnostranného trojúhelníku o straně

$$OB = l \quad \text{a} \quad OB' = \frac{l}{2},$$

takže

$$h = AB' = \frac{l}{2}. \quad (2)$$

a) Ze vztahu (1) plyne $\frac{1}{2} mv^2 = (M + m)gh$ a

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gh}{m}}.$$

Dosadíme-li za h z rovnice (2), je

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl}{2m}} = \sqrt{\frac{(M + m)gl}{m}}. \quad (3)$$

Numericky:

$$v = \sqrt{\frac{25,02 \cdot 9,81 \cdot 1}{0,02}} \sqrt{\frac{\text{kgms}^{-2} \cdot \text{m}}{\text{kg}}} = 110,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Střela měla rychlost určenou obecně vztahem (3), číselně $110,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Z rovnice (1) plyne $\frac{1}{2}(M + m)v'^2 = (M + m)gh$; po dosazení za h z rovnice (2) vyjde $v' = \sqrt{gl}$.

Numericky:

$$v' = \sqrt{9,81 \cdot 1} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

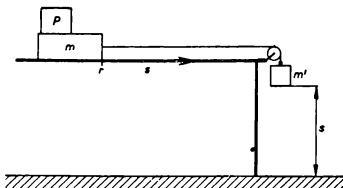
Nádoba prošla při zpětném kývavém pohybu rovnovážnou polohou rychlostí $v' = \sqrt{gl}$, která má číselnou hodnotu $3,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4. Zkoumejte energetické změny při pohybu soustavy dvou těles.

Potřeby: Kladka připevněná na stůl, dřevěný kvádr hmoty $m = 0,544 \text{ kg}$, vlákno, závaží hmoty $m' = 0,2 \text{ kg}$, pomocné těleso P ; stopky, měřítko, milimetrový papír, pravítko, tužka. Velikost hmoty m a m' je na tělesech zaznamenána.

Postup měření:

1. Kvádr hmoty m spojíme podle obr. 41a se závažím hmoty m' vláknem tak dlouhým, aby se kvádr nacházel od hrany stolu dále než je výška stolu. Vláknem vedeme přes kladku připevněnou u hrany stolu. Kvádr posuneme od kladky tak, aby závaží m' bylo co nejvýše nad podlahou. Ryskou r označíme polohu přední hrany dolní podstavy kvádrů. Potom zatížíme kvádr pomocným tělesem P tak, aby soustava kvádr—závaží byla v klidu.



Obr. 41

2. Změříme výšku s_k spodní podstavy závaží nad podlahou.

3. Sejmeme těleso P s kvádrů. Soustava kvádr—kladka—závaží se uvede do pohybu působením zemské přitažlivosti. Stopkami zjistíme čas t_k , který uplyne od počátku pohybu až do okamžiku, kdy závaží dopadne na podlahu.

4. Měření s_k a t_k opakujeme 10krát ($k = 1, 2, 3, \dots, 10$). Kvádr vždy vrátíme k původní rysce. Naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky a najdeme jejich aritmetické průměry

$$s = \frac{1}{10} (s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{10}), \text{ a } t = \frac{1}{10} (t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{10}).$$

Číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Průměr
s (cm)	77,2	76,9	77,1	77,0	76,9	77,1	77,0	76,9	77,0	77,1	77,0
t (s)	1,6	1,6	1,5	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6

Výpočty. a) *Zrychlení pohybu soustavy:* Protože pohyb soustavy je působen stálou silou (váha závaží), předpokládáme, že pohyb soustavy je rovnoměrně zrychlený. Pak platí pro dráhu $s = \frac{1}{2}at^2$, odkud $a = \frac{2s}{t^2}$; číselně $a = 0,601 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \doteq \doteq 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Zrychlení $a = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) *Určení kinetické energie* W_k a W'_k , které měly kvádr a závaží na konci zrychleného pohybu, a *potenciální energie* W'_p kterou mělo závaží m' na počátku pohybu: Pro kinetickou energii, platí:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad W'_k = \frac{1}{2} m' v^2,$$

kde v značí rychlost, kterou má soustava na konci pohybu. Její velikost je $v = at = \frac{2s}{t}$.

Proto

$$W_k = \frac{1}{2} m \frac{4s^2}{t^2} = \frac{2ms^2}{t^2} = 0,25 \text{ J.}$$

Obdobně platí,

$$W'_k = \frac{2m's^2}{t^2} = 0,09 \text{ J.}$$

Potenciální energie závaží m' na počátku pohybu je $W'_p = m'gs$; $W'_p = 1,54 \text{ J}$.

Kvadr hmoty m a závaží hmoty m' měly na konci pohybu kinetické energie $W_k = 0,25 \text{ J}$ a $W'_k = 0,09 \text{ J}$. Na počátku pohybu mělo závaží potenciální energii $W'_p = 1,54 \text{ J}$;

c) *síly* F , která během pohybu působila na kvadr hmoty m : hledanou velikost síly určíme podle vzorce $F = ma$. Dosadíme-li za a hodnotu určenou v odstavci a), je $F = \frac{2ms}{t^2} = 0,33 \text{ N}$. Síla udílející kvádru zrychlení $a = 0,6 \text{ ms}^{-2}$ má hodnotu $0,33 \text{ N}$;

d) *práci* A vykonanou silou F během doby t : ze vzorce pro velikost práce vychází $A = Fs = \frac{2ms^2}{t^2} = 0,25 \text{ J}$.

e) Porovnáme-li obecné výsledky odstavce b) a d), zjistíme, že $W_k = A$. Práce, kterou vykonala síla působící na kvadr během jeho pohybu, je rovna kinetické energii kvádru při ukončení jeho pohybu. Výsledky pokusu potvrzují, že práce vykonaná silou při pohybu tělesa se rovná energii, kterou těleso působením té síly získalo.

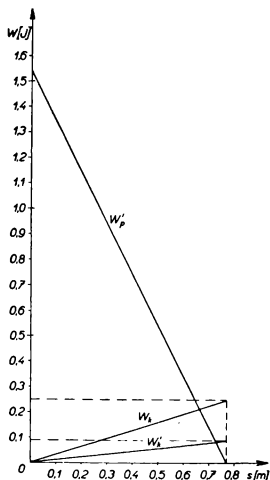
Sestrojení grafů: (obr. 41b) sestrojíme grafy závislosti na proběhnuté dráze:

α) úbytku potenciální energie W'_p : Rovnice této závislosti zní $W'_p = m'gs$. Poněvadž $m'g$ má konstantní hodnotu, je graf této závislosti úsečka. Její průběh je určen krajními body. Než se závaží m' uvedlo do pohybu, mělo uběhnutou dráhu s rovnou nule a jeho potenciální energie měla hodnotu $1,54 \text{ J}$. Jeden krajní bod grafu je tedy určen souřadnicemi $s = 0$, $W'_p = 1,54 \text{ J}$.

V okamžiku, kdy závaží dopadlo na podlahu, vykonalo dráhu $s = 0,77 \text{ m}$ a jeho potenciální energie W'_p se rovnala nule. Druhý krajní bod grafů je tedy určen souřadnicemi $s = 0,77 \text{ m}$, $W'_p = 0$. Úsečka spojující tyto dva body je grafem znázorňujícím úbytek potenciální energie závaží;

β) přírůstku kinetické energie W'_k závaží: Abychom mohli znázornit grafem rovnicí $W'_k = \frac{2m's^2}{t^2}$, musíme z ní vy-

loučit proměnlivý čas t . Z rovnice $a = \frac{2s}{t^2}$ = určíme $t^2 = \frac{2s}{a}$ a po dosazení do předcházející rovnice dostaneme $W'_k = \frac{2m's^2a}{2s} = m'as$. Protože a i m' jsou konstanty, je i v tomto případě grafem úsečka. V nejvyšší poloze závaží je jeho dráha $s = 0$ a také kinetická energie $W'_k = 0$. Při dopadu



Obr. 41b

na stůl má dráha vykonaná závažím velikost $s = 0,77$ m a jeho kinetická energie má hodnotu $W'_k = 0,09$ J. Tyto čtyři hodnoty určují souřadnice obou krajních bodů grafu.

Úsečka, která je grafem závislosti přírůstku kinetické energie závaží hmoty m' na proběhnuté dráze, má krajní body o souřadnicích $s_1 = 0$, $W'_{k1} = 0$ a $s_2 = 0,77$ m, $W'_{k2} = 0,09$ J.

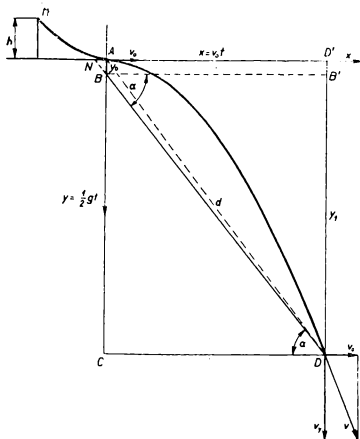
γ) Obdobně jako v případě β zjistíme, že grafem, znázorňujícím závislost přírůstku kinetické energie kvádrů na proběhnuté dráze, je úsečka, která vyhovuje rovnici $W_k = mas$, s krajními body o souřadnicích

$$s_1 = 0, W_{k1} = 0 \text{ a } s_2 = 0,77 \text{ m, } W_{k2} = 0,25 \text{ J.}$$

Graf je v souladu se zákonem o přeměně a zachování mechanické energie. Je z něho patrné, že padá-li závaží, roste kinetická energie závaží i kvádrů a zároveň se zmenšuje potenciální energie závaží, což svědčí o přeměně energie potenciální v kinetickou. V nejvyšší poloze, kdy má závaží největší potenciální energii, je kinetická energie soustavy nulová a naopak, v nejnižší poloze závaží má soustava jen energii kinetickou. Podle zákona o zachování energie by měl mít součet kinetických energií závaží a kvádrů při dopadu stejnou hodnotu, jakou má potenciální energie závaží v nejvyšší poloze. Tato podmínka splněna není: $W_k + W'_k < W'_p$. Je to způsobeno tím, že se část potenciální energie závaží spotřebovává při jeho pádu na překonávání síly tření kvádrů o podložku a ostatních překážek pohybu: Práce spotřebovaná na překonávání jmenovaných odporů pohybu má velikost $A' = W'_p - W'_k - W_k$, číselně $A' = 1,54 \text{ J} - 0,09 \text{ J} - 0,25 \text{ J} = 1,2 \text{ J}$.

10. Úlohy třetího kola soutěže v kategorii A a jejich řešení

1. Cvičný lyžařský můstek má místo startu nájezdové dráhy o h výše než leží vodorovný odrazový stůl. Doskočištěm je rovina skloněná v úhlu α (od vodorovné roviny). Bod dopadové roviny ležící přímo pod hranou odrazového stolu má od ní vzdálenost y_0 . Zvolte za počátek souřadnic bod ležící na hraně stolu, osu x zvolte vodorovně a osu $+y$ svisle dolů — obr. 42. Stanovte při zanedbání tření a odporu prostředí obecně:



Obr. 42

- a) velikost rychlosti (v_0) lyžaře na odrazovém stole;
- b) souřadnice (x, y) místa dopadu;
- c) dobu (t) letu lyžaře ve vzduchu.

Všechny tyto veličiny určete nejdříve obecně a potom numericky pro $y_0 = 2,7$ m, $h = 8,1$ m. Úhel sklonu je určen vztahem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{61}{48}$; $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$.

Kromě toho určete (pouze numericky) délku skoku (d), tj. vzdálenost místa dopadu od hrany stolu a velikost rychlosti (v) lyžaře v místě dopadu.

Označení veličin a dané hodnoty: M je místo startu lyžaře; v místě A (hrana odrazového stolu) opouští lyžař odrazový stůl; počátek soustavy souřadnic volíme v místě A ; D je bod dopadu lyžaře na dopadovou rovinu; x, y jsou jeho souřadnice; y_1 udává, oč níže je místo dopadu lyžaře než bod B ; $d = AD$ je délka skoku; hmota lyžaře je m .

Řešení: a) Lyžař startuje v místě M a rozjíždí se po dráze MA . Jeho rychlost v místě A se určí ze zákona o přeměně a zachování energie. V místě M má vzhledem k místu A polohovou energii mgh , v místě A kinetickou energii $\frac{1}{2}mv_0^2$.

Zanedbáme-li tření a odpor prostředí, pak $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$; odtud

$$v_0 = \sqrt{2hg}. \quad (1)$$

Numericky:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 8,1 \cdot 9,8} \sqrt{\text{m} \cdot \text{ms}^{-2}} = 12,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Lyžař má v místě A na odrazovém stole rychlost danou obecně vztahem (1), číselně 12,6 m/s.

b) Protože v_0 má v místě A vodorovný směr, pohyboval by se lyžař dále setrvačností ve vodorovném směru rychlostí v_0

a za dobu letu t by vykonal v tomto směru dráhu

$$x = AD' = v_0 t. \quad (2a)$$

Zároveň však padá volným pádem a vykonal by v tomto směru v kladném smyslu dráhu

$$AC = y = y_0 + y_1 = \frac{1}{2} g t^2. \quad (2b)$$

Vyloučením času z rovnic (2a) a (2b) dostaneme vztah

$$y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2};$$

po dosazení za v_0 z rovnice (1):

$$y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{2hg} = \frac{1}{4h} x^2. \quad (2)$$

Souřadnice bodu D splňují rovnici paraboly.

Dráha lyžaře mezi bodem odrazu a dopadem na dopadovou rovinu je parabolická.

Protože $BB' \parallel ND'$, platí $\sphericalangle AND = \sphericalangle B'BD$. Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle BDB'$ určíme $y_1 = BB' \cdot \operatorname{tg} \alpha$, tedy

$$y - y_0 = x \operatorname{tg} \alpha, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha + y_0. \quad (3)$$

Dosadíme-li do této rovnice za y hodnotu z (2), dostaneme rovnici, jejímž kořenem je hledané x :

$$\frac{1}{4h} x^2 - x \operatorname{tg} \alpha - y_0 = 0,$$

odtud

$$x^2 - 4hx \operatorname{tg} \alpha - 4hy_0 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$x_{1,2} = 2h \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{4h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + 4hy_0}.$$

Fyzikální význam má jen nezáporný kořen x . Poněvadž $4h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 4hy_0 > 4h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, nemá kořen x_2 fyzikální vý-

znam. Proto platí

$$x = 2(h \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + h y_0}). \quad (4)$$

Dosadíme-li do rovnice (3) za x hodnotu ze vztahu (4), dostaneme

$$y = 2 \operatorname{tg} \alpha (h \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + h y_0}) + y_0. \quad (5)$$

Numericky:

$$x = 2 \cdot \left(8,1 \cdot \frac{61}{48} + \sqrt{\left(\frac{8,1 \cdot 61}{48} + 8,1 \cdot 2,7 \right)} \right) \text{ m},$$

po výpočtu vyjde

$$x = 43,2 \text{ m}; \quad y = \left(43,2 \cdot \frac{61}{48} + 2,7 \right) \text{ m} = 57,6 \text{ m}.$$

Souřadnice místa dopadu lyžaře ve zvolené soustavě jsou x a y , které jsou určeny vztahem (4) a (5). Jejich číselné hodnoty jsou 43,2 m a 57,6 m.

c) Doba letu lyžaře určíme ze vztahu (2a). Z něho plyne

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0} = \frac{2(h \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + h y_0})}{\sqrt{2hg}}, \\ t &= \frac{\sqrt{2hg} (h \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + h y_0})}{hg} \end{aligned} \quad (6)$$

Numericky:

$$t = \frac{43,2}{12,6} \text{ s} = 3 \frac{3}{7} \text{ s}.$$

Doba letu lyžaře ve vzduchu je určena obecně rovnicí (6), číselně je $3 \frac{3}{7}$ s.

d) Délku skoku určíme podle Pythagorovy věty:

$$AD = d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7)$$

Numericky:

$$d = \sqrt{43,2^2 + 57,6^2} \text{ m} = 72 \text{ m}.$$

Rychlost lyžaře při dopadu se určí ze zákona o zachování energie. V bodě M má lyžař potenciální energii velikosti $mg(y + h)$ vzhledem k bodu D , v místě D má kinetickou energii $\frac{1}{2}mv^2$. Ze zákona o zachování energie plyne, že

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y + h), \text{ takže } v = \sqrt{2g(y + h)}. \quad (8)$$

Numericky:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot (57,6 + 8,1)} \cdot \sqrt{\text{ms}^{-2}} \doteq 35,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Lyžař měl skok dlouhý 72 m a dopadl rychlostí 35,8 m/s na dopadovou rovinu.

2. Bodový zdroj světla je ve vzdálenosti l od stínítka. Do jaké vzdálenosti je třeba umístit spojnou čočku o průměru d a ohniskové vzdálenosti f , aby se na stínítku vytvořil světlý kroužek o průměru d_1 . Výpočty proveďte obecně a potom numericky pro hodnoty: $l = 95 \text{ cm}$, $f = 16 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$, $d_1 = 2,5 \text{ cm}$. Řešení objasněte náčrtem. Obr. 43a, b.

Označení veličin a dané hodnoty: AB je optická osa čočky; zdroj světla je v bodě A ; PQ je stínítko; vzdálenost zdroje od čočky je $AC = a$, vzdálenost bodu B od čočky je b .

Řešení: a) Trojúhelníky $\triangle MNB$ a $\triangle PQB$ jsou stejno-
lehlé, středem stejnolehlosti je bod B , poměr stejnolehlosti
 $k = \frac{d_1}{d}$. Proto platí (obr. 43a)

$$\frac{SB}{CB} = \frac{d_1}{d},$$

tedy

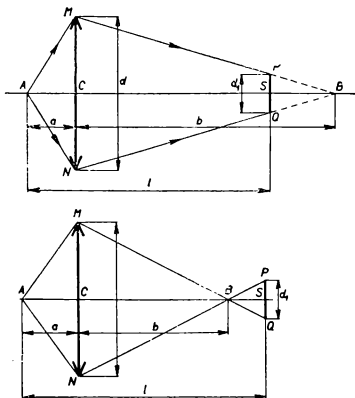
$$(AC + CB - AS):CB = d_1:d, \quad (a + b - l):b = d_1:d. \quad (1)$$

Podle čočkové rovnice zároveň platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

Soustava rovnic (1) a (2) obsahuje dvě neznámé a , b . Z rovnice (1) dostaneme $b(d - d_1) = d(l - a)$, z toho dále

$$b = \frac{d(l-a)}{d-d_1}.$$



Obr. 43

Z rovnice (2) vychází

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{f}, \text{ dále } b = \frac{af}{a-f}.$$

Z posledních dvou rovnic plyne:

$$\frac{d(l-a)}{d-d_1} = \frac{af}{a-f}, \text{ dále } adl - a^2d - fdl + fad = fad - fd_1a.$$

Po úpravě obdržíme

$$da^2 - (dl + fd_1)a + fdl = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$a_{1,2} = \frac{dl + fd_1 \pm \sqrt{(dl + fd_1)^2 - 4d^2fl}}{2d}. \quad (3)$$

Numericky:

$$a_{1,2} = \frac{0,095 + 0,004 \pm \sqrt{0,099^2 - 0,04 \cdot 0,152}}{0,2} \frac{\text{m}^2}{\text{m}},$$

$$a_1 = 0,80 \text{ m}, a_2 = 0,19 \text{ m}.$$

b) Obdobnou úvahou jako v a) dostaneme (obr. 43b) ze stejnohlých trojúhelníků $\triangle MNB$ a $\triangle PQB$ vztah $SB : CB = d_1 : d$.

$$(l - a - b) : b = d_1 : d. \quad (4)$$

Po úpravě $bd_1 = dl - da - db$, odtud $b = \frac{d(l-a)}{d+d_1}$.

Z čóčkové rovnice vychází jako v a) $b = \frac{af}{a-f}$. Z rovnosti levých stran obou těchto rovnic vyplývá:

$$\frac{d(l-a)}{d+d_1} = \frac{af}{a-f},$$

odtud určíme a :

$$adl - a^2d - fdl + afd = afd + afd_1,$$

po úpravě

$$da^2 - (dl - fd_1)a + fdl = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$a_{3,4} = \frac{dl - fd_1 \pm \sqrt{(dl - fd_1)^2 - 4d^2fl}}{2d}. \quad (5)$$

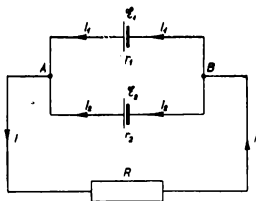
Numericky:

$$a_{3,4} = \frac{0,091 \pm \sqrt{0,008\,281 - 0,006\,080}}{0,2} \frac{\text{m}^2}{\text{m}}$$

$$a_3 = 0,69 \text{ m}, \quad a_4 = 0,22 \text{ m}.$$

Aby se vyhovělo dané úloze, je možno umístit bodový zdroj světla před čočku ve vzdálenosti určené obecně vztahy (3) a (5). Číselně jsou tyto vzdálenosti rovny 0,80 m, 0,19 m, 0,69 m a 0,22 m.

3. Dva galvanické články, které mají různá elektromotorická napětí E_1 , E_2 a různý vnitřní odpor r_1 , r_2 , jsou zařazeny paralelně do obvodu, v jehož hlavním vedení je odpor R (obr. 44). Určete: a) velikost proudů (I_1 , I_2) v obou větvích i v hlavním vedení (I);



Obr. 44

b) velikost proudu ve větvích při zkratu;

c) elektromotorické napětí E a vnitřní odpor r zdroje, ekvivalentního (rovnocenného) dané baterii. Určete, jak

veliké je E ve speciálních případech, kdy 1. $E_1 = E_2$;
2. $r_1 = r_2$.

Řešení: Při řešení úlohy uijeme obou Kirchhoffových zákonů.

1. První Kirchhoffův zákon (uzlové pravidlo): Součet všech proudů sbíhajících se v uzlu je roven nule. Proudům vstupujícím do uzlu přisuzujeme kladné znaménko, proudy vystupující z uzlu označujeme záporně. Uzlem rozumíme každý bod uzavřeného obvodu, kde se stýká více vodičů než dva.

2. Druhý Kirchhoffův zákon (smyčkové pravidlo): Každý jednoduchý uzavřený obvod nazýváme smyčkou. Ve smyčce si volíme libovolně směr proudu, nezáleží na tom, zda správně či nesprávně a postupujeme po celé délce smyčky v kterémkoliv směru od libovolného bodu A , až dojdeme znovu do bodu A . Pak součet úbytků napětí RI na všech vnějších i vnitřních odporech, jimiž procházíme, je roven součtu elektromotorických napětí (sil) ve smyčce zařazených. Úbytkům napětí na odporech přisuzujeme znaménko kladné nebo záporné podle toho, zda směr našeho postupu po smyčce souhlasí se zvoleným směrem proudu nebo je opačný. Elektromotorické napětí označujeme kladně nebo záporně podle toho, postupujeme-li zdrojem od záporného pólu ke kladnému, či naopak. Souhlasí-li skutečný směr proudu se zvoleným, vyjde pro velikost proudu hodnota kladná. Je-li skutečný směr proudu opačný než zvolený, vyjde proud záporně.

a) Máme určit tři neznámé veličiny: I_1 , I_2 , I . K tomu potřebujeme tři rovnice. Jednu získáme z uzlového pravidla. V naší úloze jsou dva uzly, A , B . Uzlové pravidlo je pro oba uzly stejné:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Abychom získali další dvě rovnice, aplikujeme smyčkové pravidlo pro dvě ze tří smyček $ARBE_1A$, AE_2BE_1A ,

$ARBE_2A$. Pro první smyčku platí

$$RI + r_1 I_1 = E_1. \quad (2)$$

Pro druhou

$$-r_2 I_2 + r_1 I_1 = -E_2 + E_1. \quad (3)$$

Z rovnic (1), (2), (3) vypočítáme hledané neznámé. Z rovnice (1) dosadíme za I do rovnice (2) vyjde $RI_1 + RI_2 + r_1 I_1 = E_1$ a odtud

$$I_2 = \frac{E_1 - I_1(R + r_1)}{R}. \quad (2a)$$

Z rovnice (3) dostaneme

$$r_1 I_1 - \frac{E_1 r_2 + R r_2 I_1 + r_1 r_2 r I_1}{R} = E_1 - E_2,$$

neboli $I_1(r_1 R + r_2 R + r_1 r_2) = E_1(R + r_2) - E_2 R,$

$$I_1 = \frac{E_1(R + r_2) - E_2 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \quad (4)$$

Velikost proudu I_2 vypočítáme, dosadíme-li za I_1 ze (4) do vztahu (2a):

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{R} \left[E_1 - (R + r_1) \frac{E_1(R + r_2) - E_2 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \right] = \\ &= \frac{1}{R} \frac{R E_2(R + r_1) - E_1 R^2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{E_2(R + r_1) - E_1 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Z rovnice (1) vychází:

$$I = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \quad (6)$$

Velikost proudu v obou větvích a v hlavním vedení jsou určeny výrazy (4), (5), (6).

b) Velikost proudů I_1' , I_2' a I' ve větvích a v hlavním vedení při zkratu vypočítáme z výrazu (4), (5), (6), položíme-li $R = 0$.

Vyjdou hodnoty:

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1},$$

$$I_2' = \frac{E_2}{r_2}, \quad I' = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}.$$

c) Zdroj, který je ekvivalentní dané baterii, musí dávat obvodu s vnějším odporem R proud I , jehož velikost je určena výrazem (6). Vnitřní odpor r tohoto zdroje musí mít právě takovou velikost jako odpor baterie. Označíme-li elektromotorické napětí tohoto zdroje E , platí podle rovnice (1)

$$\frac{E}{r} = \frac{E}{r_1} + \frac{E}{r_2},$$

čili

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2};$$

tedy

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (7)$$

Ze smyčkového pravidla potom plyne:

$$E = rI + RI = (r + R) \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} =$$

$$= \frac{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2} \cdot \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}. \quad (8)$$

1. Jestliže $E_1 = E_2$, pak

$$E = \frac{E_1(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2} = E_1, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

2. Jestliže $r_1 = r_2$, pak

$$r = \frac{r_1^2}{2r_1} = \frac{r_1}{2}, \quad E = \frac{r_1(E_1 + E_2)}{2r_1}, \quad E = \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

Zdroj ekvivalentní dané baterii musí mít elektromotorické napětí a vnitřní odpor, jejichž velikosti jsou dány výrazy (7) a (8). Kdyby měly oba články baterie stejné napětí $E_1 = E_2$, pak by zdroj ekvivalentní dané baterii musel mít odpor

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

a napětí $E = E_1 = E_2$. Kdyby oba články měly stejný odpor $r_1 = r_2$, pak by ekvivalentní zdroj musel mít odpor

$$r = \frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{2} \text{ a napětí } E = \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

4. Změřte elektromotorické napětí (sílu) daného článku kompenzační metodou.

Postup:

1. Nakreslete schéma zapojení.
2. Provedte příslušné zapojení.
3. Změřte elektromotorické napětí daného článku kompenzační metodou. Za elektromotorické napětí Westonova článku použijte hodnoty $E_n = 1,018\ 64\ \text{V}$.

Při měření použijte znalostí ze studijních textů pro 1. kolo kategorie A.

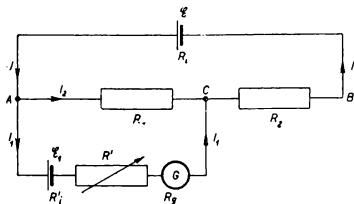
Měřicí potřeby: dva kolíčkové reostaty (1 až 500 Ω), válcový reostat (150 Ω), akumulátor (2 V) jako pomocný zdroj, měřený článek, Westonův normální článek; citlivý galvanometr (miliampérmetr).

Postup měření:

1. Sestavíme obvod podle obr. 45. E značí pomocný zdroj elektromotorického napětí většího než je elektromotorické napětí E_1 měřeného článku; R_1 , R_2 jsou kolíčkové reostaty, G galvanometr; R' je ochranný válcový reostat, který chrání galvanometr před poškozením. Zpočátku zařadíme do obvodu největší odpor $R' = 150\ \Omega$. Odporů R_1 a R_2 zařazujeme

libovolně, ale součet $R_1 + R_2$ zachováváme stálý, v našem případě $R_1 + R_2 = 250 \, \Omega$. Obvod necháme otevřený, dokud dozírající učitel spojení neschválí.

2. Uzavřeme obvod a měníme systematicky poměr odporů R_1 a R_2 tak dlouho, až galvanometr ukáže neznatelnou výchylku. Abychom zvětšili přesnost měření, zmenšíme R'



Obr. 45

a znovu měníme odpory R_1 , R_2 , až galvanometr ukáže neznatelnou výchylku. Tímto způsobem pokračujeme tak dlouho, až z obvodu vyřadíme celý odpor R' , takže $R' = 0$. Změnou odporů R_1 a R_2 dosáhneme toho, že ani nyní galvanometr neukazuje výchylku. Vzhledem k tomu, že galvanometr je velmi citlivý a že $R' = 0$, můžeme již předpokládat, že proud I_1 , procházející galvanometrem, je roven nule, tedy $I_1 = 0$. Za tohoto stavu změříme velikost odporu R_1 a zapíšeme jeho hodnotu do prvního řádku tabulky. Měření opakujeme pětkrát, takže získáme pět hodnot pro R_1 málo od sebe odlišných. Za R_1 považujeme jejich aritmetický průměr. Potom vypneme oba zdroje z obvodu.

Body A a C obvodu jsou uzly. Do uzlu A přitéká proud I ze zdroje E a odtéká z něho proud I_1 ke zdroji E_1 a proud I_2 k reostatu o odporu R_1 . Podle prvního Kirchhoffova

zákona (uzlového pravidla) platí $I = I_1 + I_2$ a za stavu, kdy

$$I_1 = 0, \text{ je } I_2 = I. \quad (1)$$

Podle zákona o sériovém zařazení odporů platí pro část obvodu (smyčku) AR_1R_2BEA : $E = I(R_1 + R_2 + R_i)$, kde R_i je vnitřní odpor pomocného zdroje. Z této rovnice dostaneme

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_i}. \quad (2)$$

Pro smyčku $AER'GCA$ platí podle druhého Kirchhoffova zákona (smyčkového pravidla) $E_1 = R_1I_2 - I_1(R_g + R_i')$, kde R_g značí odpor galvanometru a R_i' vnitřní odpor měřného článku neznámého elektromotorického napětí (síly) E_1 . Poněvadž $I_1 = 0$ a $I_2 = I$, platí $E_1 = R_1 \cdot I$.

Po dosazení za I z rovnice (2) vyjde:

$$E_1 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_i} R_1. \quad (3)$$

3. Abychom ze vztahu (3) vyřadili neznámé elektromotorické napětí (sílu) E , provedeme ještě další měření. Do obvodu zařadíme znovu pomocný zdroj E na původní místo; místo měřného článku zařadíme nyní Westonův normální článek. Ostatní zapojení uvedeme do stavu, ve kterém bylo před začátkem prvního měření.

4. Opakujeme znovu měření podle pokynů uvedených v odstavci 1 a 2 a naměřené hodnoty odporů na reostatu R_1 zapíšeme do tabulky do řádku druhého a vypočítáme jejich aritmetický průměr R_1' . Pro toto měření platí podle upraveného vztahu (3) rovnice:

$$E_n = R_1' \frac{E}{R_1' + R_2' + R_i'},$$

kde E_n značí elektromotorické napětí normálního Westonova článku a R_2' odpor na reostatu R_2 . Poněvadž jsme během všech měření udržovali stálý součet $R_1 + R_2 = R_1' + R_2' =$

= 250 Ω , upraví se předcházející rovnice na novou:

$$E_n = R'_1 \frac{E}{R_1 + R_2 + R_1}. \quad (4)$$

Číslo měření	1	2	3	4	5	Průměr
$R_1(\Omega)$	91,91	91,87	91,92	91,91	91,89	91,90
$R'_1(\Omega)$	71,55	71,49	71,53	71,54	71,56	71,53

5. Dělením vztahu (3) vztahem (4) určíme $\frac{E_1}{E_n} = \frac{R_1}{R'_1}$,

$$\text{tedy } E_1 = \frac{R_1}{R'_1} E_n.$$

Elektromotorické napětí Westonova normálního článku je závislé jen na teplotě. Protože je známa rovnice této závislosti a je také známé elektromotorické napětí tohoto článku při teplotě 0 °C, dá se určit elektromotorické napětí Westonova článku při každé teplotě. Jeho hodnotu nám udal pro teplotu, při které jsme konali měření, dozírající učitel ($E_n = 1,018\,64\text{ V}$).

Dosadíme-li do vzorce (5) známou hodnotu E_n a naměřené hodnoty R_1 a R'_1 , vyjde pro napětí měřeného zdroje hodnota

$$E_1 = \frac{91,90}{71,53} \cdot 1,018\,64\text{ V} = 1,308\,7\text{ V}.$$

Měřením bylo zjištěno elektromotorické napětí měřeného článku $E_1 = 1,308\,7\text{ V}$.

Zhodnocení: Protože výpočet E_1 je prováděn pomocí měření, při kterých neprochází větví s měřeným zdrojem a normálním článkem proud, je E_1 elektromotorické napětí zdroje a nikoliv jeho svorkové napětí.

II. Úlohy prvního kola soutěže kategorie D

1. a) Rychlík se pohybuje rychlostí 80 km/hod. Určete jeho rychlost v m/s.
b) Hustota železa je 7,7 g/cm³. Vyjádřete ji v kg/m³.
c) Rychlost je definována jako dráha vykonaná za jednotku času; proto její jednotka je např. m/s. Obdobně napište jednotku pro měrné teplo, které je definováno jako množství tepla, kterého je třeba, aby se 1 g látky ohřál o 1 °C.
2. Dokonale hladká koule byla vržena po vodorovné ledové ploše rychlostí 3,0 m/s z bodu *A* do bodu *B*, přičemž $AB = d = 15$ m. Z bodu *C* byla vržena za 2 s po začátku pohybu první koule druhá koule. Bod *C* je od bodu *B* vzdálen 10 m. Jakou rychlostí je třeba vrhnout druhou kouli, aby se s první koulí setkala v bodě *B*, je-li bod *C*
a) mezi body *A* a *B*,
b) na kolmici k dráze *AB* vztyčené v bodě *B*.
3. Za jakou dobu vyjede cyklista vážící 70 kp po přímé silnici 1 000 m dlouhé na vrchol kopce vysokého 40 m, jestliže jeho výkon je 7,0 kpm/s?
4. Na dvojzvrtné páce jsou zavěšena dvě plná závaží tak, že je rovnováha. Potom je pod každé závaží postavena nádoba, do níž se budou nalévat kapaliny tak, aby se v nich tělesa úplně ponořila. Usudte a zdůvodněte, co se stane v těchto případech:
a) Obě závaží jsou stejně těžká a jsou z různého materiálu (tzn. jejich hustoty jsou různé). Do obou nádob je nalita táž kapalina.
b) Závaží jsou různě těžká a jsou z téhož materiálu. Do obou nádob je nalita táž kapalina.
c) Obě závaží jsou stejně těžká a jsou z různého materiálu. Do nádob byly nality dvě různé kapaliny a rovnováha se neporušila. Co můžeme říci o jejich hustotách?

5. Kolik tepla se musí dodat 5,0 kg ledu teploty $-4,0\text{ }^{\circ}\text{C}$, aby se proměnil ve vodu $10,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ teplou? Měrné teplo ledu je $0,50\text{ kcal/kg} \cdot \text{deg}$, měrné teplo vody je $1,0\text{ kcal/kg} \cdot \text{deg}$ a skupenské teplo tání ledu je 80 kcal/kg .
6. Žárovka na 120 V svítila s plným výkonem při průchodu proudu 0,50 A. Jak velký odpor musíme jí předřadit při zapojení na napětí 220 V, aby opět svítila s plným výkonem?
7. Dvě rovinná zrcadla svírají úhel 90° . Mezi nimi je bodový předmět ve vzdálenosti 3,0 m od průsečnice zrcadel a 1,0 m od prvního zrcadla; pozorovatel je ve vzdálenosti 4,0 m od průsečnice a ve vzdálenosti 3,5 m od prvního zrcadla.
- a) Kolik obrazů předmětu vidí pozorovatel?
- b) Narýsujte chod paprsků, které přicházejí z předmětu do oka pozorovatele.
8. Plamen svíčky je zobrazen spojnou čočkou o ohniskové vzdálenosti $f = 5,0\text{ cm}$, která je od plamene ve vzdálenosti 15 cm. Za čočkou je duté zrcadlo o ohniskové vzdálenosti $F = 6\text{ cm}$ a s ohniskem v obrazovém ohnisku spojky. Narýsujte obraz plamene ve vhodně zvoleném měřítku.
9. Určete odpor žárovky přímou metodou. Měření proveďte pro pět různě velkých proudů jdoucích žárovkou. Nakreslete spojení a popište postup měření. Měření zapište do tabulky.

VLADIMÍR RUDOLF,
JAN TESAŘ

**Třetí
ročník
FYZIKÁLNÍ
OLYMPIÁDY**

Obálku navrhl Jiří Ledvina

Obrázky narýsoval inž. Jaromír Černohorský

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou publikaci č. 36-0-16

Odpovědná redaktorka: Božena Malá

Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk

Technický redaktor: Jiří Krejsa

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody,
n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 1 — Formát papíru 70 × 100 cm
— AA 7,50 — VA 7,83 — D-06*30489

Náklad 2800 výtisků

Tematická skupina a podskupina 02/57

Vydání 1.

Cena brožovaného výtisku Kčs 5,—

63/II-13

14—908—63 Kčs 5,—